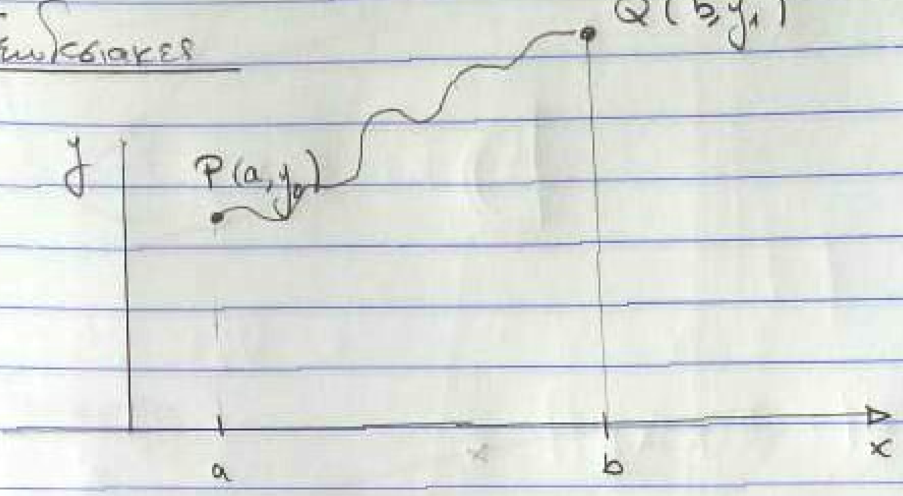
Διαλεξη 16 (Λογισμος Μεταβολων)

Παραδειγματα

1) Γεωδεσιακες

a)



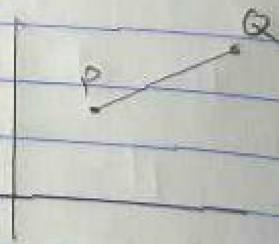
$$A = \{ \; y = f(x), \; f \in C^1(a,b) \cap C[a,b] \; , \; f(a) = y_0, \; f(b) = y_1 \}$$

Προβλημα : Να βρεθει η f με γραφημα ελαχιστου μηκους.

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx \quad , \quad J : A \to \mathbb{R}$$

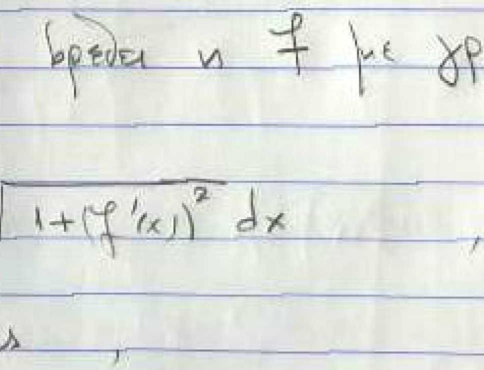
J συναρτησοειδες ,

$$\min_A J = ;$$



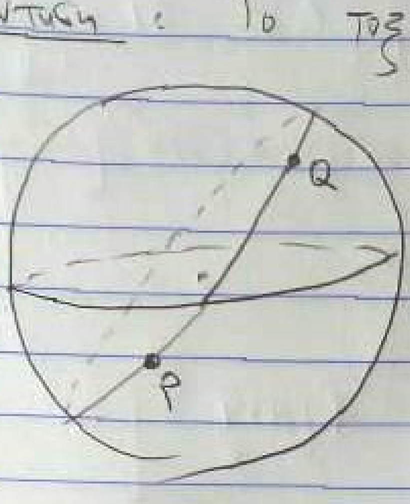
Απαντηση : Το ευθυγραμμο τμημα.

b)

