ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
615. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

- Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με $2+\frac{1}{2}$ μονάδες.
- Ο μέγιστος βαθμός λαμβάνεται με την συμπλήρωση 10 μονάδων.
- Να λύσετε όσα θέματα θέλετε.
- Εξετάζεστε με ανοικτές τις σημειώσεις.
- Ο συμβολισμός των διατυπώσεων είναι ο ίδιος με αυτόν στις σημειώσεις.
- Ο,τιδήποτε υπάρχει στις σημειώσεις να το παίρνετε έτοιμο.
- Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.
- Μην διστάζετε να κάνετε σχήματα.

$\boxed{\text{I.}}$ Έστω

1. $m \leq n$ &
2. συμπαγής $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n) \smallsetminus \{\varnothing\}$.

Δείξτε ότι $\nexists$ άτλαντας της S με έναν μονο χάρτη.

$\boxed{\text{II.}}$

1. Δείξτε ότι
$$\overset{\text{γεν}}{\int_{\mathbb{R}_+}} e^{-t^2} t^{n-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2}.$$
Υπόδειξη: Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.
2. Δείξτε ότι
$$\overset{\text{γεν}}{\int_{\mathbb{R}^n}} e^{-|t|^2} dt = \pi^{\frac{n}{2}}.$$
Υπόδειξη: Τύπος πολικών συντεταγμένων, ή, εναλλακτικά, επαγωγή στο n με χρήση του θεωρήματος του Fubini για γενικευμένα ολοκληρώματα.

$\boxed{\text{III.}}$ Έστω

α΄. $t_0 \in \mathbb{R}^n$,
β΄. $a \in \mathbb{R}$ &
γ΄. συνάρτηση
$$f_a \colon \mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f_a(t) = |t - t_0|^a.$$

1. Έστω, επιπλέον,
   δ΄. $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$ &
   ε΄. $U = \left\{ t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |t - t_0| \in (\rho_1, \rho_2) \right\} \subset\subset \mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\}$.
   i. Δείξτε ότι η $f_a|_U$ είναι ολοκληρώσιμη.
   ii. Υπολογίστε ότι
$$\int_U f_a(t) dt = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \begin{cases} (\ln \rho_2 - \ln \rho_1), & \text{αν } a = -n \\ \frac{1}{(a+n)} \left({\rho_2}^{a+n} - {\rho_1}^{a+n} \right), & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$
   Υπόδειξη: Τύπος των πολικών συντεταγμένων.

2. Έστω, επιπλέον,

   δ′. $\rho > 0$ &

   ε′. $U = B(t_0, \rho) \smallsetminus \{t_0\} \subsetneq \mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\}$.

   i. Βρείτε τις τιμές της a για τις οποίες η $f_a|_U$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

   ii. Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της $f_a|_U$ για τις παραπάνω τιμές.

3. Έστω, επιπλέον,

   δ′. $\rho > 0$ &

   ε′. $U = \overline{B(t_0, \rho)}^c \subsetneq \mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\}$.

   i. Βρείτε τις τιμές της a για τις οποίες η $f_a|_U$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

   ii. Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της $f_a|_U$ για τις παραπάνω τιμές.

$\boxed{\text{IV.}}$ Έστω

i. $c \in \mathbb{R}^n$,

ii. $a \in (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})^n$ &

iii. συνάρτηση

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) = (c_i + a_i x_i)_{i=1}^n . \end{aligned}$$

1. Δείξτε ότι $f \in Aff(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ και ότι η f είναι $1-1$ και βρείτε την f^{-1}.
2. Βρείτε πότε η f διατηρεί τον προσανατολισμό και πότε τον αντιστρέφει.
3. Αν

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n (c_i + a_i x_i)^2 \le 1 \right\},$$

   δείξτε ότι $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ και υπολογίστε τον $v(S)$.

4. Δείξτε ότι $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$.
   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $\overline{B(x,\rho)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ & $\rho > 0$.
5. Εφοδιάζοντας την S με τον φυσικό της προσανατολισμό και την $\operatorname{bd} S \in \mathcal{M}_{n-1}^{\circ}(\mathbb{R}^n)$ με τον επαγόμενο προσανατολισμό, υπολογίστε το

$$\int\limits_{\operatorname{bd} S} t_1 dt_2 \wedge dt_3 + t_2 dt_3 \wedge dt_1 + t_3 dt_1 \wedge dt_2 .$$

   Υπόδειξη: Θεώρημα του Stokes.

