Ευστρατιου Φρειδερικη-Μαρια 1112201900049
Εργασια Γεωμετρικη Αναλυση

## Θεωρημα Αντιστροφη Απεικονισης.

<u>Θεωρημα 4.1.6.1</u>

Εστω (i) $U \subseteq \mathbb{R}^n$

(ii) $f \in C(U; \mathbb{R}^n)$ τω α' η $f$ ειναι διαφορισιμη

β' $J_f > 0$

γ' η $f$ να ειναι 1-1

ΤΟΤΕ 1. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

2. $f^{-1} \in C(f(U); \mathbb{R}^n)$

<u>Αποδειξη</u>

1. Εστω $a \in f(U)$ θα δειξουμε οτι υπαρχει ανοιχτη μπαλα $B(a,\delta)$ για το $a$.
Αρχικα διαλεγουμε ενα ορθογωνιο $\Phi$ μεσα στο $U$ τετοιο ωστε να περιεχει στο εσωτερικο του το σημειο $b = f^{-1}(a)$ του $U$. Το συνολο $\partial\Phi$ ειναι συμπαγες (ως κλειστο και φραγμενο) αρα και το $f(\partial\Phi)$ ειναι συμπαγες και αρα ειναι κλειστο και φραγμενο στον $\mathbb{R}^n$. Επειδη η $f$ ειναι 1-1 το $f(\partial\Phi)$ ειναι ξενο απο το $a$, αφου το $f(\partial\Phi)$ ειναι κλειστο, διαλεγουμε $\delta > 0$ ωστε η μπαλα $B(a,2\delta)$ ειναι ξενη με το $f(\partial\Phi)$. Εστω $c \in B(a,\delta)$ αρκει να δειξουμε οτι $c = f(x)$ για καποιο $x \in \Phi$ αφου μετα ειναι αμεσο οτι το $f(U)$ περιεχει καθε σημειο του $B(a,\delta)$

Εστω $c \in B(a,\delta)$ θεωρουμε την πραγματικη συναρτηση $\varphi(x) = \|f(x) - c\|^2$ η οποια ειναι διαφορισιμη. Επειδη το $\Phi$ ειναι πυκνο, αυτη η συναρτηση ~~εχ~~ παιρνει ελαχιστη τιμη στο $\Phi$, εστω οτι αυτη η ελαχιστη τιμη πετυχανεται σε ενα σημειο $x$ του $\Phi$. Θα δειξουμε οτι $f(x) = c$

Εχουμε $\varphi(a) = \|f(a) - c\|^2 = \|b - c\|^2 < \delta^2$

αρα η ελαχιστη τιμη της $\varphi$ στο $\Phi$ πρεπει να ειναι μικροτερη απο $\delta^2 \Rightarrow$ η ελαχιστη τιμη της $\varphi$ δεν επιτυγχανετε στο $\partial\Phi$, αφου αν $x \in \partial\Phi$ το $f(x)$ βρισκεται εξω απο την μπαλα $B(a,2\delta)$, αρα $\|f(x) - c\| \geq \delta$.

Καταληγουμε οτι η ελαχιστη τιμη της $\varphi$ ειναι σε ενα $x$ στο $\Phi^\circ$

Επειδη $x \in \Phi^\circ$ ισχυει οτι $J\varphi(x) = 0$ ομως $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} (f_k(x) - c_k)^2$

ισχυει $J_j \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(f_k(x) - c_k) J_j f_k(x)$. Συνεπαγεται οτι

$2[(f_1(x) - c_1) \ldots (f_n(x) - c_n)] \cdot J_f(x) = 0$ ομως $J_f > 0$

Καταληγουμε οτι $f(x) - c = 0$ που ειναι το ζητουμενο.

2. Αφου η $f: U \to \mathbb{R}^n$ ειναι 1-1 εστω $f^{-1}: f(U) \to U$ θα δειξουμε οτι η $f^{-1}$ ειναι συνεχης. Ισοδυναμα οτι για καθε ανοιχτο συνολο $A$ του $U$ το συνολο $V = (f^{-1})^{-1}(A)$ ειναι ανοιχτο στο $f(U)$ ομως $V = f(A)$ και απο το 1. εφαρμοσμενο για το συνολο $A$ του $U$ που ειναι ανοιχτο εκει αρα και στο $\mathbb{R}^n$ εχουμε οτι το $V$ ειναι ανοιχτο στο $\mathbb{R}^n$ αρα και στο $f(U)$

