Διαλεξη 4

Αναλυτικη λυσεων σε περιοχη του $z=0$. (οχι ομως $v=$

$$G(0,v^*)=0 \Leftrightarrow (v^*)^3 + a_2^{(1)}(v^*)^2 = 0 \Leftrightarrow v^* = -$$

$$G_v(0,-a_2^{(1)}) = 3(a_2^{(1)})^2 + 2a_2^{(1)}a_2^{(1)} = (a_2^{(1)})^2 \neq 0$$

$$\overset{\Theta.\Pi.\Sigma.}{\Longrightarrow} \quad \exists!\ v_1(z), \text{ αναλυτικη}, \quad \underline{v_1(0) = -a_2^{(1)}}$$

$$G(z, v_1(z)) = 0 \qquad , |z| << 1$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{v_1'(0)} = -G_z(0,-a_2^{(1)})/G_v(0,-a_2^{(1)}) = \frac{a_1^{(3)}\, a_2}{(a_2}$$

$$\boxed{W_1(z) = v_1(z)\, z} \qquad \text{ισχυει των } 2')$$

$$\alpha = 1 \longrightarrow \underline{(3,3,4,4)} \qquad \text{Εκθετες}$$

$$\boxed{I2} \Longrightarrow \alpha = \frac{3}{2} \longrightarrow \underline{\left(\frac{9}{2}, 4, \frac{9}{2}, 4\right)}$$

$$z^{\frac{9}{2}} v^3 + a_2^{(1)} z^4 v^2 + a_1^{(3)} z^{\frac{9}{2}} v + a_0^{(4)} z^4 = 0$$

Απλοποιηση:

$$z^{\frac{1}{2}} v^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} z^{\frac{1}{2}} v + a_0^{(4)} = 0$$

$\boxed{\text{Δυσκολια}}$ διοτι στο $z=0$ η συναρτηση δεν ειναι ομαλη, ΘΠΣ δεν μπορει να εφαρμοστει.

$$s = z^{\frac{1}{2}}$$

$$H(s,v) = s v^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} s v + a_0^{(4)} = 0$$

Περιοχη του $z=0$ $\Longleftrightarrow$ Περιοχη του $s=0$

$$H(0,\bar{v}) = a_2^{(1)}\bar{v}^2 + a_0^{(4)} = 0 \Longleftrightarrow \bar{v}_{\pm} = \pm\left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$H_v(0,\bar{v}) = 2a_2^{(1)}\bar{v} = \pm 2a_2^{(1)}\left(-\frac{a_0^{(4)}}{a_2^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

(εξ' υποθεσεως ολοι οι συντελεστες $\neq 0$)

$\exists!$ $v_2(s)$, $v_3(s)$, $v_2(0) = \bar{v}_+$, $v_3(0) = \bar{v}_-$

$H(s, v_i(s)) = 0$, $v_i(s)$ αναλυτικες

$$v_i'(0) = -\frac{H_s(0,\bar{v}_\pm)}{H_v(0,\bar{v})}$$

$\Longrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} W_2(z) = v_2(z^{1/2})\, z^{3/2} \\ W_3(z) = v_3(z^{1/2})\, z^{3/2} \end{array}\right.$$

Η 2') ειναι $3^{ου}$ βαθμου

$\Longrightarrow$ 3 ριζες W_1, W_2, W_3

$\Longrightarrow$ $\nexists$ αλλες σε περιοχη του $(0,0)$!

Το Πολύγωνο

$$w^k + a_{k-1}(z)w^{k-1} + \dots + a_0(z) = 0$$
$$w^3 + a_2^{(1)} z w^2 + a_1^{(3)} z^3 w + a_0^{(4)} z^4$$

