ΚΑΤ' ΟΙΚΟΝ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ Ι
ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ (Μερη Ι, ΙΙ, ΙΙΙ)

1) Δειξτε οτι το συναρτησιακο $E(v) = \int_{-1}^{1} x^2 (v'(x))^2 dx$ δεν λαμβανει το infimum του στην κλαση

$$V = \{ v \in C^1[-1,1] : v(-1) = a,\ v(1) = b \}$$

οπου $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$

(Υποδειξεις: α) $v_\varepsilon(x) := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{Arctan}(x/\varepsilon)}{\operatorname{Arctan}(1/\varepsilon)}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E(v_\varepsilon) = 0$$

β) Βρητε και λ-στε την E-L)

\#

2) Δειξτε οτι η E-L του $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$ ειναι ισοδυναμη με

(α) $F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''} =$ σταθερα αν $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0$

(β) $F - y'\left(F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''}\right) - y'' F_{y''} =$ σταθερα, $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv$

\#

3) Θεωρηστε την εξισωση του μη γραμμικου ελατηριου

(*) $m\ddot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = 0, \quad k_1, k_2, m > 0.$

(α) Δειξτε την (*) μεσω της Αρχης Hamilton.

(β) Βρειτε τις Εξισωσεις Hamilton.

\#

Θεωρηστε το συναρτησιακο

$$J(u,w)=\frac{1}{2}\int_0^{l}\left(A\left(u_x+\frac{w_x^2}{2}\right)^2+I\,w_{xx}^2\right)dx$$

$w=w_{xx}=0, \quad x=0,l$

$u(0)=\delta/2, \quad u(l)=-\delta/2$

Εξαγετε το συστημα Ε-L και δειξτε οτι ειναι ισοδυναμο με την εξισωση

$$w_{xx}+\frac{A}{Il}\left(\delta-\frac{1}{2}\int_0^{l}w_x^2\,dx\right)=0$$

Βρητε τα ακροτατα των

$$J(y)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(y''^2-y^2+x^2\right)dx$$

$y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$y'(0)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$