Προταση 4.1.6.1

Εστω i. $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$

ii. $f \in C(U; \mathbb{R}^n)$ τετοιο ωστε α. η $f$ ειναι διαφορισιμη στο $x_0$

β. $Jf|_{x_0}(x_0)$

Τοτε υπαρχει 1. $a > 0$

2. $U_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$

τετοιο ωστε $|f(x) - f(x_0)| \geq a|x - x_0| \ \forall x \in U_0$

Αποδειξη

Θετουμε $a = \frac{1}{2} \|(f'(x))^{-1}\|$ και εστω $\varepsilon > 0$ τετοιο ωστε $\varepsilon < a$. Επειδη η $f$ ειναι διαφορισιμη στο $x_0$ υπαρχει $\rho > 0$ τετοιο ωστε $B(x_0, \rho) \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$ και αν $x \in U_0 = B(x_0, \rho)$ τοτε

$|x - x_0| \leq \rho \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|$

αρα αν $|x - x_0| < \rho$ τοτε

$|f(x) - f(x_0)| \geq |f'(x_0)(x - x_0)| - |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \geq$

$\frac{1}{\|(f'(x_0))^{-1}\|} \|x - x_0\| - \varepsilon |x - x_0| \geq a|x - x_0|$ ■

## Πορισμα 4.1.6.2

Εστω i $U \subseteq \mathbb{R}^n$

ii $f \in C(U,\mathbb{R})^n$ τετοιο ωστε α'. η f ειναι διαφορισιμη

β'. $Jf > 0$

γ'. η f ειναι 1-1

Τοτε: 1. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

2. $f^{-1}$ ειναι διαφορισιμη

Αποδειξη

1. Απο το Θεωρημα 4.1.6.1

2. Εστω $b \in f(U)$ θα δειξουμε οτι η $f^{-1}$ διαφορισιμη στο b. Εστω $a = f^{-1}(b)$ και $E = Df(a)$ θα δειξουμε οτι για καποιο k κοντα στο 0 ισχυει οτι

$$\lim_{k \to 0} \frac{[f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) - E^{-1} \cdot k]}{|k|} = 0 \quad (1)$$

και το η $f^{-1}$ ειναι διαφορισιμη στο b με παραγωγο $E^{-1}$

Πρωτα θα δειξουμε οτι υπαρχει $\varepsilon > 0$ ωστε $\frac{|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|}{|k|}$ ειναι

Φραγμενο για $0 < |k| < \varepsilon$.

Απο την προταση 4.1.6.1. υπαρχει $U_0 \in \mathcal{O}_a(U)$ και $r > 0$ ωστε

$$|f(x) - f(a)| \geq r|x - a| \quad \forall x \in U_0$$

Το $f(U_0)$ ειναι περιοχη του b απο την αποδειξη του Θεωρηματος 4.1.6.1

(1) επιλεγουμε ε τετοιο ωστε το $b + h \in f(U_0)$ οταν $|h| < \varepsilon$.

Αρα για $|h| < \varepsilon$ θετουμε $x = f^{-1}(b+h) \in U_0$ αρα

$$|b + k - b| \geq r|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|$$

$$\Rightarrow \frac{|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|}{|k|} \leq \frac{1}{r}$$ που ηταν το ζητουμενο.

Τωρα θα δειξουμε την (1): Εστω $0 < |k| < \varepsilon$

Επειδη $f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) \neq 0$ ($f^{-1}$ 1-1) και $k \neq 0$ εχουμε

$$\frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) - E^{-1} \cdot k}{|k|} = -E^{-1} \left[ \frac{k - E(f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b))}{|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|} \right] \cdot \frac{|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|}{|k|}$$

επειδη $E^{-1}$ σταθερα και το $\frac{|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|}{|k|}$ φραγμενο αρκει να δειξουμε οτι η παρασταση στις αγκυλες παει στο 0.

Εχουμε

$b+k = f(f^{-1}(b+k)) = f(f^{-1}(b) + f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)) = f(a + f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b))$

Αρα

$$\frac{k - E\cdot(f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b))}{|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|} = \frac{f(a + f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)) - f(a) - E\cdot(f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b))}{|f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)|}$$

Οσο $k \to 0$ επειδη $f^{-1}$ συνεχης εχουμε $(f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)) \to 0$

Επειδη η $f$ ειναι διαφορισιμη στο $a$ με παραγωγο $E$, η παρασταση παει στο $0$ ∎

Πορισμα 4.1.6.2

Εστω i. $k \in \overline{\mathbb{N}}$

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$

iii. $f \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$ τετοιο ωστε : α' $Jf > 0$

β' f ειναι 1-1

Τοτε 1. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

2. $f^{-1} \in C^k(f(U); \mathbb{R}^n)$

Αποδειξη

1. Επεται απο το θεωρημα 4.1.6.1 (1)