1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς συντελεστές δυνάμεων του w:

$$w^0, w^1, \dots, w^{k-1}, w^k \quad , \ i = 0, 1, \dots, k$$

$$a_0(z), a_1(z), \dots, a_{k-1}(z), 1$$

$$a_j(z) = a_j^{(p_j)} z^{p_j} + a_j^{(p_j+1)} z^{p_j+1} + \dots$$

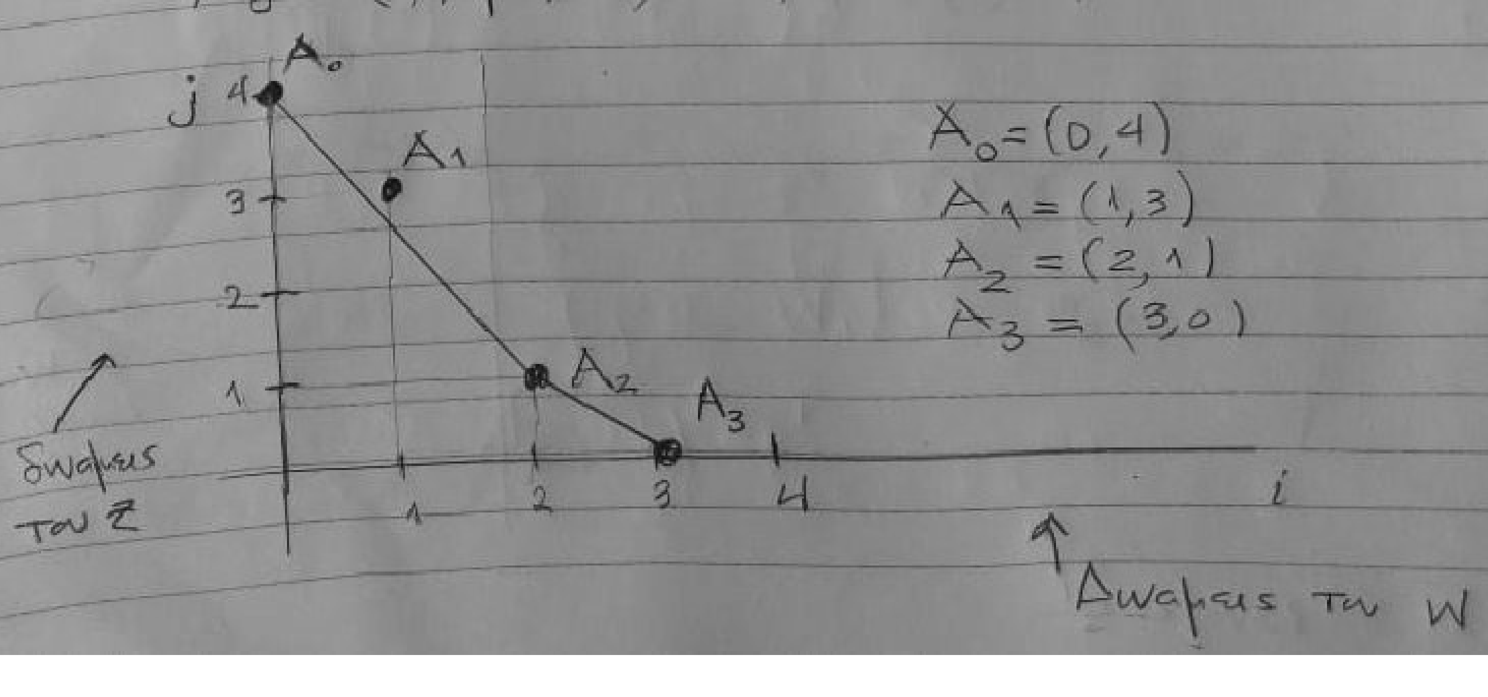
$$j = 0, 1, \dots, k-1$$

$$a_0^{(p_0)} \neq 0$$

2. Θεωρούμε τα σημεία $A_0, A_1, A_2, \dots$

$$A_i = (i, p_i) \quad , \ i = 0, 1, \dots, k$$

$$A_0 = (0, p_0) \quad , \ A_k = (k, 0)$$



$A_0 = (0, 4)$
$A_1 = (1, 3)$
$A_2 = (2, 1)$
$A_3 = (3, 0)$

3. Κατασκευαζουμε την κυρτη πολυγωνικη γραμμη τ.ω. τα σημεια A_i ειναι

ειτε επι – ειτε απο επανω

4. Θεωρουμε τα ευθυγραμμα τμηματα που συνιστουν την πολυγωνικη

$$L_1,\ L_2,\ \dots,\ L_\ell,\ \dots$$

και τις κλισεις τους

$$-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \dots,\ \alpha_\ell,\ \dots$$

