Αρμονική Ανάλυση

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2022

Περιεχόμενα

1 Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue **1**

1.1 Μέτρο Lebesgue . . . 1

1.1.1 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue . . . 2

1.1.2 Lebesgue μετρήσιμα σύνολα . . . 3

1.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις . . . 6

1.2.1 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις . . . 8

1.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue . . . 11

1.3.1 Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις . . . 12

1.3.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις . . . 13

1.3.3 Η γενική περίπτωση . . . 19

1.4 Σύγκριση του ολοκληρώματος Lebesgue με το ολοκλήρωμα Riemann . . . 23

1.5 Κλασικά αποτελέσματα . . . 24

1.5.1 Το λήμμα του Steinhaus και το σύνολο του Vitali . . . 24

1.5.2 Το σύνολο του Cantor . . . 26

1.5.3 Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue . . . 28

1.5.4 Οι τρεις αρχές του Littlewood . . . 30

1.6 Ασκήσεις . . . 33

2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue **39**

2.1 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue . . . 39

2.1.1 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood . . . 40

2.1.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue . . . 43

2.2 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης . . . 46

2.2.1 Ορισμός και παραδείγματα . . . 46

2.2.2 Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης . . . 50

2.2.3 Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης . . . 52

2.3 Παραγωγισιμότητα μονότονων συναρτήσεων . . . 54

2.4 Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις . . . 58

2.5 Ασκήσεις . . . 63

3 Χώροι L^p 69

3.1 Χώροι L^p . . . 69

3.2 Θεώρημα Riesz-Fischer . . . 72

3.2.1 Θεώρημα Riesz-Fischer . . . 72

3.2.2 Ο χώρος $L^\infty(E)$ . . . 74

3.2.3 Προσέγγιση συναρτήσεων στον L^p . . . 75

3.3 Θεώρημα Fubini . . . 77

3.4 Συνέλιξη . . . 86

3.5 Ασκήσεις . . . 89

4 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα 95

4.1 Περιοδικές συναρτήσεις . . . 95

4.2 Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass . . . 97

4.3 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα . . . 100

4.4 Ασκήσεις . . . 105

5 Σειρές Fourier 109

5.1 Σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων . . . 109

5.1.1 Μοναδικότητα σειρών Fourier . . . 119

5.2 Ο πυρήνας του Dirichlet . . . 121

5.3 Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων . . . 124

5.3.1 Μια κατασκευή του Lebesgue . . . 129

5.4 Θεώρημα Dini και θεώρημα Marcinkiewicz . . . 131

5.5 Ασκήσεις . . . 134

6 Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα 139

6.1 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας . . . 139

6.2 Cesàro αθροισιμότητα . . . 145

6.3 Ο πυρήνας του Fejér . . . 146

6.4 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier . . . 151

6.5 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson . . . 153

6.6 Ασκήσεις . . . 156

7 L^2-σύγκλιση σειρών Fourier 161

7.1 Χώροι Hilbert . . . 161

7.1.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και χώροι Hilbert . . . 161

7.1.2 Καθετότητα . . . 163

7.1.3 Ορθοκανονικές βάσεις . . . 164

7.2 Σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{T})$ . . . 167

7.3 Ασκήσεις . . . 169

8 Μετασχηματισμός Fourier **173**
8.1 Μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ 173
8.2 Ο τύπος αντιστροφής του Fourier 176
8.3 Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ 180
8.4 Ο χώρος του Schwartz στο $\mathbb{R}$ 183
8.4.1 Ο τύπος άθροισης του Poisson 185
8.4.2 Η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg 187
8.5 Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz 188
8.6 Ανισότητα Hausdorff-Young 192
8.7 Ασκήσεις 195

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Το κεφάλαιο αυτό περιγράφει συνοπτικά όσα θα χρειαστούμε για το μέτρο και το ολοκλήρωμα Lebesgue. Σε κάποιες περιπτώσεις υπενθυμίζουμε τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων διότι οι τεχνικές αυτές θα μας φανούν πολύ χρήσιμες και σε αυτό το μάθημα. Η παρουσίαση όμως που κάνουμε απέχει πολύ από το να είναι πλήρης. Ο αναγνώστης που θέλει να προχωρήσει στα επόμενα κεφάλαια θα πρέπει να βεβαιωθεί ότι αισθάνεται καλά με το περιεχόμενο αυτού του πρώτου κεφαλαίου και, αν χρειάζεται, θα πρέπει να ανατρέξει σε κάποιες σημειώσεις ή κάποιο σύγγραμμα θεωρίας μέτρου για μια πιο λεπτομερή μελέτη όσων περιγράφονται εδώ.

1.1 Μέτρο Lebesgue

Θα θέλαμε να ορίσουμε το «μήκος» κάθε υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$, δηλαδή να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έναν μη αρνητικό αριθμό $\lambda(A)$ (ή το $+\infty$) έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\lambda([a,b]) = b - a$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

(β) Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές: $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Αριθμήσιμη προσθετικότητα: Αν (A_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε
$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Η τελευταία ιδιότητα δημιουργεί προβλήματα. Μια κατασκευή που θα παρουσιάσουμε πιο κάτω, η οποία οφείλεται στον Vitali και βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από τη θεωρία συνόλων, δείχνει ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ η οποία να ικανοποιεί τα (α)–(γ).

Ακόμα κι αν ζητήσουμε την προσθετικότητα μόνο για ενώσεις πεπερασμένων το πλήθος ξένων ανά δύο συνόλων, αποδεικνύεται (αν δεχτούμε το αξίωμα της επιλογής) ότι *δεν* υπάρχει τρόπος να ορίσουμε το «μήκος» έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο πρώτες ιδιότητες και η

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

για όλα τα $A, B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \varnothing$.

Η στρατηγική που ακολουθούμε είναι η εξής: αντί να περιορίσουμε τις απαιτήσεις μας, περιοριζόμαστε σε μια κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στην οποία μπορεί να οριστεί το μήκος λ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (α), (β) και (γ). Αυτά θα είναι τα «μετρήσιμα» σύνολα. Το ευτύχημα είναι ότι η κλάση αυτή είναι αρκετά μεγάλη.

1.1.1 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θα αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $\lambda^*(A) \geqslant 0$ ή $+\infty$, το *εξωτερικό μέτρο* του A. Είναι φυσιολογικό, αν $I = (a, b)$ είναι ένα ανοικτό διάστημα να θέλουμε να ισχύει

$$\lambda^*(I) = b - a.$$

Θεωρούμε και το κενό σύνολο ως ανοικτό διαστημα θέτοντας $(a, a) = \varnothing$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αν τώρα $A \subseteq \mathbb{R}$ τυχόν, μπορούμε πάντα να καλύψουμε το A από αριθμήσιμα το πλήθος ανοικτά διαστήματα, δηλαδή να βρούμε ακολουθία $(I_n)_n$, με $I_n = (a_n, b_n)$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (γιατί;). Τότε, το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μήκος» του A και άρα είναι λογικό να ζητήσουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n), \text{ για οποιαδήποτε τέτοια } \textit{κάλυψη } (I_n)_n \text{ του } A.$$

Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.1.1. *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : \ a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n \leqslant b_n \ \textit{και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \right\}.$$

Παρόμοια ορίζεται το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ για $d > 1$. Τον ρόλο των διαστημάτων (a, b) παίζουν τώρα τα ανοικτά ορθογώνια $I = \prod_{j=1}^{d}(a_j, b_j)$, $-\infty < a_j \leqslant b_j < \infty$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$, τα οποία ονομάζουμε και πάλι *ανοικτά διαστήματα*. Παρατηρήστε ότι το κενό σύνολο είναι κι αυτό ανοικτό διάστημα (έχουμε επιτρέψει την ισότητα $a_j = b_j$, και τότε $(a_j, b_j) = \varnothing$). Η οικογένεια $\mathcal{C}$ των ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}^d$ είναι *σ-κάλυψη* του $\mathbb{R}^d$: έχουμε

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)^d.$$

Για κάθε ανοικτό διάστημα $I = \prod_{j=1}^{d}(a_j, b_j)$ του $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε

$$\ell(I) = \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j).$$

Η $\mathcal{C}$ και η ℓ επάγουν το εξωτερικό μέτρο λ^* στον $\mathbb{R}^d$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του A είναι το

$$\lambda_d^*(A) = \inf\left\{\sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A\right\}.$$

Για ευκολία θα συμβολίζουμε το λ_d^* με λ^*. Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζουμε τις βασικές ιδιότητες του λ_d^*.

Θεώρημα 1.1.2. *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda^* := \lambda_d^*$ ικανοποιεί τα εξής:*

(α) *Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $\lambda_d^*(A) \leqslant \lambda_d^*(B)$.*

(β) *Αν το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε $\lambda_d^*(A) = 0$.*

(γ) *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\lambda_d^*(A+x) = \lambda_d^*(A)$.*

(δ) *Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$\lambda_d^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \lambda_d^*(A_n).$$

(ε) *Για κάθε διάστημα $I = \prod_{j=1}^d (a_j, b_j)$ στον $\mathbb{R}^d$ ισχύει $\lambda_d^*(I) = \ell(I) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$.*

1.1.2 Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

Ο αρχικός μας στόχος ήταν να πετύχουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του «μέτρου»: θα θέλαμε λοιπόν να ισχύει η

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \lambda^*(A_n)$$

αν τα A_n είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Το εξωτερικό μέτρο που ορίσαμε δεν έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας: ακόμα κι αν περιοριστούμε στην περίπτωση *δύο* ξένων υποσυνόλων A και B του $[0,1]$, μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα όπου

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Αυτό που θα κάνουμε είναι να περιοριστούμε σε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της «συνάρτησης εξωτερικού μέτρου» λ^* στην $\mathcal{M}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας. Η $\mathcal{M}$ είναι η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Η διαδικασία είναι η ίδια στον $\mathbb{R}^d$ για κάθε $d \geqslant 1$.

Ορισμός 1.1.3 (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο)**.** Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμο αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» – ως προς το εξωτερικό μέτρο – οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$.

Παρατήρηση 1.1.4. Από την $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^*, έχουμε πάντα την ανισότητα $\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c)$. Αυτό λοιπόν που χρειαζόμαστε για να δείξουμε τη μετρησιμότητα του A είναι η αντίστροφη ανισότητα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c)$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$. Αρκεί μάλιστα να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου $\lambda^*(X) < \infty$.

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathcal{M}$. Πράγματι, έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε, $X \cap A \subseteq A$ άρα $\lambda^*(X \cap A) = 0$. Επίσης, $X \supseteq X \cap A^c$ άρα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

Από την Παρατήρηση 1.1.4 έπεται ότι $A \in \mathcal{M}$.

Θεώρημα 1.1.5. *Η κλάση $\mathcal{M}$ έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{M}$.

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{M}$.

(iii) *Αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.*

Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τις *σ-άλγεβρες*:

Ορισμός 1.1.6 (σ-άλγεβρα)**.** Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια, μια κλάση υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν είναι «κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις». Έπεται ότι είναι κλειστή και ως προς αριθμήσιμες τομές και διαφορές:

(iv) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$$

(v) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Με βάση τον Ορισμό 1.1.6 η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα. Ειδικότερα, αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, και αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

Ορίζουμε $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ με $A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$. Δηλαδή, η λ είναι ο περιορισμός της συνολοσυνάρτησης λ^* (του εξωτερικού μέτρου) στην κλάση $\mathcal{M}$. Η συνάρτηση λ ονομάζεται μέτρο Lebesgue ή απλά μέτρο.

Θεώρημα 1.1.7. *Έστω $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R}^d : A$ Lebesgue μετρήσιμο $\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται μέσω της*

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$$

είναι αριθμήσιμα προσθετική (ή, σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων ($A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n και $A_n \cap A_m = \varnothing$ αν $n \neq m$), τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Ποιά σύνολα είναι μετρήσιμα; Ήδη γνωρίζουμε ότι τα σύνολα που έχουν εξωτερικό μέτρο 0 (και τα συμπληρώματά τους) ανήκουν στην $\mathcal{M}$. Δείχνουμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι αρκετά πλούσια: όλα τα «καλά» - από τοπολογική άποψη - υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Πρόταση 1.1.8. *Όλα τα διαστήματα I του $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.*

Ορισμός 1.1.9 (Borel σ-άλγεβρα)**.** Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που περιέχει όλα τα ανοικτά διαστήματα λέγεται σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ (ή Borel σ-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$. Τυπικά, ορίζουμε

$$\mathcal{B} = \bigcap \big\{\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{R}^d) : \mathcal{A}\ \ \sigma - \text{άλγεβρα και κάθε ανοικτό διάστημα ανήκει στην } \mathcal{A}\big\},$$

και ελέγχουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, ότι κάθε ανοικτό διάστημα ανήκει στην $\mathcal{B}$ και ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που έχει αυτήν την ιδιότητα.

Από τον ορισμό της Borel σ-άλγεβρας, από το γεγονός ότι η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και από την Πρόταση 1.1.8 συμπεραίνουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο:

Πρόταση 1.1.10. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά διαστήματα, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα ανοικτά, άρα και όλα τα κλειστά, σύνολα. Όλες οι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα G_δ-σύνολα) είναι Borel σύνολα, όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα F_σ-σύνολα) είναι Borel σύνολα, και ούτω καθεξής.

Όπως θα δούμε αργότερα, η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων: υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel. Μπορεί κανείς να δώσει παράδειγμα συνόλου που δεν είναι Borel και έχει εξωτερικό μέτρο 0 (άρα, είναι μετρήσιμο).

Τα μετρήσιμα σύνολα προσεγγίζονται από Borel σύνολα, με την εξής έννοια:

Πρόταση 1.1.11. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι μετρήσιμο.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}^d$ με $A \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.*

(iii) *Υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*\big(B \setminus A\big) = 0$.*

Το μέτρο Lebesgue λ είναι κανονικό:

Πρόταση 1.1.12. *Το $\lambda = \lambda_d$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\lambda(K) < \infty$ *για κάθε* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *συμπαγές.*

(ii) *Συνθήκη εξωτερικής κανονικότητας: Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ ισχύει ότι*

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό στον } \mathbb{R}^d \text{ και } G \supseteq A\}.$$

(iii) *Συνθήκη εσωτερικής κανονικότητας: Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ ισχύει ότι*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}.$$

Τέλος, πολύ χρήσιμες είναι οι ακόλουθες ιδιότητες «συνέχειας» του μέτρου Lebesgue, οι οποίες είναι συνέπειες της αριθμήσιμης προσθετικότητας:

Πρόταση 1.1.13 (συνέχεια του μέτρου)**.** (i) *Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε*

$$\lambda(A_n) \to \lambda(A).$$

(ii) *Αν (B_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\lambda(B_1) < +\infty$ και $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, τότε*

$$\lambda(B_n) \to \lambda(B).$$

1.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις για τις οποίες θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$ και τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $[-\infty, +\infty]$ των πραγματικών αριθμών. Αυτό που ζητάμε είναι όλα τα σύνολα της μορφής $f^{-1}((a,b))$, όπου $a < b$ στο $\mathbb{R}$, να είναι μετρήσιμα.

Ορισμός 1.2.1 (Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται Lebesgue μετρήσιμη, ή απλά μετρήσιμη, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$$

είναι μετρήσιμο.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι στη θέση των ημιευθειών $(a, +\infty)$ του Ορισμού 1.2.1 θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη κλάση ημιευθειών.

Πρόταση 1.2.2. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) \geqslant a\} = f^{-1}([a, +\infty))$ είναι μετρήσιμο.*

(iii) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$ *είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A : f(x) \leqslant a\} = f^{-1}((-\infty, a])$ *είναι μετρήσιμο.*

Έπεται τώρα ότι αν A είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση τότε όλες οι αντίστροφες εικόνες διαστημάτων – μέσω της f – είναι μετρήσιμα σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τα σύνολα $\{x \in A : f(x) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.2.3 (Borel μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Έστω A σύνολο Borel του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται Borel μετρήσιμη αν, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$$

είναι σύνολο Borel. Το ακριβές ανάλογο της Πρότασης 1.2.2 ισχύει για τις Borel μετρήσιμες συναρτήσεις (διατυπώστε την αντίστοιχη πρόταση και αποδείξτε την).

Παρατήρηση 1.2.4. Η δείκτρια συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ενός μετρήσιμου συνόλου A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^d, & \text{αν } a < 0 \\ A, & \text{αν } 0 \leqslant a < 1 \\ \varnothing, & \text{αν } a \geqslant 1 \end{cases}$$

δηλαδή, μετρήσιμο σύνολο σε κάθε περίπτωση. Ειδικότερα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 1.2.5 (πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων)**.** *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(i) *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση λf είναι μετρήσιμη.*

(iii) *Η fg είναι μετρήσιμη.*

(iv) *Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $1/f$ είναι μετρήσιμη.*

(v) *Οι συναρτήσεις $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.*

(vi) *Οι συναρτήσεις $f^+ := \max\{f, 0\}$ και $f^- := -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμες.*

Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Επεκτείνουμε την διάταξη του $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ ορίζοντας $-\infty < x < +\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επεκτείνουμε την κλάση των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ στην κλάση των διαστημάτων του $\overline{\mathbb{R}}$ προσθέτοντας τα (επεκτεταμένα) διαστήματα $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(a, +\infty]$, $[a, +\infty]$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) και $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty]$.

Οι ανοικτές περιοχές του $-\infty$ και του $+\infty$ είναι τα σύνολα $[-\infty, a)$ και $(a, +\infty]$ αντίστοιχα. Οι πράξεις του $\mathbb{R}$ επεκτείνονται με τον γνωστό τρόπο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Μη επιτρεπτές πράξεις είναι οι $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Οι συναρτήσεις $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, λέγονται επεκτεταμένες συναρτήσεις.

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό της μετρήσιμης συνάρτησης και στην περίπτωση συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 1.2.6. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Η f λέγεται Lebesgue μετρήσιμη, ή απλά μετρήσιμη, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty])$$

είναι μετρήσιμο.

Όλες οι προτάσεις που αποδείξαμε ως τώρα ισχύουν για (επεκτεταμένες) μετρήσιμες συναρτήσεις (για τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων περιοριζόμαστε στο υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους στο οποίο οι πράξεις είναι επιτρεπτές). Παρατηρήστε ότι, αν η $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε τα σύνολα

$$\{x \in A : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > n\}$$

και

$$\{x \in A : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) \leqslant -n\}$$

είναι μετρήσιμα.

Ορισμός 1.2.7. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει σχεδόν παντού στο A αν το σύνολο Z των $x \in A$ για τα οποία δεν ισχύει η $P(x)$ έχει μέτρο μηδέν.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η μετρησιμότητα διατηρείται για το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

Πρόταση 1.2.8. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$. Τότε,*

(i) *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ που ορίζονται από τις*

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant m} f_k(x) \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geqslant m} f_k(x) \right),$$

είναι μετρήσιμες.

(iii) *Αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, τότε η συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ είναι μετρήσιμη.*

1.2.1 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις

Ορισμός 1.2.9 (απλή μετρήσιμη συνάρτηση)**.** Μια συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή μετρήσιμη αν είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός δεικτριών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων. Δηλαδή, η φ είναι απλή συνάρτηση αν

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \tag{1.2.1}$$

για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, κάποιους πραγματικούς αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$ και κάποια μετρήσιμα σύνολα $A_1, \ldots, A_n$.

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα σύνολα A_i να είναι ξένα, ούτε από τους αριθμούς a_i να είναι διακεκριμένοι. Δεν είναι όμως δύσκολο να διαπιστώσετε ότι μια συνάρτηση φ είναι απλή αν και μόνο αν παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διακεκριμένες πραγματικές τιμές (μία από αυτές μπορεί να ισούται με 0). Πράγματι, το σύνολο των τιμών της συνάρτησης φ στην (1.2.1) περιέχεται στο

$$\left\{\sum_{i\in I} a_i : \varnothing \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\}\right\} \cup \{0\}$$

(εξηγήστε γιατί). Αν λοιπόν $\{t_1, \ldots, t_m\}$ είναι το σύνολο τιμών της φ και αν ορίσουμε

$$E_i = \{\varphi = t_i\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) = t_i\},$$

τότε τα σύνολα E_i είναι ξένα και μετρήσιμα, η ένωσή τους μας δίνει τον $\mathbb{R}^d$, και

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{E_i}. \tag{1.2.2}$$

Η αναπαράσταση (1.2.2) της φ είναι μονοσήμαντα ορισμένη (από την φ) και λέγεται κανονική αναπαράσταση της φ.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.2.10. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to [0, \infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (φ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \leqslant f$ ώστε*

$$\varphi_n(x) \nearrow f(x)$$

για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $C_n = \{x \in A : f(x) \geqslant 2^n\}$ και

$$B_{n,k} = \left\{x \in A : \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{2n} - 1.$$

Χωρίζουμε δηλαδή το $[0, 2^n]$ σε 2^{2n} διαστήματα μήκους 2^{-n} και θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες τους μέσω της f. Αφού η f είναι μετρήσιμη, τα σύνολα C_n και $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα. Τώρα, ορίζουμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση φ_n ως εξής:

$$\varphi_n = 2^n \chi_{C_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε φ_n ικανοποιεί τα εξής:

(i) $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ και η φ μηδενίζεται έξω από το A.

(ii) $0 \leqslant f - \varphi_n \leqslant 2^{-n}$ στο σύνολο $A \setminus C_n = \{x \in A : f(x) < 2^n\}$.

(iii) $\varphi_n(x) = 2^n$ αν $f(x) = \infty$.

Από τα (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι $\varphi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν $f(x) = \infty$ τότε

$$\varphi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x).$$

Αν $f(x) < \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < 2^{n_0} \leqslant 2^n$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, $0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) < 2^{-n}$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $\varphi_n(x) \to f(x)$. Παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{x \in A : f(x) \leqslant M\}$, $M > 0$.

Μένει να δείξουμε ότι η (φ_n) είναι αύξουσα. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \{x \in A : k/2^n \leqslant f(x) < (k+1)/2^n\} \\ &= \left\{x \in A : \frac{2k}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \cup \left\{x \in A : \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right\} \\ &= B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in B_{n+1,2k}$, τότε $\varphi_n(x) = k/2^n = (2k)/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x)$, ενώ αν $x \in B_{n+1,2k+1}$, τότε $\varphi_n(x) = k/2^n < (2k+1)/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x)$. Τέλος, αν $x \in C_n$ έχουμε $\varphi_n(x) = 2^n \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ (εξηγήστε την τελευταία ανισότητα: θα χρειαστεί να χωρίσετε το C_n στα $B_{n+1,2^{n+1}}, B_{n+1,2^{n+1}+1}, \ldots, B_{n+1,2^{2(n+1)}-1}$ και C_{n+1}).

Σε κάθε περίπτωση $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$, δηλαδή $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$. □

Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2.10 για τις f^+ και f^- χωριστά, παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 1.2.11. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία (φ_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\varphi_n : A \to \mathbb{R}$ με*

$$0 \leqslant |\varphi_1| \leqslant |\varphi_2| \leqslant \cdots \leqslant |f|$$

και $\varphi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (ψ_n) και (ζ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $\psi_n(x) \to f^+(x)$ και $\zeta_n(x) \to f^-(x)$ για κάθε $x \in A$. Τότε, αν ορίσουμε $\varphi_n = \psi_n - \zeta_n$, έχουμε $\varphi_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Οι f^+ και f^- είναι φραγμένες σε κάθε υποσύνολο B του A στο οποίο η f είναι φραγμένη. Συνεπώς, $\psi_n \to f^+$ και $\zeta_n \to f^-$ ομοιόμορφα στο B, απ' όπου έπεται ότι $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B.

Παρατηρήστε επίσης ότι: αν $C = \{f < 0\}$ τότε $\psi_n \equiv 0$ στο C και $\zeta_n \equiv 0$ στο $A \setminus C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$|\varphi_n| = |\psi_n - \zeta_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leqslant \max\{f^+, f^-\} = |f|.$$

Από την σχέση αυτή και από το γεγονός ότι οι (ψ_n) και (ζ_n) είναι αύξουσες ακολουθίες συναρτήσεων, έπεται επίσης ότι

$$|\varphi_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leqslant \max\{\psi_{n+1}, \zeta_{n+1}\} = |\varphi_{n+1}|.$$

Από τα παραπάνω έπεται το συμπέρασμα. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.2.10 με την Πρόταση 1.2.8 παίρνουμε τον εξής χαρακτηρισμό των μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.2.12. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιάς ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.*

1.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε συνοπτικά τον ορισμό και τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί είναι οι εξής:

(i) Αν το A είναι μετρήσιμο, τότε $\int_A \chi_A \, d\lambda = \lambda(A)$, όπου χ_A είναι η δείκτρια συνάρτηση του A.

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (ορισμένες στο ίδιο μετρήσιμο σύνολο E) και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε

$$\int_E (tf + sg) \, d\lambda = t \int_E f \, d\lambda + s \int_E g \, d\lambda.$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό»: αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $f \geqslant 0$, τότε $\int f \, d\lambda \geqslant 0$. Αφού απαιτούμε και την γραμμικότητα, η θετικότητα είναι ισοδύναμη με την μονοτονία: αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $f \geqslant g$, τότε $\int f \, d\lambda \geqslant \int g \, d\lambda$.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue δίνεται σε τρία βήματα. Τελείως σχηματικά, η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

(i) Αρχικά ορίζουμε το ολοκλήρωμα για κάποιες απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, τους γραμμικούς συνδυασμούς δεικτριών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Ο ορισμός είναι προφανής από τις ιδιότητες (i) και (ii) που απαιτούμε για το ολοκλήρωμα.

(ii) Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του $\int f \, d\lambda$ για κάθε μετρήσιμη $f \geqslant 0$. Η απαίτηση της μονοτονίας και το γεγονός ότι κάθε μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση είναι το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων υποδεικνύουν ότι το $\int f \, d\lambda$ θα μπορούσε να οριστεί ως το supremum των ολοκληρωμάτων $\int \varphi \, d\lambda$ πάνω από όλες τις απλές, μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες $\varphi \leqslant f$.

(iii) Τέλος δίνουμε τον γενικό ορισμό: $\int f \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda$, αν το δεξιό μέλος έχει νόημα. Ο ορισμός αυτός επιβάλλεται από την απαίτηση της γραμμικότητας.

Στην πορεία, συζητάμε τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue. Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρουν οι καλές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα μονότονης σύγκλισης και θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται καλά για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Στην επόμενη παράγραφο δείχνουμε ότι οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue και συγκρίνουμε τα δύο ολοκληρώματα.

1.3.1 Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 1.3.1. Έστω $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η φ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν το σύνολο

$$\{\varphi \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$$

έχει πεπερασμένο μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική αναπαράσταση της φ είναι

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

όπου $a_0 = 0$ και $A_0 = \{\varphi = 0\}$, οι a_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i είναι ξένα και μετρήσιμα, και $\lambda(A_i) < +\infty$ αν $i \neq 0$ (αναγκαστικά, $\lambda(A_0) = \infty$). Το ολοκλήρωμα της φ ορίζεται από την

$$\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i).$$

Αν υιοθετήσουμε την σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda(A_i) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \, \lambda(\{\varphi = a\}).$$

Λήμμα 1.3.2. *Έστω φ ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση και έστω $\varphi = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{E_i}$ τυχούσα αναπαράσταση της φ ώστε τα E_i να είναι ξένα και μετρήσιμα. Τότε,*

$$\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda(E_i).$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό και μονότονο (στην κλάση των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων).

Πρόταση 1.3.3. *Έστω φ και ψ απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $t, s \in \mathbb{R}$, τότε $\int (t\varphi + s\psi) \, d\lambda = t \int \varphi \, d\lambda + s \int \psi \, d\lambda$.*

(ii) *Αν $\varphi \geqslant \psi$, τότε $\int \varphi \, d\lambda \geqslant \int \psi \, d\lambda$.*

Παρατήρηση 1.3.4. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $E_1, \ldots, E_n$ – όχι αναγκαστικά ξένα – μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E_i) < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \right) d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(E_i).$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παρατηρούμε ότι κάθε χ_{E_i} είναι απλή και ολοκληρώσιμη, διότι $\lambda(E_i) < \infty$, συνεπώς το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός 1.3.5. Έστω φ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε

$$\int_E \varphi \, d\lambda := \int \varphi \chi_E \, d\lambda. \tag{1.3.1}$$

Η $\varphi \chi_E$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη: αν $\varphi = \sum a_i \chi_{A_i}$, τότε $\varphi \chi_E = \sum a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum a_i \chi_{A_i \cap E}$ και τα σύνολα $A_i \cap E$ έχουν πεπερασμένο μέτρο, διότι τα σύνολα A_i έχουν πεπερασμένο μέτρο. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (1.3.1) ορίζεται καλά.

Στην περίπτωση που $E = [a, b]$, θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό

$$\int_a^b \varphi \, d\lambda := \int_{[a,b]} \varphi \, d\lambda.$$

Γενικά, θα αποφεύγουμε τον συμβολισμό $\int_a^b \varphi(x) dx$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue (ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το ολοκλήρωμα Riemann).

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μια απλή παρατήρηση. Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη (το $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο). Έχουμε

$$\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0$$

για κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$. Θυμηθείτε ότι η $\chi_{\mathbb{Q}}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

1.3.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.3.6. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως εξής:

$$\int f \, d\lambda = \sup \left\{ \int \varphi \, d\lambda \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη (η μηδενική συνάρτηση είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leqslant f$), μη αρνητική και μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Θα λέμε ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν $\int f \, d\lambda < +\infty$.

Παρατηρήσεις 1.3.7. (α) Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος συμφωνεί με τον ορισμό του ολοκληρώματος που δώσαμε στην περίπτωση των μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή ότι, αν η $\varphi \geqslant 0$ είναι απλή ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int \varphi \, d\lambda = \sup \left\{ \int \psi \, d\lambda \mid 0 \leqslant \psi \leqslant \varphi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Αυτό είναι άμεσο, από τη μονοτονία του ολοκληρώματος απλών συναρτήσεων - Πρόταση 1.3.3 - και από την $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi$.

Παρατηρήστε ότι, με τον νέο ορισμό, έχουμε τώρα ορίσει το $\int \varphi$ για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση (δεν απαιτούμε την $\lambda(\{\varphi \neq 0\}) < \infty$). Ειδικότερα, αν A είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο, τότε $\int \chi_A \, d\lambda = \lambda(A)$. Αυτό έπεται από τον ορισμό στην περίπτωση που $\lambda(A) < \infty$, ενώ αν $\lambda(A) = \infty$ έχουμε $\chi_A \geqslant \chi_{A \cap [-n,n]^d}$ άρα

$$\int \chi_A \, d\lambda \geqslant \sup_n \int \chi_{A \cap [-n,n]^d} \, d\lambda = \sup_n \lambda(A \cap [-n,n]^d) = \lambda(A) = \infty.$$

(β) Από τον ορισμό έπονται άμεσα οι εξής ιδιότητες:

(i) Αν $0 \leqslant f \leqslant g$ τότε $\int f \, d\lambda \leqslant \int g \, d\lambda$.

(ii) Αν $t > 0$ και $f \geqslant 0$ τότε $\int (tf) \, d\lambda = t \int f \, d\lambda$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω E μετρήσιμο σύνολο. Ορίζουμε

$$\int_E f \, d\lambda = \int f \chi_E \, d\lambda. \tag{1.3.2}$$

Αν $f : E \to [0, \infty]$, επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ αν $x \notin E$, και ορίζουμε

$$\int_E f \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda. \tag{1.3.3}$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη και $\int_E \tilde{f} \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$.

(δ) Μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τον Ορισμό 1.3.2:

(iii) Αν $\lambda(E) = 0$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f \, d\lambda = 0$. Πράγματι, αν η φ είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leqslant \varphi \leqslant f \chi_E$, τότε $\varphi \chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ όπου $\lambda(E_i) = 0$, άρα

$$\int \varphi \, d\lambda = \int \varphi \chi_E \, d\lambda = 0.$$

(iv) Αν $E \subseteq F$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f \, d\lambda \leqslant \int_F f \, d\lambda$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f \chi_E \leqslant f \chi_F$.

(v) Αν $0 \leqslant f \leqslant M$ στο E, τότε $\int_E f \, d\lambda \leqslant M \lambda(E)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f \chi_E \leqslant M \chi_E$.

Η ανισότητα της επόμενης πρότασης είναι απλή αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαιρετικά σημαντική.

Θεώρημα 1.3.8 (ανισότητα του Markov). *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a > 0$,*

$$\int f\, d\lambda \geqslant \int_{\{f \geqslant a\}} f\, d\lambda \geqslant a\, \lambda(\{x : f(x) \geqslant a\}).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $f \geqslant a$ στο $\{f \geqslant a\}$. Άρα,

$$\int f\, d\lambda \geqslant \int_{\{f \geqslant a\}} f\, d\lambda \geqslant \int_{\{f \geqslant a\}} a\, d\lambda = a\, \lambda(\{f \geqslant a\}).$$

□

Πόρισμα 1.3.9. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η f παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού: $\lambda(\{f = +\infty\}) = 0$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \geqslant n\}.$$

Από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$0 \leqslant \lambda(\{f = +\infty\}) \leqslant \lambda(E_n) \leqslant \frac{1}{n} \int f\, d\lambda \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα, $\lambda(\{f = +\infty\}) = 0$. □

Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Μεταξύ άλλων, θα μας εξασφαλίσει τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 1.3.10. *Έστω φ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν (E_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε*

$$\int_E \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, όπου $a_i > 0$ και τα A_i είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα με πεπερασμένο μέτρο. Τότε,

$$\int_E \varphi\, d\lambda = \int \varphi \chi_E\, d\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(A_i \cap E).$$

Αφού $E_n \nearrow E$, έχουμε $\lambda(A_i \cap E_n) \nearrow \lambda(A_i \cap E)$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Άρα,

$$\begin{aligned} \int_E \varphi\, d\lambda &= \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lim_{n\to\infty} \lambda(A_i \cap E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda(A_i \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi\, d\lambda. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.3.11 (θεώρημα μονότονης σύγκλισης). *Έστω (f_n) αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda.$$

Απόδειξη. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x)$$

ορίζεται καλά, είναι μη αρνητική και μετρήσιμη. Επίσης,

$$\int f_n\,d\lambda \leqslant \int f_{n+1}\,d\lambda \leqslant \int f\,d\lambda$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα το $\lim\int f_n\,d\lambda$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \leqslant \int f\,d\lambda.$$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε το εξής: Για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση φ με $0\leqslant\varphi\leqslant f$,

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \geqslant (1-\varepsilon)\int \varphi\,d\lambda.$$

Στην περίπτωση που $\int f\,d\lambda<\infty$, παίρνοντας supremum ως προς φ παίρνουμε $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \geqslant (1-\varepsilon)\int f\,d\lambda$ για κάθε $0<\varepsilon<1$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που $\int f\,d\lambda=\infty$, παίρνοντας πάλι supremum ως προς φ, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda = +\infty = \int f\,d\lambda$.

Έστω φ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0\leqslant\varphi\leqslant f$. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συνόλων $E_n=\{f_n\geqslant(1-\varepsilon)\varphi\}$. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, έχουμε $E_n\subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Δηλαδή, η (E_n) είναι αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι αν $f(x)>0$, τότε $f_n(x)\to f(x)>(1-\varepsilon)\varphi(x)$, άρα $x\in\bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Αν πάλι $f(x)=0$, τότε $\varphi(x)=0$, άρα $x\in E_n$ για κάθε n. Επομένως, $E_n\nearrow\mathbb{R}^d$. Από τη μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\int f_n\,d\lambda \geqslant \int_{E_n} f_n\,d\lambda \geqslant \int_{E_n}(1-\varepsilon)\varphi\,d\lambda = (1-\varepsilon)\int_{E_n}\varphi\,d\lambda$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.10 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \geqslant (1-\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi\,d\lambda = (1-\varepsilon)\int\varphi\,d\lambda.$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας λέει ότι αν μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_n αυξάνει κατά σημείο στην f, τότε μπορούμε να «εναλλάξουμε τα όρια»: το ολοκλήρωμα του ορίου είναι το όριο των ολοκληρωμάτων. Το λήμμα του Fatou που ακολουθεί μας δίνει αντίστοιχη πληροφορία στην περίπτωση που έχουμε κατά σημείο σύγκλιση αλλά δεν έχουμε την υπόθεση της μονοτονίας για την ακολουθία (f_n).

Θεώρημα 1.3.12 (λήμμα του Fatou). *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n), όπου $g_n = \inf\{f_k : k \geqslant n\}$. Κάθε g_n είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, η (g_n) είναι αύξουσα, και

$$g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \leqslant f_k$ για κάθε $k \geqslant n$, οπότε η μονοτονία του ολοκληρώματος μας δίνει

$$\int g_n \, d\lambda \leqslant b_n := \inf_{k\geqslant n} \int f_k \, d\lambda.$$

Η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n \int f_n \, d\lambda$. Άρα,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

□

Πόρισμα 1.3.13. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f_n \to f$ σ.π. και το $\lim_n \int f_n \, d\lambda$ υπάρχει, τότε*

$$\int f \, d\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να δώσουμε μια πληρέστερη διατύπωση του Θεωρήματος 1.2.10 για την προσέγγιση μιας μετρήσιμης συνάρτησης από απλές.