$\boxed{\text{V.}}$ Έστω

α′. το συμπαγές παραβολοειδές $S \subset\subset \mathbb{R}^3$ με

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t_3 = 1 - {t_1}^2 - {t_2}^2 \right\} \cap \overline{\mathbb{R}^3_{3,+}} \ \&$$

β′. ο συμπαγής δίσκος $S_0 \subset\subset \mathbb{R}^3$ με

$$S_0 = \overline{B(0_2, 1)} \times \{0\} .$$

1. Θεωρώντας το ζεύγος

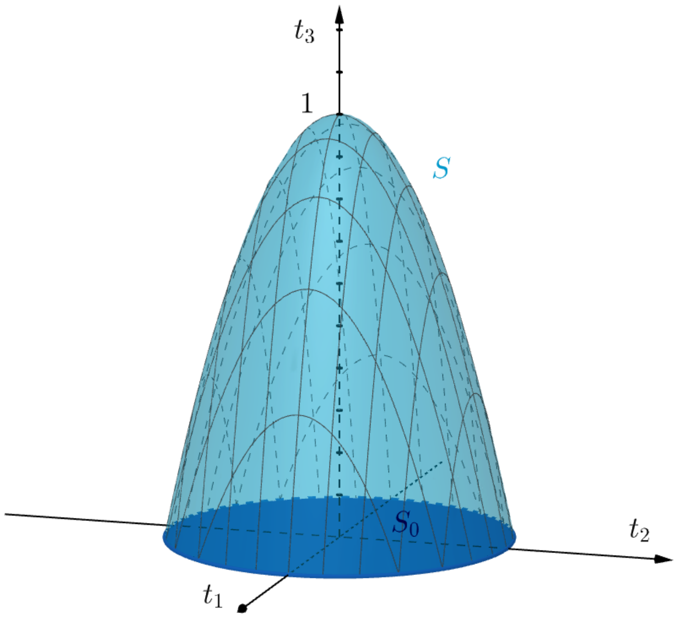
$$(B(0_2,1), f_0) \in \coprod_{U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)} C^\infty(U; \mathbb{R}^3),$$

   με

$$\begin{aligned} f_0\colon B(0_2,1) &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto f_0(x) = \left(x_1, x_2, 1 - {x_1}^2 - {x_2}^2\right), \end{aligned}$$

   επαληθεύστε ότι

$$f_0(B(0_2,1)) = \left\{ t \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t_3 = 1 - {t_1}^2 - {t_2}^2 \right\} \cap \mathbb{R}^3_{3,+} .$$



2. Θεωρώντας το δισύνολο ζευγών
$$\{(S_1, f_1), (S_2, f_2)\} \subsetneq \coprod_{S \in \mathcal{O}\left(\overline{\mathbb{R}^2_{1,+}}\right)} C^\infty\big(S; \mathbb{R}^3\big),$$
με
$$S_1 = [0,1) \times (0, 2\pi) \ \ \& \ \ S_2 = [0,1) \times (\pi, 3\pi)$$
και
$$\begin{aligned} f_i\colon S_i &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto f_i(x) = \big((1-x_1)\cos x_2, (1-x_1)\sin x_2, 2x_1 - {x_1}^2\big), \end{aligned} \quad \text{για } i \in \{1,2\},$$
επαληθεύστε ότι
$$f_1(S_1) \cup f_2(S_2) = S \smallsetminus \{(0,0,1)\}.$$
3. Συμπεράνετε ότι $S \in \mathcal{M}_2\big(\mathbb{R}^3\big)$ με $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$, το οποίο σύνορο και καταδείξτε.
4. Δείξτε ότι $S_0 \in \mathcal{M}_2\big(\mathbb{R}^3\big)$ με $\operatorname{bd} S_0 = \operatorname{bd} S$.
   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $\overline{B(x,\rho)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \ \& \ \rho > 0$.
5. Έστω, επιπλέον, $f \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3\big)$.
   i. Βρείτε τους κατάλληλους προσανατολισμούς των S και S_0, ισοδύναμα τις αντίστοιχες συναρτήσεις ν, ώστε να ισχύει ότι
   $$\int_S (\operatorname{curl} f \cdot \nu)(t) d\sigma(t) = \int_{S_0} (\operatorname{curl} f \cdot \nu)(t) d\sigma(t).$$
   Υπόδειξη: Θεώρημα του στροβιλισμού.
   ii. Αν
   $$f(t) = \Big(e^{{t_1}^2} + e^{t_1 + 2t_2},\ 2e^{t_1+2t_2} + {t_3}^3,\ 3t_1 t_2 t_3\Big), \ \forall t \in \mathbb{R}^3,$$
   δείξτε ότι
   $$\int_S (\operatorname{curl} f \cdot \nu)(t) d\sigma(t) = 0.$$
   Υπόδειξη: Υπολογίστε μόνο την τρίτη συνιστώσα του $\operatorname{curl} f$.