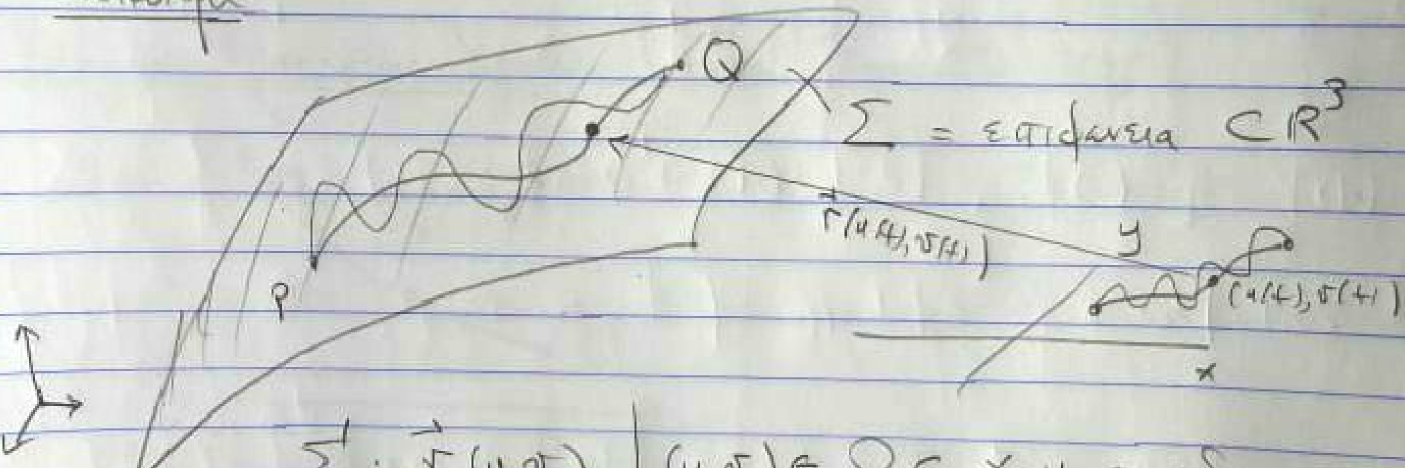


Προβλημα : Να βρεθει η καμπυλη επι της σφαιρας που συνδεει τα P, Q, και ελαχιστοποιει το μηκος.

<u>Απαντηση</u> : Το τοξο μεγιστου κυκλου που συνδεει τα P και Q



c) <u>Γενικοτερα</u>



$\Sigma: \vec{r}(u,v) \;\big|\; (u,v) \in \Omega \subset$ x-y επιπεδο

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

$$J(u(\cdot),v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt$$

$x(t) = x(u(t),v(t))$

$y(t) = y(u(t),v(t))$

$z(t) = z(u(t),v(t))$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \dot{u}^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\dot{u}\dot{v} + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \dot{v}^2$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \dot{u}^2 + 2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\dot{u}\dot{v} + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \dot{v}^2$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \text{— — — — — —}$$

Απόδειξη

Δείξτε

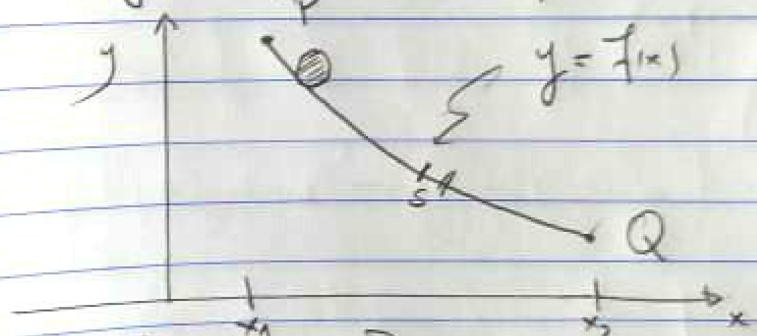
$$(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2 = \underbrace{(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u)}_{E}\dot{u}^2 + 2\underbrace{(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)}_{F}\dot{u}\dot{v} + \underbrace{(\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v)}_{G}\dot{v}^2$$

$$= E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

E, F, G συντελεστές της 1ης θεμελιώδους μορφής.

