Διάλεξη 13

Συνεχίζουμε την εφαρμογή της WKB στην

1) $\varepsilon y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \,, \quad y(0) = A \,, \quad y(1) = B$
$\qquad a(x) > 0$

Υπενθυμίζαμε (σ 62) ότι καταλήξαμε σε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$(2)\ \begin{cases} y_1(x) = \exp\left[-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi\right] & (S_0' = 0) \\ y_2(x) = \frac{1}{a(x)} \exp\left[\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)\, d\xi\right] & (S_0' = -a) \end{cases}$$

Η $y_1(x)$ αντιστοιχεί με την εξ. προσέγγιση της μεθόδου του οριακού στρώματος ($\nexists$ κλίμακα ε!)
Η $y_2(x)$ αντιστοιχεί με την εσ. προσέγγιση της μεθόδου Ο.Σ.
Η γενική λύση της εξίσωσης στην (1) δίνεται

$$(3) \qquad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$A = y(0) = c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = c_1 + \frac{c_2}{a(0)}$$

$$B = c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) = c_1 \exp\left[-\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)}\right] + c_2 \frac{1}{a(1)} \exp\left[\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 a(\xi)\right]$$

Αγνοώντας τον όρο τάξης $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ (που θα συζητηθεί αργότερα, και όσον αφορά τον προσδιορισμό των συντελεστών μόνο!)

$$(4) \quad A = c_1 + \frac{c_2}{a(0)} \,, \qquad B = c_1 \frac{1}{a(1)} \exp\left[-\int_0^1 \frac{b(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi\right]$$

Επιλύοντας το σύστημα (4) ως προς c_1 και c_2 και αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$y_{WKB}(x) = B\exp\left[\int_x^1 \frac{b}{a}\right] + \frac{a(0)}{a(x)}\left[A - B\exp\int_0^1 \frac{b}{a}\right]\exp\left[\int_0^x \frac{b}{a} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a\right]$$

Ο 2^{os} όρος συνεισφέρει μόνο εάν $x \sim 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a \sim a(0)\frac{x}{\varepsilon}$$

$$\int_0^x \frac{b}{a} \sim 0$$

$$\frac{a(0)}{a(x)} \sim 1$$

∴

$$(6) \quad \boxed{y_{WKB}(x) = B\exp\left[\int_x^1 \frac{b}{a}\right] + \left[A - B\exp\int_0^1 \frac{b}{a}\right]e^{-\frac{a(0)}{\varepsilon}x}}$$

η $y_{WKB}(x)$ συμπίπτει με την ομοιόμορφη προσέγγιση ((β) Logan σ. 74)

Συνεχίζουμε με τις εφαρμογές της WKB.

c) Ασυμπτωτική Κατανομή Ιδιοτιμών Προβλημάτων Sturm-Liouville

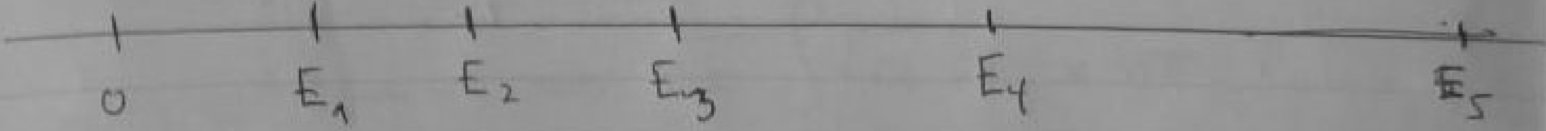
(8) $$-y'' = E\,Q(x)\,y, \quad Q(x)>0, \quad y(0)=y(\pi)=0$$

$\{E_n\}$ ιδιοτιμές ($E_n>0$, Απλές, βλ [AK], Κεφ 9 Θεώρημα 1.5)

$\updownarrow$

$\{y_n\}$ ιδιοσυναρτήσεις, $y_n \perp y_m$ L^2_Q, $n \neq m$

$$\int_0^\pi y_n(x)\,y_m(x)\,Q(x)\,dx = \delta_{mn} \qquad (*)$$



$$E_n \sim n^2 \qquad \left(E_n - E_{n-1} \sim n\right)$$

Ιδέα – Σύνδεση με Προβλήματα Ιδ. Διαταραχών:

(9) $$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{E}\,y'' = Q(x)\,y, \\ \varepsilon = \dfrac{1}{E}. \end{array}\right] \quad \varepsilon y'' = -Q(x)\,y$$

Εφαρμόζουμε την (8) σ.60 (προσοχή $Q \to -Q$)

Γενική Λύση

$$(10)\ \begin{cases} y(x) = c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \sin\left[\sqrt{E}\int_0^x \sqrt{Q(t)}\,dt\right] \\ \quad + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \cos\left[\sqrt{E}\int_0^x \sqrt{Q(t)}\,dt\right] \end{cases}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(x) = c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \sin\left[\sqrt{E}\int_0^x \sqrt{Q(t)}\,dt\right]$$

c_1 από συνθήκη κανονικοποίησης (*)

Συνθήκη Κβαντισμού.

$$(11)\ \begin{cases} y(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{E}\int_0^\pi \sqrt{Q}\,dt = n\pi \\ \qquad \Rightarrow E_n = \left(\dfrac{n\pi}{\int_0^\pi \sqrt{Q}}\right)^2. \end{cases}$$

$c_1 = c_n$

$$(*) \Leftrightarrow 1 = \int_0^\pi Q(x)\, c_n^2 \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \sin^2\left(\sqrt{E_n}\int_0^\pi \sqrt{Q}\,dt\right) dx$$

Αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{E_n}\int_0^x \sqrt{Q}\,dt$

$$1 = \left(\frac{C_n^2}{\sqrt{E_n}}\right) \int_0^{n\pi} \sin^2 u \, du$$

$$\Rightarrow \quad C_n^2 = \frac{2}{\int_0^{\pi} \sqrt{Q}\, dt} \qquad (n \to \infty)$$

$\therefore$

(112)

$$y_n(x) = \left(\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{Q(t)}}{2} dt \right)^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{4}}(x) \sin\left[n\pi \frac{\int_0^x \sqrt{Q(t)}\, dt}{\int_0^{\pi} \sqrt{Q(t)}\, dt} \right]$$

$$n \to \infty.$$

Σημ : Για $Q = 1 \Rightarrow -y'' = E_n y$, $y(0) = y(\pi) = 0$ η WKB δίνει την ακριβή λ-ση $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ $E_n = n^2 \pi^2$.