Θεώρημα 1.3.14. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ψ_n) μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\psi_n \leqslant f$ με τις εξής ιδιότητες: $f = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$ και $\int f \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\lambda$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.2.10 υπάρχει αύξουσα ακολουθία (φ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\varphi_n \nearrow f$. Ορίζουμε $\psi_n = \varphi_n \chi_{[-n,n]^d}$. Κάθε ψ_n είναι ολοκληρώσιμη, γιατί $\lambda(\{\psi_n \neq 0\}) \leqslant \lambda([-n,n]^d) < \infty$. Αφού $\chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$, εύκολα ελέγχουμε ότι $\psi_n \nearrow f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\int \psi_n \, d\lambda \nearrow \int f \, d\lambda$. □

Έχοντας στην διάθεσή μας το προηγούμενο θεώρημα, και χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.3.15. *Έστω f και g μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int (f+g)\,d\lambda = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda.$$

Ειδικότερα, αν E και F είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα, τότε

$$\int_{E\cup F} f\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda + \int_F f\,d\lambda.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.14, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (φ_n) και (ψ_n) μη αρνητικών, απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\varphi_n \nearrow f$ και $\psi_n \nearrow g$. Τότε, $\varphi_n + \psi_n \nearrow f+g$ και, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int(\varphi_n+\psi_n)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(\int \varphi_n\,d\lambda + \int\psi_n\,d\lambda\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n\,d\lambda + \lim_{n\to\infty}\int\psi_n\,d\lambda = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda.\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις. Το δεύτερο συμπέρασμα του Θεωρήματος προκύπτει από το πρώτο αν θεωρήσουμε τις $f\chi_E$ και $f\chi_F$: αφού τα E και F είναι ξένα, έχουμε $f\chi_E + f\chi_F = f\chi_{E\cup F}$. □

Το θεώρημα Beppo-Levi είναι ουσιαστικά αναδιατύπωση του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης: το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

Θεώρημα 1.3.16 (Beppo-Levi). *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\lambda.$$

Απόδειξη. Οι f_n είναι μη αρνητικές, επομένως η $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται καλά και είναι το κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ (υπάρχει βέβαια το ενδεχόμενο να έχουμε $f(x)=\infty$ για κάποια x).

Από την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

$$\int s_N\,d\lambda = \int\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)d\lambda = \sum_{n=1}^{N}\int f_n\,d\lambda \nearrow \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\lambda.$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας εξασφαλίζει ότι

$$\int s_N\,d\lambda \nearrow \int f\,d\lambda = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)d\lambda,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1.3.17. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και έστω (E_n) ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε,*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f\,d\lambda.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $f_n = f\chi_{E_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Αφού τα E_n είναι ξένα, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f\,\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$. □

Ορισμός 1.3.18. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Μια συνάρτηση $\Phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται μέτρο στην $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί τα εξής:

- $\Phi(\varnothing) = 0$.
- Αν (E_n) είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε $\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$.

Το μέτρο Lebesgue λ στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι ένα παράδειγμα μέτρου.

Σύμφωνα με αυτόν τον γενικό ορισμό, τα αποτελέσματά μας για το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων δείχνουν το εξής:

Θεώρημα 1.3.19. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση $\Phi_f : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ ως εξής: αν $E \in \mathcal{M}$, θέτουμε*

$$\Phi_f(E) = \int_E f\, d\lambda.$$

Τότε, η Φ_f είναι μέτρο.

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι το μέτρο Lebesgue λ αντιστοιχεί στη συνολοσυνάρτηση Φ που ορίζεται από τη σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$.

1.3.3 Η γενική περίπτωση

Ορισμός 1.3.20. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμες και μη αρνητικές. Επίσης, ικανοποιούν τις

$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Τα ολοκληρώματα $\int f^+\, d\lambda$ και $\int f^-\, d\lambda$ ορίζονται καλά και αν τουλάχιστον μία από τις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμη, τότε το ολοκλήρωμα της f ορίζεται από την

$$\int f\, d\lambda = \int f^+\, d\lambda - \int f^-\, d\lambda$$

(μπορεί βέβαια να παίρνει την τιμή $+\infty$ ή $-\infty$). Αν οι f^+, f^- είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες, τότε το ολοκλήρωμα της f είναι πραγματικός αριθμός και λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Αν η $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο E αν

$$\int_E f^+\, d\lambda = \int f^+\chi_E\, d\lambda < \infty \quad \text{και} \quad \int_E f^-\, d\lambda = \int f^-\chi_E\, d\lambda < \infty,$$

και ορίζουμε

$$\int_E f\, d\lambda = \int_E f^+\, d\lambda - \int_E f^-\, d\lambda = \int f\chi_E\, d\lambda.$$

(γ) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε επεκτείνουμε την f στον $\mathbb{R}^d$ θέτοντας $f \equiv 0$ στο E^c, συνεπώς,

$$\int_E f \, d\lambda = \int f \, \chi_E \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Παρατηρήσεις 1.3.21. (α) Αν $f \geqslant 0$ τότε $f = f^+$ και $f^- \equiv 0$, συνεπώς ο ορισμός που δώσαμε συμφωνεί με αυτόν της προηγούμενης ενότητας.

(β) Από τον ορισμό είναι φανερό ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\int |f| \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda + \int f^- \, d\lambda < +\infty,$$

δηλαδή αν και μόνο αν η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (θυμηθείτε ότι αυτό δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann). Σε αυτή την περίπτωση,

$$\left| \int f \, d\lambda \right| \leqslant \int |f| \, d\lambda.$$

(γ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε $\lambda(\{f^+ = +\infty\}) = \lambda(\{f^- = +\infty\}) = 0$, άρα η f είναι πεπερασμένη – δηλαδή $|f(x)| < \infty$ – σχεδόν παντού.

(δ) Αν $\lambda(E) = 0$, τότε $\int_E f \, d\lambda = 0$, διότι $\int_E f^+ \, d\lambda = 0$ και $\int_E f^- \, d\lambda = 0$.

(ε) Αν οι f και g είναι μετρήσιμες, η g είναι ολοκληρώσιμη, και $|f| \leqslant |g|$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f| \, d\lambda \leqslant \int |g| \, d\lambda$.

(στ) Αν $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int f \, d\lambda = \int f_1 \, d\lambda - \int f_2 \, d\lambda.$$

Πράγματι, από την $f^+ - f^- = f_1 - f_2$ παίρνουμε $f^+ + f_2 = f^- + f_1$, άρα

$$\int f^+ \, d\lambda + \int f_2 \, d\lambda = \int f^- \, d\lambda + \int f_1 \, d\lambda,$$

δηλαδή

$$\int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda = \int f_1 \, d\lambda - \int f_2 \, d\lambda,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ζ) Αν $\lambda(E) < \infty$ και η $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Δείχνουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 1.3.22 (γραμμικότητα). *Έστω $f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f + g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού και*

$$\int_E (f + g) \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda + \int_E g \, d\lambda.$$

Επίσης, αν $t \in \mathbb{R}$ τότε η tf είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int (tf) \, d\lambda = t \int f \, d\lambda.$$

Απόδειξη. Αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, παίρνουν πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού, άρα η $f+g$ ορίζεται σχεδόν παντού. Επίσης,

$$(f+g)^+ \leqslant f^+ + g^+ \quad \text{και} \quad (f+g)^- \leqslant f^- + g^-,$$

άρα

$$\int (f+g)^+ \, d\lambda < +\infty \quad \text{και} \quad \int (f+g)^- \, d\lambda < +\infty,$$

δηλαδή η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Γράφουμε $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Τότε, από την Παρατήρηση 1.3.21 (στ) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int (f+g) \, d\lambda &= \int (f^+ + g^+) \, d\lambda - \int (f^- + g^-) \, d\lambda \\ &= \int f^+ \, d\lambda + \int g^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda - \int g^- \, d\lambda \\ &= \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda. \end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι: αν $t > 0$, τότε $(tf)^+ = tf^+$ και $(tf)^- = tf^-$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) \, d\lambda = \int (tf)^+ \, d\lambda - \int (tf)^- \, d\lambda = t \int f^+ \, d\lambda - t \int f^- \, d\lambda = t \int f \, d\lambda.$$

Αν $t < 0$, τότε $(tf)^+ = -tf^-$ και $(tf)^- = -tf^+$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) \, d\lambda = \int (tf)^+ \, d\lambda - \int (tf)^- \, d\lambda = -t \int f^- \, d\lambda + t \int f^+ \, d\lambda = t \int f \, d\lambda.$$

Αν $t = 0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. □

Ειδικότερα, το προηγούμενο θεώρημα δείχνει ότι αν E είναι ένα μετρήσιμο σύνολο τότε το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι γραμμικός χώρος.

Θεώρημα 1.3.23 (μονοτονία)**.** *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες και $f \leqslant g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f \, d\lambda \leqslant \int g \, d\lambda$. Ειδικότερα, αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda$.*

Απόδειξη. Από την $f \leqslant g$ έπεται ότι $f^+ \leqslant g^+$ και $f^- \geqslant g^-$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda \leqslant \int g^+ \, d\lambda - \int g^- \, d\lambda,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.3.24 (προσθετικότητα)**.** *Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω (E_n) ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε,*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\lambda.$$

Απόδειξη. Προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα των f^+ και f^- (αφήνεται ως άσκηση). □

Το βασικό θεώρημα σύγκλισης για ακολουθίες γενικών (όχι αναγκαστικά μη αρνητικών) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα 1.3.25 (θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης)**.** *Έστω $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού και ότι υπάρχει $g : E \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού. Τότε, οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες, και*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda.$$

Απόδειξη. Αφού $|f_n| \leqslant g$ και η g είναι ολοκληρώσιμη, κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη, από την Παρατήρηση 1.3.21 (ε). Η f είναι μετρήσιμη ως όριο (σχεδόν παντού) μετρήσιμων συναρτήσεων, και

$$|f_n| \leqslant g \Longrightarrow |f| \leqslant g.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Για να δείξουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας των ολοκληρωμάτων, θα εφαρμόσουμε το λήμμα του Fatou για τις ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(g+f_n)$ και $(g-f_n)$ (παρατηρήστε ότι $|f_n| \leqslant g \Longrightarrow -g \leqslant f_n \leqslant g$).

Αφού $g + f_n \to g + f$ και $g - f_n \to g - f$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_E g \, d\lambda + \int_E f \, d\lambda &= \int_E (g+f) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E (g+f_n) \, d\lambda \\ &= \int_E g \, d\lambda + \liminf_n \int_E f_n \, d\lambda\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_E g \, d\lambda - \int_E f \, d\lambda &= \int_E (g-f) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E (g-f_n) \, d\lambda \\ &= \int_E g \, d\lambda - \limsup_n \int_E f_n \, d\lambda.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\limsup_n \int_E f_n \, d\lambda \leqslant \int_E f \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E f_n \, d\lambda,$$

το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 1.3.26 (θεώρημα φραγμένης σύγκλισης)**.** *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < +\infty$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ και ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ στο E για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda.$$

Απόδειξη. Αφού $\lambda(E) < +\infty$, η σταθερή συνάρτηση $g \equiv M$ είναι ολοκληρώσιμη στο E. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. □

1.4 Σύγκριση του ολοκληρώματος Lebesgue με το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Θα γράφουμε $(R)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $(L)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (αν αυτά υπάρχουν). Όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και*

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to (R)\int_a^b f \ \ , \ \ U(f,P_n) \to (R)\int_a^b f.$$

Έστω ℓ_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Τότε,

$$\ell_n \leqslant f \leqslant u_n.$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$, και $\ell \leqslant f \leqslant u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$(L)\int_a^b u = \lim_n \int_a^b u_n = \lim_n U(f,P_n) = (R)\int_a^b f$$

και

$$(L)\int_a^b \ell = \lim_n \int_a^b \ell_n = \lim_n L(f,P_n) = (R)\int_a^b f.$$

Αφού $\ell \leqslant u$ και $\int_a^b \ell = \int_a^b u$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leqslant f \leqslant u$, προκύπτει ότι

$$\ell = f = u \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Άρα, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων. Αυτό αποδεικνύει το (i).

Αφού η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος,

$$(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b u = (R)\int_a^b f,$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει το (ii). □

Σημείωση. Όπως έχουμε ήδη δεί, η κλάση των φραγμένων Lebesgue ολοκληρώσιμων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού. Πριν δώσουμε την ακριβή διατύπωση, πρέπει να τονίσουμε ότι η συνθήκη «συνεχής σχεδόν παντού» είναι τελείως διαφορετική από την «σχεδόν παντού ίση με συνεχή συνάρτηση». Για παράδειγμα, η δείκτρια συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την συνεχή (σταθερή) μηδενική συνάρτηση, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $[a, b]$. Από την άλλη πλευρά, η $\chi_{[0,1/2]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού (παντού εκτός από το σημείο $1/2$) αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με καμία συνεχή $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί). Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι οι δύο συνθήκες δεν συγκρίνονται.

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\lambda(\{x \in [a, b] : \ \eta\ f \ \text{είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0.$$

1.5 Κλασικά αποτελέσματα

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε κάποια κλασικά αποτελέσματα για το μέτρο και το ολοκλήρωμα Lebesgue, τα οποία αναπτύσσονται διεξοδικά στο μάθημα της θεωρίας μέτρου. Ο αναγνώστης μπορεί να τα παραλείψει για την ώρα και στην πορεία, όταν και εάν εμφανιστούν, να ανατρέξει στις ενότητες αυτής της παραγράφου που θα του χρειαστούν.

1.5.1 Το λήμμα του Steinhaus και το σύνολο του Vitali

Στην Παράγραφο 1.1 ορίσαμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ και τη μεγαλύτερη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Είδαμε ότι ισχύουν οι εγκλεισμοί

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d).$$

Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Σε αυτή την ενότητα θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Steinhaus.

Θεώρημα 1.5.1 (Steinhaus). *Αν A είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$B(0, \delta) \subseteq A - A.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(A) < \infty$. Στην περίπτωση που ισχύει $\lambda(A) = \infty$ μπορούμε να βρούμε (από την εσωτερική κανονικότητα για παράδειγμα) $B \in \mathcal{M}$ με $B \subseteq A$ και $0 < \lambda(B) < \infty$. Έτσι, αν για κάποιο $\delta > 0$ ισχύει $B(0, \delta) \subseteq B - B$ θα έχουμε και $B(0, \delta) \subseteq A - A$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \lambda(A) < \infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.12, υπάρχουν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές και $G \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό ώστε $K \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon, \quad \lambda(K) > \lambda(A) - \varepsilon.$$

Έχουμε $K \subseteq G$, άρα ορίζεται καλά η απόσταση

$$\delta := \mathrm{dist}(K, G^c) > 0.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $z \in K$ ισχύει $B(z,\delta) \subseteq G$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι το δ που ψάχνουμε. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ με $\|x\| < \delta$ γράφεται ως διαφορά δύο στοιχείων του A. Θα αποδείξουμε το εξής ισχυρότερο:

Ισχυρισμός. $B(0,\delta) \subseteq K - K$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^d$ με $\|x\| < \delta$. Θα βρούμε $z_1, z_2 \in K$ ώστε $x = z_1 - z_2$. Ισοδύναμα, ψάχνουμε $z \in K$ τέτοιο ώστε $x + z \in K$. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο z, τότε $K \cap (K + x) = \varnothing$, άρα

$$\lambda(K \cup (K+x)) = \lambda(K) + \lambda(K+x) = 2\lambda(K) > 2\lambda(A) - 2\varepsilon$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς μεταφορές. Όμως $K \subseteq G$ και επιπλέον $K+x \subseteq G$, αφού αν $y \in K + x$, υπάρχει $z \in K$ ώστε $\|y - z\| = \|x\| < \delta$ και άρα $y \in G$. Συνεπώς,

$$\lambda(K \cup (K+x)) \leqslant \lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Τελικά, είναι:

$$2\lambda(A) - 2\varepsilon < \lambda(A) + \varepsilon$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda(A) < 3\varepsilon.$$

Εφ' όσον το $\varepsilon > 0$ με το οποίο ξεκινήσαμε ήταν τυχαίο, έχουμε $\lambda(A) = 0$ που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση. □

Θεώρημα 1.5.2 (Vitali)**.** *Υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $\mathbb{R}^d$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^d.$$

Η $\sim$ χωρίζει τον $\mathbb{R}^d$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in \mathbb{Q}^d\}.$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a : a \in A\} \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}^d$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}^d$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

(i) Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \varnothing$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}^d$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του E.

(ii) $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}^d$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q}^d$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}^d) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E).$$

Συνεπώς, $\lambda(E) > 0$. Από το Θεώρημα Steinhaus, το $E - E$ περιέχει ανοικτή μπάλα $B(0,\delta)$ για κάποιον $\delta > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι υπάρχουν μη μηδενικά ρητά σημεία $q \in \mathbb{Q}^d \cap B(0,\delta)$ και το $E - E$ δεν μπορεί να περιέχει ρητό σημείο διαφορετικό από το 0: αν $x \neq y$ στο E τότε ο $x - y$ είναι άρρητος, από τον τρόπο ορισμού του E. Έπεται ότι το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. $\square$

Μιμούμενοι αυτή την απόδειξη μπορούμε να δείξουμε το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με θετικό μέτρο, τότε υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subseteq A$.

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

1.5.2 Το σύνολο του Cantor

Το σύνολο του Cantor ορίζεται ως η τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$. Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει. Το C_1 αποτελείται από δύο ξένα κλειστά διαστήματα μήκους $1/3$. Χωρίζουμε καθένα από αυτά σε τρία ίσα διαστήματα, από καθένα από αυτά αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα, και ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.

(ii) Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το σύνολο του Cantor είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Τα διαστήματα της μορφής $\big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \dots, 3^n - 1$, ονομάζονται τριαδικά διαστήματα.

Το C είναι μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) Το C είναι τέλειο σύνολο, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C: Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C, παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C.

(β) Το C έχει μέτρο ίσο με 0: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda(C) = 0$. Ειδικότερα, το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(γ) Το C είναι υπεραριθμήσιμο: Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = \big\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} : \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\big\}.$$

Το $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής: Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

- $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = \big[0, 1/3\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[0, 1/3\big]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = \big[2/3, 1\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[2/3, 1\big]$).
- *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = \big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $\big[k/3^n, (k/3^n) + (1/3^{n+1})\big]$, $\big[(k/3^n) + (2/3^{n+1}), (k+1)/3^n\big]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x - y| \leqslant \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

- $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = \big[0, 1/3\big]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = \big[2/3, 1\big]$ αν $\alpha_1 = 2$.

- Γενικά, το I_{n+1} ορίζεται να είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1}=0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1}=2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της Φ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor. Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται τριαδική παράσταση του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \ldots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει τριαδική παράσταση. Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Γενικά, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leqslant k \leqslant 3^n$ (αφήνεται ως άσκηση). Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 1.5.3. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.*

1.5.3 Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να δείξουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}$ περιέχεται γνήσια στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Εισάγουμε την συνάρτηση Cantor-Lebesgue, και χρησιμοποιώντας την αποδεικνύουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel.

Θεωρούμε τα σύνολα C_n που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνόλου C του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \ldots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, $f_n(x)=\frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.

Για παράδειγμα, έχουμε $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Η f_1 είναι σταθερή και ίση με $1/2$ στο $(1/3,2/3)$, γραμμική στο $[0,1/3]$ με $f(0)=0$ και $f(1/3)=1/2$, γραμμική στο $[2/3,1]$ με $f(2/3)=1/2$ και $f(1)=1$. Στο δεύτερο βήμα, το $[0,1] \setminus C_2$ αποτελείται από τρία ξένα ανοικτά διαστήματα: στο $(1/9,2/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/4$, στο $(1/3,2/3)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/2$, στο $(7/9,8/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $3/4$, ενώ σε καθένα από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα του C_2 την επεκτείνουμε γραμμικά σε συνεχή συνάρτηση, ορίζοντας πάλι $f_2(0)=0$ και $f_2(1)=1$.

Πρόταση 1.5.4 (συνάρτηση Cantor-Lebesgue)**.** *Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί του $[0,1]$. Η εικόνα του C μέσω της f έχει μέτρο $\lambda(f(C))=1$.*

Απόδειξη. Από την κατασκευή της η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Κάθε f_n είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f_n(0)=0$ και $f_n(1)=1$.

(ii) Αν J_k^n είναι κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρούμε στο n-οστό βήμα της κατασκευής του C, τότε η f_n είναι σταθερή στο J_k^n, και

$$f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \cdots$$

στο J_k^n.

(iii) Ισχύει

$$\|f_{n+1}-f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Από την τρίτη ιδιότητα ελέγχουμε εύκολα ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $C[0,1]$: αν $m>n$ τότε

$$\|f_m-f_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\|f_{k+1}-f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$$

όταν $m,n\to\infty$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα.

Προφανώς, $f_n\to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Αφού κάθε f_n είναι αύξουσα συνάρτηση με $f_n(0)=0$ και $f_n(1)=1$, έπεται ότι η f είναι κι αυτή αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Ειδικότερα, η f είναι επί του $[0,1]$.

Τέλος, $f(C)=[0,1]$. Πράγματι, από την δεύτερη ιδιότητα της $\{f_n\}$ βλέπουμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα J του συμπληρώματος του C, και μάλιστα αυτή η σταθερή τιμή παίρνεται και στα άκρα του J τα οποία ανήκουν στο C. Αφού η f είναι επί του $[0,1]$, κάθε $y\in[0,1]$ είναι ίσο με $f(x)$ για κάποιο $x\in C$. Από την $f(C)=[0,1]$ είναι φανερό ότι $\lambda(f(C))=1$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\lambda([0,1]\setminus C)=1$ και $f'(x)=0$ για κάθε $x\notin C$. Πράγματι, αν $x\notin C$ τότε το x ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα J στο οποίο η f είναι σταθερή. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x)=0$. Με άλλα λόγια, η f' είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, παρόλο που η f είναι αύξουσα και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 1.5.5. *Έστω A σύνολο Borel στο $\mathbb{R}$ και έστω $f:A\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel σύνολο $B\subseteq\mathbb{R}$, το $f^{-1}(B)=\{x\in A: f(x)\in B\}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}=\{B\subseteq\mathbb{R}:\ \text{το } f^{-1}(B)\ \text{είναι σύνολο Borel}\}.$$

Αν B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό στο A, διότι η f είναι συνεχής. Αφού το A είναι σύνολο Borel, έπεται ότι το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel (εξηγήστε γιατί).

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα – οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα, συμπεραίνουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε Borel συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel. □

Πρόταση 1.5.6. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η g^{-1}).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$. Πράγματι, το $g(C)$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου C, άρα είναι μετρήσιμο. Επίσης, η g απεικονίζει κάθε ανοικτό διάστημα J του $[0,1]\setminus C$ στο $\{f(J)\} + J$, δηλαδή σε διάστημα ίσου μήκους. Άρα $\lambda(g([0,1]\setminus C)) = \sum \lambda(J) = 1$. Έπεται ότι $\lambda(g(C)) = 1$.

Αφού το $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το K δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, από το Λήμμα 1.5.5 το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το M θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. □

1.5.4 Οι τρεις αρχές του Littlewood

Οι τρεις «αρχές του Littlewood» διατυπώνονται με κάπως «έντονο τρόπο» ως εξής:

(i) Κάθε σύνολο είναι σχεδόν ίσο με μια πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.

(ii) Κάθε συνάρτηση είναι σχεδόν συνεχής.

(iii) Κάθε ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο, συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

Φυσικά, πρέπει να δώσει κανείς την ακριβή διατύπωση αυτών των ισχυρισμών (αλλιώς, είναι προφανώς λανθασμένοι). Τα σύνολα και οι συναρτήσεις στα οποία αναφερόμαστε πρέπει να είναι μετρήσιμα και το τι εννοούμε λέγοντας «σχεδόν» πρέπει να γίνει σαφές. Η χρησιμότητα όμως αυτών των προτάσεων είναι μεγάλη.

Θεώρημα 1.5.7 (μετρήσιμα σύνολα)**.** *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $I_1, \dots, I_k$ ώστε το σύνολο $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ να ικανοποιεί την $\lambda(E \triangle A) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του (εξωτερικού) μέτρου, υπάρχει ακολουθία (I_n) διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η σειρά των $\lambda(I_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ορίζουμε $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(E \setminus A) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) - \lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$A \setminus E = A \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_k) \subseteq \bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n,$$

άρα

$$\lambda(A \setminus E) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\lambda(A \triangle E) = \lambda(A \setminus E) + \lambda(E \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.5.8 (θεώρημα Egorov). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω (f_k) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_k : A \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ σχεδόν παντού στο A. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k \to f$ παντού στο A (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{n,m} = \left\{x \in A : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ για κάθε } k \geqslant m\right\} = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\}.$$

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι

$$A_{n,m+1} = \bigcap_{k=m+1}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} \supseteq \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} = A_{n,m}$$

δηλαδή, η ακολουθία $(A_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Παρατηρήστε επίσης ότι, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_k(x) - f(x)| < 1/n$ για κάθε $k \geqslant m$, διότι $f_k(x) \to f(x)$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_{n,m}$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

Από τη συνέχεια του μέτρου Lebesgue, $\lambda(A_{n,m}) \to \lambda(A)$. Άρα, μπορούμε να βρούμε $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\lambda(A) < \lambda(A_{n,m_n}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}. \tag{1.5.1}$$

Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,m_n}.$$

Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε. Αυτό αιτιολογείται ως εξής: έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \delta$. Τότε, για κάθε $k \geqslant m_n$ και για κάθε $x \in U_\varepsilon$ έχουμε $x \in A_{n,m_n}$, άρα

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \delta.$$

Δηλαδή, $\|(f_k - f)\,|_{U_\varepsilon}\|_\infty < \delta$ για κάθε $k \geqslant m_n$.

Επίσης, από την (1.5.1) βλέπουμε ότι

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_{n,m_n})\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_{n,m_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε όμως να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

και από το γεγονός ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε είναι φανερό ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε. □

Παρατήρηση 1.5.9. Η υπόθεση ότι $\lambda(A) < +\infty$ είναι απαραίτητη. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k = \chi_{[k,\infty)}$, τότε $f_k(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως, για κάθε μετρήσιμο $C \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(C) < +\infty$ ισχύει $\|f_k\,|_{\mathbb{R}\setminus C}\|_\infty = 1$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_k) στην μηδενική συνάρτηση σε κάποιο σύνολο F_ε για το οποίο $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες.

Θεώρημα 1.5.10 (θεώρημα Luzin). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και η $f\,|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι η δείκτρια συνάρτηση $f = \chi_E$ κάποιου μετρήσιμου υποσυνόλου του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε F κλειστό υποσύνολο του A και G ανοικτό στο A ώστε $V \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon/2$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $F_1 = V \cup (A \setminus G)$. Τα $V, A \setminus G$ είναι κλειστά στο A και έχουμε $f \equiv 1$ στο V και $f \equiv 0$ στο $A \setminus G$. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι η $f|_{F_1}$ είναι συνεχής (εξηγήστε το, για παράδειγμα, με την αρχή της μεταφοράς). Κατόπιν, μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq F_1$ με $\lambda(F_1 \setminus F) < \varepsilon/2$. Τότε, $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$ και η $f|_F$ είναι συνεχής.

Απο τις δείκτριες συναρτήσεις μετρήσιμων υποσυνόλων του A μπορούμε τώρα να περάσουμε σε συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{E_i}, \tag{1.5.2}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και E_i μετρήσιμα υποσύνολα του A (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Έστω τώρα $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Από το Θεώρημα 1.2.10 (και το Πόρισμα 1.2.11) υπάρχει ακολουθία (φ_n) συναρτήσεων της μορφής (1.5.2) ώστε $\varphi_n \to f$ στο A. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_n \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}$ ώστε η $\varphi_n|_{A_n}$ να είναι συνεχής. Επίσης, από το θεώρημα του Egorov μπορούμε να βρούμε $B \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus B) < \varepsilon/4$ ώστε $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B. Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Τότε,

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) \leqslant \lambda(A \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης, όλες οι $\varphi_n|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχείς (διότι $U_\varepsilon \subseteq A_n$ για κάθε n) και $\varphi_n|_{U_\varepsilon} \to f|_{U_\varepsilon}$ ομοιόμορφα (διότι $U_\varepsilon \subseteq B$). Έπεται ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής.

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε όμως να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

και από το γεγονός ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής είναι φανερό ότι η $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής. □

1.6 Ασκήσεις

1. (α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

2. (α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

3. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t > 0$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(tA) = t\,\lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.
Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

4. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Αποδείξτε ότι
$$\lambda^*(A\cup B)=\lambda^*(A)+\lambda^*(B).$$

5. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\Gamma=\{(x,f(x)):a\leqslant x\leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.

6. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κλειστό $F\subseteq\mathbb{R}$ με $F\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus F)<\varepsilon$.

(iii) Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma\subseteq A$ και $\lambda^*\big(A\setminus\Gamma\big)=0$.

7. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0<\lambda(A)<+\infty$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\lambda(A\cap(-\infty,x])$ είναι συνεχής.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F\subseteq A$ και $\lambda(F)=\lambda(A)/2$.

8. (α) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα
$$\limsup A_n=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$
και
$$\liminf A_n=\{x\in\mathbb{R}\mid \text{ υπάρχει } n_0(x)\in\mathbb{N} \text{ ώστε } x\in A_n \text{ για κάθε } n\geqslant n_0(x)\}.$$
Αποδείξτε ότι
$$\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k \;\text{ και }\; \liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$
(β) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(ii) $\lambda(\liminf A_n)\leqslant\liminf\lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)<+\infty$ τότε
$$\limsup\lambda(A_n)\leqslant\lambda(\limsup A_n).$$

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)<+\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n)=0$.

9. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda_k(E)<\infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c>0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n)\geqslant c$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lambda_k(\limsup A_n)>0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{k_n}\neq\emptyset.$$

10. Έστω $\varepsilon>0$. Έστω A το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A)=0$.

11. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ και $\lambda^*(A)=0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.

(iii) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

(v) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.

12. (α) Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(β) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

13. Για κάθε $x \in [0, 1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

(i) $A_1 = \{x \in [0, 1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0, 1) \mid x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0, 1) \mid \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \ldots, \ x_n \neq 5\}$.

14. Έστω $\vartheta \in (0, 1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\vartheta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_ϑ «τύπου Cantor». Αποδείξτε ότι:

(α) Το C_ϑ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.
(β) Το C_ϑ είναι υπεραριθμήσιμο.
(γ) Το C_ϑ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\vartheta) = 1 - \vartheta > 0$.

15. Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Αποδείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ αποδείξτε ότι το $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Αποδείξτε ότι $A \subseteq [0, 1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Αποδείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

16. Δώστε παράδειγμα ανοικτού υποσυνόλου G του $[0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: το σύνορο του $\overline{G}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue.

17. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

18. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Αποδείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, αποδείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

19. (α) Αποδείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

20. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

21. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x, y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x, y)$ είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

22. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)|\, d\lambda < \infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \subseteq [0, 1]$ μετρήσιμο και $M > 0$ ώστε $\lambda([0, 1] \setminus A) < \varepsilon$ και, για κάθε $x \in A$, $\sup_n |f_n(x)| \leqslant M$.

23. Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0, 1]$. Συμβολίζουμε με f_n την δείκτρια συνάρτηση του I_n.

(α) Αν $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

24. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geqslant 1/n\}} f\, d\lambda.$$

25. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \leqslant n\}} f\, d\lambda.$$

26. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f\, d\lambda > \int f\, d\lambda - \varepsilon.$$

Επιπλέον, αποδείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

27. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f\, d\lambda < \varepsilon$.

28. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda < \infty.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

29. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \, d\lambda \to \int g \, d\lambda$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda$.

30. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Αποδείξτε ότι $\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \, d\lambda \to \int |f| \, d\lambda$.

31. Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, d\lambda < +\infty$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

32. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f \, d\lambda \geqslant \delta$.

33. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x) \, d\lambda(x) = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

34. Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

35. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \to 0.$$

36. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x).$$

37. Έστω $f : [0,1] \to [1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

2.1 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Γνωρίζουμε ότι αν $x \in [a,b]$ και η f είναι συνεχής στο x τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x και $F'(x) = f(x)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, η F είναι παραγωγίσιμη στο x αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

το οποίο, στην περίπτωσή μας, παίρνει την μορφή

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \lim_{|I|\to 0} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy$$

αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $I = (x, x+h)$ και γράψουμε $|I|$ για το μήκος του διαστήματος I. Θα αλλάξουμε λίγο το πλαίσιο, θεωρώντας το όριο

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy,$$

όπου, πλέον, θεωρούμε όλα τα ανοικτά διαστήματα I τα οποία περιέχουν το x και αφήνουμε το μήκος τους να πάει στο μηδέν. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy$ είναι η μέση τιμή της f στο διάστημα I. Πάλι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy = f(x)$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της f (άρα, σχεδόν παντού στο $[a, b]$).

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: δίνεται μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (θα γράφουμε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$). Είναι σωστό ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) = f(x) \tag{2.1.1}$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^d$; Με B συμβολίζουμε ανοικτές μπάλες του $\mathbb{R}^d$: για δοθέν x θεωρούμε εκείνες τις μπάλες που περιέχουν το x και αφήνουμε τον όγκο τους (ισοδύναμα, την ακτίνα τους) να πάει στο μηδέν.

Παρατηρήστε ότι η (2.1.1) ισχύει σε κάθε σημείο συνέχειας της f. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|y - x| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε μπάλα B που περιέχει το x και έχει ακτίνα μικρότερη από $\delta/2$, όλα τα $y \in B$ ικανοποιούν την $|y - x| < \delta$, απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) \right| &= \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B (f(x) - f(y))\, d\lambda(y) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(x) - f(y)|\, d\lambda(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται η (2.1.1).

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, το οποίο δίνει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Θεώρημα 2.1.1 (θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue)**.** *Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) = f(x) \tag{2.1.2}$$

σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^d$.

Για την απόδειξη θα χρειαστεί να κάνουμε βαθύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των μέσων τιμών μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε μπάλες. Στην επόμενη παράγραφο εισάγουμε τη μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood και μελετάμε την συνάρτηση κατανομής της με τη βοήθεια του λήμματος κάλυψης του Vitali.

2.1.1 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood

Ορισμός 2.1.2 (μεγιστική συνάρτηση)**.** Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση f^* της f ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)|\, d\lambda(y), \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις ανοικτές μπάλες που περιέχουν το x. Με λίγα λόγια, αντικαθιστούμε το (ζητούμενο) όριο των μέσων τιμών του Θεωρήματος 2.1.1 με το supremum τους, και την f με την $|f|$.

Οι βασικές ιδιότητες της f^* δίνονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Τότε:*

(i) *Η f^* είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Ισχύει $f^*(x) < \infty$ σχεδόν παντού.*

(iii) *Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1, \tag{2.1.3}$$

όπου $\|f\|_1 = \int |f| d\lambda$ και $C_d = 3^d$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f^* είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ το σύνολο $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $f^*(x) > \alpha$ τότε υπάρχει μπάλα B_x η οποία περιέχει το x και για την οποία

$$\frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, d\lambda(y) > \alpha,$$

και τότε για κάθε $z \in B_x$ από τον ορισμό της $f^*(z)$ έχουμε

$$f^*(z) \geqslant \frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, d\lambda(y) > \alpha,$$

δηλαδή $B_x \subseteq E_\alpha$.

Ο ισχυρισμός (ii) είναι συνέπεια του ισχυρισμού (iii). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\{x : f^*(x) = \infty\} \subseteq \{x : f^*(x) > \alpha\},$$

άρα

$$\lambda(\{x : f^*(x) = \infty\}) \leqslant \lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1.$$

Αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\lambda(\{x : f^*(x) = \infty\}) = 0$.

Παρατήρηση 2.1.4. Η βασική ανισότητα (2.1.3) είναι μια ασθενούς τύπου ανισότητα, με την έννοια ότι υπολείπεται του ισχυρισμού ότι $\|f^*\|_1 \leqslant C_d \|f\|_1$. Πράγματι, αν είχαμε κάτι τέτοιο τότε, από την ανισότητα Markov, για κάθε $\alpha > 0$ θα γράφαμε

$$\lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f^*\|_1 \leqslant \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1.$$

Στην πραγματικότητα, η f^* δεν είναι (σχεδόν ποτέ) ολοκληρώσιμη, και η (2.1.3) είναι η καλύτερη πληροφορία που θα μπορούσαμε να πάρουμε για την κατανομή της συναρτήσει της $\|f\|_1$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού (iii) θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα κάλυψης του Vitali.

Λήμμα 2.1.5. *Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτές μπάλες στον $\mathbb{R}^d$. Μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ να είναι ξένες ανά δύο και να ισχύει*

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j}). \tag{2.1.4}$$

Απόδειξη. Η επιλογή των B_{i_j} γίνεται με τον πιο φυσιολογικό τρόπο. Στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε μία από τις μπάλες, την B_{i_1}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}$ που την τέμνουν. Οι υπόλοιπες μπάλες σχηματίζουν μια υποοικογένεια $\mathcal{B}'$ της $\mathcal{B}$ στην οποία επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Επιλέγουμε μία από τις μπάλες της $\mathcal{B}'$, την B_{i_2}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}'$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}'$ που την τέμνουν. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μετά από N το πολύ βήματα, έχουμε επιλέξει κάποιες (ξένες) μπάλες $B_{i_1},\ldots,B_{i_k}$ και η διαδικασία τερματίζεται.

Για την απόδειξη της (2.1.4) θα χρησιμοποιήσουμε την εξής παρατήρηση: αν B και B' είναι δύο ανοικτές μπάλες με $B\cap B'\neq\emptyset$ και αν η ακτίνα $r(B)$ της B είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα $r(B')$ της B', τότε η B' περιέχεται στην μπάλα $\tilde{B}$ που έχει το ίδιο κέντρο με την B και ακτίνα $r(\tilde{B})=3r(B)$. Η απόδειξη είναι απλή συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας.