και τα αντιστοιχα ευρη τους

$$n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_\ell,\ \dots$$

$$L_1 = \overline{A_0 A_2},\quad \alpha_1 = \frac{4}{2} = \frac{3}{2},\quad n_1 = 2$$

$$L_2 = \overline{A_2 A_3},\quad \alpha_2 = \lambda,\quad ,\quad n_2 = 1$$

Συμπερασμα

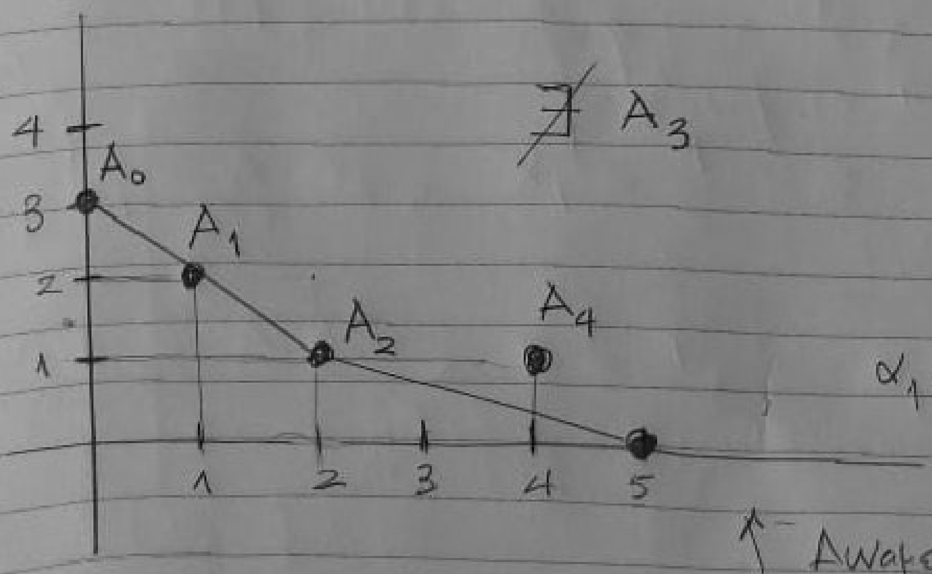
Στο L_ℓ ευθυγραμμο τμημα αντιστοιχουν n_ℓ λυσεις της μορφης $v_{\sigma\ell}(z)\, z^{\alpha_j}$ οπου $v_{\sigma\ell}(z)$ αναλυτικες ως προς καποια εν γενει κλασματικη δυναμη του z.

Η διαδικασια δινει ολες τις λυσεις της
$$w^k + a_{k-1}(z)\, w^{k-1} + \dots + a_0(z)$$
Σε περιοχη του $(\underset{z}{0},\underset{w}{0})$.

Παραδειγμα

$$w^5 + 2zw^4 - zw^2 - 2z^2w - z^4 - z^3 = 0$$

Μελετη λυσεων σε περιοχη του $z=0$, $w=0$.



↑ Δυναμεις του w

$L_1 = \overline{A_0A_2}$

$L_2 = \overline{A_2A_5}$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}$

$n_1 = 2, \quad n_2 = 3$

Συμπέρασμα

3 λύσεις της μορφής $z^{1/3} v_l(z^{\sigma_1})$, $l=1,2,3$

2 λύσεις της μορφής $z\, v_\nu(z^{\sigma_2})$, $\nu=1,2$.

$W = z^{\frac{1}{3}} v$

$$\left(z^{\frac{1}{3}} v\right)^5 + 2z\left(z^{\frac{1}{3}} v\right)^4 - z\left(z^{\frac{1}{3}} v\right)^2 - 2z^2\left(z^{\frac{1}{3}} v\right) - z^4 - z$$

1^{os} $z^{5/3}$ —

2^{os} $z^{7/3}$

3^{os} $z^{5/3}$ —

4^{os} $z^{7/3}$

5^{os} $z^{12/3}$

6^{os} $z^{9/3}$

Διαιρούμε με $z^{5/3}$

$$v^5 + 2z^{\frac{2}{3}} v^4 - v^2 - 2z^{\frac{2}{3}} v - z^{\frac{4}{5}} - z^{\frac{7}{3}} = 0$$