$\square$

2) Πρόβλημα Βραχιστόχρονου (Johann Bernoulli, 1696)



$P = (x_1, y_1)$

$Q = (x_2, y_2)$

Ποια τσουλήθρα ελαχιστοποιεί το χρόνο που ένα σφαιρίδιο μάζας m, ολισθαίνον καλύπτει την PQ

Διατύπωση

$v =$ Ταχύτητα $= \dfrac{ds}{dt}$, $s =$ μήκος "τόξου"

(*) $ds = (1+(y'(x))^2)^{1/2}$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{s_1} \frac{dt}{ds}\, ds = \int_0^{s_1} \frac{1}{v}\, ds$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{v}\, dx, \quad v = v(x)$$

Έκφραση Ταχύτητας σαν συνάρτηση της x

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_1$$

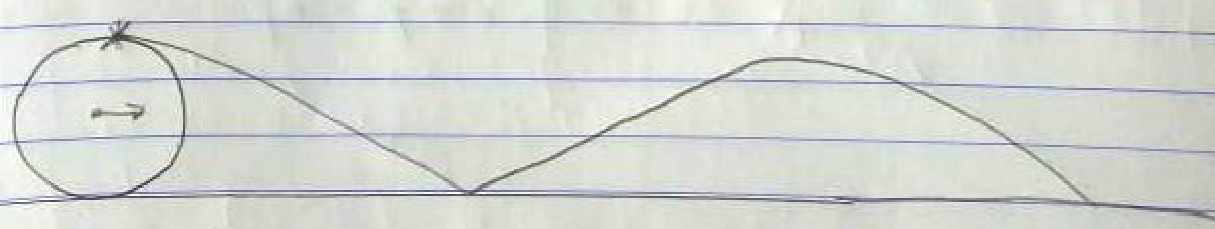
$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(y_1 - f(x))}$$

$\therefore$

$$T(f) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_1 - f(x))}}\,dx$$

Απάντηση

Η καλύτερη τσουλήθρα είναι τόξο κυκλοειδούς:



* Εντυπωσιακό Τέχνασμα: Ο χρόνος καθόδου δεν εξαρτάται από το σημείο P! Αυτό αξιοποιήθηκε από τον Huygens (1629-1695) για την κατασκευή ρολογιών εκκρεμούς, τα πιο ακριβή για 300 χρόνια!

* Η λύση του βραχυστόχρονου προβλήματος που έπαιξε σημαντικό ρόλο στον λογισμό ήταν του Euler.

Η Εξίσωση Euler-Lagrange (Αναγκαία συνθήκη)

$$J(f) = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\,dx \qquad L(x,y,z)$$

$$= f \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b] \;, \quad f(a) = y_1, \quad f(b) = y_2$$

Έστω $y = y(x)$ ελαχιστοποιεί J, $\min\limits_{A} J$.

<u>Μεταβολές</u>: $y(x) + \varepsilon h(x)$, όπου $h \in C_0^1[a,b]$, $h(a) = h(b)$.

<u>Παρατήρηση</u>: $y(x) + \varepsilon h(x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα a, b.

$$g(\varepsilon) := J(y(\cdot) + \varepsilon h(\cdot)) = \int_c^b L(x, y+\varepsilon h, y' + \varepsilon h')\,dx$$

$$g'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\,dx$$

$$= \int_a^b (L_y h + L_z h')\,dx$$

$$\boxed{g'(0) = 0} \quad \text{Αναγκαία Συνθήκη}$$

$$\int_a^b (L_y h + L_z h')\,dx \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \forall\, h \in C_0^1[a,b].$$

Ολοκλήρωση Κατά Μέρη

$$\int_a^b L_z(x, y(x), y'(x))\, h'(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b \frac{d}{dx}\Big[L_z(x, y(x), y'(x))\, h(x)\Big] dx}_{\to\, 0}$$

$$- \int_a^b \left(\frac{d}{dx} L_z(x, y(x), y'(x))\right) h(x)\, dx$$

$$= -\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\Big(L_z(x, y(x), y'(x))\Big)\right] h(x)\, dx.$$

Συμπέρασμα

$$(*) \quad \int_a^b \left[L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} L_z(x, y(x), y'(x))\right] h(x)\, dx = 0$$

$$\forall\ h \in C_0^1[a, b].$$

Θεμελιώδες Λήμμα του Λογισμού των Μεταβολών

Λήμμα

Έστω $f \in C[a,b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, h \in C_0^2[a,b]$$

$\Longrightarrow \quad f(x) \equiv 0.$

Απόδειξη