Συμβολίζοντας με $\tilde{B}_{i_j}$ τη μπάλα που έχει το ίδιο κέντρο με την B_{i_j} και ακτίνα $r(\tilde{B}_{i_j})=3r(B_{i_j})$, και παρατηρώντας ότι κάθε $B_\ell\in\mathcal{B}$ τέμνει κάποια B_{i_j} για την οποία $r(B_\ell)\leqslant r(B_{i_j})$, συγκεκριμένα τη μπάλα B_{i_j} που επιλέξαμε στο βήμα της διαδικασίας κατά το οποίο αφαιρέθηκε η B_ℓ, συμπεραίνουμε ότι

$$\bigcup_{\ell=1}^N B_\ell\subseteq\bigcup_{j=1}^k\tilde{B}_{i_j}.$$

Άρα,

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^N B_\ell\right)\leqslant\lambda\left(\bigcup_{j=1}^k\tilde{B}_{i_j}\right)\leqslant\sum_{j=1}^k\lambda(\tilde{B}_{i_j})=3^d\sum_{j=1}^k\lambda(B_{i_j}).$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει την (2.1.4). □

Απόδειξη του ισχυρισμού (iii). Έστω $\alpha>0$. Ορίζουμε $E_\alpha=\{x:f^*(x)>\alpha\}$ και για κάθε $x\in E_\alpha$ επιλέγουμε ανοικτή μπάλα B_x με $x\in B_x$ και

$$\frac{1}{\lambda(B_x)}\int_{B_x}|f(y)|\,d\lambda(y)>\alpha.$$

Ισοδύναμα,

$$\lambda(B_x)<\frac{1}{\alpha}\int_{B_x}|f(y)|\,d\lambda(y). \tag{2.1.5}$$

Θεωρούμε τυχόν συμπαγές $K\subseteq E_\alpha$. Έχουμε $K\subseteq\bigcup_{x\in K}B_x$, άρα υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{B}=\{B_{x_1},\ldots,B_{x_N}\}$ ώστε

$$K\subseteq\bigcup_{\ell=1}^N B_{x_\ell}.$$

Από το λήμμα του Vitali μπορούμε να βρούμε $1\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{x_{i_j}}$, $j=1,\ldots,k$, να είναι ξένες, και

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^N B_{x_\ell}\right)\leqslant 3^d\sum_{j=1}^k\lambda(B_{x_{i_j}}). \tag{2.1.6}$$

Αφού οι $B_{x_{i_1}}, \ldots, B_{x_{i_k}}$ είναι ξένες, συνδυάζοντας τις (2.1.5) και (2.1.6) γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda(K) &\leqslant \lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{x_{i_j}}) \\ &\leqslant \frac{3^d}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}\int_{B_{x_{i_j}}} |f(y)|\,d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha}\int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{x_{i_j}}} |f(y)|\,d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{3^d}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha}\|f\|_1.\end{aligned}$$

Αφού $\lambda(E_\alpha) = \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές υποσύνολο του $E_\alpha\}$, έπεται το ζητούμενο. □

2.1.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.1.1 και παρουσιάζουμε κάποιες παραλλαγές και κάποιες σημαντικές εφαρμογές του.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1. Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$, το σύνολο

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x)\right| > 2\alpha \right\}$$

έχει μέτρο $\lambda(E_\alpha) = 0$. Τότε, το σύνολο $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$ έχει μέτρο $\lambda(E) = 0$, και για κάθε $x \notin E$ ισχύει

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left| \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x)\right| = 0,$$

δηλαδή,

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) = f(x).$$

Σταθεροποιούμε $\alpha > 0$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε συνεχή συνάρτηση g με συμπαγή φορέα, η οποία ικανοποιεί την

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

(Το γεγονός ότι μια τέτοια προσέγγιση είναι πάντα δυνατή θα αποδειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο). Αφού η g είναι συνεχής, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ έχουμε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y) = g(x).$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B (f(y) - g(y))\,d\lambda(y) &+ \frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y) - g(x) \\ &+ g(x) - f(x),\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)-f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-g(y)|\,d\lambda(y)+\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y)-g(x)\right| \\ &\qquad + |g(x)-f(x)| \\ &\leqslant (f-g)^*(x)+\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y)-g(x)\right|+|g(x)-f(x)|,\end{aligned}$$

άρα

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)-f(x)\right|\leqslant (f-g)^*(x)+|g(x)-f(x)|.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$F_\alpha=\{x:(f-g)^*(x)>\alpha\}\quad \text{και}\quad G_\alpha=\{x:|f(x)-g(x)|>\alpha\},$$

έχουμε $E_\alpha\subseteq F_\alpha\cup G_\alpha$ (αν $u+v>2\alpha$ τότε είτε $u>\alpha$ ή $v>\alpha$).

Τώρα, χρησιμοποιώντας την

$$\lambda(F_\alpha)=\lambda(\{x:(f-g)^*(x)>\alpha\})\leqslant\frac{3^d}{\alpha}\|f-g\|_1$$

(βλέπε Θεώρημα 2.1.3 (iii)) και την

$$\lambda(G_\alpha)=\lambda(\{x:|f(x)-g(x)|>\alpha\})\leqslant\frac{1}{\alpha}\|f-g\|_1$$

που είναι άμεση από την ανισότητα του Markov, παίρνουμε

$$\lambda(E_\alpha)\leqslant\lambda(F_\alpha)+\lambda(G_\alpha)\leqslant\frac{3^d+1}{\alpha}\|f-g\|_1=\frac{C_d'}{\alpha}\varepsilon,$$

όπου $C_d'=3^d+1$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(E_\alpha)=0$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 2.1.6. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.1 είναι το γεγονός ότι: αν $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ τότε $|f(x)|\leqslant f^*(x)$ σχεδόν παντού (εξηγήστε γιατί).

Ορισμός 2.1.7. Μια μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^d$ λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη αν για κάθε μπάλα $B\subset\mathbb{R}^d$ η συνάρτηση $f(x)\chi_B(x)$ είναι ολοκληρώσιμη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ την κλάση των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι αν $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ και αν σταθεροποιήσουμε μια ανοικτή μπάλα B_0 (π.χ. την $B(0,k)$ για κάποιον $k\in\mathbb{N}$) τότε για κάθε $x\in B_0$ έχουμε

$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)=\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\chi_{B_0}(y)\,d\lambda(y)$$

αν θεωρήσουμε B που περιέχει το x και είναι αρκετά μικρή ώστε να περιέχεται στην B_0. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα παραγώγισης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f\cdot\chi_{B_0}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y)=f(x)$$

σχεδόν παντού στην B_0. Κάνοντας την ίδια δουλειά με $B_0=B(0,k)$, $k=1,2,\dots$, έχουμε την ακόλουθη επέκταση του Θεωρήματος 2.1.1:

Θεώρημα 2.1.8. *Αν $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)d\lambda(y) = f(x)$$

σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^d$.

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό.

Ορισμός 2.1.9. Έστω $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Το σύνολο Lebesgue $\mathrm{Leb}(f)$ της f αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}^d$ για τα οποία $|f(x)| < \infty$ και

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0.$$

Έχουμε ήδη δει ότι αν η f είναι συνεχής στο x τότε $x \in \mathrm{Leb}(f)$. Επίσης, είναι φανερό ότι αν $x \in \mathrm{Leb}(f)$ τότε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)d\lambda(y) = f(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αν $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ τότε σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ανήκει στο σύνολο Lebesgue της f.

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Τότε,*

$$\lambda(\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{Leb}(f)) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $q \in \mathbb{Q}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.8 για την τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $|f(y) - q|$ βλέπουμε ότι υπάρχει $E_q \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E_q) = 0$ ώστε: αν $x \notin E_q$ τότε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - q|\, d\lambda(y) = |f(x) - q|.$$

Θέτουμε $E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$. Τότε, $\lambda(E) = 0$ και θα δείξουμε ότι: αν $x \notin E$ και $|f(x)| < \infty$ τότε $x \in \mathrm{Leb}(f)$.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε ρητό q με $|f(x) - q| < \varepsilon$. Γράφουμε

$$\frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \leqslant \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - q|\, d\lambda(y) + |f(x) - q|$$

για κάθε μπάλα B με $x \in B$, και αφήνοντας το $\lambda(B) \to 0$ παίρνουμε

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \leqslant |f(x) - q| + |f(x) - q| < 2\varepsilon,$$

διότι $x \notin E_q$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0,$$

δηλαδή $x \in \mathrm{Leb}(f)$. $\square$

Μία ενδιαφέρουσα και χρήσιμη εφαρμογή του θεωρήματος παραγώγισης του Lebesgue αφορά τη δομή των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 2.1.11. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το $x \in \mathbb{R}^d$ είναι σημείο πυκνότητας του E αν

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ και για κάθε ανοικτή μπάλα B που περιέχει το x και έχει αρκετά μικρή ακτίνα, ισχύει

$$\lambda(E\cap B) \geqslant (1-\varepsilon)\lambda(B).$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.8 στην τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση χ_E παίρνουμε αμέσως το εξής:

Θεώρημα 2.1.12. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε, σχεδόν κάθε σημείο του E είναι σημείο πυκνότητας του E και σχεδόν κάθε $x \notin E$ δεν είναι σημείο πυκνότητας του E – ακριβέστερα, σχεδόν όλα τα $x \notin E$ είναι σημεία πυκνότητας του $\mathbb{R}^d \setminus E$, άρα ικανοποιούν την*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 0.$$

2.2 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

2.2.1 Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 2.2.1. Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$, ονομάζουμε κύμανση της φ ως προς την P τον αριθμό

$$V(\varphi,P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)|.$$

Μια πρώτη βασική παρατήρηση είναι ότι «η κύμανση της φ μεγαλώνει αν εκλεπτύνουμε τη διαμέριση».

Λήμμα 2.2.2. *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και P, Q δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Αν $P \subseteq Q$, τότε*

$$V(\varphi,P) \leqslant V(\varphi,Q).$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ και έστω $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας δίνει

$$\begin{aligned}
V(\varphi,P) &= \sum_{j=0}^{n-1}|\varphi(x_{j+1})-\varphi(x_j)| \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}|\varphi(x_{j+1})-\varphi(x_j)| + |\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)| + \sum_{j=k+1}^{n-1}|\varphi(x_{j+1})-\varphi(x_j)| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}|\varphi(x_{j+1})-\varphi(x_j)| + |\varphi(y)-\varphi(x_k)| + |\varphi(x_{k+1})-\varphi(y)| \\
&+ \sum_{j=k+1}^{n-1}|\varphi(x_{j+1})-\varphi(x_j)| \\
&= V(\varphi,P_1).
\end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση η Q προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων $y_1,\dots,y_m$, οπότε

$$V(\varphi,P)\leqslant V(\varphi,P\cup\{y_1\})\leqslant\cdots\leqslant V(\varphi,P\cup\{y_1,\dots,y_m\})=V(\varphi,Q).$$

□

Ορισμός 2.2.3. Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$. Η κύμανση της φ στο $[a,b]$ είναι η ποσότητα

$$V(\varphi)=\sup\{V(\varphi,P)\mid P\ \text{ διαμέριση του }\ [a,b]\}.$$

Αν $V(\varphi)<+\infty$ τότε λέμε ότι η φ έχει φραγμένη κύμανση (αν $V(\varphi)=+\infty$, λέμε ότι η φ έχει άπειρη κύμανση). Όταν θέλουμε να τονίσουμε το διάστημα στο οποίο υπολογίζεται η κύμανση της φ θα γράφουμε $V(\varphi\mid a,b)$.

Μια τεχνική παρατήρηση η οποία συχνά απλουστεύει τον υπολογισμό της κύμανσης είναι η εξής (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Λήμμα 2.2.4. *Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω Q διαμέριση του $[a,b]$. Τότε,*

$$V(\varphi)=\sup\{V(\varphi,P)\mid P\ \text{ διαμέριση του }\ [a,b],\ P\supseteq Q\}.$$

Μία από τις συνέπειες του Λήμματος 2.2.4 είναι η «προσθετικότητα της κύμανσης ως προς διαδοχικά υποδιαστήματα»:

Πρόταση 2.2.5. *Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω $\gamma\in(a,b)$. Τότε,*

$$V(\varphi\mid a,b)=V(\varphi\mid a,\gamma)+V(\varphi\mid\gamma,b).$$

Ειδικότερα,

$$V(\varphi\mid\gamma,\delta)\leqslant V(\varphi\mid a,b) \tag{2.2.1}$$

για κάθε $[\gamma,\delta]\subset[a,b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διαμέριση $Q = \{a < \gamma < b\}$ του $[a, b]$. Από το Λήμμα 2.2.4 έχουμε

$$\begin{aligned} V(\varphi \mid a, b) &= \sup\{V(\varphi, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a, b]\ ,\ P \supseteq Q\} \\ &= \sup\{V(\varphi, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a, b]\ ,\ \gamma \in P\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ που περιέχει το γ είναι της μορφής $P = P_1 \cup P_2$ όπου P_1 διαμέριση του $[a, \gamma]$ και P_2 διαμέριση του $[\gamma, b]$. Επιπλέον, από τον ορισμό της κύμανσης ως προς διαμέριση, ισχύει

$$V(\varphi, P \mid a, b) = V(\varphi, P_1 \mid a, \gamma) + V(\varphi, P_2 \mid \gamma, b). \tag{2.2.2}$$

Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι διαμερίσεων P_1, P_2 των $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$ αντίστοιχα, δίνει μια διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ του $[a, b]$ η οποία περιέχει το γ. Χρησιμοποιώντας και την (2.2.2) βλέπουμε ότι

$$\big\{V(\varphi, P \mid a, b) \mid \gamma \in P\big\} = \big\{V(\varphi, P_1 \mid a, \gamma) + V(\varphi, P_2 \mid \gamma, b)\big\}$$

(το πρώτο σύνολο είναι πάνω από όλες τις διαμερίσεις P του $[a, b]$ που περιέχουν το γ ενώ το δεύτερο πάνω από όλα τα ζευγάρια διαμερίσεων των $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$). Παίρνοντας supremum και στα δύο μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} V(\varphi \mid a, b) &= \sup_{\gamma \in P} V(\varphi, P \mid a, b) = \sup_{P_1} V(\varphi, P_1 \mid a, \gamma) + \sup_{P_2} V(\varphi, P_2 \mid \gamma, b) \\ &= V(\varphi \mid a, \gamma) + V(\varphi \mid \gamma, b). \end{aligned}$$

Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι αν γράψουμε το $[a, b]$ σαν ένωση $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{s-1}, a_s]$ οσωνδήποτε διαδοχικών διαστημάτων, όπου $a_0 = a$ και $a_s = b$, τότε

$$V(\varphi \mid a, b) = \sum_{i=0}^{s-1} V(\varphi \mid a_i, a_{i+1}). \tag{2.2.3}$$

Από την (2.2.3) έπεται αμέσως η (2.2.1). □

Λίγη σκέψη δείχνει ότι οι συναρτήσεις που έχουν φραγμένη κύμανση είναι υποχρεωτικά φραγμένες:

Λήμμα 2.2.6. *Εστω $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν $V(\varphi) < +\infty$ τότε η φ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $x \in (a, b)$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P_x = \{a < x < b\}$ του $[a, b]$. Τότε,

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(b) - \varphi(x)| = V(\varphi, P_x) \leqslant V(\varphi),$$

άρα

$$|\varphi(x)| \leqslant V(\varphi) + |\varphi(a)|.$$

Έπεται ότι $|\varphi(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a, b]$, όπου $M = \max\{V(\varphi) + |\varphi(a)|, |\varphi(b)|\}$. □

Τα παραδείγματα που ακολουθούν εξηγούν τον ορισμό της κύμανσης: είναι ένα μέτρο της ολικής μεταβολής των τιμών της φ στο $[a, b]$.

Παραδείγματα 2.2.7. (α) Αν η $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε

$$V(\varphi) = |\varphi(b) - \varphi(a)|.$$

Για παράδειγμα, αν η φ είναι αύξουσα τότε για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ έχουμε

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \big(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\big) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Άρα,

$$V(\varphi) = \sup_P V(\varphi, P) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

(β) Λέμε ότι η $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα μονότονη αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = b$ στο $[a,b]$ ώστε η φ να είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$. Από την Πρόταση 2.2.5 και το Παράδειγμα (α),

$$V(\varphi \mid a, b) = \sum_{i=0}^{s-1} V(\varphi \mid a_i, a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{s-1} |\varphi(a_{i+1}) - \varphi(a_i)|.$$

Ειδικότερα, η φ έχει φραγμένη κύμανση.

(γ) Έστω $\gamma \in (a,b)$ και έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $\varphi(\gamma) = 1$ και $\varphi(x) = 0$ αλλιώς. Η φ είναι αύξουσα στο $[a,\gamma]$ και φθίνουσα στο $[\gamma, b]$. Άρα,

$$V(\varphi) = |\varphi(\gamma) - \varphi(a)| + |\varphi(b) - \varphi(\gamma)| = 2$$

από το Παράδειγμα (β).

(δ) Υπάρχουν φραγμένες συναρτήσεις που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνάρτηση g του Dirichlet στο $[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ρητούς q_k και άρρητους α_k με $0 < q_1 < \alpha_1 < \cdots < q_n < \alpha_n < 1$. Αν P είναι η διαμέριση του $[0,1]$ που σχηματίζουν όλα αυτά τα σημεία,

$$V(g) \geqslant V(g, P) \geqslant \sum_{k=1}^{n} |g(\alpha_k) - g(q_k)| = n.$$

Αφού $V(g) \geqslant n$ για κάθε n, η g έχει άπειρη κύμανση.

(ε) Υπάρχουν συνεχείς $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: Γράφουμε το $[0,1]$ στη μορφή

$$[0,1] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right].$$

Σε κάθε διάστημα $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ ορίζουμε μια «τριγωνική συνάρτηση» ως εξής: θέτουμε $\varphi(1/2^n) = 0 = \varphi(1/2^{n-1})$, $\varphi(3/2^{n+1}) = 1/n$ (ο $3/2^{n+1}$ είναι το μέσο του διαστήματος) και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[1/2^n, 3/2^{n+1}]$ και $[3/2^{n+1}, 1/2^{n-1}]$. Με αυτόν τον τρόπο η φ έχει οριστεί και είναι συνεχής στο $(0,1]$.

Θέτουμε $\varphi(0) = 0$. Τότε, η φ είναι συνεχής και στο 0: παρατηρήστε ότι

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2^{n-1}} \Longrightarrow 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^n} < \cdots < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\right\}.$$

Τότε,

$$V(\varphi, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η φ έχει άπειρη κύμανση.

(ζ) Έστω $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά M. Δηλαδή,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M \cdot |x - y|$$

για κάθε $x, y \in [a, b]$. Τότε, η φ έχει φραγμένη κύμανση: Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, τότε

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = M(b - a).$$

Έπεται ότι

$$V(\varphi) \leqslant M(b - a) < +\infty.$$

Ειδικότερα, αν η φ είναι παραγωγίσιμη και η φ' είναι φραγμένη στο $[a, b]$ τότε η φ έχει φραγμένη κύμανση. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής βλέπουμε ότι η φ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά

$$M = \sup\{|\varphi'(x)| \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

2.2.2 Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. Γράφουμε $BV[a, b]$ για το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το σύνολο $BV[a, b]$ είναι άλγεβρα συναρτήσεων: είναι γραμμικός χώρος και αν $\varphi, \psi \in BV[a, b]$ τότε το γινόμενο $\varphi\psi \in BV[a, b]$.

Πρόταση 2.2.8. *Έστω $\varphi, \psi \in BV[a, b]$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε,*

(i) *$\varphi + \psi \in BV[a, b]$ και $V(\varphi + \psi) \leqslant V(\varphi) + V(\psi)$.*

(ii) *$t\varphi \in BV[a, b]$ και $V(t\varphi) = |t|V(\varphi)$.*

(iii) *$\varphi\psi \in BV[a, b]$ και $V(\varphi\psi) \leqslant \|\varphi\|_\infty V(\psi) + \|\psi\|_\infty V(\varphi)$, όπου $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$ και $\|\psi\|_\infty = \sup\{|\psi(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$. Το Λήμμα 2.2.6 δείχνει ότι οι $\|\varphi\|_\infty$, $\|\psi\|_\infty$ ορίζονται καλά.*

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$. Από την

$$\begin{aligned} V(\varphi + \psi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) + \psi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) - \psi(x_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)| \\ &= V(\varphi, P) + V(\psi, P) \end{aligned}$$

έπεται ότι

$$V(\varphi + \psi) \leqslant V(\varphi) + V(\psi) < +\infty.$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να παρατηρήσετε ότι

$$\begin{aligned} V(t\varphi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |t\varphi(x_{k+1}) - t\varphi(x_k)| \\ &= |t| \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \\ &= |t| V(\varphi, P). \end{aligned}$$

Τέλος, με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις και εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} V(\varphi\psi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1})\psi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\psi(x_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1})|\, |\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_k)|\, |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty V(\psi, P) + \|\psi\|_\infty V(\varphi, P), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η

$$V(\varphi\psi) \leqslant \|\varphi\|_\infty V(\psi) + \|\psi\|_\infty V(\varphi).$$

□

Στην περίπτωση που η $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η φ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, η κύμανση της φ δίνεται από το ολοκλήρωμα Riemann της $|\varphi'|$:

Θεώρημα 2.2.9. *Έστω $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η φ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $\varphi \in BV[a, b]$ και*

$$V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt. \tag{2.2.4}$$

Απόδειξη. Η φ' έχει υποτεθεί Riemann ολοκληρώσιμη, άρα είναι φραγμένη συνάρτηση. Αυτό αποδεικνύει ότι $\varphi \in BV[a, b]$ (η φ είναι Lipschitz συνεχής). Επιπλέον η $|\varphi'|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα το δεξιό μέλος της (2.2.4) ορίζεται καλά.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[a, b]$ τέτοιες ώστε

$$V(\varphi) - \varepsilon < V(\varphi, P_1) \leqslant V(\varphi) \tag{2.2.5}$$

και

$$U(|\varphi'|, P_2) - L(|\varphi'|, P_2) < \varepsilon. \tag{2.2.6}$$

Αν $P = P_1 \cup P_2 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, τότε οι (2.2.5) και (2.2.6) ισχύουν με την P στη θέση των P_1 και P_2 αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής σε κάθε $[x_k, x_{k+1}]$ βρίσκουμε $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ με

$$|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| = |\varphi'(t_k)|(x_{k+1} - x_k).$$

Άρα,

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(t_k)|(x_{k+1} - x_k). \tag{2.2.7}$$

Από την (2.2.6) έχουμε

$$\left| \int_a^b |\varphi'(t)| dt - \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(t_k)|(x_{k+1} - x_k) \right| < \varepsilon. \tag{2.2.8}$$

Συνδυάζοντας τις (2.2.7) και (2.2.8) παίρνουμε

$$\left| \int_a^b |\varphi'(t)| dt - V(\varphi, P) \right| < \varepsilon,$$

και από την (2.2.5) έπεται ότι

$$\left| \int_a^b |\varphi'(t)| dt - V(\varphi) \right| < 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. $\square$

2.2.3 Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Από την Πρόταση 2.2.5 η φ έχει φραγμένη κύμανση σε κάθε διάστημα $[a, x]$ όπου $x \in [a, b]$ (στην περίπτωση που $x = a$, η κύμανση της φ στο $[a, x]$ ορίζεται να είναι ίση με μηδέν). Μπορούμε επομένως να ορίσουμε μια συνάρτηση $v_\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$v_\varphi(x) = V(\varphi \mid a, x).$$

Η v_φ λέγεται συνάρτηση ολικής κύμανσης της φ. Από την Πρόταση 2.2.5 έχουμε

$$v_\varphi(y) - v_\varphi(x) = V(\varphi \mid a, y) - V(\varphi \mid a, x) = V(\varphi \mid x, y) \geqslant 0 \tag{2.2.9}$$

αν $x < y$ στο $[a, b]$. Άρα, η v_φ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Επίσης, θεωρώντας τη διαμέριση $P_{xy} = \{x < y\}$ του $[x, y]$ έχουμε

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant |\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant V(\varphi \mid x, y) = v_\varphi(y) - v_\varphi(x),$$

δηλαδή

$$v_\varphi(x) - \varphi(x) \leqslant v_\varphi(y) - \varphi(y) \tag{2.2.10}$$

αν $x < y$ στο $[a,b]$. Άρα, η $v_\varphi - \varphi$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Από τις (2.2.9) και (2.2.10) προκύπτει εύκολα ο εξής χαρακτηρισμός των συναρτήσεων με φραγμένη κύμανση.

Θεώρημα 2.2.10. *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η φ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ δύο αυξουσών συναρτήσεων.*

Απόδειξη. Έστω $\varphi \in BV[a,b]$. Είδαμε ότι οι συναρτήσεις v_φ και $v_\varphi - \varphi$ είναι αύξουσες. Γράφοντας

$$\varphi = v_\varphi - \big(v_\varphi - \varphi\big)$$

έχουμε περιγράψει την φ σαν διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.

Αντίστροφα, αν $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο αύξουσες συναρτήσεις, τότε $\varphi_1, \varphi_2 \in BV[a,b]$ και, αφού ο $BV[a,b]$ είναι γραμμικός χωρος, έχουμε $\varphi_1 - \varphi_2 \in BV[a,b]$. □

Παρατήρηση 2.2.11. Η ανάλυση $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ δεν είναι μοναδική. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση, τότε $\varphi = (\varphi_1 + f) - (\varphi_2 + f)$ και οι $\varphi_1 + f$, $\varphi_2 + f$ είναι προφανώς αύξουσες.

Αν η φ είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, τότε οι φ_1, φ_2 του Θεωρήματος 2.2.10 μπορούν να υποτεθούν συνεχείς. Η απόδειξη θα βασιστεί στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.2.12. *Έστω $\varphi \in BV[a,b]$ και έστω $\gamma \in [a,b]$. Η φ είναι συνεχής στο γ αν και μόνο αν η v_φ είναι συνεχής στο γ.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι τα πλευρικά όρια των φ και v_φ καθώς $y \to x^+$ ή $y \to x^-$ υπάρχουν: οι μονότονες συναρτήσεις έχουν αυτήν την ιδιότητα, άρα και οι διαφορές μονότονων συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a,b)$ αν και μόνο αν η v_φ είναι συνεχής από δεξιά στο γ (δουλεύοντας όμοια με τα όρια από αριστερά, παίρνουμε το συμπέρασμα).

Η μία κατεύθυνση είναι απλή: είδαμε ότι αν $x < y$ στο $[a,b]$ τότε $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant v_\varphi(y) - v_\varphi(x)$. Παίρνοντας όρια καθώς $y \to x^+$ έχουμε

$$v_\varphi(x+) - v_\varphi(x) \geqslant |\varphi(x+) - \varphi(x)|. \tag{2.2.11}$$

Αν η v_φ είναι συνεχής από δεξιά στο γ, η (2.2.11) δείχνει ότι $\varphi(\gamma+) = \varphi(\gamma)$. Δηλαδή, η φ είναι συνεχής από δεξιά στο γ.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η φ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a,b)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\varphi(\gamma) - \varphi(x)| < \varepsilon/2$ αν $\gamma \leqslant x < \gamma + \delta$. Θεωρούμε διαμέριση $P = \{\gamma = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[\gamma, b]$ με την ιδιότητα

$$V(\varphi \mid \gamma, b) < V(\varphi, P \mid \gamma, b) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.12}$$

Η (2.2.12) εξακολουθεί να ισχύει αν στη θέση της P πάρουμε οποιαδήποτε εκλέπτυνσή της. Αν λοιπόν $\gamma < t < \min\{\gamma+\delta, x_1\}$ και $P_t = \{t < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} V(\varphi \mid \gamma, b) - \frac{\varepsilon}{2} &< V(\varphi, P \cup \{t\} \mid \gamma, b) \\ &= |\varphi(t) - \varphi(\gamma)| + V(\varphi, P_t \mid t, b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + V(\varphi \mid t, b). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} v_\varphi(t) - v_\varphi(\gamma) &= \big(V(\varphi \mid a, b) - V(\varphi \mid t, b)\big) - \big(V(\varphi \mid a, b) - V(\varphi \mid \gamma, b)\big) \\ &= V(\varphi \mid \gamma, b) - V(\varphi \mid t, b) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι $0 \leqslant v_\varphi(t) - v_\varphi(\gamma) < \varepsilon$ αν $\gamma < t < \min\{\gamma+\delta, x_1\}$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η v_φ είναι συνεχής από δεξιά στο γ. □

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.2.12 είναι το εξής.

Θεώρημα 2.2.13. *Εστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Η φ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών και αυξουσών συναρτήσεων.*

2.3 Παραγωγισιμότητα μονότονων συναρτήσεων

Αφετηρία αυτής της παραγράφου είναι το ερώτημα να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη που να εξασφαλίζει ότι κάποια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)\, d\lambda(t), \quad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{2.3.1}$$

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη και η g' είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann τότε η (2.3.1) ισχύει. Για να επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η g να είναι (τουλάχιστον) σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Κατόπιν, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ως ολοκλήρωμα Lebesgue και να προσπαθήσουμε να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που εξασφαλίζουν (και είναι απαραίτητες για) την ισότητα.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι συναρτησεις φραγμένης κύμασης είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες.

Θεώρημα 2.3.1. *Εστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Τότε, η φ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.10, η φ γράφεται στη μορφή $\varphi = g_1 - g_2$, όπου $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσες συναρτήσεις. Έπεται ότι, για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 μπορούμε να θεωρήσουμε μια αύξουσα συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ και να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού. Θα δώσουμε την απόδειξη κάνοντας την πρόσθετη υπόθεση ότι η g είναι συνεχής (η απόδειξη στη γενική περίπτωση έχει περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες αλλά χρησιμοποιεί παρόμοιες ιδέες, και την παραλείπουμε). Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα του F. Riesz.

Λήμμα 2.3.2 (το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου, F. Riesz)**.** *Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω E το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει $h = h_x > 0$ ώστε*

$$g(x+h) > g(x).$$

Αν το E είναι μη κενό, τότε είναι ανοικτό σύνολο, άρα γράφεται ως ξένη ένωση $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε (a_k, b_k) είναι ανοικτό διάστημα ή ημιευθεία. Για κάθε φραγμένο διάστημα (a_k, b_k) αυτής της ένωσης, ισχύει

$$g(b_k) - g(a_k) = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το E είναι μη κενό. Παρατηρούμε ότι είναι ανοικτό: αν $x \in E$ τότε υπάρχει $h > 0$ ώστε $g(x+h) > g(x)$, και λόγω της συνέχειας της g στο x μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $x + \delta < x + h$ και $g(y) < g(x+h)$ για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, $(x-\delta, x+\delta) \subseteq E$: πράγματι, αν $y \in (x-\delta, x+\delta)$, τότε $x + h = y + (x+h-y)$ και $h_1 : x+h-y > x+h-(x+\delta) > 0$ (άρα, για το $y + h_1$ έχουμε $g(y) < g(x+h) = g(y+h_1)$).

Αφού το E είναι ανοικτό, γνωρίζουμε ότι γράφεται στη μορφή $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε (a_k, b_k) είναι ανοικτό διάστημα ή ημιευθεία και τα (a_k, b_k) είναι ξένα ανά δύο.

Θεωρούμε ένα φραγμένο διάστημα (a_k, b_k) από αυτή την ένωση. Τότε, $a_k \notin E$ και από τον ορισμό του E δεν μπορούμε να έχουμε $g(b_k) > g(a_k)$. Δηλαδή, $g(b_k) \leqslant g(a_k)$.

Ας υποθέσουμε ότι $g(b_k) < g(a_k)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\gamma \in (a_k, b_k)$ ώστε $g(\gamma) = \frac{g(a_k)+g(b_k)}{2}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε το γ να είναι το μέγιστο σημείο του (a_k, b_k) με αυτήν την ιδιότητα. Αφού $\gamma \in E$, υπάρχει $u > \gamma$ με $g(u) > g(\gamma)$. Επίσης, αφού $b_k \notin E$ έχουμε $g(x) \leqslant g(b_k)$ για κάθε $x \geqslant b_k$. Όμως, $g(u) > g(\gamma) > g(b_k)$. Άρα, $u < b_k$. Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής βρίσκουμε $\gamma_1 \in (u, b_k)$ με $g(\gamma_1) = g(\gamma)$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί $\gamma_1 > \gamma$ και είχαμε υποθέσει ότι το γ είναι το μέγιστο σημείο του (a_k, b_k) στο οποίο η g παίρνει την τιμή $\frac{g(a_k)+g(b_k)}{2}$. □

Τροποποιώντας ελαφρά το επιχείρημα της προηγούμενης απόδειξης παίρνουμε επίσης το εξής.

Πόρισμα 2.3.3. *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω E το σύνολο των $x \in (a,b)$ για τα οποία υπάρχει $h = h_x > 0$ ώστε*

$$g(x+h) > g(x).$$

Τότε, το E είναι είτε κενό ή ανοικτό σύνολο, και στην δεύτερη περίπτωση γράφεται στη μορφή $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε (a_k, b_k) είναι φραγμένο ανοικτό διάστημα και $g(a_k) = g(b_k)$, με μόνη πιθανή εξαίρεση την περίπτωση όπου $a_k = a$, οπότε έχουμε μόνο την $g(a_k) \leqslant g(b_k)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς:

Ορισμός 2.3.4. *Για κάθε $x \in [a,b]$ και $h \neq 0$ με $x + h \in [a,b]$ ορίζουμε*

$$\Delta_h(f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Οι αριθμοί Dini της f στο x ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} D^+(f)(x) &= \limsup_{h\to 0^+} \Delta_h(f)(x) \\ D_+(f)(x) &= \liminf_{h\to 0^+} \Delta_h(f)(x) \\ D^-(f)(x) &= \limsup_{h\to 0^-} \Delta_h(f)(x) \\ D_-(f)(x) &= \liminf_{h\to 0^-} \Delta_h(f)(x). \end{aligned}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής αύξουσα συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι $D_+(g)(x) \leqslant D^+(g)(x)$ και $D_-(g)(x) \leqslant D^-(g)(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε τα εξής:

(α) $D^+(g)(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$, και

(β) $D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x)$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

Έχοντας αποδείξει τα παραπάνω, εφαρμόζοντας το (β) για την αύξουσα συνάρτηση $h(x) = -g(-x)$ βλέπουμε ότι $D^-(g)(x) \leqslant D_+(g)(x)$ σχεδόν παντού. Άρα, σχεδόν παντού στο $[a,b]$ έχουμε

$$D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x) \leqslant D^-(g)(x) \leqslant D_+(g)(x) \leqslant D^+(g)(x) < \infty$$

και έπεται ότι η $g'(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού.

Σταθεροποιούμε $s > 0$ και ορίζουμε

$$E_s := \{x \in [a,b] : D^+(g)(x) > s\}.$$

Αποδεικνύουμε αρχικά ότι το E_s είναι μετρήσιμο σύνολο (οι λεπτομέρειες αφήνονται για την Άσκηση 12). Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2.3.3 για την συνάρτηση $w(x) = g(x) - sx$ βλέπουμε ότι $E_s \subseteq \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου $g(b_k) - g(a_k) \geqslant s(b_k - a_k)$. Άρα,

$$\lambda(E_s) \leqslant \sum_k (b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{s}\sum_k (g(b_k) - g(a_k)) \leqslant \frac{1}{s}(g(b) - g(a)).$$

Έπεται ότι $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda(E_s) = 0$. Αφού $\{x : D^+(g)(x) = \infty\} \subseteq E_s$ για κάθε $s > 0$, συμπεραίνουμε ότι $D^+(g)(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε $R > r$ και ορίζουμε

$$E_{r,R} = \{x \in [a,b] : D^+(g)(x) > R \ \text{ και } \ D_-(g)(x) < r\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) = 0$. Παρατηρώντας ότι

$$\{x : D_-(g)(x) < D^+(g)(x)\} = \bigcup_{r,R\in\mathbb{Q}, r<R} E_{r,R}$$

βλέπουμε μετά ότι $\lambda(\{x : D_-(g)(x) < D^+(g)(x)\}) = 0$, δηλαδή $D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x)$ σχεδόν παντού, και αυτό αποδεικνύει το (β).

Υποθέτουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) > 0$. Αφού $R > r$, μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο U ώστε $E_{r,R} \subset U \subset (a,b)$ και $\lambda(U) < (R/r)\lambda(E_{r,R})$. Γράφουμε το U σαν ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων, $U = \bigcup_n I_n$. Σταθεροποιούμε κάποιο n και εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2.3.3 για την συνάρτηση $\ell(x) = -g(-x) + rx$ στο διάστημα $-I_n$. Γυρίζοντας πίσω στο (a,b) παίρνουμε μια ξένη ένωση διαστημάτων $\bigcup_k (a_k, b_k)$, η οποία περιέχεται στο I_n, τέτοια ώστε

$$g(b_k) - g(a_k) \leqslant r(b_k - a_k).$$

Εφαρμόζοντας όμως το Πόρισμα 2.3.3 για την $m(x) = g(x) - Rx$ στο (a_k, b_k), βρίσκουμε μια νέα ξένη ένωση διαστημάτων $U_n = \bigcup_{k,j} (a_{k,j}, b_{k,j})$ με $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ για κάθε k και j, ώστε

$$g(b_{k,j}) - g(a_{k,j}) \geqslant R(b_{k,j} - a_{k,j}).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\lambda(U_n) = \sum_{k,j} (b_{k,j} - a_{k,j}) &\leqslant \frac{1}{R} \sum_k \left(\sum_j (g(b_{k,j}) - g(a_{k,j})) \right) \\
&\leqslant \frac{1}{R} \sum_k (g(b_k) - g(a_k)) \leqslant \frac{r}{R} \sum_k (b_k - a_k) \\
&\leqslant \frac{r}{R} \lambda(I_n).
\end{aligned}$$

Αφού $D^+(g)(x) > R$ και $D_-(g)(x) < r$ για κάθε $x \in E_{r,R}$, έχουμε $E_{r,R} \cap I_n \subseteq U_n \subseteq I_n$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\lambda(E_{r,R}) = \sum_n \lambda(E_{r,R} \cap I_n) &\leqslant \sum_n \lambda(U_n) \\
&\leqslant \frac{r}{R} \sum_n \lambda(I_n) = \frac{r}{R} \lambda(U) < \lambda(E_{r,R}).
\end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\lambda(E_{r,R}) = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Είδαμε ότι οι αύξουσες συνεχείς συναρτήσεις $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες σχεδόν παντού. Αυτό που μπορούμε να πούμε σχετικά με την (2.3.1) είναι το εξής.

Πρόταση 2.3.5. *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και συνεχής. Τότε, η g' ορίζεται σχεδόν παντού στο $[a,b]$ και είναι μετρήσιμη και μη αρνητική. Τέλος,*

$$\int_a^b g'(x)\, d\lambda(x) \leqslant g(b) - g(a). \tag{2.3.2}$$

Απόδειξη. Επεκτείνουμε την g σε συνεχή αύξουσα συνάρτηση, θέτοντας $g \equiv g(b)$ στο $[b, \infty)$ και $g \equiv g(a)$ στο $(-\infty, a]$. Η g' ορίζεται σχεδόν παντού από το Θεώρημα 2.3.1. Είναι μετρήσιμη, διότι οι συναρτήσεις

$$u_n(x) = \frac{g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)}{1/n}$$

είναι μετρήσιμες και $u_n(x) \to g'(x)$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Επίσης, αφού η g είναι αύξουσα, έχουμε $u_n \geqslant 0$ άρα και $g' = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \geqslant 0$.