2. Θα το δειξουμε με επαγωγη στο k

· $k=1$ : Εστω οτι $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ τοτε η $Df$ ειναι συνεχης, επισης η $f^{-1}$ ειναι συνεχης (απο το θεωρημα 4.1.6.1 (2)) καθως και η συναρτηση $I : GL(n) \to GL(n)$ (οπου $GL(n)$ ειναι η αντιστρεψιμη $n \times n$ πινακες) που απεικονισει ενα αντιστρεψιμο πινακα στον αντιστροφο του ειναι συνεχης αφου $I \in C^\infty(U; \mathbb{R}^n)$. Αρα η συναρτηση $Df^{-1} = I \circ f^{-1}$ ειναι συνεχης αρα $f^{-1} \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$

Εστω οτι το θεωρημα ισχυει για συναρτησεις ταξης $C^{r-1}(U; \mathbb{R}^n)$

Εστω οτι η $f \in C^r$ τοτε η $f' \in C^{r-1}$ αρα απο υποθεση $(f')^{-1} \in C^{r-1}(U; \mathbb{R}^n)$ ομως $Df \in C^{r-1}(U; \mathbb{R}^n)$ απο τον κανονα της αλυσιδας εχουμε οτι η $Df^{-1} \in C^{r-1}(U; \mathbb{R}^n)$ αρα η $f^{-1} \in C^r(U; \mathbb{R}^n)$ ■

Προταση 4.1.6.2

Εστω (i) $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$

(ii) $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ τετοιο ωστε:

$$J f|_{x_0}(x_0) > 0$$

Τοτε υπαρχει: 1. $a > 0$

2. $U_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$

τω: $|f(x) - f(y)| \geq a|x - y| \quad \forall x, y \in U_0$

απο τα οποια επεται οτι η $f|_{U_0}$ ειναι 1-1.

Αποδειξη

Εστω $E = Jf|_{x_0}(x_0)$, τοτε το $E$ μη-ιδιαζον. Εχουμε την γραμμικη απεικονιση $\phi(x) = E \cdot x$, τοτε

$|x - y| = |E^{-1}(Ex - Ey)| \leq n|E^{-1}|\,|Ex - E \cdot y|$.

Θετουμε $2a = \frac{1}{n \cdot |E^{-1}|}$, τοτε $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ εχουμε

$$2a|x - y| \leq |Ex - Ey|$$

Αν θεωρησουμε την απεικονιση

$$H(x) = f(x) - E \cdot x$$

τοτε $H(x) = J f(x) - E$. Ο $H$ ειναι $C^1$ αρα διαλεγουμε $\varepsilon > 0$

τω $|J H(x)| < a/n$ για καθε $x \in C(a, \varepsilon)$ αρα $Jf(a) = 0$

Αρα περνοντας την $i$-οστο μερος της $H$ εχουμε οτι αν $x, y \in C(a, \varepsilon)$ υπαρχει $c \in C(a, \varepsilon)$ ωστε

$|H_i(x) - H_i(y)| = |DH_i(c)(x - y)| \leq n(a/n)|x - y|$

Τοτε για $x, y \in C(a, \varepsilon)$

$|x - y|a \geq |H(x) - H(y)| = |-f(y) - Ey + f(x) + Ex| \geq$

$|Ex - Ey| - |f(x) - f(y)| \geq a2|x - y| - |f(x) - f(y)|$

αρα $|f(x) - f(y)| \geq a|x - y| \quad \forall y, x \in U_0$

Θεωρημα 4.1.6.2 (αντιστροφης απεικονισης, $C^k$ περιπτωση)

Εστω i. $k \in \mathbb{N}$

ii. $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$

iii. $f \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$ τετοιο ωστε $Jf(x_0) > 0$

Τοτε υπαρχει $U_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$ τετοιο ωστε

1. $f(U_0) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
2. $f|_{U_0}$ ειναι 1-1
3. $f|_{U_0}^{-1} \in C^k(f(U_0), \mathbb{R}^n)$

Αποδειξη

Απο την προταση 4.1.6.2 υπαρχει $U_1 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$ τετοιο ωστε $f|_{U_1}$ ειναι 1-1. Επειδη $Jf(x)$ ειναι συνεχης συναρτηση στο $x$ και $Jf(x_0) > 0$ υπαρχει περιοχη $U_1 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$ τετοια ωστε $Jf(x) \neq 0$ στο $U_1$. Θετουμε $U = U_0 \cap U_1$. Τοτε οι προυποθεσεις του πορισματος 4.1.6.2 πληρουνται για την $f: U \to \mathbb{R}^n$ ▪