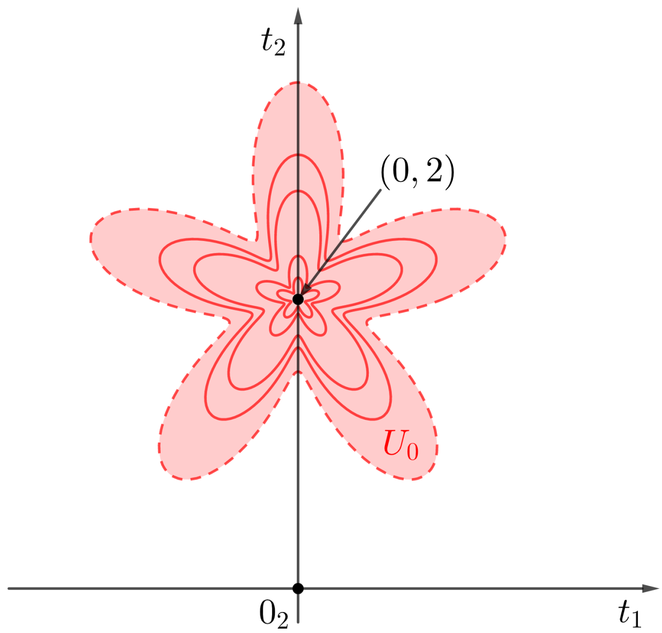
VI. 1. Έστω αστρόμορφο $U \subseteq \mathbb{R}^n$, δλδ $\exists t_0 \in U$ τ.ω.:
$$\bigcup_{\substack{t_* \in U, \\ s \in [0,1]}} \big\{ t \in \mathbb{R}^n \,\big|\, t = s t_0 + (1-s) t_* \big\} = U,$$

ή, ισοδύναμα, το U περιέχει κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το t_0 με ένα στοιχείο του U. Δείξτε ότι το U είναι συσταλτό.
Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την ομοτοπία ευθύγραμμου τμήματος.

2. Δείξτε ότι το

$$\mathbb{R}^2 \supset U_0 = \bigcup_{\substack{\rho \in [0,1), \\ \theta \in [0,2\pi)}} \left\{ t \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t = (0,2) + \rho \left(1 + \frac{1}{2} \sin(5\theta) \right) (\cos\theta, \sin\theta) \right\}$$

είναι συσταλτό.



3. Βρείτε για ποιες $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ισχύει ότι

$$\left(\left(1 + {t_2}^2 \sin t_1\right) dt_1 + f(t_1) t_2 dt_2 \right) \in D_1^E(U_0;\mathbb{R}).$$

Υπόδειξη: Βρείτε πότε ισχύει ότι $\left(\left(1 + {t_2}^2 \sin t_1\right) dt_1 + f(t_1) t_2 dt_2 \right) \in D_1^C(U_0;\mathbb{R})$.

4. Για τις f που βρήκατε, λύστε σε πεπλεγμένη μορφή την διαφορική εξίσωση

$$\left(1 + {t_2}^2 \sin t_1\right) dt_1 + f(t_1) t_2 dt_2 = 0, \;\; \forall t \in U_0.$$