Από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\int_a^b g'(x)d\lambda(x) \leqslant \liminf_n \int_a^b u_n(x)d\lambda(x).$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\int_a^b u_n(x)d\lambda(x) &= n\int_a^b g(x+1/n)d\lambda(x) - n\int_a^b g(x)d\lambda(x)\\ &= n\int_{a+1/n}^{b+1/n} g(y)d\lambda(y) - n\int_a^b g(x)d\lambda(x)\\ &= n\int_b^{b+1/n} g(x)d\lambda(x) - n\int_a^{a+1/n} g(x)d\lambda(x).\end{aligned}$$

Αφού η g είναι συνεχής, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n}\int_a^{a+1/n} g(x)d\lambda(x) = g(a) \;\text{ και }\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n}\int_b^{b+1/n} g(x)d\lambda(x) = g(b).$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.3.2). □

Παρατήρηση 2.3.6. Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και συνεχής. Έχουμε δεί ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus C$. Αφού $\lambda(C) = 0$, έχουμε $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού. Θυμηθείτε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Έτσι, έχουμε

$$\int_0^1 f'(x)d\lambda(x) = 0 < 1 = f(1) - f(0).$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η ανισότητα στην (2.3.2) μπορεί να είναι γνήσια.

2.4 Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 2.4.1. Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται απολύτως συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ είναι ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a,b]$ με $\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k - a_k) < \delta$ τότε $\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις 2.4.2. (α) Από τον ορισμό είναι άμεσο (πάρτε $N = 1$) ότι κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (ισοδύναμα, συνεχής).

(β) Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχής, τότε η f έχει φραγμένη κύμανση (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, η f γράφεται ως διαφορά $f = \varphi_1 - \varphi_2$ δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Επίσης, η συνάρτηση $v_\varphi(x) = V(\varphi \mid a, x)$ είναι συνεχής, και μάλιστα απολύτως συνεχής στο $[a,b]$.

(γ) Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε η $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,d\lambda(x)$$

είναι απολύτως συνεχής. Αυτό προκύπτει από το εξής: *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε, αν* E *είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του* $[a,b]$ *με* $\lambda(E) < \delta$ *τότε*

$$\int_E f\,d\lambda < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $g_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}$. Παρατηρήστε ότι $g_n \leqslant n$. Η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και $g_n \to |f|$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\lambda = \int |f|\,d\lambda.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (|f| - g_n)\,d\lambda = \int |f|\,d\lambda - \int g_n\,d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|\,d\lambda &= \int_E g_n\,d\lambda + \int_E (|f| - g_n)\,d\lambda \leqslant \int_E g_n\,d\lambda + \int (|f| - g_n)\,d\lambda \\ &\leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έστω τώρα (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a,b]$ με $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_k}^{b_k} f\,d\lambda \right| \leqslant \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} |f|\,d\lambda \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^N (a_k,b_k)} |f|\,d\lambda < \varepsilon,\end{aligned}$$

διότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k)\right) = \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta.$$

Έπεται ότι η F είναι απολύτως συνεχής. $\square$

Η τελευταία παρατήρηση δείχνει ότι η απόλυτη συνέχεια είναι αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί μια σχεδόν παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε να έχουμε την

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,d\lambda(t)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Όπως θα δούμε, η συνθήκη αυτή είναι και ικανή.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε, η* f *είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο* $[a,b]$*. Επιπλέον, αν* $f'(x) = 0$ *σχεδόν παντού, τότε η* f *είναι σταθερή.*

Το γεγονός ότι η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού προκύπτει από τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου και από την παρατήρηση ότι κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής και έχει φραγμένη κύμανση, άρα γράφεται ως διαφορά δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων. Για να δείξουμε ότι η υπόθεση «$f'(x) = 0$ σχεδόν παντού» συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή, θα χρειαστούμε κάποια λήμματα κάλυψης του Vitali, τα οποία περιγράφουμε στο γενικότερο πλαίσιο του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 2.4.4. Λέμε ότι μια οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ από μπάλες είναι κάλυψη Vitali ενός συνόλου $E \subset \mathbb{R}^d$ αν για κάθε $x \in E$ και για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει μια μπάλα $B_j \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε $x \in B_j$ και $\lambda(B_j) < \eta$. Δηλαδή, αν κάθε $x \in E$ καλύπτεται από μπάλες της οικογένειας $\mathcal{B}$ με οσοδήποτε μικρό μέτρο.

Λήμμα 2.4.5. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{B}$ είναι μια κάλυψη Vitali του E τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1, \ldots, B_N$ στην $\mathcal{B}$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγικά το Λήμμα 2.1.5. Θέτουμε $\gamma = 3^{-d}$. Για δοθέν $0 < \delta < \lambda(E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές $E' \subseteq E$ με $\lambda(E') \geqslant \delta$. Τότε, το E' καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$, και το Λήμμα 2.1.5 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένες ανά δύο μπάλες $B_1, \ldots, B_{N_1} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) \geqslant \gamma\lambda(E') \geqslant \gamma\delta.$$

Κρατάμε τις $B_1, \ldots, B_{N_1}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο.

(ii) Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) < \lambda(E) - \delta$, ορίζουμε $E_2 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$ και, αφού $\lambda(E_2) \geqslant \lambda(E) - \sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) > \delta$, βρίσκουμε συμπαγές $E_2' \subseteq E_2$ με $\lambda(E_2') \geqslant \delta$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι κάλυψη Vitali του E, εύκολα ελέγχουμε ότι οι μπάλες της $\mathcal{B}$ που είναι ξένες προς την $\bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$ εξακολουθούν να καλύπτουν το E_2'. Άρα, το E_2' καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$, και το Λήμμα 2.1.5 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένες ανά δύο μπάλες $B_{N_1+1}, \ldots, B_{N_2} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant \gamma\lambda(E_2') \geqslant \gamma\delta.$$

Δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant 2\gamma\delta.$$

Κρατάμε τις $B_1, \ldots, B_{N_2}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) < \lambda(E) - \delta$, βρίσκουμε ξένες μπάλες $B_{N_2+1}, \ldots, B_{N_3} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_3} \lambda(B_i) \geqslant 3\gamma\delta.$$

Αν συνεχίσουμε έτσι, και αν έχουμε κάνει k βήματα, έχουμε επιλέξει ξένες μπάλες από την $\mathcal{B}$ ώστε το άθροισμα των μέτρων τους να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $k\gamma\delta$. Έτσι, είτε θα πετύχουμε το ζητούμενο διότι $\sum_{i=1}^{N_s} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ στο s-βήμα της διαδικασίας, ή κάποια στιγμή θα φτάσουμε στο k-βήμα για τον μικρότερο k που ικανοποιεί την $k\gamma\delta \geqslant \lambda(E) - \delta$, οπότε θα έχουμε πάλι το ζητούμενο, διότι

$$\sum_{i=1}^{N_k} \lambda(B_i) \geqslant k\gamma\delta \geqslant \lambda(E) - \delta.$$

□

Πόρισμα του Λήμματος 2.4.5 είναι το εξής.

Λήμμα 2.4.6. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{B}$ είναι μια κάλυψη Vitali του E τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1, \ldots, B_N$ στην $\mathcal{B}$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την*

$$\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) < 2\delta.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda(G \setminus E) < \delta$. Οι μπάλες από την $\mathcal{B}$ που, επιπλέον, περιέχονται στο G εξακολουθούν να σχηματίζουν κάλυψη Vitali $\mathcal{B}'$ του E. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.4.5 βρίσκουμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1, \ldots, B_N$ στην $\mathcal{B}'$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta.$$

Τότε,

$$\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \subseteq G,$$

και τα δύο σύνολα στο αριστερό μέλος είναι ξένα. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) &\leqslant \lambda(G) - \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right)\\ &< \lambda(E) + \delta - (\lambda(E) - \delta) = 2\delta.\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.3. Υποθέτουμε ότι η f είναι απολύτως συνεχής και ότι $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού, και θα δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(b) = f(a)$, διότι μετά μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα στο διάστημα $[a, x]$ και να συμπεράνουμε ότι $f(x) = f(a)$ για κάθε $a < x \leqslant b$. Θεωρούμε το σύνολο E των $x \in (a, b)$ για τα οποία υπάρχει η $f'(x)$ και είναι ίση με μηδέν. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(E) = b - a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\lim_{h \to 0} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = 0,$$

άρα, για κάθε $\eta > 0$ μπορούμε να βρούμε $I_x = (a_x, b_x) \subset [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$x \in I_x, \quad b_x - a_x < \eta, \quad \text{και} \quad |f(b_x) - f(a_x)| < \varepsilon(b_x - a_x).$$

Η οικογένεια όλων αυτών των διαστημάτων είναι κάλυψη του E κατά Vitali. Από το Λήμμα 2.4.6, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος τέτοια διαστήματα $I_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, N$, τα οποία είναι ξένα ανά δύο και ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta = (b-a) - \delta.$$

Ταυτόχρονα έχουμε $|f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon(b_i - a_i)$, άρα

$$\sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \leqslant \varepsilon(b-a), \tag{2.4.1}$$

διότι τα (a_i, b_i) είναι ξένα ανά δύο και περιέχονται στο $[a,b]$.

Το συμπλήρωμα της ένωσης $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$ στο $[a,b]$ είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων $\bigcup_{j=1}^{N} [u_j, v_j]$, και από την (2.4.1) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{M} (v_j - u_j) \leqslant \delta.$$

Χρησιμοποιώντας την απόλυτη συνέχεια της f μπορούμε να επιλέξουμε το δ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε

$$\sum_{j=1}^{M} |f(v_j) - f(u_j)| \leqslant \varepsilon.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{j=1}^{M} |f(v_j) - f(u_j)| \\ &\leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(b) - f(a) = 0$. $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ότι οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις είναι ακριβώς εκείνες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την (2.3.1).

Θεώρημα 2.4.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f'(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού, και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a,b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, d\lambda(t).$$

Ειδικότερα,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, d\lambda(t).$$

Αντίστροφα, αν η $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει απολύτως συνεχής συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g'(x) = h(x)$ σχεδόν παντού. Μπορούμε μάλιστα να πάρουμε την $g(x) = \int_a^x h(x)d\lambda(x)$.

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, άρα είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού, από το Θεώρημα 2.3.1. Επίσης, η f' είναι ολοκληρώσιμη, από την Πρόταση 2.3.5. Ορίζουμε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_a^x f'(x)d\lambda(x).$$

Τότε, η g είναι απολύτως συνεχής από την Παρατήρηση 2.4.2 (γ). Άρα, η $g - f$ είναι απολύτως συνεχής. Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε ότι

$$g'(x) = f'(x) \text{ σχεδόν παντού.}$$

Τώρα, το Θεώρημα 2.4.3 δείχνει ότι η $g - f$ είναι σταθερή. Από την $g(x) - f(x) = g(a) - f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = g(x) - g(a) = g(x) = \int_a^x f'(t)d\lambda(t)$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι αν η $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η $g(x) = \int_a^x h(x)d\lambda(x)$, $x \in [a,b]$, είναι απολύτως συνεχής και, από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, $g'(x) = h(x)$ σχεδόν παντού. □

Μια κλάση απολύτως συνεχών συναρτήσεων μας δίνουν οι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις. Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ για κάποια σταθερά $L > 0$ και για κάθε $x, y \in [a,b]$, τότε είναι φανερό ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο υποδιαστημάτων (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ του $[a,b]$ με $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \varepsilon/L$ ισχύει

$$\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant L \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 2.4.7 έπεται άμεσα το εξής.

Πόρισμα 2.4.8. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f'(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού, και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a,b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)d\lambda(t).$$

2.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. (α) Αποδείξτε το Λήμμα 2.2.4.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένη κύμανση.

2. (α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x\sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\varphi(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά έχει άπειρη κύμανση.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\psi(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\psi(0) = 0$ έχει φραγμένη κύμανση.

3. (α) Έστω (φ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε φ_n έχει φραγμένη κύμανση και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $V(\varphi_n \mid a,b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\varphi_n \to \varphi$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η φ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\varphi \mid a,b) \leq M$.

(β) Η υπόθεση $V(\varphi_n \mid a,b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο (α) είναι ουσιαστική. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \geqslant \frac{1}{2n\pi} \\ 0, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2n\pi} \end{cases}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση φ της Άσκησης 2(α) και ότι κάθε φ_n έχει φραγμένη κύμανση (ενώ η φ όχι).

4. Έστω (φ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$ και έχουν φραγμένη κύμανση. Αν $\varphi_n \to \varphi$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι

$$V(\varphi \mid a,b) \leq \liminf_{n\to\infty} V(\varphi_n \mid a,b).$$

[*Υπόδειξη για τις Ασκήσεις 3 και 4:* Αποδείξτε ότι $V(\varphi_n, P) \to V(\varphi, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.]

5. Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, $V(\varphi \mid a+\varepsilon, b) \leq M$.

(α) Αποδείξτε ότι $V(\varphi \mid a,b) < +\infty$.

(β) Ποιά επιπλέον υπόθεση για την φ μας εξασφαλίζει ότι $V(\varphi \mid a,b) \leq M$;

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $I(x) = 0$ αν $x < 0$ και $I(x) = 1$ αν $x \geqslant 0$. Έστω (c_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ και έστω (x_n) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του $(a,b]$. Αν

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n), \quad x \in [a,b]$$

αποδείξτε ότι $\varphi \in BV[a,b]$ και

$$V(\varphi \mid a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

7. Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $N(y)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\varphi(x) = y$ στο $[a,b]$. Αν $m = \min\{\varphi(x) : a \leq x \leq b\}$ και $M = \max\{\varphi(x) : a \leq x \leq b\}$, αποδείξτε ότι

$$V(\varphi \mid a,b) = \int_m^M N(y)\,d\lambda(y).$$

8. Βρείτε, αν υπάρχει, συνεχή συνάρτηση $\varphi \in BV[a,b]$ η οποία δεν είναι Lipschitz συνεχής.

9. Έστω $a,b > 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^a\sin(x^{-b}), & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $a > b$. Παίρνοντας $a = b$, κατασκευάστε (για κάθε $0 < \alpha < 1$) μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη τλHölδερ τάξης α

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x-y|^{\alpha}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$, αλλά δεν έχει φραγμένη κύμανση.

10. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x, αλλά η f' δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

11. Αποδείξτε (με βάση τον ορισμό) ότι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue δεν είναι απολύτως συνεχής.

12. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η

$$D^{+}(g)(x) = \limsup_{h \to 0^{+}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) Η f απεικονίζει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.

(β) Η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

14. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής, αύξουσα συνάρτηση με $f(a) = A$ και $f(b) = B$. Έστω $g : [A,B] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι η $g(f(x))f'(x)$ είναι μετρήσιμη στο $[a,b]$.

(β) Αποδείξτε ότι αν η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[A,B]$ τότε η $g(f(x))f'(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_A^B g(y)\,d\lambda(y) = \int_a^b g(f(x))f'(x)\,d\lambda(x).$$

15. Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι η fg είναι απολύτως συνεχής, και

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,d\lambda(x) = -\int_a^b f(x)g'(x)\,d\lambda(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Ομάδα Β′

16. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^{*}(x) \geqslant \frac{c}{|x|^d} \quad \text{για κάθε } |x| \geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^{*} δεν είναι ολοκληρώσιμη.

17. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\log 1/|x|)^2} \quad \text{αν } |x| \leqslant 1/2$$

και $f(x) = 0$ αλλιώς. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε επίσης ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^{*}(x) \geqslant \frac{c}{|x|(\log 1/|x|)} \quad \text{για κάθε } |x| \leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$f_+^*(x)=\sup_{h>0}\int_x^{x+h}|f(y)|\,d\lambda(y).$$

Για κάθε $\alpha>0$ θέτουμε $E_\alpha^+=\{x\in\mathbb{R}:f_+^*(x)>\alpha\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(E_\alpha^+)=\frac{1}{\alpha}\int_{E_{\alpha+}}|f(y)|d\lambda(y).$$

[*Υπόδειξη.* Εφαρμόστε το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου για την $F(x)=\int_a^x|f(y)|d\lambda(y)-\alpha x$.]

19. Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\delta(x)=d(x,F)=\inf\{|x-y|:y\in F\}.$$

Ελέγξτε ότι $\delta(x+y)\leqslant|y|$ για κάθε $x\in F$ και για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, ισχυρότερα, ισχύει το εξής:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\delta(x+y)}{|y|}=0\ \text{ σχεδόν για κάθε } x\in F.$$

20. Κατασκευάστε μια αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: η f είναι ασυνεχής στο x αν και μόνο αν $x\in\mathbb{Q}$.

21. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $D^+(f)(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

22. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x\in(a,b)$ και $|f'(x)|\leqslant M$, αποδείξτε ότι $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$ για κάθε $x,y\in[a,b]$ και ότι η f είναι απολύτως συνεχής.

23. Έστω $E\subset\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ με

$$\liminf_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y)=\infty$$

για κάθε $x\in E$.

24. Έστω $E\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(E)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αύξουσα, απολύτως συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $D_+(f)(x)=D_-(f)(x)=\infty$ για κάθε $x\in E$.

25. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$$

για κάποια σταθερά $M>0$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η f είναι απολύτως συνεχής και $|f'(x)|\leqslant M$ σχεδόν για κάθε x.

26. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και απολύτως συνεχής, σε κάθε κλειστό διάστημα $[\gamma,\delta]\subset(a,b)$.

(γ) Η $f'(x)$ υπάρχει σε όλα, εκτός από αριθμήσιμα το πλήθος, τα $x \in (a,b)$, η $f' = D^+(f)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)d\lambda(t)$$

για κάθε $x < y$ στο (a,b).

(δ) Αντίστροφα, αν η $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε για κάθε $\gamma \in (a,b)$ η $f(x) = \int_\gamma^x g(t)d\lambda(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση στο (a,b).

27. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a,b)$ και ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι η f είναι απολύτως συνεχής και

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)d\lambda(x).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χώροι L^p

3.1 Χώροι L^p

Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}^p(E)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες

$$\int_E |f|^p d\lambda < \infty.$$

Παρατηρήστε ότι αν $f \in \mathcal{L}^p(E)$ τότε $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού στο E. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^p(E)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ λ-σχεδόν παντού. Το σύνολο $L^p(E)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}^p(E)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f + g] \;\text{ και }\; a[f] = [af].$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο f για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L^p(E)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L^p(E)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\lambda \right)^{1/p}.$$

Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν σχεδόν παντού γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \implies f = 0$. Πράγματι, αν $\int_E |f|^p d\lambda = 0$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $L^p(E)$ είναι γραμμικός χώρος: Πράγματι, έστω $f, g \in L^p(E)$. Τότε, για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant \big(2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}\big)^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

άρα

$$\int_E |f + g|^p \; d\lambda \leqslant 2^p \left(\int_E |f|^p \; d\lambda + \int_E |g|^p \; d\lambda \right) < \infty,$$

δηλαδή $f + g \in L^p(E)$.

Πρόταση 3.1.1. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Ο χώρος $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Προφανώς, $\|f\|_p \geqslant 0$ για κάθε $f \in L^p(E)$, και είδαμε ότι αν $\|f\|_p = 0$ τότε $f = 0$. Είναι επίσης άμεσο ότι αν $f \in L^p(E)$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$\|af\|_p = |a|\|f\|_p.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Αυτή προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Minkowski, την οποία δείχνουμε παρακάτω. □

Λήμμα 3.1.2 (ανισότητα Young)**.** *Αν $x, y \geqslant 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \dots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \leqslant \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m),$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leqslant t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{3.1.1}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}.$$

Ειδική περίπτωση της (3.1.1) είναι η

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b. \tag{3.1.2}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (3.1.2) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, επιλέγοντας $t = \frac{1}{p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Ορισμός 3.1.3 (συζυγείς εκθέτες)**.** Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Πρόταση 3.1.4 (ανισότητα Hölder)**.** *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $f \in L^p(E)$ και $g \in L^q(E)$, όπου $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg \in L^1(E)$ και*

$$\int_E |fg| \, d\lambda \leqslant \left(\int_E |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q \, d\lambda \right)^{1/q},$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\lambda = 1 \ \text{ και } \ \|g\|_q^q = \int_E |g|^q \, d\lambda = 1.$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\int_E |fg| \, d\lambda \leqslant \frac{1}{p}\int_E |f|^p \, d\lambda + \frac{1}{q}\int_E |g|^q \, d\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ $\lambda-$σχεδόν παντού και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \ \text{ και } \ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_E |f_1|^p \, d\lambda = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f|^p \, d\lambda = 1 \ \text{ και } \ \int_E |g_1|^q \, d\lambda = \frac{1}{\|g\|_q^q}\int_E |g|^q \, d\lambda = 1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_E |f_1 g_1| \, d\lambda \leqslant 1, \ \text{ δηλαδή, } \ \int_E |fg| \, d\lambda \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Πρόταση 3.1.5 (ανισότητα Minkowski). *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f, g \in L^p(E)$, τότε*

$$\left(\int_E |f+g|^p \, d\lambda\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \, d\lambda\right)^{1/p},$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p = 1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1 < p < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_E |f+g|^p \, d\lambda = \int_E |f+g|^{p-1}|f+g| \, d\lambda \\
&\leqslant \int_E |f+g|^{p-1}|f| \, d\lambda + \int_E |f+g|^{p-1}|g| \, d\lambda \\
&\leqslant \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \|g\|_p,
\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f+g|^{p-1}, |f|$ και $|f+g|^{p-1}, |g|$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_E |f+g|^{(p-1)q}\, d\lambda\right)^{1/q} = \left(\int_E |f+g|^p\, d\lambda\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

3.2 Θεώρημα Riesz-Fischer

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε την πληρότητα του $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$. Ορίζουμε επίσης τον χώρο $L^\infty(E)$ και αποδεικνύουμε ότι είναι πλήρης. Τέλος, δείχνουμε ότι αν $1 \leqslant p < \infty$ τότε οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $L^p(E)$.

3.2.1 Θεώρημα Riesz-Fischer

Θεώρημα 3.2.1 (Riesz-Fischer). *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $1 \leqslant p < \infty$. Ο $L^p(E)$ είναι χώρος Banach.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό κριτήριο. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.2.2. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο X με νόρμα. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$s_n := \sum_{k=1}^n x_k \to x.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty x_k$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < +\infty$.

Λήμμα 3.2.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(α) *Ο X είναι πλήρης.*
(β) *Αν (x_k) είναι ακολουθία στον X με $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^\infty x_k$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Τότε, αν $n > m \geqslant n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι Cauchy. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Αντίστροφα, έστω (x_k) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε $s_1 < s_2 < \cdots < s_k < \cdots$ ώστε, για κάθε $n > m \geqslant s_k$,

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ειδικότερα,

$$s_{k+1} > s_k \geqslant s_k \Longrightarrow \|x_{s_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{s_{k+1}} - x_{s_k}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{s_{k+1}} - x_{s_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{s_{k+1}} - x_{s_k}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{s_{m+1}} - x_{s_1} \to x$. Άρα, $x_{s_k} \to x + x_{s_1}$. Δείξαμε ότι η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει στον X. Έπεται ότι ο X είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Έστω (f_k) ακολουθία στον $L^p(E)$ με την ιδιότητα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < +\infty.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$, $x \in X$. Τότε,

$$\|g_n\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leqslant M,$$

δηλαδή $g_n \in L^p(E)$ και $\int_E g_n^p d\lambda \leqslant M^p$. Η (g_n) είναι αύξουσα, άρα ορίζεται η $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim g_n(x) \in [0, \infty]$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_E g^p d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n^p d\lambda \leqslant M^p.$$

Συνεπώς, η g^p είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Από την $g(x) < +\infty$ έχουμε ότι η $s(x) = \lim s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ορίζεται και παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού. Η s είναι μετρήσιμη και από την $|s_n(x)| \leqslant g_n(x) \leqslant g(x)$ συμπεραίνουμε ότι $|s(x)| \leqslant g(x)$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι

$$\int_E |s|^p d\lambda \leqslant \int_E g^p d\lambda \leqslant M^p < \infty,$$

δηλαδή $s \in L^p(E)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\} \leqslant 2^p |g(x)|^p$$

σχεδόν παντού. Αφού $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι
$$\int_E |s_n - s|^p d\lambda \to 0.$$
Αυτό δείχνει ότι $\|s_n - s\|_p \to 0$. Από το Λήμμα 3.2.3 έπεται ότι ο $L^p(E)$ είναι χώρος Banach. □

3.2.2 Ο χώρος $L^\infty(E)$

Στην περίπτωση $p = \infty$, ο χώρος $L^\infty(E)$ αποτελείται από τις μετρήσιμες f που είναι «φραγμένες σχεδόν παντού». Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 3.2.4. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Η κλάση $\mathcal{L}^\infty(E)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : E \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες υπάρχει $\beta > 0$ ώστε
$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta\}\right) = 0.$$

Για μια τέτοια f, θέτουμε $\|f\|_\infty$ το infimum όλων αυτών των β. Παρατηρήστε ότι το infimum είναι minimum: αν (β_n) είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία με $\beta_n \to \|f\|_\infty$, τότε
$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta_n\}\right) = 0$$
για κάθε n και $\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in E : |f(x)| > \beta_n\}$, άρα
$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}\right) = 0.$$

Με άλλα λόγια,
$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{L}^\infty(E)$ είναι γραμμικός χώρος. Αν για κάποια $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ ισχύει $\|f\|_\infty = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Έτσι, για $f, g \in \mathcal{L}^\infty(E)$, θέτουμε $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

Ορισμός 3.2.5. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του χώρου $\mathcal{L}^\infty(E)$ ως προς τη σχέση $\sim$ συμβολίζεται με $L^\infty(E)$. Ο $L^\infty(E)$ γίνεται γραμμικός χώρος με τις προφανείς πράξεις.

Θα γράφουμε, όπως και πριν, $f \in L^\infty(E)$ αντί για $[f] \in L^\infty(E)$. Τέλος, για μια $f \in L^\infty(E)$ θέτουμε
$$\|f\|_\infty = \min\left\{\beta > 0 : \lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta\}\right)\right\}.$$
Λέμε ότι ο $\|f\|_\infty$ είναι το *ουσιώδες supremum* της f.

Πρόταση 3.2.6. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ο χώρος $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ο χώρος με νόρμα $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_{n,m} = \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty\}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

για τα οποία ισχύει $\lambda(E \setminus A_{n,m}) = 0$. Έτσι, αν ορίσουμε $A = \bigcap_{n,m} A_{n,m}$ έχουμε $\lambda(E \setminus A) = 0$ και

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στο A και συνεπώς ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Υπάρχει λοιπόν μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Δηλαδή,

$$\|f_n - f\|_\infty = \|(f_n - f)\chi_A\|_\infty \leqslant \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Αυτό δείχνει ότι $f \in L^\infty(E)$ και $f_n \to f$ στον $L^\infty(E)$. □

3.2.3 Προσέγγιση συναρτήσεων στον L^p

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε δύο βασικά αποτελέσματα προσέγγισης των συναρτήσεων που ανήκουν σε χώρους L^p.

Θεώρημα 3.2.8. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ που αποτελείται από όλες τις απλές μετρήσιμες συναρτήσεις $\varphi : E \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει*

$$\lambda(\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή στον $L^p(E)$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $\varphi \in \mathcal{S}$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

όπου τα $A_j \in \mathcal{M}$ είναι ξένα και αν $a_j \neq 0$ τότε $\lambda(A_j) < \infty$, έχουμε

$$\int_E |\varphi|^p \, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \lambda(A_j) < \infty.$$

Δηλαδή $\mathcal{S} \subseteq L^p(E)$.

Έστω $f \in L^p(E)$, $f \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\varphi_n\}$ με $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ και $\varphi_n \nearrow f$. Αφού $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$, έχουμε $\varphi_n \in L^p(E)$ για κάθε n, άρα $\varphi_n \in \mathcal{S}$ (άσκηση). Επιπλέον, $|f - \varphi_n|^p \leqslant f^p$ και αφού $f \in L^p(E)$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\int_E |\varphi_n - f|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή ότι $\|\varphi_n - f\|_p \to 0$. Άρα, οι μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L^p(E)$ προσεγγίζονται από απλές ως προς την $\|\cdot\|_p$. Για την γενική περίπτωση, αν $f \in L^p(E)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και βρίσκουμε $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{S}$ με $\|\varphi_n - f^+\|_p \to 0$ και $\|\psi_n - f^-\|_p \to 0$. Τότε, οι $\zeta_n := \varphi_n - \psi_n$ ανήκουν στην $\mathcal{S}$ και

$$\|\zeta_n - f\|_p = \|(\varphi_n - \psi_n) - (f^+ - f^-)\|_p \leqslant \|\varphi_n - f^+\|_p + \|\psi_n - f^-\|_p \to 0,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.2.9 (φορέας). *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$. Το κλειστό σύνολο*

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$$

λέγεται φορέας της f.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $C_c(\mathbb{R}^d)$ του χώρου $C(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που αποτελείται από όλες τις συνεχείς f που έχουν συμπαγή φορέα, δηλαδή μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές σύνολο $K = K(f) \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε ότι κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$, προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Θεώρημα 3.2.10. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Το σύνολο $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα είναι πυκνό στον $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος 3.2.8, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απλή συνάρτηση $\varphi \in \mathcal{S}$, που επιπλέον έχει συμπαγή φορέα (άσκηση), προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος, μπορούμε εύκολα να αναχθούμε στην περίπτωση που $\varphi = \chi_A$ για κάποιο φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές K_ε και φραγμένο ανοικτό U_ε ώστε $K_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon$ και $\lambda(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon^p$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Urysohn μπορούμε να ορίσουμε $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ που ικανοποιεί τις $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f \equiv 0$ στο U_ε^c και $f \equiv 1$ στο K_ε. Τότε, $|f - \chi_A| \leqslant 1$ και $f = \chi_A$ στο $K_\varepsilon \cup U_\varepsilon^c$, άρα

$$\|f - \chi_A\|_p \leqslant [\lambda(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)]^{1/p} < \varepsilon.$$

□

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια πρόταση που θα μας φανεί χρήσιμη αρκετές φορές.

Πρόταση 3.2.11. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$. Τότε,*

$$\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p := \lim_{|z|\to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+z) - f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα g συνεχή, η οποία μηδενίζεται έξω από κάποια μπάλα $\widehat{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant r\}$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}^d$ και $|u - v| \leqslant \delta$ τότε $|g(u) - g(v)| \leqslant \varepsilon$. Αν $|z| < \delta$ τότε για κάθε $x \notin \widehat{B}(r+1)$ έχουμε $x + z \notin \widehat{B}(r)$, άρα $|g(x+z) - g(x)| = 0$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x+z) - g(x)|^p d\lambda(x) = \int_{\widehat{B}(r+1)} |g(x+z) - g(x)|^p d\lambda(x) \leqslant \varepsilon^p \lambda(\widehat{B}(r+1)),$$

δηλαδή
$$\|g(x+z)-g(x)\|_p \leqslant [\lambda(\widehat{B}(r+1))]^{1/p}\varepsilon.$$
Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{|z|\to 0}\|g(x+z)-g(x)\|_p=0$.

Έστω τώρα $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ και έστω $\varepsilon>0$. Μπορούμε να βρούμε g συνεχή, η οποία μηδενίζεται έξω από κάποια μπάλα $\widehat{B}(r)$, με την ιδιότητα $\|f(x)-g(x)\|_p\leqslant\varepsilon$. Τότε, για κάθε $z\in\mathbb{R}^d$ έχουμε $\|f(x+z)-g(x+z)\|_p\leqslant\varepsilon$. Γράφουμε
$$\begin{aligned}\|f(x+z)-f(x)\|_p &\leqslant \|f(x+z)-g(x+z)\|_p+\|g(x+z)-g(x)\|_p+\|g(x)-f(x)\|_p\\ &\leqslant 2\varepsilon+\|g(x+z)-g(x)\|_p\end{aligned}$$
για κάθε $z\in\mathbb{R}^d$, και αφήνοντας το $z\to 0$ έχουμε
$$\limsup_{z\to 0}\|f(x+z)-f(x)\|_p\leqslant 2\varepsilon$$
διότι $\lim_{|z|\to 0}\|g(x+z)-g(x)\|_p=0$.

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{|z|\to 0}\|f(x+z)-f(x)\|_p=0$. □

3.3 Θεώρημα Fubini

Έστω d_1,d_2 θετικοί ακέραιοι και $d=d_1+d_2$. Γράφουμε τον $\mathbb{R}^d$ στη μορφή $\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ και συμβολίζουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^d$ με (x,y), όπου $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ και $y\in\mathbb{R}^{d_2}$. Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ ορίζουμε:

(i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ την συνάρτηση $f_x:\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ με $f_x(y):=f(x,y)$.

(ii) Για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ την συνάρτηση $f^y:\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}$ με $f^y(x):=f(x,y)$.

Τελείως ανάλογα, για κάθε σύνολο $E\subseteq\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ ορίζουμε:

(i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ το σύνολο $E_x:=\{y\in\mathbb{R}^{d_2}:(x,y)\in E\}$.

(ii) Για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο $E^y:=\{x\in\mathbb{R}^{d_1}:(x,y)\in E\}$.

Το θεώρημα του Fubini μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώνοντας «πρώτα ως προς x και μετά ως προς y» ή «πρώτα ως προς y και μετά ως προς x».

Θεώρημα 3.3.1 (Fubini). *Έστω $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, σχεδόν για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση f^y είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και η συνάρτηση*
$$y\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)d\lambda_{d_1}(x)$$
είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$. Επιπλέον,
$$\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y).$$

Το Θεώρημα 3.3.1 είναι φυσικά συμμετρικό ως προς x και y. Δηλαδή, αν $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ η συνάρτηση f_x είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$ και η συνάρτηση

$$x\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f_x(y)d\lambda_{d_2}(y)$$

είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$, και ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)d\lambda_{d_2}(y)\right)d\lambda_{d_1}(x).$$

Δηλαδή, μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης:

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)d\lambda_{d_2}(y)\right)d\lambda_{d_1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 έχει αρκετά λεπτά σημεία. Αν γνωρίζουμε ότι η $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση f^y είναι μετρήσιμη. Παρομοίως, αν το $E\subset\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο E^y είναι μετρήσιμο (για παράδειγμα, θεωρήστε το $E=N\times\{0\}$ στο $\mathbb{R}^2$, όπου N είναι ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ – τότε, $\lambda_2(E)=0$ αλλά το $E^0=N$ δεν είναι μετρήσιμο).

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1. Ορίζουμε $\mathcal{F}$ την κλάση των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα τρία συμπεράσματα του θεωρήματος, και θα αποδείξουμε ότι $L^1(\mathbb{R}^d)\subseteq\mathcal{F}$. Η απόδειξη θα γίνει σε έξι βήματα.

Βήμα 1. *Κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων από την $\mathcal{F}$ ανήκει κι αυτός στην $\mathcal{F}$.*

Πράγματι, έστω $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{F}$ και έστω $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$. Για κάθε $i=1,\dots,k$ υπάρχει σύνολο $Z_i\subset\mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(Z_i)=0$ ώστε για κάθε $y\notin Z_i$ η f_i^y να είναι ολοκληρώσιμη. Αν θέσουμε $Z=Z_1\cup\cdots\cup Z_k$, τότε $\lambda_{d_2}(Z)=0$ και για κάθε $y\notin Z$ έχουμε ότι οι f_i^y είναι ολοκληρώσιμες. Έπεται ότι η

$$(a_1f_1+\cdots+a_kf_k)^y=a_1f_1^y+\cdots+a_kf_k^y$$

είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $y\notin Z$. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος συμπεραίνουμε τώρα ότι η

$$y\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d_1}}(a_1f_1+\cdots+a_kf_k)^y(x)d\lambda_{d_1}(x)=\sum_{i=1}^k a_i\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_i^y(x)d\lambda_{d_1}(x)$$

είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}(a_1f_1+\cdots+a_kf_k)(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\sum_{i=1}^k a_i\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_i(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y)$$
$$=\sum_{i=1}^k a_i\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_i(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y)$$
$$=\sum_{i=1}^k a_i\int_{\mathbb{R}^d}f_id\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^d}(a_1f_1+\cdots+a_kf_k)d\lambda_d.$$

Άρα, $a_1f_1+\cdots+a_kf_k\in\mathcal{F}$.

Βήμα 2. *Έστω (f_k) μια αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων στην $\mathcal{F}$, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια ολοκληρώσιμη $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$. Τότε, $f\in\mathcal{F}$.*

Παίρνοντας τις $-f_k$ στην θέση των f_k αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k\nearrow f$. Μπορούμε επίσης (χρησιμοποιώντας και το Βήμα 1) να αντικαταστήσουμε τις f_k με τις f_k-f_1 και να υποθέσουμε ότι οι f_k είναι μη αρνητικές. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_kd\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d. \tag{3.3.1}$$

Αφού $f_k\in\mathcal{F}$, για κάθε k υπάρχει $A_k\subset\mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(A_k)=0$ ώστε: αν $y\notin A_k$ τότε η f_k^y είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$. Θέτουμε $A=\bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Τότε, $\lambda_{d_2}(A)=0$ και αν $y\notin A$ έχουμε ότι η f_k^y είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ για κάθε k. Επίσης, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$g_k(y):=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_k^y(x)d\lambda_{d_1}(x)\to g(y):=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)d\lambda_{d_1}(x).$$

Αφού $f_k\in\mathcal{F}$ έχουμε επίσης ότι κάθε g_k είναι ολοκληρώσιμη και, πάλι από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g_k(y)d\lambda_{d_2}(y)\to\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g(y)d\lambda_{d_2}(y). \tag{3.3.2}$$

Αφού $f_k\in\mathcal{F}$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g_k(y)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f_kd\lambda_d.$$

Συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με τις (3.3.1) και (3.3.2) παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g(y)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d.$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, η g είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(y)<\infty$ σχεδόν παντού, δηλαδή η f^y είναι ολοκληρώσιμη σχεδόν για κάθε y, και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in \mathcal{F}$.

Βήμα 3. *Αν το E είναι G_δ-σύνολο και $\lambda_d(E) < \infty$, τότε η χ_E ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ένας φραγμένος ανοικτός κύβος, δηλαδή $E = Q_1 \times Q_2$ όπου Q_1 και Q_2 είναι ανοικτοί κύβοι στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και τον $\mathbb{R}^{d_2}$ αντίστοιχα. Τότε, η $(\chi_E)^y$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε y, με ολοκλήρωμα $\lambda_{d_1}(Q_1)$ αν $y \in Q_2$ και ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν αν $y \notin Q_2$. Άρα, η $g = \lambda_{d_1}(Q_1)\chi_{Q_2}$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη, και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) d\lambda_{d_2}(y) = \lambda_{d_1}(Q_1)\lambda_{d_2}(Q_2).$$

Αφού

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = \lambda_d(E) = \lambda_{d_1}(Q_1)\lambda_{d_2}(Q_2),$$

έχουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι το E περιέχεται στο σύνορο κάποιου κλειστού κύβου. Αφού το σύνορο του κύβου έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}^d$, έχουμε $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = 0$. Παρατηρούμε τώρα, διακρίνοντας περιπτώσεις, ότι σχεδόν για κάθε y, το σύνολο E^y έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}^{d_1}$, άρα αν ορίσουμε $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$ τότε $g(y) = 0$ σχεδόν για κάθε y. Έπεται ότι $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(y) d\lambda_{d_2}(y) = 0$, το οποίο δείχνει ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(γ) Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών κύβων με ξένα εσωτερικά. Έστω $E = \bigcup_{i=1}^k Q_i$. Αν γράφουμε $\tilde{Q}_i$ για το εσωτερικό του Q_k, τότε μπορούμε να γράφουμε την χ_E σαν γραμμικό συνδυασμό των $\chi_{\tilde{Q}_i}$ και των χ_{A_i}, όπου κάθε A_i είναι υποσύνολο του συνόρου του Q_i. Από τα (α) και (β) έχουμε ότι $\chi_{\tilde{Q}_i} \in \mathcal{F}$, $\chi_{A_i} \in \mathcal{F}$, και από το Βήμα 1 συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(δ) Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι ανοικτό και έχει πεπερασμένο μέτρο. Μπορούμε να γράφουμε το E στη μορφή

$$E = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k,$$

όπου Q_k είναι κύβοι με ξένα εσωτερικά. Αν θέσουμε $f_m = \sum_{k=1}^m \chi_{Q_k}$, τότε $f_k \nearrow \chi_E$ σχεδόν παντού. Αφού $f_k \in \mathcal{F}$ (από το (γ)) και η χ_E είναι ολοκληρώσιμη (διότι $\lambda_d(E) < \infty$) συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$ χρησιμοποιώντας το Βήμα 2.

(ε) Τέλος, έστω E ένα G_δ-σύνολο με $\lambda_d(E) < \infty$. Μπορούμε να γράψουμε το E στη μορφή

$$E = \bigcap_{k=1}^\infty G_k,$$

όπου (G_k) είναι μια φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων, και $\lambda_d(G_1) < \infty$ (άσκηση). Τότε, οι συναρτήσεις χ_{G_k} ανήκουν στην $\mathcal{F}$ από το (δ) και σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο στην χ_E. Από το Βήμα 2 συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$, και το Βήμα 3 έχει ολοκληρωθεί.

Βήμα 4. *Αν $\lambda_d(E) = 0$ τότε $\chi_E \in \mathcal{F}$.*

Πράγματι, αφού το E είναι μετρήσιμο και $\lambda_d(E) = 0$, μπορούμε να βρούμε G_δ-σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda_d(G) = 0$. Από το Βήμα 3 έχουμε ότι $\chi_G \in \mathcal{F}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x,y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_G d\lambda_d = 0.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x,y) d\lambda_{d_1}(x) = 0 \ \text{ σχεδόν για κάθε } y.$$

Έπεται ότι $\lambda_{d_1}(G^y) = 0$ σχεδόν για κάθε y. Αφού $E^y \subseteq G^y$ για κάθε y, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_{d_1}(E^y) = 0$ σχεδόν για κάθε y, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y) d\lambda_{d_1}(x) = 0$ σχεδόν για κάθε y. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Βήμα 5. *Αν το E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $\lambda_d(E) < \infty$, τότε η χ_E ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

Πράγματι, θεωρούμε ένα G_δ-σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda_d(G \setminus E) = 0$, γράφουμε

$$\chi_E = \chi_G - \chi_{G \setminus E},$$

και χρησιμοποιώντας το Βήμα 3, το Βήμα 4 και το γεγονός ότι η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς, συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Βήμα 6. *Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

Παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού η f γράφεται στη μορφή $f = f^+ - f^-$ και οι f^+, f^- είναι ολοκληρώσιμες, και αφού η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι μη αρνητική. Γνωρίζουμε τώρα ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων φ_k ώστε $\varphi_k \nearrow f$. Κάθε φ_k είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων πεπερασμένου μέτρου, άρα κάθε $\varphi_k \in \mathcal{F}$ από το Βήμα 5 και το Βήμα 1. Έπεται ότι $f \in \mathcal{F}$, από το Βήμα 2. □

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου δίνουμε κάποιες χρήσιμες εφαρμογές του θεωρήματος Fubini, ξεκινώντας από το θεώρημα Tonelli.

Θεώρημα 3.3.2 (Tonelli)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση f^y είναι μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και η συνάρτηση*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) d\lambda_{d_1}(x)$$

είναι μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$. Επιπλέον,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y).$$

Απόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{αν } |(x,y)| < k \text{ και } f(x,y) < k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Κάθε f_k είναι ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα Fubini, υπάρχει $E_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(E_k) = 0$ ώστε: αν $y \notin E_k$ τότε η f_k^y είναι ολοκληρώσιμη. Αν θέσουμε $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, βλέπουμε ότι $\lambda_{d_2}(E) = 0$ και αν $y \notin E$ τότε η f_k^y είναι μετρήσιμη για κάθε k. Αφού $f_k^y \nearrow f^y$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)d\lambda_{d_1}(x) \to \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)$$

για κάθε $y \notin E$. Πάλι από το θεώρημα Fubini, η $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)d\lambda_{d_1}(x)$ είναι μετρήσιμη στο E^c, άρα και η $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)$. Εφαρμόζοντας και πάλι το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y). \tag{3.3.3}$$

Όμως, από το θεώρημα Fubini γνωρίζουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^{d}} f_k d\lambda_d. \tag{3.3.4}$$

Εφαρμόζοντας απευθείας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για τις f_k έχουμε επίσης

$$\int_{\mathbb{R}^{d}} f_k d\lambda_d \to \int_{\mathbb{R}^{d}} f d\lambda_d. \tag{3.3.5}$$

Συνδυάζοντας τις (3.3.3), (3.3.4) και (3.3.5) έχουμε το συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 3.3.3. Πολύ συχνά, το θεώρημα Tonelli χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με το θεώρημα Fubini. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι ολοκληρώσιμη και, αν ναι, να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της κάνοντας *διαδοχική ολοκλήρωση* (πρώτα ως προς x και μετά ως προς y). Για να αιτιολογήσουμε τη χρήση της διαδοχικής ολοκλήρωσης, εφαρμόζουμε πρώτα το θεώρημα Tonelli για την $|f|$: αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ή να εκτιμήσουμε τα διαδοχικά ολοκληρώματα της $|f|$, διότι η $|f|$ είναι μη αρνητική. Αν αυτά είναι πεπερασμένα, από το Θεώρημα 3.3.2 έχουμε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^d} |f|\, d\lambda_d < \infty$. Τότε όμως, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.1 και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκείνο το θεώρημα για να υπολογίσουμε το $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$.

Πόρισμα 3.3.4. *Εστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Τότε, σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο*

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x,y) \in E\}$$

είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1}$. Επιπλέον, η $y \mapsto \lambda_{d_1}(E^y)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και

$$\lambda_d(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y)d\lambda_{d_2}(y).$$

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.2. Επιλέγουμε σαν f την χ_E και παρατηρούμε ότι $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$. Πράγματι, $(\chi_E)^y(x) = 1$ αν και μόνο αν $\chi_E(x,y) = 1$ δηλαδή αν και και μόνο αν $(x,y) \in E$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με την $x \in E^y$, δηλαδή την $\chi_{E^y}(x) = 1$. Από το Θεώρημα

3.3.2 η $(\chi_E)^y$ είναι μετρήσιμη σχεδόν για κάθε y, δηλαδή η χ_{E^y} είναι μετρήσιμη σχεδόν για κάθε y. Ισοδύναμα, το E^y είναι μετρήσιμο σχεδόν για κάθε y. Τέλος, πάλι από το Θεώρημα 3.3.2, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda_d(E) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\chi_E)^y(x) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{E^y}(x) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y) d\lambda_{d_2}(y).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.3.5. *Έστω $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ και $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ μετρήσιμα σύνολα. Τότε, το $E = E_1 \times E_2$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επιπλέον,*

$$\lambda_d(E) = \lambda_{d_1}(E_1)\lambda_{d_2}(E_2),$$

με την σύμβαση ότι αν κάποιο από τα $\lambda_{d_i}(E_i)$ είναι ίσο με μηδέν, τότε $\lambda_d(E) = 0$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 3.3.5 θα χρειαστούμε ένα λήμμα:

Λήμμα 3.3.6. *Έστω $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ και $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$. Τότε,*

$$\lambda_d^*(E_1 \times E_2) \leqslant \lambda_{d_1}^*(E_1)\lambda_{d_2}^*(E_2),$$

με την σύμβαση ότι αν κάποιο από τα $\lambda_{d_i}^*(E_i)$ είναι ίσο με μηδέν, τότε $\lambda_d^*(E) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, υπάρχουν ακολουθίες ανοικτών ορθογωνίων (I_k) και (J_s) στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και τον $\mathbb{R}^{d_2}$ αντίστοιχα, ώστε

$$E_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad E_2 \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} J_s,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda_{d_1}^*(E_1) + \varepsilon, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \ell(J_s) < \lambda_{d_2}^*(E_2) + \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι

$$E_1 \times E_2 \subseteq \bigcup_{k,s=1}^{\infty} I_k \times J_s,$$

και χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda_d^*(E_1 \times E_2) &\leqslant \sum_{k,s=1}^{\infty} \ell(I_k \times J_s) = \sum_{k,s=1}^{\infty} \ell(I_k)\ell(J_s) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \ell(J_s) \right) \leqslant (\lambda_{d_1}^*(E_1) + \varepsilon)(\lambda_{d_2}^*(E_2) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Αν $\lambda_{d_1}^*(E_1) > 0$ και $\lambda_{d_2}^*(E_2) > 0$, τότε

$$\lambda_{2d}^*(E_1 \times E_2) \leqslant \lambda_{d_1}^*(E_1)\lambda_{d_2}^*(E_2) + A\varepsilon + \varepsilon^2$$

όπου $A = \lambda^*_{d_1}(E_1) + \lambda^*_{d_2}(E_2)$, και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο (αν κάποιο από τα E_i έχει άπειρο εξωτερικό μέτρο και το άλλο θετικό εξωτερικό μέτρο, τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε).

Μένει η περίπτωση όπου, για παράδειγμα, $\lambda^*_{d_1}(E_1) = 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_2^m = E_2 \cap \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : |y| \leqslant m\}$. Το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\lambda^*_d(E_1 \times E_2^m) \leqslant \varepsilon(\lambda^*_{d_2}(E_2^m) + \varepsilon)$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε $\lambda^*_d(E_1 \times E_2^m) = 0$. Αφού $E_1 \times E_2^m \nearrow E_1 \times E_2$ καθώς το $m \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda^*_d(E_1 \times E_2) = 0$. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.3.5. Αρκεί να δείξουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Κατόπιν, αφού $E^y = E_1$ για κάθε $y \in E_2$ και $E^y = \emptyset$ αλλιώς, από το Πόρισμα 3.3.4 παίρνουμε

$$\lambda(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{E_2} \lambda_{d_1}(E_1) d\lambda_{d_2}(y) = \lambda_{d_1}(E_1)\lambda_{d_2}(E_2).$$

Για τη μετρησιμότητα του E, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, αφού τα E_1 και E_2 είναι μετρήσιμα, μπορούμε να βρούμε G_δ-σύνολα G_i με $E_i \subseteq G_i$ και $\lambda_{d_i}(G_i \setminus E_i) = 0$. Το σύνολο $G = G_1 \times G_2$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, και

$$((G_1 \times G_2) \setminus (E_1 \times E_2)) \subseteq ((G_1 \setminus E_1) \times G_2) \cup (G_1 \times (G_2 \setminus E_2)).$$

Από το Λήμμα 3.3.6 βλέπουμε ότι

$$\lambda^*_d((G_1 \setminus E_1) \times G_2) \leqslant \lambda_{d_1}(G_1 \setminus E_1)\lambda_{d_2}(G_2) = 0$$

και

$$\lambda^*_d(G_1 \times (G_2 \setminus E_2)) \leqslant \lambda_{d_1}(G_1)\lambda_{d_2}(G_2 \setminus E_2) = 0.$$

Άρα, $\lambda^*_d(G \setminus E) = 0$. Έπεται ότι το $E = G \setminus (G \setminus E)$ είναι μετρήσιμο. □

Πόρισμα 3.3.7. *Εστω $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, η $\tilde{f} : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$\tilde{f}(x, y) = f(x)$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη. Αφού η f είναι μετρήσιμη, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $E_a = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : f(x) < a\}$ είναι μετρήσιμο. Αφού

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : \tilde{f}(x, y) < a\} = E_a \times \mathbb{R}^{d_2},$$

από την Πρόταση 3.3.5 βλέπουμε ότι το $\{\tilde{f} < a\}$ είναι μετρήσιμο για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Με βάση τον ορισμό, η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

Πόρισμα 3.3.8. *Εστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μη αρνητική συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Τότε, η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το $\mathcal{A}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$, και αν αυτό συμβαίνει τότε

$$\lambda_{d+1}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μετρήσιμη. Από το Πόρισμα 3.3.7 βλέπουμε εύκολα ότι η συνάρτηση

$$F(x,y) = f(x) - y$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση (διότι οι $F_1(x,y) = f(x)$ και $F_2(x,y) = y$ είναι μετρήσιμες). Έπεται ότι το

$$\mathcal{A} = \{(x,y) : y \geqslant 0\} \cap \{(x,y) : F(x,y) \leqslant 0\}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ έχουμε

$$\mathcal{A}_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in \mathcal{A}\} = [0, f(x)].$$

Από το Πόρισμα 3.3.4 (με εναλλαγή των ρόλων των x και y) η συνάρτηση $f(x) = \lambda_1(\mathcal{A}_x)$ είναι μετρήσιμη. Επιπλέον,

$$\lambda_{d+1}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi_A d\lambda_{d+1} = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(\mathcal{A}_x) d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x),$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.3.9. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$\tilde{f}(x,y) = f(x-y)$$

είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι: αν $a \in \mathbb{R}$ και αν $E_a = \{z \in \mathbb{R}^d : f(z) < a\}$, τότε το σύνολο

$$\tilde{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x - y \in E_a\}$$

είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε, γενικότερα, ότι αν A είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε το $\tilde{A} = \{(x,y) : x - y \in A\}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν το G είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε το $\tilde{G}$ είναι επίσης ανοικτό. Παίρνοντας αριθμήσιμες τομές βλέπουμε ότι αν το A είναι G_δ-σύνολο τότε το $\tilde{A}$ είναι επίσης G_δ-σύνολο.

Θεωρούμε τώρα ένα σύνολο Z με $\lambda_d(Z) = 0$. Υπάρχει ακολουθία (G_n) ανοικτών συνόλων στον $\mathbb{R}^d$ με $Z \subset G_n$ και $\lambda_d(G_n) \to 0$. Ορίζουμε $B_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d} : |y| \leqslant k\}$ και θεωρούμε το $\tilde{G_n} \cap B_k$. Παρατηρούμε ότι $\chi_{\tilde{G_n} \cap B_k} = \chi_{G_n}(x-y)\chi_{B_k}(y)$, άρα

$$\begin{aligned}
\lambda_{2d}(\tilde{G_n} \cap B_k) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi_{G_n}(x-y)\chi_{B_k}(y) d\lambda_{2d}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{G_n}(x-y) d\lambda_d(x) \right) \chi_{B_k}(y) d\lambda_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_d(G_n) \chi_{B_k}(y) d\lambda_d(y) = \lambda_d(G_n)\lambda_d(B_k)
\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{G_n}(x-y) d\lambda_d(x) = \lambda_d(y + G_n) = \lambda_d(G_n)$ για κάθε y, η οποία ισχύει γιατί το λ_d είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές). Έπεται ότι, για κάθε k,

$$0 \leqslant \lambda_{2d}(\tilde{Z} \cap B_k) \leqslant \lambda_{2d}(\tilde{G_n} \cap B_k) \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$, άρα $\lambda_{2d}(\tilde{Z} \cap B_k) = 0$. Αφού $\tilde{Z} \cap B_k \nearrow \tilde{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_{2d}(\tilde{Z}) = 0$.

Τώρα, αφού κάθε μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ γράφεται στη μορφή $E = A \setminus Z$, όπου το A είναι G_δ-σύνολο και το Z έχει μέτρο μηδέν, παρατηρώντας ότι $\tilde{E} = \tilde{A} \setminus \tilde{Z}$ και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι το $\tilde{E}$ είναι μετρήσιμο. □

3.4 Συνέλιξη

Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x, y) = f(x - y)g(y),$$

η οποία είναι μετρήσιμη (βλέπε Πρόταση 3.3.9 και Πόρισμα 3.3.7). Ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^{2d})$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x, y)| \, d\lambda(x) = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| \, d\lambda(x) = |g(y)| \|f\|_1$$

(βλέπε Άσκηση 15 για την τελευταία ισότητα). Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x, y)| \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \|f\|_1 \, d\lambda(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Από το θεώρημα Tonelli έπεται ότι $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$ και από από το θεώρημα Fubini έχουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \, d\lambda(y)$$

ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και επιπλέον (αν θέσουμε την τιμή του ίση με μηδέν εκεί που δεν ορίζεται) σαν συνάρτηση του x ορίζει ένα στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Ορισμός 3.4.1 (συνέλιξη)**.** Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Τότε, η συνάρτηση $f * g$ που ορίζεται σχεδόν παντού από την

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \, d\lambda(y)$$

ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ και λέγεται *συνέλιξη* των f και g.

Οι επόμενες προτάσεις περιγράφουν κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης.

Πρόταση 3.4.2. *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, τότε*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Επιπλέον, η απεικόνιση $(f, g) \mapsto f * g$ είναι συνεχής (ως προς την $\| \cdot \|_1$).

Απόδειξη. Για τη συνάρτηση $\varphi(x, y) = f(x - y)g(y)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \, d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x, y)| \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Για τη συνέχεια της $f*g$ θα δείξουμε ότι αν οι $f_k, f, g_k, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ικανοποιούν τις $\|f_k - f\|_1 \to 0$ και $\|g_k - g\|_1 \to 0$, τότε $\|f_k * g_k - f*g\|_1 \to 0$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας και το (α) της επόμενης Πρότασης, το οποίο όμως είναι άμεσο, γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_k * g_k - f * g\|_1 &= \|f_k * (g_k - g) + (f_k - f) * g\|_1 \leqslant \|f_k * (g_k - g)\|_1 + \|(f_k - f) * g\|_1 \\ &\leqslant \|f_k\|_1 \|g_k - g\|_1 + \|f_k - f\|_1 \|g\|_1 \to 0,\end{aligned}$$

αν συνδυάσουμε τις υποθέσεις με το γεγονός ότι $\sup_k \|f_k\|_1 < \infty$ (αφού η (f_k) είναι συγκλίνουσα στον $L^1(\mathbb{R}^d)$). □

Πρόταση 3.4.3. *Έστω $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Η συνέλιξη έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Είναι διγραμμική, δηλαδή*

$$(f+g)*h = f*h + g*h \quad \textit{και} \quad f*(g+h) = f*g + f*h.$$

(ii) *Είναι μεταθετική, δηλαδή*

$$f*g = g*f.$$

(iii) *Είναι προσεταιριστική, δηλαδή*

$$(f*g)*h = f*(g*h).$$

Απόδειξη. Το (α) είναι άμεσο. Λόγω της συνέχειας της $(f,g) \mapsto f*g$, για να αποδείξουμε τα (β) και (γ) σε πλήρη γενικότητα αρκεί να τα αποδείξουμε για τις συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, λόγω του Θεωρήματος 3.2.10.

(β) Για τη μεταθετικότητα, γράφουμε

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\, d\lambda(z) = (g*f)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $z = x - y$.

(γ) Για την προσεταιριστικότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\big(f*(g*h)\big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)(g*h)(y)\, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)h(z)\, d\lambda(z)\right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)\, d\lambda(y)\right) h(z)\, d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z-u)g(u)\, du\right) h(z)\, d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x-z)h(z)\, d\lambda(z) \\ &= \big((f*g)*h\big)(x),\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = y - z$. □

Η τελευταία πρόταση δίνει κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης συναρτήσεων στον $L^p(E)$, $p>1$. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 3.4.4. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1<p<\infty$. Για κάθε $f\in L^p(E)$ ισχύει
$$\|f\|_p=\max\left\{\int_E fh d\lambda : \|h\|_q\leqslant 1\right\},$$
όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Για την απόδειξη, παρατηρούμε αρχικά ότι αν $h\in L^q(E)$ και $\|h\|_q\leqslant 1$, τότε
$$\left|\int_E fh d\lambda\right|\leqslant \|f\|_p\|h\|_q\leqslant \|f\|_p,$$
από την ανισότητα Hölder. Άρα,
$$\|f\|_p\geqslant \sup\left\{\int_E fh d\lambda : \|h\|_q\leqslant 1\right\}.$$
Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\|_p\neq 0$ και αν ορίσουμε $h=\frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}|f(x)|^{p-1}\mathrm{sgn}(f(x))$ (όπου $\mathrm{sgn}(a)=1$ αν $a>0$, $\mathrm{sgn}(a)=-1$ αν $a<0$ και $\mathrm{sgn}(0)=0$) τότε
$$\|h\|_q^q=\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f(x)|^{(p-1)q}d\lambda(x)=\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f(x)|^p d\lambda(x)=1$$
και
$$\begin{aligned}\int_E f(x)h(x)d\lambda(x)&=\frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\int_E |f(x)|^p d\lambda(x)\\ &=\frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\|f\|_p^p=\|f\|_p^{p-p/q}=\|f\|_p.\end{aligned}$$
Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Πρόταση 3.4.5. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1<p<\infty$.*

(i) *Αν $f\in L^p(E)$ και $g\in L^1(E)$, τότε σχεδόν για κάθε x η συνάρτηση $y\mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y, άρα η $f*g$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, $f*g\in L^p(E)$ και*
$$\|f*g\|_p\leqslant \|f\|_p\|g\|_1.$$

(ii) *Αν $f\in L^p(E)$ και $g\in L^q(E)$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τότε $f*g\in L^\infty(E)$ και*
$$\|f*g\|_\infty\leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$
Επίσης, η $f*g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\lim_{|x|\to\infty}(f*g)(x)=0$.

Απόδειξη. (i) Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $h\in L^q(E)$ με $\|h\|_q\leqslant 1$. Έχουμε
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|(f*g)(x)|\,|h(x)|\,d\lambda(x)&\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y)\right)|h(x)|\,d\lambda(x)\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|h(x)|\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y)\\ &\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\,\|f\|_p\|h\|_q\,d\lambda(y)\\ &=\|f\|_p\|h\|_q\|g\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_1.\end{aligned}$$

Με βάση την Παρατήρηση 3.4.4, η $f*g$ ανήκει στον $L^p(E)$ και $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$. Από την απόδειξη φαίνεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y)\right)^p d\lambda(x) < \infty,$$

άρα σχεδόν για κάθε x έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y) < \infty,$$

δηλαδή η συνάρτηση $y\mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y.

(ii) Από την ανισότητα Hölder, για κάθε x έχουμε

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y) \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

άρα

$$\|f*g\|_\infty = \sup\{|(f*g)(x)| : x\in\mathbb{R}^d\} \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon\in(0,1)$ και βρίσκουμε $u,v\in C_c(\mathbb{R}^d)$ με $\|f-u\|_p\leqslant\varepsilon$ και $\|g-v\|_q\leqslant\varepsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|u*v-f*g\|_\infty &\leqslant \|u*(v-g)\|_\infty + \|(u-f)*g\|_\infty\\ &\leqslant \|u\|_p\|v-g\|_q + \|u-f\|_p\|g\|_q \leqslant (\|f\|_p+1)\,\varepsilon + \|g\|_q\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Επιπλέον, η $u*v$ έχει συμπαγή φορέα, δηλαδή υπάρχει $M>0$ ώστε: αν $|x|>M$ τότε $(u*v)(x)=0$. Άρα, αν $|x|>M$ έχουμε

$$|(f*g)(x)| = |(f*g)(x)-(u*v)(x)| \leqslant \|f*g-u*v\|_\infty \leqslant C\varepsilon,$$

όπου $C=\|f\|_p+\|g\|_q+1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{|x|\to\infty}(f*g)(x)=0$. □

3.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1\leqslant p<\infty$. Αν $f\in L^p(E)$ αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

$$\lambda(\{|f|\geqslant\alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

2. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0<\lambda(E)<\infty$ και έστω $1\leqslant p<\infty$. Αν $f:E\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι $f\in L^p(E)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^\infty n^p\lambda(\{n-1\leqslant|f|<n\}) < \infty.$$

3. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1\leqslant p<\infty$. Αν $f_n,f\in L^p(E)$ και $f_n\to f$ σχεδόν παντού στο E, αποδείξτε ότι

$$\|f_n-f\|_p\to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p\to\|f\|_p.$$

4. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L^p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L^q(E)$, αποδείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L^1(E)$.

5. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Αποδείξτε ότι $L^q(E) \subseteq L^p(E)$.

(γ) Αποδείξτε ότι $L^q(E) \neq L^p(E)$.

6. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Αποδείξτε ότι κάθε $f \in L^q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L^p(E)$ και $h \in L^r(E)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το $B = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$.

7. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Αποδείξτε ότι: αν $f \in L^p(E) \cap L^r(E)$ τότε $f \in L^q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

8. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L^p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\log \|f\|_p \geqslant \int_E \log |f|.$$

9. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Αποδείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i| \right)^{c_i}.$$

10. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ αποδείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp} + \|f\|_q^{(1-t)q}.$$

11. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L^p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, αποδείξτε ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

12. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L^1(\mathbb{R})$ με $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\{x : |x| > \delta\}} f_n = 0.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

13. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L^p(E)$. Αποδείξτε ότι

$$\int |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, dt.$$

14. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L^p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο E. Αποδείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

15. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim\limits_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

16. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

[*Υπόδειξη.* Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a |\log x|^b$.]

18. Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Αποδείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$.

Ομάδα Β′

19. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Αποδείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

20. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Αποδείξτε ότι: αν $f \in L^p(E)$ και $g \in L^q(E)$ τότε $fg \in L^r(E)$ και

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

21. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Αποδείξτε ότι $f \in L^r(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

22. Έστω $r \geqslant 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

23. Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\ d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $\|\varphi_h\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\varphi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

24. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι $n \cdot \left(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\right) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.

25. Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Αποδείξτε ότι $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

26. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p[0, 1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f) \chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\ d\lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

27. Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L^p[0, \infty)$. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_0^x f(t)\ d\lambda(t) \right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t)\ d\lambda(t) = 0.$$

28. Υποθέτουμε ότι $f \in L^p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Αποδείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

29. Έστω $f \in L^1[0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\int_A |f|\ d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0, 1]$. Αποδείξτε ότι $f \in L^p[0, 1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$.

30. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right)\ d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = \mathrm{supp}(f)$. Αποδείξτε ότι $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $\|f\|_p \leqslant Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την $(*)$ αλλά $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

31. Έστω $f \in L^1((0,1))$. Για $x \in (0,1)$ ορίζουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Αποδείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ και

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

32. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0,1)$.

33. Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0,\infty]$ αποδείξτε ότι

$$\int fg\, d\mu \geqslant \left(\int f^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q\, d\mu\right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

34. Αποδείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L^q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L^p[0,1]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

4.1 Περιοδικές συναρτήσεις

Στη συνέχεια θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε η f γράφεται στη μορφή $f=u+iv$, όπου $u(x)=\mathrm{Re}(f(x))$ και $v(x)=\mathrm{Im}(f(x))$, $x\in[a,b]$. Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν οι u,v είναι ολοκληρώσιμες, και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)=\int_a^b u(x)\,d\lambda(x)+i\int_a^b v(x)\,d\lambda(x).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει η γραμμικότητα: αν οι $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες και αν $t,s\in\mathbb{C}$ τότε

$$\int_a^b (tf(x)+sg(x))\,d\lambda(x)=t\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)+s\int_a^b g(x)\,d\lambda(x).$$

Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,d\lambda(x). \tag{4.1.1}$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)=Re^{ix_0},\ \ \text{όπου}\ \ R=\left|\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)\right|\ \ \text{και}\ \ x_0\in\mathbb{R},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)\right| &= e^{-ix_0}\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)=\int_a^b e^{-ix_0}f(x)\,d\lambda(x)\\ &=\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-ix_0}f(x))\,d\lambda(x)\leqslant\int_a^b |e^{-ix_0}f(x)|\,d\lambda(x)\\ &=\int_a^b |f(x)|\,d\lambda(x).\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αφού το ολοκλήρωμα της $e^{-ix_0}f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός θα ισούται με το ολοκλήρωμα της $\mathrm{Re}(e^{-ix_0}f(x))$.

Ορισμός 4.1.1 (μιγαδικές συναρτήσεις στον μοναδιαίο κύκλο)**.** Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f(x) = F(e^{ix}).$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π-περιοδική. Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $e^{ix_1} = e^{ix_2}$ για κάποιους $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $x_2 = x_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο k, άρα $f(x_1) = f(x_2)$ από την 2π-περιοδικότητα της f). Έχουμε λοιπόν μια $1-1$ αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και τις 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Με βάση αυτή την αντιστοιχία, λέμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π, η F είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Ορισμός 4.1.2 (ο χώρος $L^p(\mathbb{T})$)**.** Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ θεωρούμε τον χώρο $L^p(\mathbb{T})$ των 2π-περιοδικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ για τις οποίες

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\lambda(x) < \infty,$$

ταυτίζοντας ως συνήθως συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού, εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p}.$$

Γράφοντας $\mathbb{T}$ εννοούμε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π, για παράδειγμα το $(-\pi, \pi]$. Ο χώρος $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach (η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο). Θεωρούμε επίσης τον χώρο $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ των «ουσιωδώς φραγμένων» 2π-περιοδικών μετρήσιμων f, ο οποίος είναι χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \min\{\beta \geqslant 0 : \lambda(\{x \in \mathbb{T} : |f(x)| > \beta\}) = 0\} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Ορισμός 4.1.3 (τριγωνομετρικά πολυώνυμα)**.** *Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο* είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Ο βαθμός του T είναι ο μικρότερος $n \geqslant 0$ για τον οποίο το T έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_n$ την κλάση όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από n. Παρατηρήστε ότι ο $\mathcal{T}_n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geqslant 0$, $c_k \in \mathbb{C}$. Ο βαθμός του p είναι ο μικρότερος $n \geqslant 0$ για τον οποίο το p έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής. Σημειώνουμε ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το γεγονός ότι, αν $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases},$$

ελέγχουμε εύκολα ότι

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \quad \text{για κάθε } |k| \leqslant n.$$

Ορισμός 4.1.4 (τριγωνομετρική σειρά)**.** Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{4.1.2}$$

Με τον όρο *πραγματική τριγωνομετρική σειρά* αναφερόμαστε σε μια σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.1.3}$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Το συμμετρικό n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (4.1.2) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

ενώ το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (4.1.3) είναι το πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

4.2 Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass σύμφωνα με το οποίο τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Θεώρημα 4.2.1 (Weierstrass)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a,b]$ να ικανοποιεί την*

$$\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in [a,b]$,

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Σημείωση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα με $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) μπορούμε να βρούμε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) με την ιδιότητα $\|f - p_n\|_\infty \to 0$.

Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση του $C[0,1]$. Αυτό είναι αρκετό αν πάρετε υπόψη σας το γεγονός ότι για κάθε διάστημα $[a,b]$ υπάρχει $T : C[a,b] \to C[0,1]$ γραμμική ισομετρία επί, που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 4.2.2. *Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:*

(α) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

(β) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$.

(γ) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Λήμμα 4.2.3. *Για κάθε $x \in [0,1]$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}.$$

Απόδειξη. Από την $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2\frac{k}{n}x + x^2$ και το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n},\end{aligned}$$

αφού $4x(1-x) \leqslant 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. □

Λήμμα 4.2.4. *Έστω $\delta > 0$ και $x \in [0,1]$. Αν $F = F(\delta, x)$ είναι το σύνολο των $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta$, τότε*

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{k \in F} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{4n\delta^2}\end{aligned}$$

από το προηγούμενο λήμμα. □

Ορισμός 4.2.5 (πολυώνυμα Bernstein)**.** Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το n-οστό πολυώνυμο Bernstein $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Παρατηρήστε ότι το $B_n(f)$ είναι όντως πολυώνυμο (με βαθμό το πολύ ίσο με n) και ότι $[B_n(f)](0) = f(0)$ και $[B_n(f)](1) = f(1)$.

Επίσης, το Λήμμα 4.2.2 δείχνει ότι αν $f_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2,\ldots$, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f_0) = f_0, \quad B_n(f_1) = f_1, \quad B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1.$$

Ειδικότερα, για $k = 0,1,2$,

$$\|f_k - B_n(f_k)\|_\infty \to 0$$

όταν $n \to \infty$.

Θεώρημα 4.2.6 (Bernstein)**.** *Για κάθε $f \in C[0,1]$ ισχύει ότι $B_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,1]$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Λόγω της $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(x) - [B_n(f)](x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} (f(x) - f(k/n))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(k/n)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Έστω $F = F(\delta, x)$ το σύνολο των $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta$. Από το Λήμμα 4.2.4 παίρνουμε

$$\sum_{k \in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Επίσης, παρατηρήστε ότι:

(α) Αν $k \in F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| \leqslant 2\|f\|_\infty$, και

(β) Αν $k \notin F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon/2$.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}
|f(x)-[B_n(f)](x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(k/n)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\notin F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+2\|f\|_\infty\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|_\infty\frac{1}{4n\delta^2}\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

αν $n > n_0 = \left[\|f\|_\infty/(\varepsilon\delta^2)\right]+1$. Η επιλογή του n_0 είναι ανεξάρτητη από το $x \in [0,1]$, άρα, για κάθε $n > n_0$ έχουμε $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1. Αφού κάθε $B_n(f)$ είναι πολυώνυμο, το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Bernstein. □

4.3 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι η κλάση των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνή στο χώρο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε*

$$\|f-p\|_\infty = \max\{|f(x)-p(x)| : x\in\mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε $\|f - p_m\|_\infty \to 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος 4.3.1. Δίνουμε όμως πρώτα μία απόδειξη που είναι «ανεξάρτητη» από τη θεωρία των σειρών Fourier. Ξεκινάμε με κάποιες παρατηρήσεις για τα πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Πρόταση 4.3.2. *Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n. Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t,s)$ βαθμού n ώστε*

$$T(x) = p(\cos x, \sin x).$$

Η Πρόταση 4.3.2 είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα 4.3.3. *Για κάθε $n \geqslant 1$, οι συναρτήσεις $\cos nx$ και $(\sin(n+1)x)/\sin x$ είναι πολυώνυμα του $\cos x$ βαθμού n.*

Απόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχουν $a_{0,n}, \ldots, a_{n-1,n} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\cos^j x. \tag{4.3.1}$$

Παρατηρήστε ότι η (4.3.1) ισχύει τετριμμένα για $n = 1$, ενώ για $n = 2$ γνωρίζουμε ότι

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Υποθέτουμε ότι η (4.3.1) ισχύει για το $\cos kx$, $k \geqslant 2$. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos[(k+1)x] + \cos[(k-1)x] = 2\cos kx \cos x$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\cos(k+1)x &= 2\cos kx\cos x - \cos(k-1)x \\ &= 2\cos x\left(2^{k-1}\cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}\cos^j x\right) - 2^{k-2}\cos^{k-1} x - \sum_{j=0}^{k-2} a_{j,k-1}\cos^j x \\ &= 2^k\cos^{k+1} x + \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\cos^j x\end{aligned}$$

για κατάλληλους $a_{j,k+1} \in \mathbb{R}$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin[(k+1)x] - \sin[(k-1)x] = 2\cos kx \sin x$$

δείχνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \geqslant 1$,

$$\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = 2^n\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\cos^j x$$

για κατάλληλους $a_{j,n} \in \mathbb{R}$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). □

Παρατήρηση 4.3.4. Θεωρούμε το σύνολο

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x\cos x, \dots, \sin x\cos^{n-1} x\}.$$

Από το Λήμμα 4.3.3 έχουμε

$$\mathcal{T}_n \subseteq \mathrm{span}(B_n),$$

όπου $\mathrm{span}(B_n)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το B. Ειδικότερα, η διάσταση $\dim(\mathcal{T}_n)$ του $\mathcal{T}_n$ είναι μικρότερη ή ίση από $2n+1$, κάτι που είναι φανερό και από το γεγονός ότι

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(A_n),$$

όπου

$$A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}.$$

Παρατηρήστε ότι $|A_n| = |B_n| = 2n+1$ (με $|X|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου X).

Πρόταση 4.3.5. *Για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει*

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(B_n) = \mathrm{span}(A_n).$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.3.5 θα δείξουμε πρώτα ότι το A_n είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Θα χρειαστούμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.3.6 (σχέσεις ορθογωνιότητας)**.** *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Αν* $m, n = 0, 1, 2, \dots$ *και* $m \neq n$ *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, d\lambda(x) = 0.$$

(ii) *Αν* $m, n = 1, 2, \dots$ *και* $m \neq n$ *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, d\lambda(x) = 0.$$

(iii) *Αν* $m = 0, 1, 2, \dots$ *και* $n = 1, 2, \dots$ *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, d\lambda(x) = 0.$$

(iv) *Αν* $m, n = 1, 2, \dots$ *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, d\lambda(x) = \frac{1}{2}.$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned}
2\cos\vartheta\cos\varphi &= \cos(\vartheta-\varphi)+\cos(\vartheta+\varphi),\\
2\sin\vartheta\cos\varphi &= \sin(\vartheta+\varphi)+\sin(\vartheta-\varphi),\\
2\sin\vartheta\sin\varphi &= \cos(\vartheta-\varphi)-\cos(\vartheta+\varphi),
\end{aligned}$$

και τις $2\cos^2\vartheta = \cos 2\vartheta + 1$, $2\sin^2\vartheta = 1 - \cos 2\vartheta$. □

Πρόταση 4.3.7. *Το σύνολο* $A = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο (πάνω από το* $\mathbb{R}$*).*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι αν

$$T(x) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{n}(\nu_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \equiv 0,$$

για κάποιους $\nu_k, \mu_k \in \mathbb{R}$, τότε

$$\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.3.6. Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin mx d\lambda(x)\\
&= \nu_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx d\lambda(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\nu_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\sin mx d\lambda(x) + \mu_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\sin mx d\lambda(x)\right)\\
&= \mu_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin mx d\lambda(x) = \mu_m,
\end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \sin mx d\lambda(x) = 0$ για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$ και $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \sin mx d\lambda(x) = 0$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq m$. Όμοια δείχνουμε ότι $\nu_m = 0$ για κάθε $m = 0, 1, \dots, n$. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.3.5. Από την Πρόταση 4.3.7 γίνεται σαφές ότι $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n+1$: το A είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$. Επιπλέον, αφού $\mathrm{span}(B) \supseteq \mathcal{T}_n$ και $\dim(\mathrm{span}(B)) \leqslant 2n+1$, συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(B) = \mathrm{span}(A).$$

Ειδικότερα, κάθε πολυώνυμο του $\cos x$, βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, ανήκει στην κλάση $\mathcal{T}_n$. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2.1 θα δείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{T}$ των πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι «πυκνή» στον χώρο των συνεχών 2π-περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων:

Θεώρημα 4.3.8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε*

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{T_m\}$ πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_\infty \to 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(y) = f(\arccos y).$$

Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1,1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Από το Θεώρημα 4.2.1 υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(\arccos y) - p(y)| < \varepsilon$$

για κάθε $y \in [-1,1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$. Το T είναι πολυώνυμο του $\cos x$, άρα $T \in \mathcal{T}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0,\pi]$ υπάρχει $y \in [-1,1]$ ώστε $y = \cos x$, και τότε,

$$|f(x) - T(x)| = |f(x) - p(\cos x)| = |f(\arccos y) - p(y)| < \varepsilon.$$

Αφού οι f και T είναι άρτιες συναρτήσεις, έπεται ότι

$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} < \varepsilon,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε

$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π-περιοδικές. Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1 και T_2 ώστε

$$\|f_1 - T_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν θέσουμε

$$T_3(x) = \frac{1}{2}(T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x),$$

τότε $T_3 \in \mathcal{T}$ και, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |2f(x)\sin^2 x - 2T_3(x)| &= |f_1(x)\sin^2 x + f_2(x)\sin x - T_1(x)\sin^2 x - T_2(x)\sin x| \\ &\leqslant |(f_1(x) - T_1(x))\sin^2 x| + |(f_2(x) - T_2(x))\sin x| \\ &\leqslant |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, αν ορίσουμε $f_3(x) = f(x)\sin^2 x$ τότε

$$\|f_3 - T_3\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T_4 ώστε, για τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x)\sin^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν ορίσουμε $T_5(x) = T_4(x + \pi/2)$, τότε το T_5 είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε $y = x + \pi/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)\cos^2 x - T_5(x)| &= |f(x)\cos^2 x - T_4(x + \pi/2)| \\ &= |f(y - \pi/2)\sin^2 y - T_4(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου $f_5(x) = f(x)\cos^2 x$.

Παρατηρήστε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x$. Ορίζουμε $T = T_3 + T_5$. Τότε, $T \in \mathcal{T}$ και

$$\begin{aligned} \|f - T\|_\infty &= \|(f_3 + f_5) - (T_3 + T_5)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_3 - T_3\|_\infty + \|f_5 - T_5\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Γράφουμε $f = u + iv$ και, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3.8 βρίσκουμε πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1, T_2 τέτοια ώστε

$$\|u - T_1\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2} \ \text{ και } \ \|v - T_2\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε $p = u + iv$ τότε

$$|f(x) - p(x)|^2 = |u(x) - T_1(x)|^2 + |v(x) - T_2(x)|^2 \leqslant \|u - T_1\|_\infty^2 + \|v - T_2\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Μένει να δείξουμε ότι η $p = u + iv$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε τα T_1, T_2 να γράφονται στη μορφή

$$T_1(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \ \text{ και } \ T_2(x) = \sum_{k=0}^{n} (t_k \cos kx + s_k \sin kx),$$

όπου $a_k, b_k, t_k, s_k \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τις $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ και $\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$ για $1 \leqslant k \leqslant n$, με απευθείας υπολογισμό βλέπουμε ότι υπάρχουν $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leqslant n$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = T_1(x) + iT_2(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

δηλαδή το p είναι (μιγαδικό) τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n. □

4.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

2. (α) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

4. Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων *με ακέραιους συντελεστές*, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.

6. Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

7. Αποδείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. (α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \ldots, e^{i\mu_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι μ_j είναι θετικοί;

9. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $p(x) = q(x)$ για κάθε x σε ένα $A \subseteq [0, 2\pi)$ με πληθάριθμο $|A| \geqslant 2N+1$, αποδείξτε ότι $a_k = b_k$ για κάθε $|k| \leqslant n$.

10. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n. Αποδείξτε ότι το $p(x)$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές αν και μόνο αν για κάθε $|k| \leqslant n$ ισχύει $a_{-k} = \overline{a_k}$.

11. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικές f_e και f_o τέτοιες ώστε: η f_e είναι άρτια, η f_o είναι περιττή, και $f = f_e + f_o$.

(β) Έστω $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k] coskx + b_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.

(γ) Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.

12. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-m}^{m} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $r(x) = p(x)q(x)$ αποδείξτε ότι το $r(x)$ είναι επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο και εκφράστε τους συντελεστές του συναρτήσει των συντελεστών a_k, b_k των $p(x)$ και $q(x)$.

13. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και $m \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $q(x) = p(x)e^{imx}$ είναι μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε τους συντελεστές του.

14. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,d\lambda(x).$$

15. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x) = 0.$$

16. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Αποδείξτε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση F που ορίζεται από την παραπάνω σχέση είναι περιοδική. Αποδείξτε επίσης ότι

$$\int_0^1 F\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda.$$

Ομάδα Β΄

17. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Αποδείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, αποδείξτε ότι

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

18. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ και $k\lambda_k \leqslant M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < x < \pi$. Γράψτε, αν θέλετε,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{N, \lfloor \pi/x \rfloor\}$.]

19. (Λήμμα του Stečkin). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x_0) = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αποδείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ τότε

$$f(x_0 + t) \geqslant \|f\|_\infty \cos(nt).$$

20. (Ανισότητα του Bernstein). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι

$$\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty.$$

21. Έστω $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το T παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο Q ώστε

$$T(x) = |Q(x)|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σειρές Fourier

5.1 Σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Ορισμός 5.1.1 (σειρά Fourier)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k-οστό συντελεστή Fourier της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x). \tag{5.1.1}$$

Από την (4.1.1) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, d\lambda(x) = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.

Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Παρατήρηση 5.1.2. Έστω $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Από το γεγονός ότι η e^{imx} είναι 2π-περιοδική συνάρτηση έπεται άμεσα ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}d\lambda(x) = \frac{1}{im}(e^{im\pi} - e^{-im\pi}) = 0.$$

Δηλαδή, για $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}d\lambda(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } m \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } m = 0 \end{cases}.$$

Έστω τώρα $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Από την προηγούμενη σχέση και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος βλέπουμε ότι αν $|s| \leqslant n$ τότε

$$\begin{aligned}\widehat{p}(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)e^{-isx}d\lambda(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)e^{i(k-s)x}d\lambda(x)\\ &= c_s,\end{aligned}$$

ενώ αν $|s| > n$ έχουμε $\widehat{p}(s) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $N \geqslant n$,

$$s_N(p,x) = \sum_{s=-N}^{N} \widehat{p}(s)e^{isx} = \sum_{s=-n}^{n} \widehat{p}(s)e^{isx} = \sum_{s=-n}^{n} c_s e^{isx} = p(x),$$

δηλαδή, $s_N(p,\cdot) \to p$ ομοιόμορφα. Άρα

$$S(p,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{p}(k)e^{ikx} \equiv p(x).$$

Το βασικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ θα εξετάσουμε αν η ακολουθία $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ «συγκλίνει» στην f.

Παρατήρηση 5.1.3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \geqslant 0$ ορίζουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x)$$

και για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x).$$

Αν η f είναι άρτια, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ για κάθε x, τότε όλοι οι συντελεστές b_k μηδενίζονται, και

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x).$$

Αν η f είναι περιττή, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x, τότε όλοι οι συντελεστές a_k μηδενίζονται, και

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x).$$

Παρατηρήστε ότι: αν $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) - i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x)\\ &= \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2},\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

και

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) + i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x)\\ &= \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}.\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Επίσης,

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \frac{a_0(f)}{2}. \tag{5.1.4}$$

Παίρνουμε έτσι την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1.4. *Εστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύουν οι*

$$a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \ \ \text{και} \ \ b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)). \tag{5.1.5}$$

Επίσης, $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$ και

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{5.1.6}$$

Απόδειξη. Οι ισότητες $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$, $a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)$ και $b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))$ προκύπτουν άμεσα από τις (5.1.2), (5.1.3) και (5.1.4). Για την (5.1.6) γράφουμε

$$\begin{aligned}
s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(-k)e^{-ikx} \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)(\cos kx + i\sin kx) + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(-k)(\cos kx - i\sin kx) \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k))\cos kx + \sum_{k=1}^{n} i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))\sin kx \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (5.1.5). □

Παράδειγμα 5.1.5. Σαν ένα πρώτο παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ στο $[-\pi, \pi)$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Η f είναι προφανώς ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier της f. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,d\lambda(x) = 0.$$

Για κάθε $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]' d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-xe^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-\pi e^{-ik\pi} - \pi e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2k}\,\frac{e^{ik\pi}+e^{-ik\pi}}{i} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{ik}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,d\lambda(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
S(f,x) &= \sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^{k+1}}{ik}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}e^{ikx} - (-1)^{-k+1}e^{-ikx}}{ik} \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Θα μπορούσε κανείς, εναλλακτικά, να παρατηρήσει πρώτα ότι $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, διότι η f είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι

$$S(f,x) = \sum_{k\neq 0} b_k(f)\sin kx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, ακριβώς όπως παραπάνω, μπορείτε να υπολογίσετε τους συντελεστές $b_k(f)$ και να καταλήξετε πάλι στην (5.1.7).

Κάποιες πολύ στοιχειώδεις ιδιότητες των συντελεστών Fourier είναι οι εξής:

(i) Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ τότε

$$\widehat{f+\alpha g}(k) = \widehat{f}(k) + \alpha\,\widehat{g}(k) \tag{5.1.8}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Αν $g \in L^1(\mathbb{T})$ τότε

$$\widehat{\overline{g}}(k) = \overline{\widehat{g}(-k)} \tag{5.1.9}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f_\alpha(t) = f(t+\alpha)$, τότε

$$\widehat{f_\alpha}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t+\alpha)e^{-ikt}dt = e^{ik\alpha}\widehat{f}(k) \tag{5.1.10}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$ και $g_n(t) = f(t)e^{int}$, τότε

$$\widehat{g_n}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{int}e^{-ikt}dt = \widehat{f}(k-n) \tag{5.1.11}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Συνεχίζουμε με κάποιες παρατηρήσεις για τους συντελεστές Fourier της συνέλιξης δύο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.1.6. *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $f * g$ είναι η συνέλιξη των f και g, η οποία ορίζεται μέσω της*

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\,d\lambda(t),$$

τότε

$$\widehat{f*g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η $f*g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$, είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, και $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\,d\lambda(t)\right)e^{-ikx}d\lambda(x)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-ikt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)e^{-k(x-t)}d\lambda(x)\right)d\lambda(t)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-ikt}\widehat{f}(k)\,d\lambda(t)\\
&= \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 5.1.7. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N τότε η συνέλιξη $f*p$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από N, το οποίο δίνεται από την*

$$(f*p)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(f*p)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)p(x-t)\,d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik(x-t)}\,d\lambda(t)\\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}\,d\lambda(t)\right)e^{ikx}\\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k\widehat{f}(k)e^{ikx},\end{aligned}$$

άρα η $f*g$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από N. □

Πρόταση 5.1.8. *Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση με*

$$\widehat{f}(k)=0$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, τότε $f\equiv 0$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος είναι φανερό ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)\,d\lambda(x)=0$$

για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p. Πράγματι, αν $p(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)\,d\lambda(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,d\lambda(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\widehat{f}(-k)=0.$$

Από το Θεώρημα 4.3.1 υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f-p_m\|_\infty\to 0$. Τότε, για κάθε m έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,d\lambda(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,d\lambda(x)-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{p_m(x)}\,d\lambda(x)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{f(x)-p_m(x)}\,d\lambda(x).\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

Άρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,d\lambda(x)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\|f\|_\infty\|f-p_m\|_\infty d\lambda(x)=2\pi\|f\|_\infty\|f-p_m\|_\infty\to 0.$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,d\lambda(x)=0,$$

και, αφού η $|f|^2$ είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $|f|\equiv 0$, δηλαδή $f\equiv 0$. □

Πόρισμα 5.1.9 (μοναδικότητα). *Αν $f,g\in C(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k)=\widehat{g}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, τότε $f\equiv g$.*

Απόδειξη. χουμε $f-g \in C(\mathbb{T})$ και $\widehat{f-g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από την Πρόταση 5.1.8 υμπεραίνουμε ότι $f - g \equiv 0$. $\square$

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|\, d\lambda(x) = \|f\|_1.$$

Με άλλα λόγια, η $\{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο:

Θεώρημα 5.1.10 (Riemann-Lebesgue)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε ώστε

$$\|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 3.2.10 (οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{T})$) και το Θεώρημα 4.3.1 (τα τριγωνομετρικά πολύώνυμα είναι πυκνά στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, άρα και στον $(C(\mathbb{T})), \|\cdot\|_1)$). Έστω $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ο βαθμός του p_ε. Για κάθε $|k| > n_0$ ισχύει

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x) - p_\varepsilon(x)) e^{-ikx} d\lambda(x) = \widehat{f - p_\varepsilon}(k)$$

διότι $\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = 0$. Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f - p_\varepsilon}(k)| \leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$$

για κάθε $|k| > n$. Έπεται το ζητούμενο. $\square$

Οι επόμενες προτάσεις δίνουν τους συντελεστές Fourier των συναρτήσεων που προκύπτουν αν ολοκληρώσουμε ή παραγωγίσουμε μια συνάρτηση.

Πρόταση 5.1.11. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω F το αόριστο ολοκλήρωμα της f:*

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)\, d\lambda(t), \qquad x \in \mathbb{T}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x) - \widehat{f}(0)x$. Τότε,

$$\widehat{G}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{ik}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε αρχικά ότι

$$F(x+2\pi)-F(x)=\int_x^{x+2\pi} f(t)\,d\lambda(t)=\int_{\mathbb{T}} f(t)\,d\lambda(t)=2\pi\widehat{f}(0).$$

Άρα, αν $\widehat{f}(0)\neq 0$ τότε η F δεν είναι 2π-περιοδική. Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=F(x)-\widehat{f}(0)x$. Η G είναι 2π-περιοδική, απολύτως συνεχής, και $G'(x)=f(x)-\widehat{f}(0)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Για κάθε $k\neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{G}(k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} G(t)e^{-ikt}d\lambda(t)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{G(t)e^{-ikt}}{-ik}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi(ik)}\int_{\mathbb{T}}(f(t)-\widehat{f}(0))e^{-ikt}d\lambda(t)\\&=\frac{1}{(ik)}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 5.1.12. Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k\neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned}2\pi\widehat{f}(k)&=\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)=f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{ik}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\&=\frac{1}{ik}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π-περιοδική,

$$f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{ik}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f'(x)e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{1}{ik}\widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k\neq 0$. Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi\widehat{f'}(0)=\int_{\mathbb{T}} f'(x)=f(\pi)-f(-\pi)=0.$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f'}(k)=ik\widehat{f}(k),\qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{5.1.13}$$

Ομοίως, αν η $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k)=(ik)\widehat{f'}(k)=(ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, και επαγωγικά έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.1.13. *Έστω $f\in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$\widehat{f^{(m)}}(k)=(ik)^m\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$*, και*

$$\lim_{|k|\to\infty}[k^m \widehat{f}(k)] = 0.$$

Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ *ώστε, για κάθε* $k \neq 0$*,*

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^m}.$$

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.1.14, την οποία εφαρμόζουμε, διαδοχικά, m φορές. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 5.1.10) το οποίο εφαρμόζουμε για την $f^{(m)}$. □

Γενικότερα, η (5.1.13) ισχύει για τις απολύτως συνεχείς συναρτήσεις.

Πρόταση 5.1.14. *Έστω* $f \in L^1(\mathbb{T})$*. Αν η* f *είναι απολύτως συνεχής, τότε*

$$\widehat{f'}(k) = (ik)\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$*, και* $\lim_{|k|\to\infty}[k\widehat{f}(k)] = 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} f'(t)\, d\lambda(t)$$

διότι η f είναι απολύτως συνεχής. Κατόπιν, εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.1.11.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\widehat{f'}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$, το οποίο έπεται από το λήμμα Riemann-Lebesgue αφού $f' \in L^1(\mathbb{T})$. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν τα μερικά αθροίσματα s_n της τριγωνομετρικής σειράς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

συγκλίνουν σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε k.

Πρόταση 5.1.15. *Έστω* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ *μια τριγωνομετρική σειρά και έστω* $f \in L^1(\mathbb{T})$*. Αν* $\|s_n - f\|_1 \to 0$ *καθώς το* $n \to \infty$*, τότε*

$$c_k = \widehat{f}(k) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x) - s_n(x))e^{-ikx} d\lambda(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x).$$

Παρατηρούμε ότι, αν $n \geqslant |k|$ τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = c_k.$$

Άρα, για κάθε $n \geqslant |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(k) - c_k| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(f(x) - s_n(x))e^{-ikx}d\lambda(x)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x) - s_n(x)|\,d\lambda(x) = \|f - s_n\|_1 \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$. □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.15 και το θώρημα μοναδικότητας (Πόρισμα 5.1.8) μπορούμε να δώσουμε καταφατική απάντηση στο ερώτημα της σημειακής σύγκλισης της $s_n(f)$ στην f αν η f είναι συνεχής και η σειρά των συντελεστών Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 5.1.16. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |s_m(f)(x) - s_n(f, x)| \leqslant \sum_{n<|k|\leqslant m} |\widehat{f}(k)| \to 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Ειδικότερα,

$$\|s_n(f) - g\|_1 \leqslant \|s_n(f) - g\|_\infty \to 0,$$

οπότε η Πρόταση 5.1.15 μας εξασφαλίζει ότι

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αφού οι συνεχείς συναρτήσεις f και g έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, από το Πόρισμα 5.1.8 συμπεραίνουμε ότι $g \equiv f$. Συνεπώς, $s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$. □

Η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ εξασφαλίζεται, για παράδειγμα, αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 5.1.13, αφού υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^2}.$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

Πρόταση 5.1.17. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f'' είναι συνεχής. Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.* □

Παρατήρηση 5.1.18. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 5.1.16 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην f. Είδαμε ότι αρκεί η συνέχεια της f''. Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ εξασφαλίζεται και με ασθενέστερες υποθέσεις για την f. Αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Ακόμα ασθενέστερη συνθήκη για την f είναι να ικανοποιεί *συνθήκη Hölder τάξης* $\alpha > 1/2$: δηλαδή, να υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

5.1.1 Μοναδικότητα σειρών Fourier

Είδαμε ότι αν μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$ ίσους με μηδέν, τότε $f \equiv 0$. Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με το ακόλουθο ισχυρότερο θεώρημα μοναδικότητας.

Θεώρημα 5.1.19. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in \mathbb{T}$ τότε $f(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f ορίζεται στο $[-\pi, \pi]$ και ότι $x_0 = 0$. [Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση: αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η $g(x) = f(x + x_0)$ είναι συνεχής στο 0 – υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

Θα υποθέσουμε ότι $f(0) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0) < 0$). Η ιδέα είναι να ορίσουμε κατάλληλη ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τα οποία παρουσιάζουν «κορυφή» στο σημείο 0 και από αυτή τους την ιδιότητα να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(\vartheta) f(\vartheta)\, d\vartheta = +\infty.$$

Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού η υπόθεση ότι $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ δείχνει ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίσα με 0.

Αρχικά, εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την f στο σημείο 0, βρίσκουμε $0 < \delta < \pi/2$ ώστε $f(x) > f(0)/2$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.

Παρατηρούμε ότι $\cos x \leqslant \cos\delta < 1$ αν $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$. Συνεπώς, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$|\varepsilon + \cos x| < 1 - \varepsilon/2$$

για κάθε $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$. Αρκεί να επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \frac{2(1-\cos\delta)}{3}$. Τότε, αν $\varepsilon + \cos x \geqslant 0$ έχουμε $|\varepsilon + \cos x| = \varepsilon + \cos x \leqslant \varepsilon + \cos\delta < 1 - \varepsilon/2$ από την επιλογή του ε, ενώ αν $\varepsilon + \cos x < 0$ έχουμε $|\varepsilon + \cos x| = -\cos x - \varepsilon \leqslant 1 - \varepsilon < 1 - \varepsilon/2$.

Ορίζουμε

$$p(x) = \varepsilon + \cos x, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Τότε, $p(0) = 1+\varepsilon$, συνεπώς υπάρχει $0<\eta<\delta$ ώστε

$$p(x) \geqslant 1+\varepsilon/2, \qquad x\in(-\eta,\eta).$$

Τώρα, για κάθε $m=1,2,\ldots$, ορίζουμε

$$p_m(x) = [p(x)]^m = (\varepsilon+\cos x)^m.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε p_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί). Αφού $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) = 0, \qquad k=1,2,\ldots.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}(5.1.14)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) &= \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x)\\ &\quad + \int_{\eta\leqslant|x|<\delta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) + \int_{|x|<\eta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x),\end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι:

(i) Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε $|p_m(x)f(x)| \leqslant (1-\varepsilon/2)^m|f(x)| \leqslant |f(x)|$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $K_\delta := \{x : \delta\leqslant|x|\leqslant\pi\}$. Αφού $|p_m(x)f(x)|\leqslant(1-\varepsilon/2)^m|f(x)|\to 0$ σε κάθε $x\in K_\delta$ για το οποίο $|f(x)|<\infty$, έχουμε $p_m(x)f(x)\to 0$ σχεδόν παντού στο K_δ, και εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x)\to 0$$

όταν $m\to\infty$.

(ii) Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta\leqslant|x|<\delta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x)\geqslant 0$$

διότι $p(x)\geqslant 0$ και $f(x)\geqslant 0$ στο $\{x:\eta\leqslant|x|<\delta\}$.

(iii) Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

$$\int_{|x|<\eta} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x)\geqslant 2\eta\frac{f(0)}{2}(1+\varepsilon/2)^m.$$

Αφού

$$\lim_{m\to\infty}(1+\varepsilon/2)^m = +\infty,$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x)f(x)\,d\lambda(x) = +\infty.$$

Έτσι, οδηγούμαστε σε άτοπο στην περίπτωση που η f παίρνει πραγματικές τιμές.

Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} \ \text{ και } \ v(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2i}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Έπεται ότι

$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)}{2i} = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Από τη συνέχεια των u και v στο x_0, από το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier των u και v μηδενίζονται και από το αποτέλεσμα στην πραγματική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Άρα, $f(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$. □

5.2 Ο πυρήνας του Dirichlet

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}d\lambda(t)\right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right) d\lambda(t), \end{aligned}$$

δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.2.1. Ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet είναι η συνάρτηση

$$D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.2.1}$$

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ο προηγούμενος υπολογισμός μας δίνει το εξής.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $n \geqslant 0$ ισχύει*

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_n(x-t)\, d\lambda(t). \tag{5.2.2}$$

Παρατήρηση 5.2.3. Θα χρησιμοποιούμε συχνά τις παρακάτω βασικές ιδιότητες του πυρήνα D_n.

(i) Από τον Ορισμό 5.2.1 παίρνουμε: αν $0 < |y| \leqslant \pi$ τότε

$$\begin{aligned} D_n(y) &= e^{-iny}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)y} = e^{-iny}\sum_{k=0}^{2n} e^{iky} \\ &= e^{-iny}\frac{e^{i(2n+1)y}-1}{e^{iy}-1} = \frac{e^{i(n+1)y}-e^{-iny}}{e^{iy}-1} \\ &= \frac{e^{iy/2}\left(e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)}{e^{iy/2}(e^{iy/2}-e^{-iy/2})} \\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}. \end{aligned}$$

(ii) Πάλι από τον ορισμό της D_n, και από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(y)\,d\lambda(y) = 1, \tag{5.2.3}$$

για κάθε n. Παρατηρήστε ότι η D_n είναι άρτια συνάρτηση. Άρα, μπορούμε επίσης να γράφουμε την προηγούμενη ισότητα στη μορφή

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(y)\,d\lambda(y) = 1. \tag{5.2.4}$$

(iii) Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n(y)|$ είναι:

$$|D_n(y)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} |e^{iky}| = 2n+1 \tag{5.2.5}$$

με ισότητα όταν $y=0$, και

$$|D_n(y)| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{y}{2}} \leqslant \frac{\pi}{y}, \qquad 0<y<\pi, \tag{5.2.6}$$

η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ για κάθε $t\in(0,\pi/2)$. Αφού η D_n είναι άρτια, συμπεραίνουμε ότι

$$|D_n(y)| \leqslant \frac{\pi}{|y|}, \qquad 0<|y|<\pi. \tag{5.2.7}$$

Ορισμός 5.2.4. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$D_n^*(y) = \frac{D_{n-1}(y)+D_n(y)}{2}, \qquad y\in\mathbb{T}. \tag{5.2.8}$$

Πρατηρήστε ότι

$$D_n^*(y) = \frac{1}{\sin\frac{y}{2}}\Big(\sin\big(n-\frac{1}{2}\big)y + \sin\big(n+\frac{1}{2}\big)y\Big) = \frac{\sin(ny)}{\tan\frac{y}{2}}. \tag{5.2.9}$$

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$ θέτουμε

$$s_n^*(f,x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_n^*(x-t)\,d\lambda(t). \tag{5.2.10}$$

Δεδομένου ότι

$$D_n(y) - D_n^*(y) = \frac{D_n(y)-D_{n-1}(y)}{2} = \frac{e^{iny}+e^{-iny}}{2} = \cos(ny), \tag{5.2.11}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$s_n(f,x) = s_n^*(f,x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos n(x-t)\,d\lambda(t). \tag{5.2.12}$$

Λήμμα 5.2.5. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$s_n(f,x) - s_n^*(f,x) \to 0 \ \ \textit{καθώς το } n \to \infty.$$

Απόδειξη. Λόγω της (5.2.12) αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos n(x-t)\,d\lambda(t) &= \cos(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)\,d\lambda(t) \\ &\quad + \sin(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin(nt)\,d\lambda(t) \to 0, \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

το οποίο ισχύει από το λήμμα Riemann-Lebesgue. □

Παρατήρηση 5.2.6. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\varphi(y) = \frac{1}{\tan\frac{y}{2}} - \frac{2}{y}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\lim_{y\to 0}\varphi(y)$ υπάρχει, άρα $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Αν λοιπόν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $f\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, και από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\varphi(x-t)\sin n(x-t)\,d\lambda(t) \to 0.$$

Έπεται ότι

$$s_n^*(f,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\varphi(x-t)\sin n(x-t)\,d\lambda(t) \to 0.$$

Από το Λήμμα 5.2.5 καταλήγουμε στην

$$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,d\lambda(t) \to 0. \tag{5.2.14}$$

Παρατήρηση 5.2.7. Αφού $D_n^* = \frac{1}{2}(D_{n-1}+D_n)$, οι βασικές ιδιότητες της D_n^* προκύπτουν άμεσα από αυτές της D_n. Έχουμε ότι η D_n^* είναι άρτια συνάρτηση, και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n^*(y)\,d\lambda(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n^*(y)\,d\lambda(y) = 1 \tag{5.2.15}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n^*(y)|$ είναι:

$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|D_{n-1}(y)| + |D_n(y)|) \leqslant \frac{1}{2}\left((2n-1)+(2n+1)\right) = 2n \tag{5.2.16}$$

με ισότητα όταν $y = 0$, και

$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{\pi}{|y|}, \qquad 0 < |y| < \pi. \tag{5.2.17}$$

5.3 Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν συνεχείς 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε κάποιο σημείο. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι έμμεση και χρησιμοποιεί την αρχή ομοιόμορφου φράγματος (θεώρημα Banach-Steinhaus) ενώ η δεύτερη είναι κατασκευαστική.

Ορισμός 5.3.1 (σταθερές Lebesgue)**.** Για κάθε $n \geqslant 0$, η n-οστή σταθερά Lebesgue L_n ορίζεται ως εξής:

$$L_n = \|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\, d\lambda(y). \tag{5.3.1}$$

Στην επόμενη πρόταση υπολογίζουμε την τάξη μεγέθους της σταθεράς L_n για μεγάλες τιμές του n.

Πρόταση 5.3.2. *Ισχύει*

$$L_n \sim \frac{4\ln n}{\pi^2}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Σημείωση. Ο συμβολισμός $a_n \sim b_n$ σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_n - b_n\}$ είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|a_n - b_n| \leqslant A$ για κάθε n. Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε την ίδια ιδιότητα είναι να γράψουμε $a_n - b_n = O(1)$. Γράφοντας $a_n = b_n + o(1)$ εννοούμε ότι $a_n - b_n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Απόδειξη. Αφού η D_n είναι άρτια και $\sin\frac{t}{2} > 0$ στο $(0,\pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)t)| \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right) d\lambda(t) \\ + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)t)|\, \frac{1}{t}\, d\lambda(t) = A_n + B_n. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι φραγμένος: αφού η $\varphi(t) = \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right)$ είναι φραγμένη, έχουμε $A_n = O(1)$. Για τον δεύτερο όρο, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \left(n + \frac{1}{2}\right) t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi+\pi/2} |\sin s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} |\sin s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} + O(1) \\ &= C_n + O(1), \end{aligned}$$

αφού, λόγω της $\lim_{s\to 0^+} \frac{\sin s}{s} = 1$, έχουμε

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s}\, d\lambda(s) = O(1) \quad \text{και} \quad \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2} \frac{|\sin s|}{s}\, d\lambda(s) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$C_n := \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} |\sin s|\, \frac{d\lambda(s)}{s} = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1). \tag{5.3.2}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin s|}{s}\, d\lambda(s) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(k\pi+t)|}{k\pi+t}\, d\lambda(t) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t}\, d\lambda(t). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in (0,\pi)$,

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant \frac{1}{k\pi+t} \leqslant \frac{1}{k\pi},$$

άρα

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+t} \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Τα δύο αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$ και $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ είναι $\ln n + O(1)$. Αφού $\int_0^{\pi}\sin t\, d\lambda(t) = 2$, καταλήγουμε στην

$$C_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 5.3.3. *Για κάθε $f \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και $n \geqslant 2$ ισχύει*

$$|s_n(f,x)| \leqslant C(\ln n)\, \|f\|_{\infty},$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} |s_n(f,x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x-t)|\,|D_n(t)|\, d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f\|_{\infty}|D_n(t)|\, d\lambda(t) \\ &= \|D_n\|_1\|f\|_{\infty} \leqslant C\cdot \ln n\, \|f\|_{\infty} \end{aligned}$$

διότι $\|D_n\|_1 = L_n \leqslant C\cdot \ln n$ από την Πρόταση 5.3.2. □

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία η ακολουθία $s_n(f,0)$ δεν είναι φραγμένη (άρα, δεν συγκλίνει). Η επόμενη πρόταση συνδέει το πρόβλημα με την συμπεριφορά της ακολουθίας (L_n).

Πρόταση 5.3.4. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{f\in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1} |s_n(f,0)| = L_n.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)|\, d\lambda(x) < \delta.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sign} D_n(x)$, όπου $\operatorname{sign} u$ είναι το πρόσημο του u και $\operatorname{sign} 0 = 0$, είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, όσα είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει πρόσημο η D_n) και $\|g\|_\infty = 1$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε $\|f\|_\infty \leqslant 1$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, d\lambda(x) < \frac{\varepsilon}{2n+1}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|s_n(f,0)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y) D_n(-y)\, d\lambda(y) \right| \\
&\geqslant \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{sign} D_n(y) D_n(-y)\, d\lambda(y) \right| - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y) - g(y)||D_n(-y)|\, d\lambda(y) \\
&\geqslant \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{sign} D_n(y) D_n(y)\, d\lambda(y) \right| - \frac{\varepsilon \|D_n\|_\infty}{2n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(y)|\, d\lambda(y) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η D_n, άρα και η $\operatorname{sign} D_n$, είναι άρτια, καθώς και την $\|D_n\|_\infty = 2n+1$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $|s_n(f,0)| \geqslant L_n - \varepsilon$.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$ έχουμε

$$|s_n(f,0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(y)|\, |D_n(y)|\, dy \leqslant \|D_n\|_1 \|f\|_\infty \leqslant L_n,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Από την Πρόταση 5.3.4 και την Πρόταση 5.3.2, για κάθε n υπάρχει $f_n \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$|s_n(f_n,0)| \sim L_n \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει *μία* $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\sup_n |s_n(f,0)| = +\infty.$$

Ειδικότερα, η f έχει σειρά Fourier η οποία αποκλίνει στο σημείο 0. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus. Για λόγους πληρότητας δίνουμε την (σχετικά απλή) απόδειξή του, η οποία βασίζεται στο θεώρημα Baire.

Πρόταση 5.3.5. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$\sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{x \in X : \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant m\}.$$

Κάθε A_m είναι κλειστό υποσύνολο του X: αυτό φαίνεται αμέσως αν γράψουμε

$$A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x)| \leqslant m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-m, m])$$

και θυμηθούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η αντίστροφη εικόνα του $[-m, m]$ μέσω της f_n είναι κλειστό υποσύνολο του X και ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύολο.

Παρατηρήστε ότι $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση, η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_x > 0$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant M_x$. Υπάρχει $m = m(x) \in \mathbb{N}$ με $m \geqslant M_x$. Τότε, $x \in A_m$.

Ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το θεώρημα Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στην $B(x_0, r)$: για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant m_0$. □

Ορισμός 5.3.6. Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής (γραμμική απεικόνιση). Λέμε ότι ο T είναι φραγμένος αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\, \|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$.

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια ακολουθία $\{T_n\}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών $T_n : X \to Y$ για τους οποίους ισχύει

$$\sup_n \|T_n(x)\|_Y < \infty$$

για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των T_n και η απλή ιδέα της απόδειξης της Πρότασης 5.3.5 μας δίνουν ότι T_n είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής:

Θεώρημα 5.3.7 (αρχή ομοιόμορφου φράγματος, Banach-Steinhaus)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και έστω $\{T_n\}$ μια ακολουθία από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$\sup_n \|Tx\|_Y < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$,

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\, \|x\|_X.$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \|T(x)\|_Y$. Κάθε f_n είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι ο T_n είναι φραγμένος, άρα υπάρχει $M_n > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(x)\|_Y \leqslant M_n\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |\, \|T_n(x)\|_Y - \|T_n(y)\|_Y \,| \leqslant \|T_n(x) - T_n(y)\|_Y = \|T_n(x-y)\|_Y \leqslant M_n\|x-y\|_X.$$

Από την υπόθεσή μας, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\sup_n |f_n(x)| = \sup_n \|T_n(x)\|_Y < +\infty.$$

Από την Πρόταση 5.3.5 υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = \|T_n(x)\|_Y \leqslant M_1.$$

Έστω $x \in X$ με $\|x\|_X \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|T(x_0 + (r/2)x)\|_Y \leqslant M_1$ και $\|T(x_0)\|_Y \leqslant M_1$ (γιατί $x_0, x_0 + (r/2)x \in B(x_0, r)$). Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|T_n(x)\|_Y &= \frac{2}{r}\|T_n((r/2)x)\|_Y = \frac{2}{r}\|T_n(x_0 + (r/2)x) - T_n(x_0)\|_Y \\ &\leqslant \frac{2}{r}\left(\|T_n(x_0 + (r/2)x)\|_Y + \|T_n(x_0)\|_Y\right) \leqslant \frac{4M_1}{r}.\end{aligned}$$

Τώρα, για κάθε $x \neq 0$ θέτουμε $x_1 = x/\|x\|_X$ και παρατηρούμε ότι $\|x_1\|_X = 1$, άρα

$$\|T_n(x)\|_Y = \|T_n(\|x\|_X x_1)\|_X = \|x\|_X \|T_n(x_1)\|_Y \leqslant \frac{4M_1}{r}\|x\|_X$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε το ζητούμενο έπεται με $M = 4M_1/r$. □

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus για τους γραμμικούς τελεστές $f \mapsto s_n(f, 0)$, $f \in C(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 5.3.8. *Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε*

$$\sup_n |s_n(f, 0)| = +\infty.$$

Απόδειξη. Για κάθε n θεωρούμε τον τελεστή $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ με

$$T_n(f) = s_n(f, 0).$$

Κάθε T_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$\|T_n\| = \sup\{|s_n(f, 0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1\} = L_n.$$

Ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\sup_n |T_n(f)| = \sup_n |s_n(f, 0)| < \infty.$$

Από το θεώρημα Banach-Steinhaus υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|s_n(f, 0)| = |T_n(f)| \leqslant M$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Από την Πρόταση 5.3.4 παίρνουμε

$$L_n = \sup_{f\in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1} |s_n(f,0)| \leqslant M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η (L_n) είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση 5.3.2.

Συνεπώς, υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\limsup_n |s_n(f,0)| = +\infty$. Ειδικότερα, η σειρά Fourier της f αποκλίνει στο σημείο 0. $\square$

5.3.1 Μια κατασκευή του Lebesgue

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια κατασκευαστική απόδειξη της ύπαρξης συνεχούς $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ για την οποία

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n(f,0)| = \infty.$$

Το επιχείρημα οφείλεται στον Lebesgue. Στην Παρατήρηση 5.2.6 είδαμε ότι, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και για κάθε $t \in \mathbb{T}$,

$$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\, d\lambda(t) \to 0. \tag{5.3.3}$$

Θα ορίσουμε μια άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, θέτοντας

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(n_k t)\chi_{I_k}(t), \qquad 0 < t < \pi,$$

όπου $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών που θα επιλεγεί κατάλληλα, χ_{I_k} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $I_k = \left(\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}\right]$, και $\{c_k\}$ είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που θα επιλεγεί κατάλληλα. Παρατηρήστε ότι αν ο n_k είναι πολλαπλάσιο του n_{k-1} τότε η f θα είναι συνεχής (και ίση με 0) σε όλα τα σημεία π/n_k και ότι η υπόθεση $c_k \to 0$ εξασφαλίζει ότι η f είναι συνεχής στο 0 αν θέσουμε $f(0) = 0$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την f στο $[-\pi, 0)$ ώστε να γίνει άρτια συνάρτηση, και τέλος, την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Επειδή τα διαστήματα I_k έχουν ξένους φορείς, αυτό που περιμένουμε από την (5.3.3) είναι ότι, αν επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους, ο βασικός όρος στο μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ θα είναι ο k-οστός, δηλαδή ο $c_k \sin(n_k t)\chi_{I_k}(t)$.

Αρχικά ορίζουμε $c_1 = 1$, $n_1 = 2$ και $I_1 = (\pi/2, \pi]$. Στο I_1 έχουμε

$$f(t) = c_1 \sin(n_1 t).$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, τους $c_1, \ldots, c_{k-1}$, και τα διαστήματα I_j, $j = 1, \ldots, k-1$. Ορίζουμε

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j \sin(n_j t)\chi_{I_j}(t) \quad \text{αν } t \in (\pi/n_{k-1}, \pi]$$

και $\varphi(t) = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι η $t \mapsto \varphi(t)/t$ είναι φραγμένη: πράγματι, η φ μηδενίζεται στο $[0, \pi/n_{k-1}]$, άρα

$$|\varphi(t)| \leqslant c_1 \leqslant \frac{c_1 n_{k-1}}{\pi} t.$$

Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\,\sin(nt)\,d\lambda(t)=0.$$

Ορίζουμε $n_k=n_{k-1}N_k$, όπου ο $N_k\geqslant 2^k$ είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\,\sin(n_kt)\,d\lambda(t)\right|<1. \tag{5.3.4}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $I_k=(\pi/n_k,\pi/n_{k-1}]$ και ορίζουμε $f(t)=c_k\sin(n_kt)$ στο I_k, όπου $0<c_k<c_{k-1}<1$ τον οποίο θα επιλέξουμε. Για να εκτιμήσουμε το μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ αρκεί, από την (5.3.3), να εκτιμήσουμε το

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(n_kt)\frac{d\lambda(t)}{t}&=\frac{2}{\pi}\left(\int_{(0,\pi/n_k]}+\int_{(\pi/n_k,\pi/n_{k-1}]}+\int_{(\pi/n_{k-1},\pi]}\right)\\&=:A_k+B_k+C_k.\end{aligned}$$

Από την (5.3.4) βλέπουμε ότι $C_k=O(1)$: στο $(\pi/n_{k-1},\pi]$ έχουμε $f(t)=\varphi(t)$, άρα

$$\left|\int_0^\pi f(t)\sin(n_kt)\frac{d\lambda(t)}{t}\right|=\left|\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\,\sin(n_kt)\,d\lambda(t)\right|<\frac{\pi}{2}.$$

Επίσης, ανεξάρτητα από τον τρόπο επιλογής των c_k, από την $\sin y\leqslant y$ στο $(0,\pi)$ και την $0<c_k\leqslant 1$ έχουμε

$$|A_k|\leqslant\int_{(0,\pi/n_k]}|\sin(n_kt)|\frac{d\lambda(t)}{t}\leqslant n_k\frac{\pi}{n_k}=\pi.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}B_k&=c_k\int_{I_k}(\sin n_kt)^2\frac{d\lambda(t)}{t}=c_k\int_{I_k}\frac{1-\cos(2n_kt)}{2t}\,d\lambda(t)\\&=\frac{c_k}{2}\int_{I_k}\frac{d\lambda(t)}{t}-\frac{c_k}{2}\int_{I_k}\cos(2n_kt)\frac{d\lambda(t)}{t}\\&=:B_k'-B_k''.\end{aligned}$$

Για τον B_k' έχουμε

$$B_k'=\frac{c_k}{2}\int_{I_k}\frac{d\lambda(t)}{t}=\frac{c_k}{2}\ln\left(\frac{n_k}{n_{k-1}}\right)=\frac{c_k}{2}(\ln N_k).$$

Επιλέγοντας $c_k=(\ln N_k)^{-\varepsilon}$, όπου $0<\varepsilon<1$, έχουμε $c_k\to 0$ και

$$B_k'=\frac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\varepsilon}\to\infty$$

καθώς το $k\to\infty$. Το ολοκλήρωμα στον όρο B_k'' ισούται με

$$\int_{I_k}\cos(2n_kt)\frac{d\lambda(t)}{t}=\frac{\sin(2n_kt)}{2n_kt}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}}+\int_{I_k}\frac{\sin(2n_kt)}{2n_k}\,\frac{d\lambda(t)}{t^2}.$$

Από την επιλογή των n_k έχουμε ότι

$$\frac{\sin(2n_kt)}{2n_kt}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi N_k)}{2\pi N_k} = 0.$$

Επίσης,

$$\left|\int_{I_k} \frac{\sin(2n_kt)}{2n_k}\,\frac{d\lambda(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n_k}\int_{\pi/n_k}^{\infty}\frac{d\lambda(t)}{t^2} = \frac{1}{2n_k}\,\frac{n_k}{\pi} = \frac{1}{2\pi} = O(1).$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις εκτιμήσεις μας, βλέπουμε ότι

$$s_{n_k}(f,0) = \frac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\varepsilon} + O(1),$$

απ' όπου έπεται ότι $s_{n_k}(f,0)\to\infty$.

5.4 Θεώρημα Dini και θεώρημα Marcinkiewicz

Το θεώρημα Dini μας δίνει μια ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της σειράς Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε δεδομένο σημείο.

Θεώρημα 5.4.1 (Dini). *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $x\in\mathbb{T}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha\in\mathbb{C}$ ώστε*

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right|\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty. \tag{5.4.1}$$

Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = \alpha.$$

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 5.2.5 αρκεί να δείξουμε ότι

$$s_n^*(f,x)-\alpha\to 0.$$

Αφού

$$\begin{aligned} s_n^*(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t)\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

και

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\alpha D_n^*(t)\,d\lambda(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\alpha\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t),$$

έχουμε

$$s_n^*(f,x)-\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right)\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,d\lambda(t).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$F_x(t) := \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right)\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}$$

γράφεται στη μορφή

$$F_t(x) = A_t(x) + B_t(x) := \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\frac{1}{t} + \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right)\varphi(t), \tag{5.4.3}$$

όπου $\varphi(t) = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$. Έχουμε δει ότι $\varphi \in L^\infty$, άρα η B_x είναι ολοκληρώσιμη (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση, η A_x είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, $F_x \in L^1$ και έπεται ότι

$$s_n^*(f,x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_x(t)\sin(nt)\,d\lambda(t) \to 0$$

από το λήμμα Riemann-Lebesgue. □

Παρατηρήσεις 5.4.2. (α) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x+0) = \lim_{t\to x^+} f(t) \quad \text{και} \quad f(x-0) = \lim_{t\to x^-} f(t).$$

Αν η (5.4.1) ικανοποιείται για κάποιον α, τότε έχουμε αναγκαστικά

$$\alpha = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Πράγματι, αν είχαμε $\left|\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - \alpha\right| = r > 0$, τότε θα υπήρχε $\delta \in (0,\pi)$ ώστε: αν $0 < t < \delta$ τότε

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right| \geqslant \frac{r}{2}.$$

Όμως τότε θα είχαμε

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right| \frac{d\lambda(t)}{t} \geqslant \int_0^\delta \frac{r}{2t}\,d\lambda(t) = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο x και αν ικανοποιείται η (5.4.1) τότε έχουμε αναγκαστικά $\alpha = f(x)$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x. Τότε, η συνάρτηση

$$t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

είναι φραγμένη σε μια περιοχή του 0. Άρα, υπάρχουν $\delta \in (0,\pi)$ και $M > 0$ ώστε: αν $0 < |t| < \delta$ τότε $|f(x+t)-f(x)| \leqslant M|t|$. Δηλαδή, για κάθε $0 < t < \delta$,

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big[|f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)|\Big] \leqslant Mt.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| \frac{d\lambda(t)}{t} \leqslant \int_0^\delta Mt\,\frac{d\lambda(t)}{t} = M\delta < \infty,$$

και

$$\int_\delta^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| \frac{d\lambda(t)}{t} \leqslant \frac{1}{\delta}\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| d\lambda(t) < \infty \tag{5.4.4}$$

(εξηγήστε γιατί), άρα η (5.4.1) ικανοποιείται με $\alpha = f(x)$. Έτσι έχουμε το εξής:

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = f(x).$$

Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.3 είναι η *αρχή τοπικότητας του Riemann*: η σύγκλιση ή μη της ακολουθίας $s_n(f,x)$ εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της f *σε μια περιοχή του* x. Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές αν σκεφτούμε ότι τα μερικά αθροίσματα $s_n(f,x)$ ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier $\widehat{f}(k)$, $|k| \leq n$, της f και οι συντελεστές Fourier προκύπτουν με ολοκλήρωση στο $[-\pi,\pi]$, δηλαδή παίρνουν υπόψη τις τιμές της f σε *ολόκληρο το* $[-\pi,\pi]$.

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{T}$ και για κάποιο ανοικτό διάστημα $I \subset \mathbb{T}$ ώστε $x \in I$, ισχύει*

$$f(t) = g(t) \qquad \text{για κάθε } t \in I.$$

Τότε,

$$s_n(f,x) - s_n(g,x) \to 0.$$

Ειδικότερα, η $\{s_n(f,x)\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{s_n(g,x)\}$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f - g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Η h είναι ολοκληρώσιμη και $h(t) = 0$ για κάθε $t \in I$. Αφού το x είναι εσωτερικό σημείο του I, η h είναι παραγωγίσιμη στο x, με $h'(x) = 0$.

Από το Θεώρημα 5.4.3 βλέπουμε ότι

$$s_n(h,x) \to h(x) = 0.$$

Όμως,

$$s_n(h,x) = s_n(f-g,x) = s_n(f,x) - s_n(g,x).$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ένα απλό κριτήριο που εξασφαλίζει ότι $s_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντού.

Θεώρημα 5.4.5 (Marcinkiewicz)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για καθε $t \in \mathbb{T}$ ορίζουμε*

$$w_1(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|\, d\lambda(x).$$

Αν

$$\int_0^\pi w_1(f,t)\frac{d\lambda(t)}{t} < \infty,$$

τότε $s_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντου στο $\mathbb{T}$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^\pi |f(x+t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t}\right)d\lambda(x) &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x)\right)\frac{d\lambda(t)}{t}\\ &= \int_0^\pi w_1(f,t)\,\frac{d\lambda(t)}{t}<\infty.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^\pi |f(x+t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t}<\infty$$

σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{T}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}w_1(f,-t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x-t)-f(x)|\,d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}-t}|f(s)-f(s+x)|\,d\lambda(s)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}-t}|f(s+t)-f(s)|\,d\lambda(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(s+t)-f(s)|\,d\lambda(s)\\ &= w_1(f,t).\end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας τον αρχικό υπολογισμό βλέπουμε τώρα ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_0^\pi |f(x-t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t}\right)d\lambda(x) = \int_0^\pi w_1(f,-t)\,\frac{d\lambda(t)}{t}<\infty,$$

άρα

$$\int_0^\pi |f(x-t)-f(x)|\,\frac{d\lambda(t)}{t}<\infty$$

σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{T}$. Τώρα,

$$\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right|\frac{d\lambda(t)}{t}<\infty$$

σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{T}$, και από το θεώρημα Dini έπεται ότι $s_n(f,x)\to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{T}$. $\square$

5.5 Ασκήσεις

1. Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k)=\widehat{f}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k)=-\widehat{f}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)}=\hat{f}(-k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

2. Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $a\in\mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tau_a(x)=f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

4. Έστω $f, f_n \in L^1(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

5. Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S(f,x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε k,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

8. Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

9. Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leqslant \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\delta}{k^2 \pi \delta} \cos kx.$$

10. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| \, d\lambda(x) = 0.$$

[*Υπόδειξη*: εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.]

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, d\lambda(x) = -\int_0^{2\pi} f\big(x + \frac{\pi}{n}\big) \sin nx \, d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, d\lambda(x) = 0.$$

12. (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ δείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

13. Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x)=1$ αν $x\in[a,b]$ και $f(x)=0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\, e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S(f)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f,x)$ συγκλίνει.

14. (α) Έστω $0<\delta<\pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$,

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{και} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k\to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0,2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta,2\pi-\delta]$, όπου $0<\delta<\pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,2\pi)$.

15. Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $g\in L^\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\,d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

6.1 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μέσες τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f οι οποίες προκύπτουν από την συνέλιξη της f

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)K_\delta(y)\,d\lambda(y) \tag{6.1.1}$$

με μια οικογένεια (K_δ) συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες.

Ορισμός 6.1.1 (οικογένεια καλών πυρήνων)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ λέγεται **οικογένεια καλών πυρήνων**, ή πιο απλά **πυρήνας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)\,d\lambda(y) = 1. \tag{6.1.2}$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\,d\lambda(y) \leqslant M. \tag{6.1.3}$$

(iii) Για κάθε $\eta > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,d\lambda(y) = 0. \tag{6.1.4}$$

Η συνέλιξη $f * K_\delta$ μιας φραγμένης μετρήσιμης συνάρτησης f με μια οικογένεια καλών πυρήνων $(K_\delta)_{\delta>0}$ συγκλίνει στην f σε κάθε σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής:

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων και έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι συνεχής, έχουμε*

$$\lim_{\delta\to 0}(f*K_\delta)(x)=f(x). \tag{6.1.5}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$. Από τη συνέχεια της f στο x, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $|y|<\eta$ τότε $|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της (K_δ), γράφουμε

$$(f*K_\delta)(x)-f(x)=\int K_\delta(y)f(x-y)\,d\lambda(y)-f(x)=\int K_\delta(y)[f(x-y)-f(x)]\,d\lambda(y).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|&=\left|\int K_\delta(y)[f(x-y)-f(x)]\,d\lambda(y)\right|\\&\leqslant\int_{|y|<\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y)\\&\qquad+\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y).\end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι: αν $|y|<\eta$ τότε $|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$. Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (ii) της (K_δ), παίρνουμε

$$\int_{|y|<\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y)\leqslant\varepsilon\int_{\mathbb{R}}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)\leqslant M\varepsilon.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η f είναι φραγμένη και την ιδιότητα (iii) της (K_δ) για το συγκεκριμένο η: έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,d\lambda(y)&\leqslant\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,(|f(x-y)|+|f(x)|\,d\lambda(y)\\&\leqslant 2\|f\|_\infty\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)\to 0\end{aligned}$$

καθώς το $\delta\to 0$. Συνεπώς,

$$\limsup_{\delta\to 0}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|\leqslant M\varepsilon, \tag{6.1.6}$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $(f*K_\delta)(x)\to f(x)$ καθώς το $\delta\to 0$. □

Ορισμός 6.1.3 (οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ λέγεται **οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας**, ή πιο απλά **προσέγγιση της μονάδας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta>0$,

$$\int_{\mathbb{R}}K_\delta(y)\,d\lambda(y)=1. \tag{6.1.7}$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M>0$ ώστε, για κάθε $\delta>0$ και για κάθε $y\in\mathbb{R}$,

$$|K_\delta(y)|\leqslant \frac{M}{\delta} \tag{6.1.8}$$

και, για κάθε $\delta>0$ και για κάθε $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$|K_\delta(y)|\leqslant \frac{M\delta}{y^2}. \tag{6.1.9}$$

Παρατηρήστε ότι η πρώτη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την δεύτερη όταν $|y|\leqslant\delta$. Τελείως αντίστοιχα, η δεύτερη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την πρώτη όταν $|y|\geqslant\delta$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι υποθέσεις του Ορισμού 6.1.3 είναι ισχυρότερες από αυτές του Ορισμού 6.1.1.

Πρόταση 6.1.4. *Κάθε οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσεγγίσεων της μονάδας είναι οικογένεια καλών πυρήνων.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $R>0$ ώστε: για κάθε $\delta>0$,

$$\int_{\mathbb{R}}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)\leqslant R. \tag{6.1.10}$$

Έστω $\delta>0$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)&=\int_{|y|<\delta}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)+\int_{|y|\geqslant\delta}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)\\&\leqslant\frac{M}{\delta}\int_{|y|<\delta}\mathbf{1}\,d\lambda(y)+M\delta\int_{|y|\geqslant\delta}\frac{d\lambda(y)}{y^2}\\&=\frac{M}{\delta}\int_{|y|<\delta}\mathbf{1}\,d\lambda(y)+M\delta\cdot2\int_{\delta}^{\infty}\frac{d\lambda(y)}{y^2}\\&=\frac{M}{\delta}\cdot2\delta+M\delta\cdot\frac{2}{\delta}\\&=4M.\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο με $R=4M$.

Για την τρίτη ιδιότητα της οικογένειας καλών πυρήνων, σταθεροποιούμε $\eta>0$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\int_{|y|\geqslant\eta}|K_\delta(y)|\,d\lambda(y)\leqslant M\delta\int_{|y|\geqslant\eta}\frac{d\lambda(y)}{|y|^2}=\frac{2M}{\eta}\delta\to0 \tag{6.1.11}$$

καθώς το $\delta\to0$. □

Παραδείγματα 6.1.5. (α) Έστω $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια μη αρνητική, φραγμένη συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$ και έχει ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\,d\lambda(y)=1. \tag{6.1.12}$$

Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $K_\delta(y) = \delta^{-1}\varphi(\delta^{-1}y)$. Η $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

(β) Ο πυρήνας της θερμότητας $\mathcal{H}_t$ στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{H}_t(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-|y|^2/4t}. \tag{6.1.13}$$

Η οικογένεια $(\mathcal{H}_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

Το επόμενο βασικό θεώρημα «επεκτείνει» το Θεώρημα 6.1.2.

Θεώρημα 6.1.6. *Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει*

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x) \tag{6.1.14}$$

σε κάθε σημείο Lebesgue x της f. Συνεπώς, $f * K_\delta \to f$ σχεδόν παντού καθώς το $\delta \to 0$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6 θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.1.7. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $f \in \mathrm{Leb}(f)$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y), \qquad r > 0. \tag{6.1.15}$$

Τότε, η συνάρτηση $\mathcal{A}$ είναι φραγμένη, συνεχής, και

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{A}(r) = 0. \tag{6.1.16}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $r \mapsto r\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής σε κάθε $r > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος: αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία $r_k \to r^+$ τότε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r_k\mathcal{A}(r_k) - r\mathcal{A}(r) &= \left| \int_{|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) - \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \right| \\ &= \int_{r<|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $k \to \infty$, διότι η $y \mapsto |f(x-y) - f(x)|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $\lambda(\{y : r < |y| \leqslant r_k\}) \to 0$ όταν $k \to \infty$. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει τη συνέχεια από αριστερά.

Αφού $x \in \mathrm{Leb}(f)$ έχουμε

$$\lim_{\substack{\lambda(I)\to 0 \\ x\in I}} \frac{1}{\ell(I)}\int_I |f(z) - f(x)|\, dz = 0. \tag{6.1.17}$$

Όμως,

$$\mathcal{A}(r) = \frac{2}{\ell(x-r, x+r)}\int_{x-r}^{x+r} |f(z) - f(x)|\, dz, \tag{6.1.18}$$

άρα είναι φανερό ότι $\mathcal{A}(r) \to 0$ καθώς το $r \to 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι συνεχής και $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}(r) = 0$. Συνεπώς, υπάρχει $M_1 > 0$ ώστε $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant M_1$ για κάθε $r \in [0,1]$. Για $r > 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) &= \frac{1}{r}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{1}{r}\int_{x-r}^{x+r} |f(z)|\, dz + \frac{1}{r}\int_{|y|\leqslant r} |f(x)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \int_{x-r}^{x+r} |f(z)|\, dz + \frac{1}{r}|f(x)|\, 2r \\ &\leqslant M_2 := \|f\|_1 + 2|f(x)|.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant \max\{M_1, M_2\}$ για κάθε $r > 0$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε πρώτα $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \tag{6.1.19}$$

Στη συνέχεια, για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\delta<|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{M}{\delta}\int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} M\delta \int_{2^k\delta<|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\, \frac{1}{|y|^2} d\lambda(y) \\ &\leqslant M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k\delta)^2}\int_{|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \\ &= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k\delta)^2}(2^{k+1}\delta)\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \\ &= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2M}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \\ &\leqslant M_1\left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\right],\end{aligned}$$

όπου $M_1 = 2M$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\|\mathcal{A}\|_\infty < \infty$ και το γεγονός ότι $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{A}(\delta) = 0$. Υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ να έχουμε

$$\mathcal{A}(2^k\delta) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{6.1.20}$$

Τότε, για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant M_1 \left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta) + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \right] \\
&\leqslant M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} \right) \frac{\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right] \\
&\leqslant M_1 \left[\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \varepsilon \right] \\
&= M_1 (1 + \|\mathcal{A}\|_\infty) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{\delta \to 0} (f * K_\delta)(x) = f(x)$. □

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου αναφέρεται στη σύγκλιση της $f * K_\delta$ στην f ως προς την $\| \cdot \|_1$.

Θεώρημα 6.1.8. *Έστω $(K_\delta)_{\delta > 0}$ οικογένεια καλών πυρήνων. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $\delta > 0$, η συνέλιξη*

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) K_\delta(y)\, d\lambda(y) \tag{6.1.21}$$

είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, και

$$\|(f * K_\delta) - f\|_1 \to 0 \ \text{ καθώς το } \delta \to 0. \tag{6.1.22}$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|(f * K_\delta) - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f * K_\delta)(x) - f(x)|\, d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x - y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y) - f(x)|\, d\lambda(x) \right) |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|f_{-y} - f\|_1\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y),
\end{aligned}$$

όπου $f_{-y}(x) = f(x - y)$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\lim_{y \to 0} \|f_{-y} - f\|_1 = 0 \tag{6.1.23}$$

(βλέπε Κεφάλαιο 4). Δηλαδή, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε

$$|y| < \eta \Longrightarrow \|f_{-y} - f\|_1 < \varepsilon. \tag{6.1.24}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και την $\|f_{-y} - f\|_1 \leqslant \|f_{-y}\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|(f * K_\delta) - f\|_1 &\leqslant \int_{|y| < \eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + \int_{|y| \geqslant \eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + 2\|f\|_1 \int_{|y| \geqslant \eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\
&\leqslant M\varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y| \geqslant \eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y),
\end{aligned}$$

όπου $M := \sup \|K_\delta\|_1 < \infty$ (αφού η (K_δ) είναι πυρήνας). Αφήνοντας το $\delta \to 0$ και χρησιμοποιώντας την

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) = 0, \tag{6.1.25}$$

παίρνουμε

$$\limsup_{\delta\to 0} \|(f * K_\delta) - f\|_1 \leqslant M\varepsilon, \tag{6.1.26}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\|(f * K_\delta) - f\|_1 \to 0$ καθώς το $\delta \to 0$. □

6.2 Cesàro αθροισιμότητα

Ορισμός 6.2.1. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Λέμε ότι η $\{c_k\}$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $\ell \in \mathbb{C}$ αν η ακολουθία

$$C_k := \frac{c_1 + \cdots + c_k}{k} \to \ell \tag{6.2.1}$$

καθώς το $k \to \infty$.

Πρόταση 6.2.2. *Αν $\lim_{k\to\infty} c_k = \ell$ τότε η $\{c_k\}$ συγκλίνει κατά Cesàro στον ℓ.*

Απόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $c_k \to 0$ και δείχνουμε ότι $C_k \to 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_1$ ισχύει $|c_k| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $k > k_1$ έχουμε

$$|C_k| \leqslant \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{k - k_1}{k}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2.2}$$

Ο $A := |c_1 + \cdots + c_{k_1}|$ εξαρτάται από το ε. Επιλέγουμε $k_2(A) = k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_2$,

$$\frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} = \frac{A}{k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2.3}$$

Αν θέσουμε $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ τότε, για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$|C_k| \leqslant \frac{A}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{6.2.4}$$

Άρα, $C_k \to 0$.

Για τη γενική περίπτωση εφαρμόζουμε το προηγούμενο στην ακολουθία $c_k' := c_k - \ell$. □

Παρατήρηση 6.2.3. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η ακολουθία $c_k = 1 + (-1)^k$ αποκλίνει, αλλά συγκλίνει κατά Cesàro στο 1.

Ορισμός 6.2.4. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^n c_k \quad \text{και} \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k. \tag{6.2.5}$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty c_k$ συγκλίνει **κατά Cesàro** στον $s \in \mathbb{C}$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s. \tag{6.2.6}$$

Παρατήρηση 6.2.5. Από την Πρόταση 6.2.2 έπεται ότι: αν $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ τότε $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s$, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον s.

Από την άλλη πλευρά, αν $z \neq 1$, $|z| = 1$, και αν ορίσουμε $c_k = z^k$, $k \geqslant 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ αποκλίνει διότι $c_k \not\to 0$, όμως

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{6.2.7}$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον $\frac{1}{1-z}$.

6.3 Ο πυρήνας του Fejér

Ορισμός 6.3.1 (Cesàro μέσοι)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f ορίστηκε ως εξής:

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{6.3.1}$$

Ο n-οστός Cesàro μέσος της σειράς Fourier της f ορίζεται από την

$$\sigma_n(f,x) = \frac{s_0(f,x)+s_1(f,x)+\cdots+s_{n-1}(f,x)}{n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{6.3.2}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την $\sigma_n(f,t)$ σε κλειστή μορφή, γράφοντας

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} s_m(f,x)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m}\widehat{f}(k)e^{ikx}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(\sum_{m=|k|}^{n-1}\mathbf{1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)\widehat{f}(k)e^{ikx}\\
&= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$s_m(f,x) = (f * D_m)(x) \tag{6.3.3}$$

όπου D_m είναι ο m-οστός πυρήνας του Dirichlet, μπορούμε επίσης να γράφουμε

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(f*D_m)(x) = \left(f * \frac{D_0+D_1+\cdots+D_{n-1}}{n}\right)(x). \tag{6.3.4}$$

Ορισμός 6.3.2 (πυρήνας Fejér)**.** Ο n-οστός πυρήνας του Fejér είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} D_m(x). \tag{6.3.5}$$

Παρατηρήστε ότι

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}. \tag{6.3.6}$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τον F_n σε κλειστή μορφή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$D_m(x) = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{6.3.7}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\sum_{m=0}^{n-1}2\sin\frac{x}{2}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x \\
&= \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\sum_{m=0}^{n-1}[\cos(mx)-\cos(m+1)x] = \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}[1-\cos(nx)] \\
&= \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\cdot 2\sin^2(nx/2) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

Λήμμα 6.3.3. *Για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$,*

$$F_n(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx} \tag{6.3.8}$$

και

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2. \tag{6.3.9}$$

Παρατηρήσεις 6.3.4. Από το Λήμμα 6.3.3 είναι φανερό ότι ο πυρήνας του Fejér F_n είναι μη αρνητική άρτια συνάρτηση. Λόγω της $F_n(-x) = F_n(x)$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(x)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(x)\,d\lambda(x) = 1. \tag{6.3.10}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
0 \leqslant F_n(x) &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|D_m(x)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1) \\
&= \frac{1}{n}\cdot[n(n-1)+n] = n.
\end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $0 < |x| < \pi$ έχουμε

$$0 \leqslant F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{(x/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{nx^2}. \tag{6.3.11}$$

Για τους Cesàro μέσους $\sigma_n(f,x)$ θα χρησιμοποιούμε συχνά την αναπαράσταση

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)F_n(t)\,d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right)F_n(t)\,d\lambda(t) \tag{6.3.12}$$

ή την

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)F_n(t)\,d\lambda(t). \tag{6.3.13}$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι η F_n είναι άρτια συνάρτηση (με απλές αλλαγές μεταβλητής).

Θεώρημα 6.3.5 (Fejér)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$. Αν τα πλευρικά όρια $f(x+0)$ και $f(x-0)$ υπάρχουν, τότε*

$$\sigma_n(f,x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{6.3.14}$$

καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I \subset \mathbb{T}$, τότε $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο I.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x+t)-f(x+0)| < \varepsilon$ και $|f(x-t)-f(x-0)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in (0,\delta)$. Άρα,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\right|\\ &\qquad\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2} + \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\\ &\qquad\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\varepsilon\,F_n(t)\,d\lambda(t) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Στο (δ,π) έχουμε

$$F_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{n\delta^2}. \tag{6.3.15}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right)F_n(t)d\lambda(t)\right|\\&\qquad\leqslant\frac{\pi^2}{n\delta^2}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2}+\frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right)d\lambda(t)\\&\qquad\leqslant\frac{M(f)}{n\delta^2}\to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n\to\infty$. Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty}|\sigma_n(f,x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \tag{6.3.16}$$

και έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I\subset\mathbb{T}$, από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο I βλέπουμε ότι η επιλογή του δ στο παραπάνω επιχείρημα είναι ανεξάρτητη από το $x\in I$ (εξαρτάται μόνο από το ε), άρα $\sigma_n(f,x)\to f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ομοιόμορφα στο I. □

Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 6.3.5 είναι η πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $(C(\mathbb{T}),\|\cdot\|_\infty)$ και στον $(L^1(\mathbb{T}),\|\cdot\|_1)$ που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του λήμματος Riemann-Lebesgue.

Θεώρημα 6.3.6. *Για κάθε $g\in C(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε*

$$\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon. \tag{6.3.17}$$

Επίσης, για κάθε $1\leqslant p<\infty$, για κάθε $f\in L^p(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε

$$\|f-q_\varepsilon\|_p<\varepsilon. \tag{6.3.18}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η $\sigma_n(g)=g*F_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, ως συνέλιξη μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης με το τριγωνομετρικό πολυώνυμο F_n. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\sigma_n(g)\to g$ ομοιόμορφα, διότι η g είναι συνεχής. Δηλαδή, $\|g-\sigma_n(g)\|_\infty\to 0$. Για το τυχόν λοιπόν $\varepsilon>0$ έχουμε

$$\|g-\sigma_n(g)\|_\infty<\varepsilon \tag{6.3.19}$$

αν το n είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

Για τον δεύτερο, έστω $f\in L^p(\mathbb{T})$ και $\varepsilon>0$. Μπορούμε να βρούμε $g\in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f-g\|_p<\varepsilon/2$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε $\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon/2$. Αφού

$$\|g-q_\varepsilon\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(x)-q_\varepsilon(x)|^pd\lambda(x)\right)^{1/p}\leqslant\|g-q_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon/2, \tag{6.3.20}$$

ο ισχυρισμός έπεται από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$. □

Παρατήρηση 6.3.7. Για κάθε n ορίζουμε $\delta_n = \frac{1}{n}$ και $K_{\delta_n} = F_n$. Η οικογένεια $\{K_{\delta_n}\}$ είναι προσέγγιση της μονάδας (στο $\mathbb{T}$). Πράγματι, για κάθε n ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_{\delta_n}(t)d\lambda(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(t)d\lambda(t) = 1. \tag{6.3.21}$$

Επίσης,

$$|K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leqslant n = \frac{1}{\delta_n} \tag{6.3.22}$$

και, για κάθε $0 < |t| < \pi$, έχουμε

$$|K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{nt^2} = \frac{\pi^2\delta_n}{t^2}. \tag{6.3.23}$$

Από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.1 (ή μια απλή παραλλαγή της απόδειξής τους) έχουμε το εξής θεώρημα που «συμπληρώνει» το Θεώρημα 6.3.5:

Θεώρημα 6.3.8. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ ισχύει $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.* □

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην L^p-σύγκλιση των Cesàro μέσων $\sigma_n(f)$ στην f.

Θεώρημα 6.3.9. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Για κάθε $f \in L^(\mathbb{T})$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0. \tag{6.3.24}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f) - f\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f,x) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x))F_n(t)\,d\lambda(t)\right|^p dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Υπάρχει $h \in L^q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τέτοια ώστε $\|h\|_q = 1$ και

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x))F_n(t)\,d\lambda(t)\right|^p dx\right)^{1/p} \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} h(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x))F_n(t)\,d\lambda(t)\right) d\lambda(x) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} h(x)(f(x+t) - f(x))\,d\lambda(x)\right) F_n(t)\,d\lambda(t) \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|h\|_q \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p} F_n(t)\,d\lambda(t) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p} F_n(t)\,d\lambda(t)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini και την ανισότητα Hölder. Αν θέσουμε $f_t(x) = f(x+t)$, συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t)\, d\lambda(t). \tag{6.3.25}$$

Ορίζουμε $A(t) = \|f_t - f\|_p$. Γνωρίζουμε ότι η A είναι συνεχής στο 0, άρα

$$\sigma_n(A,0) \to A(0) = 0 \ \text{ καθώς το } n \to \infty. \tag{6.3.26}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \sigma_n(A,0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(-t)\, d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(t)\, d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t)\, d\lambda(t), \end{aligned}$$

άρα

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leqslant \sigma_n(A,0) \tag{6.3.27}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 6.3.9 έχει ως συνέπεια το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 6.3.6. Δείχνει επίσης ότι η απεικόνιση $f \mapsto \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι 1-1.

Θεώρημα 6.3.10 (μοναδικότητα). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.*

Απόδειξη. Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε k, έχουμε

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx} = 0 \tag{6.3.28}$$

για κάθε n, δηλαδή $\sigma_n(f) \equiv 0$. Από το Θεώρημα 6.3.9 βλέπουμε ότι

$$\|f\|_p = \|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0. \tag{6.3.29}$$

Άρα, $\|f\|_p = 0$ και αυτό δείχνει ότι $f \equiv 0$. □

6.4 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε αν υπάρχουν κάποια απλά κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν να δούμε αν κάποια τριγωνομετρική σειρά είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$. Θεωρούμε λοιπόν μια τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{6.4.1}$$

και τους Cesàro μέσους

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{ikt}. \tag{6.4.2}$$

της σειράς (6.4.1).

Θεώρημα 6.4.1. *Η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης $f \in C(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία συναρτήσεων $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(f, x). \tag{6.4.3}$$

Από το Θεώρημα 6.3.5 συμπεραίνουμε ότι $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{\sigma_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση f στο $\mathbb{T}$. Η f είναι συνεχής ως ομοιόμορφο όριο τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $n > |k|$ τότε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x). \tag{6.4.4}$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k \to c_k \tag{6.4.5}$$

και, αφού $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \widehat{f}(k). \tag{6.4.6}$$

Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε k, δηλαδή η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier της f. $\square$

Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση $1 < p < \infty$.

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω $1 < p < \infty$. Η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$. Δηλαδή, αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|\sigma_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f)\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f, x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x+t) F_n(t)\, d\lambda(t)\right|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t)|^p\, d\lambda(x)\right)^{1/p} F_n(t)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t\|_p F_n(t)\, d\lambda(t),
\end{aligned}$$

όπου $f_t(x) = f(x+t)$, χρησιμοποιώντας τον δυϊσμό όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.9. Αφού $\|f_t\|_p = \|f\|_p$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(t)\,d\lambda(t) = \|f\|_p \tag{6.4.7}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $1 < p < \infty$ και $\{f_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L^p(\mathbb{T})$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L^p(\mathbb{T})$: αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_{k_n}(x)h(x)\,d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\,d\lambda(x) \tag{6.4.8}$$

για κάθε $h \in L^q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Μια άμεση απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έχουμε αν σκεφτούμε ότι η μοναδιαία μπάλα B_p του $L^p(\mathbb{T})$ είναι ασθενώς συμπαγής (διότι ο L^p είναι αυτοπαθής χώρος, άρα ισοδύναμα μιλάμε για τη μοναδιαία μπάλα του $(L^q(\mathbb{T}))^*$ με την w^*-τοπολογία). Επίσης, η ασθενής τοπολογία στην B_p είναι μετρικοποιήσιμη διότι αναφερόμαστε σε διαχωρίσιμους χώρους. Εφαρμόζουμε λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα για την $\{f_n\}$ η οποία περιέχεται σε κάποιο πολλαπλάσιο της B_p.

Υποθέτουμε ότι η $\{\sigma_n(f)\}$ είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\{\sigma_{k_n}(f)\}$ της $\{\sigma_n(f)\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L^p(\mathbb{T})$: για κάθε $h \in L^q(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,x)h(x)\,d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\,d\lambda(x). \tag{6.4.9}$$

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $k_n > |m|$ τότε

$$\left(1 - \frac{|m|}{k_n}\right) c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt}d\lambda(t). \tag{6.4.10}$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{|m|}{k_n+1}\right) c_m \to c_m \tag{6.4.11}$$

και, αφού η $t \mapsto e^{-imt}$ ανήκει στον $L^q(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt}d\lambda(t) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-imt}d\lambda(t) = \widehat{g}(m). \tag{6.4.12}$$

Έπεται ότι $c_m = \widehat{g}(m)$ για κάθε m, δηλαδή η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier της g. □

6.5 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Μια σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ λέγεται *Abel αθροίσιμη* στον $s \in \mathbb{C}$ αν για κάθε $0 \leqslant r < 1$ η σειρά

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \tag{6.5.1}$$

συγκλίνει, και

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = s. \tag{6.5.2}$$

Οι ποσότητες $A(r)$ λέγονται *Abel μέσοι* της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Αποδεικνύεται ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Το παράδειγμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) = 1-2+3-4+5-\cdots \tag{6.5.3}$$

δείχνει ότι μια σειρά μπορεί να είναι Abel αθροίσιμη χωρίς να είναι Cesàro αθροίσιμη. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \frac{1}{(1+r)^2} \tag{6.5.4}$$

για κάθε $0 \leqslant r < 1$, συνεπώς

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = \frac{1}{4}. \tag{6.5.5}$$

Όμως, η σειρά αυτή δεν είναι Cesàro αθροίσιμη: θα έπρεπε να ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n/n) = 0$. Για αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στο Παράρτημα και τις σχετικές ασκήσεις.

Ορισμός 6.5.1 (πυρήνας του Poisson)**.** Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikx}. \tag{6.5.6}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass βλέπουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως για κάθε x και ομοιόμορφα σαν σειρά συναρτήσεων στο $[-\pi,\pi]$. Η συνάρτηση P_r λέγεται *r-πυρήνας του Poisson*. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (6.5.6) έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\widehat{P_r}(k) = r^{|k|}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{6.5.7}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πυρήνας P_r παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές: δίνεται μάλιστα από την

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \tag{6.5.8}$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ισότητας θέτουμε $\omega = re^{ix}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
P_r(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k(e^{ix})^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} r^{-k}(e^{-ix})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(re^{ix})^k + \sum_{s=1}^{\infty}(re^{-ix})^s \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\omega^k + \sum_{s=1}^{\infty}\overline{\omega}^s = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}} = \frac{1-\overline{\omega}+(1-\omega)\overline{\omega}}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})} \\
&= \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $|\omega| = r$ και $1 - \omega = 1 - re^{ix} = (1 - r\cos x) - ir\sin x$, καταλήγουμε στην

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{(1 - r\cos x)^2 + r^2\sin^2 x} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}. \tag{6.5.9}$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\{P_r\}_{0\leqslant r\leqslant 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων. Δεδομένου ότι το σύνολο δεικτών είναι τώρα το διάστημα $[0, 1)$, αυτό που χρειάζεται να τροποποιήσουμε είναι η τρίτη συνθήκη του ορισμού. Ουσιαστικά ζητάμε το εξής: για κάθε ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0, 1)$ με $r_n \to 1^-$, ζητάμε η ακολουθία $\{P_{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Η δεύτερη συνθήκη του ορισμού είναι άμεση συνέπεια της πρώτης συνθήκης, διότι οι P_r παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Αποδεικνύουμε λοιπόν την εξής πρόταση.

Πρόταση 6.5.2. *Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ έχουμε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\, d\lambda(x) = 1, \tag{6.5.10}$$

και για κάθε $0 < \delta < \pi$ ισχύει ότι

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} P_r(x)\, d\lambda(x) = 0. \tag{6.5.11}$$

Απόδειξη. Έστω $0 \leqslant r < 1$. Αφού η σειρά συναρτήσεων $P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi, \pi]$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\, d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{r^{|k|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}d\lambda(x) = \frac{r^0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^0 d\lambda(x) = 1, \tag{6.5.12}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}d\lambda(x) = 0$ αν $k \neq 0$. Έστω τώρα $0 < \delta < \pi$ και έστω $1/2 \leqslant r < 1$. Έχουμε

$$1 - 2r\cos x + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos x) \geqslant (1-r)^2 + 2r(1-\cos\delta) \geqslant c_\delta = 1 - \cos\delta > 0 \tag{6.5.13}$$

για κάθε $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$ (διότι $\cos x \leqslant \cos\delta$). Συνεπώς,

$$0 \leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} P_r(x)\, d\lambda(x) \leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi}\frac{1 - r^2}{c_\delta}\, d\lambda(x) \leqslant \frac{2\pi}{c_\delta}(1 - r^2) \to 0 \tag{6.5.14}$$

όταν $r \to 1^-$. Έπεται το συμπέρασμα της πρότασης. □

Ορισμός 6.5.3 (Abel μέσοι της f)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ ορίζουμε τον *r-Abel μέσο* της f μέσω της

$$A_r(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{6.5.15}$$

Αφού η ακολουθία $\{|\widehat{f}(k)|\}$ είναι φραγμένη, το κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η σειρά συναρτήσεων στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$. Παρατηρήστε ότι $A_r(f)(x)$ είναι ο r-Abel μέσος της σειράς Fourier $S(f)$ της f.

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς (6.5.15), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} A_r(f)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y)\right)e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{-ik(y-x)}\right)d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\,d\lambda(y) \\ &= (f*P_r)(x). \end{aligned}$$

Αφού η $\{P_r\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων, παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 6.5.4. *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στην f σε κάθε σημείο συνέχειας της f: αν η f είναι συνεχής στο $x\in\mathbb{T}$, τότε*

$$A_r(f)(x)\to f(x). \tag{6.5.16}$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{T}$, τότε η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι ομοιόμορφα Abel αθροίσιμη στην f: δηλαδή,

$$A_r(f)\xrightarrow{o\mu} f. \tag{6.5.17}$$

6.6 Ασκήσεις

1. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n=c_1+\cdots+c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s=0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r\in(0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k=(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s=0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r\in(0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k=(1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

2. Έστω $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$(s_n(f))*g=s_n(f*g)=f*(s_n(g)).$$

3. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p>1$,

$$\lim_{\delta\to 0}\|K_\delta\|_p=\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p}=+\infty.$$

4. Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f)\geqslant 0$ για κάθε $k\geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k<+\infty.$$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-):=\lim_{t\to x^-}f(t)\quad\text{και}\quad f(x^+):=\lim_{t\to x^+}f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-}A_r(f)(x)=\lim_{r\to 1^-}(f*P_r)(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}P_r(x)\,d\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}P_r(x)\,d\lambda(x).$$

7. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t)=\alpha_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_n(t)\,d\lambda(t)=1.$$

Δείξτε ότι: αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f*Q_n\xrightarrow{\text{ομ}}f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x)=F_n(x)\sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T\in\mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x)=-2n(T*G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér F_n, $n \in \mathbb{N}$.

11. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

12. Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

13. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L^1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

14. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

15. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Υπολογίστε αρχικά τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s,b_{s+1}]}$. Κατόπιν, δείξτε ότι η f προσεγγίζεται (ως προς την $\|\cdot\|_1$) από κλιμακωτές συναρτήσεις της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s,b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$.

16. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi+1}{1-\alpha}\,\frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant 2\pi A\,\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

17. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ και θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\,F_n(x).$$

18. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

19. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Δείξτε ότι

$$|s_n(f)(x)| \leq 5M$$

για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

L^2-σύγκλιση σειρών Fourier

7.1 Χώροι Hilbert

7.1.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και χώροι Hilbert

Ορισμός 7.1.1. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.

(β) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, για κάθε $x, y \in X$.

(γ) για κάθε $y \in X$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y\rangle$ είναι γραμμική.

Πρόταση 7.1.2 (ανισότητα Cauchy-Schwarz)**.** *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{7.1.1}$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Έστω $x, y \in X$ και έστω $M = |\langle x, y\rangle|$. Υπάρχει $\vartheta \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle x, y\rangle = Me^{i\vartheta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &= |\lambda|^2\langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \\ &= r^2\langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(rMe^{i(\vartheta+t)}) + \langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το t έτσι ώστε $e^{i(\vartheta+t)} = -1$. Τότε, έχουμε

$$r^2\langle x, x\rangle - 2rM + \langle y, y\rangle \geqslant 0 \tag{7.1.2}$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y, y\rangle}/\sqrt{\langle x, x\rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leqslant \langle tx + y, tx + y\rangle = t^2\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle. \tag{7.1.3}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς t πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Άρα, $4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο. □

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 7.1.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες είναι απλές). Όμως,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)\\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle|\\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Παρατήρηση 7.1.4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$: Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle. \tag{7.1.4}$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle|\\ &\leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle. \tag{7.1.5}$$

Ειδικότερα, για κάθε $y \in X$ η απεικόνιση $x \mapsto \langle x,y\rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X.

Ορισμός 7.1.5. Ένας χώρος Banach λέγεται *χώρος Hilbert* αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον X ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ για κάθε $x \in X$.

Στη συνέχεια συμβολίζουμε τους χώρους Hilbert με H. Κάθε χώρος Hilbert ικανοποιεί τον *κανόνα του παραλληλογράμμου*: για κάθε $x,y \in H$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{7.1.6}$$

Αντίστροφα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός χώρου Banach X ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\} \tag{7.1.7}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και από την

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \tag{7.1.8}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.1.2 Καθετότητα

Ορισμός 7.1.6 (καθετότητα)**.** Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Λέμε ότι τα $x, y \in X$ είναι *ορθογώνια* (ή *κάθετα*) και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$. Αν $x \in X$ και M είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, λέμε ότι το x είναι κάθετο στο M και γράφουμε $x \perp M$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in M$.

Παρατηρήσεις 7.1.7. (α) Το 0 είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα.

(β) Αν $x \perp y$, ισχύει το *Πυθαγόρειο θεώρημα*: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ορισμός 7.1.8. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω M γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε

$$M^{\perp} = \{x \in X : \forall y \in M,\ \ \langle x, y\rangle = 0\}. \tag{7.1.9}$$

Ο $M^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X

Πρόταση 7.1.9. *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ ώστε*

$$\|x - y_0\| = \mathrm{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}. \tag{7.1.10}$$

Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, ονομάζεται προβολή του x στον M και ικανοποιεί την $x - P_M(x) \perp M$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta = \mathrm{dist}(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta. \tag{7.1.11}$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2\\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2\\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2.\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geqslant \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \tag{7.1.12}$$

όταν $m, n \to \infty$. Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός) και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x-y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}0 \leqslant \|y - y'\|^2 = 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2\\ \leqslant 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό θέτουμε $w = x - P_M(x)$. Έστω ότι το w δεν είναι κάθετο στον M. Τότε, υπάρχει $z \in M$ ώστε $\langle w, z\rangle > 0$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε $2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2 > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}\|x - (P_M(x) + \varepsilon z)\|^2 &= \|w - \varepsilon z\|^2 = \langle w - \varepsilon z, w - \varepsilon z\rangle \\ &= \|w\|^2 - 2\varepsilon\langle w, z\rangle + \varepsilon\|z\|^2 \\ &= \delta^2 - \varepsilon(2\langle w, z\rangle - \varepsilon\|z\|^2) < \delta^2,\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $P_M(x) + \varepsilon z \in M$. □

Πόρισμα 7.1.10. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, ώστε $z \perp M$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

7.1.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός 7.1.11. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $(e_k) \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ (1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$). Αν (e_k) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον X, τότε το $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} = 0$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \Big\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \Big\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j}\rangle = \lambda_j. \tag{7.1.13}$$

Ορισμός 7.1.12. Έστω H χώρος Hilbert. Μιά ορθοκανονική ακολουθία (e_k) λέγεται *ορθοκανονική βάση* του H αν

$$H = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}. \tag{7.1.14}$$

Πρόταση 7.1.13. *Έστω H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του H.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ του H είναι αριθμήσιμο σύνολο: πράγματι, αν $e_i \neq e_j$ είναι στοιχεία μιας τέτοιας οικογένειας, τότε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Την ίδια στιγμή, αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος δεν γίνεται να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του που να απέχουν ανά δύο απόσταση ίση με $\sqrt{2}$. Θεωρούμε λοιπόν μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του H (η διάταξη των στοιχείων της βάσης είναι τυχούσα) η οποία να είναι μεγιστική, δηλαδή να μην περιέχεται γνήσια σε κάποια άλλη. Αυτό γίνεται με χρήση του λήμματος του Zorn. Τότε, ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός στον H (αλλιώς, θα μπορούσαμε να βρούμε μοναδιαίο $z \perp e_k$ για κάθε k, και η (e_k) δεν θα ήταν μεγιστική). Άρα, η (e_k) είναι ορθοκανονική βάση του H. □

Λήμμα 7.1.14. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω (e_n) ορθοκανονική ακολουθία στον X. Για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$d(x, \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}) = \Big\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \Big\|. \tag{7.1.15}$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k + \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \langle x, e_k\rangle|^2\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$ είναι κάθετο σε όλα τα e_k, άρα και στο $\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k$, οπότε εφαρμόσαμε το Πυθαγόρειο θεώρημα γι' αυτά τα δύο διανύσματα). Άρα,

(7.1.16)
$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 \geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2$$

και ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2.\end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του ότι η (e_n) είναι ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα 7.1.15. *Έστω (e_k) ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η (e_k) είναι ορθοκανονική βάση του H.*

(β) *Αν $x \in H$ και $\langle x, e_k\rangle = 0$ για κάθε k, τότε $x = 0$.*

(γ) *Αν $x \in H$ και $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$, τότε $s_n(x) \to x$. Δηλαδή,*

(7.1.17)
$$x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k.$$

(δ) *Ισχύει η ισότητα του Parseval: για κάθε $x \in H$,*

(7.1.18)
$$\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $x \in H$. Αφού ο $F = \mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to x$. Από την υπόθεση έχουμε $x \perp y$ για κάθε $y \in F$. Τότε, $0 = \langle x, y_n \rangle \to \langle x, x \rangle$. Άρα, $\langle x, x \rangle = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $x = 0$.

(β) $\Longrightarrow$ (γ) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x - s_n(x) \perp s_n(x)$: πράγματι,

$$\langle x, s_n(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|s_n(x)\|^2 = \langle s_n(x), s_n(x) \rangle. \tag{7.1.19}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

$$\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{7.1.20}$$

Συνεπώς. $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ για κάθε n, και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε την ανισότητα Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7.1.21}$$

Ειδικότερα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ συγκλίνει, και από την

$$\|s_m(x) - s_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \tag{7.1.22}$$

η οποία ισχύει για κάθε $m > n$, έπεται ότι η $\{s_n(x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο H είναι πλήρης, υπάρχει $y \in H$ ώστε $s_n(x) \to y$. Από την σύγκλιση αυτή βλέπουμε ότι $\langle x - y, e_k]rangle = 0$ για κάθε k, και η υπόθεσή μας (το (β)) εξασφαλίζει ότι

$$x = y = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k. \tag{7.1.23}$$

(γ) $\Longrightarrow$ (δ) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$ για κάθε n. Αφού $\|x - s_n(x)\| \to 0$, έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \tag{7.1.24}$$

(δ) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$ για κάθε n. Αφού $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \to \|x\|^2$, έπεται ότι $\|x - s_n(x)\| \to 0$. Δηλαδή, $s_n(x) \to x$. Αφού κάθε $s_n(x) \in \mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, έπεται ότι

$$H = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}. \tag{7.1.25}$$

Δηλαδή, η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H. □

7.2 Σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{T})$

Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου στην L^2-σύγκλιση των σειρών Fourier. Το ερώτημα είναι αν για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \ \text{ καθώς το } \ n \to \infty. \tag{7.2.1}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert. Η $\|\cdot\|_2$ επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{7.2.2}$$

Λήμμα 7.2.1. *Η ακολουθία $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη. Έχουμε δεί ότι

$$\langle e^{ikx}, e^{isx}\rangle = \delta_{k,s} \tag{7.2.3}$$

για κάθε $k, s \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα 6.3.10 έχουμε ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Ισοδύναμα, αν $\langle f, e^{ikx}\rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 7.1.15. □

Άμεσο πόρισμα της γενικής θεωρίας των χώρων Hilbert είναι τώρα το εξής.

Θεώρημα 7.2.2. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\|s_n(f) - f\|_2 \to 0 \ \text{ καθώς το } \ n \to \infty \tag{7.2.4}$$

και

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2. \tag{7.2.5}$$

Παρατήρηση 7.2.3. Στην απόδειξη της $\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \|s_n(f)\|_2^2$ χρησιμοποιήθηκε μόνο το γεγονός ότι το $\{e^{ik\vartheta} : |k| \leqslant n\}$ είναι ορθοκανονικό. Με το ίδιο επιχείρημα μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι: αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε όρθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ συναρτήσεων στον $L^2(\mathbb{T})$ και αν, για τυχόν n, θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$, τότε

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2. \tag{7.2.6}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2, \tag{7.2.7}$$

για κάθε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{R}$. Αυτή είναι η (γενική) **ανισότητα του Bessel**. Ισότητα στην ανισότητα του Bessel ισχύει για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$, ακριβώς όταν το E είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|_2 = 0 \tag{7.2.8}$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 7.2.4 (Riesz-Fisher). *Ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell_2(\mathbb{Z})$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : L^2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z}$ με

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}. \tag{7.2.9}$$

Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 < +\infty \tag{7.2.10}$$

από την ταυτότητα του Parseval, άρα $T(f) \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

Η ταυτότητα του Parseval δείχνει επιπλέον ότι

$$\|T(f)\|_{\ell_2(\mathbb{Z}} = \|f\|_2 \tag{7.2.11}$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$, άρα ο T είναι ισομετρία (ειδικότερα, είναι ένα προς ένα).

Δείχνουμε τέλος ότι ο T είναι επί: έστω $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Ορίζουμε $f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{ikx}$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|f_N - f_M\|_2^2 = \sum_{k=M+1}^{N} a_k^2 \to 0 \tag{7.2.12}$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (f_N) είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(\mathbb{T})$. Ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{T})$ ώστε $f_N \to f$. Αφού

$$\|f - f_N\|_1 \leqslant \|f - f_N\|_2 \to 0, \tag{7.2.13}$$

είναι εύκολο να δούμε (άσκηση του Κεφαλαίου 5) ότι

$$\widehat{f_N})(k) \to \widehat{f}(k) \tag{7.2.14}$$

(και μάλιστα ομοιόμορφα ως προς k). Όμως, για κάθε $N > |k|$ ισχύει $\widehat{f}(k) = a_k$, από τον ορισμό των f_N. Συνεπώς,

$$\widehat{f}(k) = a_k, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{7.2.15}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $T(f) = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. □

Παρατήρηση 7.2.5. Άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το Λήμμα Riemann-Lebesgue για τον $L^2(\mathbb{T})$. Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty, \tag{7.2.16}$$

άρα

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0. \tag{7.2.17}$$

Συχνά, χρησιμοποιούμε το Λήμμα Riemann-Lebesgue στην εξής μορφή: αν η $f \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$a_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\cos(kx)\,d\lambda(x) \to 0 \quad \text{και} \quad b_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\sin(kx)\,d\lambda(x) \to 0 \tag{7.2.18}$$

όταν $k \to \infty$. Από τις σχέσεις που συνδέουν τους $\widehat{f}(k)$, $a_k(f)$ και $b_k(f)$, ελέγχουμε εύκολα ότι η πρόταση «$a_k(f) \to 0$ και $b_k(f) \to 0$ όταν $k \to \infty$» είναι ακριβώς ισοδύναμη με την «$\widehat{f}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$» (εξηγήστε γιατί).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια γενίκευση της ταυτότητας του Parseval.

Πρόταση 7.2.6. *Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\,d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}. \tag{7.2.19}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι αν X είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big]. \tag{7.2.20}$$

Έχουμε

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\big[\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2\big] \tag{7.2.21}$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{4}\big[\|\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k)\|^2 - \|\widehat{f}(k)-\widehat{g}(k)\|^2 + i\|\widehat{f}(k)+i\widehat{g}(k)\|^2 - i\|\widehat{f}(k)-i\widehat{g}(k)\|^2\big]. \tag{7.2.22}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval για τις $f+g$, $f-g$, $f+ig$ και $f-ig$. □

7.3 Ασκήσεις

1. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

3. Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

(α) Δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

5. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

7. (α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\, dt = 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

8. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

9. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

11. Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx.$$

14. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} [w_1(f, \pi/n)]^2 < \infty,$$

όπου

$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)|\, dt.$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

15. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

16. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $\varphi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\varphi\|_\infty = \pi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μετασχηματισμός Fourier

8.1 Μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R}^n)$

Ορισμός 8.1.1 (μετασχηματισμός Fourier)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ με

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Λήμμα 8.1.2. *Ο τελεστής $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται από την $\mathcal{F}_1(f) = \widehat{f}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|\mathcal{F}_1\| \leqslant 1$ δηλαδή $\|\mathcal{F}_1 f\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle}|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_\xi |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1.$$

Η γραμμικότητα του $\mathcal{F}_1$ είναι απλή: από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι, για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ ισχύει $\widehat{af + bg} = a\widehat{f} + b\widehat{g}$. $\square$

Λήμμα 8.1.3. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι συνεχής συνάρτηση και μηδενίζεται στο άπειρο:*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0. \tag{8.1.1}$$

Ειδικότερα, η $\widehat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη. Για τη συνέχεια της $\widehat{f}$ σταθεροποιούμε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και τυχούσα ακολουθία (t_k) στον $\mathbb{R}^n$ με $t_k \to 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi+t_k)-\widehat{f}(\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle \xi+t_k,x\rangle}-e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}|\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}|\,|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}-1|\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}-1|\,dx.\end{aligned}$$

Ορίζουμε $g_k(x)=|f(x)|\,|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}-1|$. Αφού $\lim_{k\to\infty}(e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle})=1$ για κάθε x, έχουμε $g_k(x)\to 0$ σχεδόν παντού (σε κάθε x για το οποίο $|f(x)|<\infty$). Επίσης,

$$0\leqslant g_k(x)\leqslant |f(x)|(|e^{-2\pi i\langle t_k,x\rangle}|+1)=2|f(x)|.$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}g_k(x)\,dx=0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(\xi+t_k)\to\widehat{f}(\xi)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\widehat{f}$ είναι συνεχής στο ξ.

Για την απόδειξη της (8.1.1) μπορούμε να δουλέψουμε με διάφορους τρόπους. Ο πρώτος είναι να ξεκινήσουμε αποδεικνύοντάς την για τη δείκτρια συνάρτηση ενός ορθογωνίου $Q=\prod_{j=1}^n[a_j,b_j]$. Στην περίπτωση $n=1$ έχουμε

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi)=\int_a^b e^{-2\pi i\xi t}dt=\frac{e^{-2\pi i\xi a}-e^{-2\pi i\xi b}}{2\pi i\xi},$$

άρα

$$|\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi)|\leqslant\frac{2}{2\pi|\xi|}\to 0$$

καθώς το $|\xi|\to\infty$. Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_Q}(\xi) &= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}e^{-2\pi i\sum_{j=1}^n\xi_j t_j}dt_n\cdots dt_1\\ &= \prod_{j=1}^n\int_{a_j}^{b_j}e^{-2\pi i\xi_j t_j}dt_j=\prod_{j=1}^n\frac{e^{-2\pi i\xi_j a_j}-e^{-2\pi i\xi_j b_j}}{2\pi i\xi_j}.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι κάθε όρος του γινομένου φράσσεται απολύτως από b_j-a_j (από το Λήμμα 8.1.2, αφού $\|\chi_{[a,b]}\|_1=b-a$) μπορούμε να γράψουμε

$$|\widehat{\chi_Q}(\xi)|\leqslant\frac{1}{\pi|\xi_{j_0}|}\prod_{j\neq j_0}(b_j-a_j),$$

όπου $|\xi_{j_0}|=\|\xi\|_\infty\geqslant\frac{|\xi|}{\sqrt{n}}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\|\xi\|_\infty\to 0$ καθώς το $|\xi|\to\infty$, και συμπεραίνουμε ότι $\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{\chi_Q}(\xi)=0$.

Έχουμε τώρα την (8.1.1) για κάθε απλή συνάρτηση f που είναι γραμμικός συνδυασμός δεικτριών συναρτήσεων ορθογωνίων της μορφής $Q=\prod_{j=1}^n[a_j,b_j]$. Με ένα επιχείρημα προσέγγισης, βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: για κάθε $\xi \neq 0$ ορίζουμε $\xi' = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi')e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx &= e^{-2\pi i\langle \xi',\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi')e^{-2\pi i\langle x-\xi',\xi\rangle}dx\\ &= e^{-\pi i}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi\rangle}dx\\ &= -\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(f(x)-f(x-\xi'))e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-f_{-\xi'}(x)|\,dx\\ &= \frac{1}{2}\|f-f_{-\xi'}\|_1 \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $|\xi|\to\infty$ (θυμηθείτε ότι $f_h(x) := f(x+h)$ και παρατηρήστε ότι $|\xi'| = \frac{1}{2|\xi|} \to 0$ όταν $|\xi|\to\infty$). □

Παρατήρηση 8.1.4. Θα συμβολίζουμε με $C_0(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των συνεχών συναρτήσεων $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ που μηδενίζονται στο άπειρο. Ως τώρα έχουμε δείξει ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Οι επόμενες δύο προτάσεις μας δίνουν βασικές αλγεβρικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 8.1.5. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε:*

(i) *Αν $h \in \mathbb{R}^n$ και $(\tau_h f)(x) = f_{-h}(x) = f(x-h)$,*
$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i\langle \xi,h\rangle}.$$

(ii) *Αν $h \in \mathbb{R}^n$,*
$$\widehat{e^{2\pi i\langle\cdot,h\rangle}f}(\xi) = (\tau_h\widehat{f})(\xi).$$

(iii) *Αν $\delta > 0$ και $f_\delta(x) = f(\delta x)$,*
$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \frac{1}{\delta^n}\widehat{f}(\xi/\delta).$$

Απόδειξη. (i) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\tau_h f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)e^{-2\pi i\langle x-h,\xi\rangle}e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}dx\\ &= e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi\rangle}dz = e^{-2\pi i\langle h,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(ii) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{e^{2\pi i\langle\cdot,h\rangle}f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,h\rangle}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi-h\rangle}dx\\ &= \widehat{f}(\xi-h) = (\tau_h\widehat{f})(\xi).\end{aligned}$$

(iii) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f_\delta}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\delta x)e^{-2\pi i\langle \delta x,\xi/\delta\rangle}dx \\ &= \frac{1}{\delta^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i\langle z,\xi/\delta\rangle}dz = \frac{1}{\delta^n}\widehat{f}(\xi/\delta).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 8.1.6. *Έστω $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, $f*g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\widehat{f*g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$$

για κάθε $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}$ με $F(x,y) = f(x-y)g(y)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}$ είναι μετρήσιμη και ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|F(\xi,y)|\,dy\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|g(\xi)|\,|f(y)|\,dy\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(\xi)|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\,dy\right)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(\xi)|\,\|f\|_1 dy = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini και την Πρόταση 8.1.5 (i), να γράψουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i\langle\xi,y\rangle}\widehat{f}(\xi)\,dy \\ &= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

8.2 Ο τύπος αντιστροφής του Fourier

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να αποδείξουμε τον τύπο αντιστροφής του Fourier στην εξής μορφή:

Θεώρημα 8.2.1 (τύπος αντιστροφής). *Αν $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi \quad \textit{σχεδόν παντού.}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6. Δίνουμε εδώ τη γενίκευση για συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ κάποιων ορισμών και αποτελεσμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε. Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται προσέγγιση της μονάδας, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(y)\, dy = 1.$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M}{\delta^n}.$$

(iii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M\delta}{|y|^{n+1}}.$$

Μπορούμε προφανώς να υποθέσουμε ότι η σταθερά M είναι η ίδια στα (ii) και (iii). Παρατηρήστε ότι η ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από αυτήν στην (iii) αν $|y| \leqslant \delta$. Τελείως αντίστοιχα, η ανισότητα στην (iii) είναι ισχυρότερη από αυτήν στην (ii) αν $|y| \geqslant \delta$.

Όπως στο Κεφάλαιο 6, μπορεί κανείς να αποδείξει το εξής: Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ισχύει

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x)$$

σε κάθε σημείο Lebesgue x της f. Συνεπώς, $f * K_\delta \to f$ σχεδόν παντού καθώς το $\delta \to 0$.

Βασικό ρόλο θα παίξει επίσης ο ακόλουθος πολλαπλασιαστικός τύπος:

Θεώρημα 8.2.2 (πολλαπλασιαστικός τύπος). *Έστω f και g δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)\, dy.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F(\xi, y) = g(\xi)f(y)e^{-2\pi i\langle \xi,y\rangle}$ είναι μετρήσιμη και ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i\langle \xi,y\rangle}dy\right) g(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{-2\pi i\langle \xi,y\rangle}d\xi\right) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)f(y)\, dy.\end{aligned}$$

□

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης μια ειδική συνάρτηση:

Λήμμα 8.2.3. *Έστω $\delta > 0$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Για τη συνάρτηση*

$$g_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}$$

ισχύει ότι

$$\widehat{g_\delta}(y) = \frac{1}{\delta^{n/2}}e^{-\pi\frac{|x-y|^2}{\delta}}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2}$. Από την Πρόταση **;;** (ii) έχουμε

$$\widehat{g_\delta}(y) = (\tau_x \widehat{h})(y) = \widehat{h}(y-x).$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $u(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Τότε, $h(\xi) = u(\sqrt{\delta}\xi)$. Από την Πρόταση **;;** (iii) έχουμε

$$\widehat{h}(y) = \frac{1}{\delta^{n/2}}\widehat{u}(y/\sqrt{\delta}).$$

Τέλος, υπολογίζουμε την

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2} e^{-2\pi i\langle \xi, y\rangle} d\xi = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\xi_j^2} e^{-2\pi i \xi_j y_j} d\xi_j.$$

Απλός υπολογισμός (μιγαδική ολοκλήρωση) δείχνει ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 - 2\pi i y t} dt = e^{-\pi y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+iy)^2} dt = e^{-\pi y^2}.$$

Συνεπώς,

$$\widehat{h}(y) = \prod_{j=1}^n e^{-\pi y_j^2} = e^{-\pi|y|^2}$$

και

$$\widehat{g_\delta}(y) = \widehat{h}(y-x) = \frac{1}{\delta^{n/2}}\widehat{u}\Big(\frac{y-x}{\sqrt{\delta}}\Big) = \frac{1}{\delta^{n/2}} e^{-\frac{\pi|y-x|^2}{\delta}}.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.1. Θεωρούμε την οικογένεια $(K_{\delta^2})_{\delta>0}$. Ελέγχουμε πρώτα ότι είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας: για κάθε $\delta > 0$, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \delta z$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_{\delta^2}(y)\, dy = \frac{1}{\delta^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|z|^2} dz = 1.$$

Είναι προφανές ότι, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$0 \leqslant K_{\delta^2}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} \leqslant \frac{1}{\delta^n}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν $|y| \geqslant \delta$ τότε $|K_{\delta^2}(y)| \leqslant M\delta/|y|^{n+1}$ για κάποια σταθερά $M_n > 0$. Χρησιμοποιώντας την $e^t \geqslant t^{n+1}/(n+1)!$ με $t = \sqrt{\pi}|y|/\delta$, γράφουμε

$$0 \leqslant K_{\delta^2}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\frac{\pi|y|^2}{\delta^2}} \leqslant \frac{1}{\delta^n} e^{-\frac{\sqrt{\pi}|y|}{\delta}} \leqslant \frac{1}{\delta^n}\frac{(n+1)!\delta^{n+1}}{\pi^{(n+1)/2}|y|^{n+1}} = \frac{M_n\delta}{|y|^{n+1}},$$

όπου $M_n = (n+1)!/\pi^{(n+1)/2}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Από τον πολλαπλασιαστικό τύπο (Θεώρημα 8.2.2) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g_{\delta^2}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g_{\delta^2}}(y)\, dy.$$

Από το Λήμμα 8.2.3 έχουμε $\widehat{g_{\delta^2}}(y) = \frac{1}{\delta^n} e^{-\pi \frac{|x-y|^2}{\delta^2}}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_{\delta^2}(x-y)\, dy = (f * K_{\delta^2})(x)$$

για κάθε $\delta > 0$.

Παρατηρούμε ότι, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού η $(K_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας, για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ έχουμε

$$\lim_{\delta\to 0} (f * K_{\delta^2})(x) = f(x).$$

Αφού $m(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Leb}(f)) = 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 8.2.4 (μοναδικότητα)**.** *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Αν $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$, τότε $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Αφού $\widehat{f-g} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0$, έχουμε $f - g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f-g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Άρα,

$$(f-g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f-g}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi = 0 \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Δηλαδή, $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού. □

Η παρατήρηση της επόμενης Πρότασης θα μας φανεί χρήσιμη στην επόμενη παράγραφο.

Πρόταση 8.2.5. *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f} \geqslant 0$, και αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, άρα*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Απόδειξη. Επιστρέφουμε στην απόδειξη του τύπου αντιστροφής. Για $x = 0$ και για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\, d\xi = (f * K_{\delta^2})(0).$$

Αφού $\widehat{f} \geqslant 0$, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta^2|\xi|^2}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο 0, έχουμε

$$\lim_{\delta\to 0} (f * K_{\delta^2})(0) = f(0).$$

Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = f(0),$$

δηλαδή $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Κατόπιν, εφαρμόζεται το Θεώρημα 8.2.1. □

8.3 Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Θα υποθέσουμε πρώτα ότι $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Τότε, από την Παράγραφο 8.1 γνωρίζουμε ότι ορίζεται καλά ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f} = \mathcal{F}_1(f)$.

Θεώρημα 8.3.1. *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ τότε $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε g με $g(x) = \overline{f(-x)}$. Είναι φανερό ότι $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ και

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)}\, e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)\, e^{-2\pi i\langle -x,\xi\rangle}}\, dx \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\, e^{-2\pi i\langle -x,\xi\rangle}\, dx} = \overline{\widehat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{f}(\xi)} = |\widehat{f}(\xi)|^2 \geqslant 0.$$

Επίσης, η $f * g$ είναι συνεχής στο 0. Έχουμε

$$\begin{aligned}|(f * g)(h) - (f * g)(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(h-x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x-h)}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\, dx \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |\overline{f(x-h)} - \overline{f(x)}|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |f(x-h) - f(x)|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |f_{-h}(x) - f(x)|\, dx \\ &\leqslant \|f\|_2\, \|f_{-h} - f\|_2 \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $h \to 0$, όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις f και $f_{-h} - f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, και το γεγονός ότι $\lim_{h\to 0} \|f_{-h} - f\|_2 = 0$.

Από την Πρόταση 8.2.5 συμπεραίνουμε ότι $\widehat{f * g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και

$$(f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * g}(\xi)\, d\xi.$$

Όμως,

$$(f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2$$

και

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * g}(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. □

Από το Θεώρημα 8.3.1 έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας καλά ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής στο πυκνό υποσύνολο $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ του $L^2(\mathbb{R}^n)$, και μάλιστα είναι ισομετρία. Συνεπώς, υπάρχει φραγμένη γραμμική επέκταση $\mathcal{F}_2$ αυτού του τελεστή σε ολόκληρον τον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Θα λέμε ότι ο $\mathcal{F}_2$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και θα συνεχίσουμε να γράφουμε $\widehat{f}=\mathcal{F}_2(f)$ για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό, η $\widehat{f}=\mathcal{F}_2(f)$ είναι το L^2-όριο της ακολουθίας $\{\widehat{g}_k\}$, όπου $\{g_k\}$ είναι μια ακολουθία στον $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ η οποία συγκλίνει στην f ως προς την $\|\cdot\|_2$. Μπορούμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$g_k(x)=f(x)\chi_{\{|x|\leqslant k\}}(x). \tag{8.3.1}$$

Άρα, η $\widehat{f}$ είναι το L^2-όριο της $\{\widehat{g}_k\}$, όπου

$$\widehat{g}_k(\xi)=\int_{\{|x|\leqslant k\}}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx. \tag{8.3.2}$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ο $\mathcal{F}_2:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι ένας ορθομοναδιαίος τελεστής.

Υπενθυμίζουμε ότι αν H_1 και H_2 δύο χώροι Hilbert τότε ένας γραμμικός τελεστής $U:H_1\to H_2$ λέγεται ορθομοναδιαίος αν είναι 1-1 και επί, και ικανοποιεί την

$$\|Ux\|_{H_2}=\|x\|_{H_1}$$

για κάθε $x\in H_1$. Παρατηρήστε ότι τότε ο $U^{-1}:H_2\to H_1$ ορίζεται καλά και είναι επίσης ορθομοναδιαίος. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $x,y\in H_1$ ισχύει

$$\langle Ux,Uy\rangle_{H_2}=\langle x,y\rangle_{H_1}.$$

Αυτό προκύπτει, για παράδειγμα, από την

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{t}\left[\|u+v\|^2+\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2\right]$$

η οποία ισχύει σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 8.3.2 (θεώρημα Plancherel). *Ο $\mathcal{F}_2$ είναι ορθομοναδιαίος.*

Απόδειξη. Αφού ο $\mathcal{F}_2$ είναι ισομετρία, το σύνολο τιμών του είναι ένας κλειστός υπόχωρος M του $L^2(\mathbb{R}^n)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $h\in L^2(\mathbb{R}^n)$ με $\|h\|_2\neq 0$ και την ιδιότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)h(x)\,dx=0$$

για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιαστικός τύπος του Θεωρήματος 8.2.2 επεκτείνεται στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $f_k\to f$ και $h_k\to h$ όπως στην (8.3.1) τότε $f_k,h_k\in L^1(\mathbb{R}^n$ και για τις $\widehat{f_k},\widehat{h_k}$ που ορίζονται στην (8.3.2) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}f_k(y)\widehat{h_k}(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}_k(x)h_k(x)\,dx=0$$

από τον πολλαπλασιαστικό τύπο στον $L^1(\mathbb{R}^n$. Επίσης, $\widehat{f_k}\to\widehat{f}$ και $\widehat{h_k}\to\widehat{h}$ εξ ορισμού του $\mathcal{F}_2$, οπότε από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\widehat{h}(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)h(x)\,dx=0$$

για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι $\widehat{h}=0$, άρα $\|h\|_2=\|\widehat{h}\|_2=0$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}_2^{-1}$.

Θεώρημα 8.3.3 (θεώρημα Plancherel)**.** *Για κάθε* $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *έχουμε*

$$(\mathcal{F}_2^{-1} g)(x) = (\mathcal{F}_2 g)(-x). \tag{8.3.3}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη εκφράζουμε την $\mathcal{F}_2^{-1}(\widehat{f})$ σαν το L^2-όριο της ακολουθίας συναρτήσεων

$$f_k(x) = \int_{\{|y|\leqslant k\}} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle x,y\rangle} dy. \tag{8.3.4}$$

Εξηγούμε πρώτα την (8.3.4) στην περίπτωση που $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle x,y\rangle} dy.$$

Αφού $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, η (f_k) είναι βασική στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και συνεπώς το $\|\cdot\|_2 - \lim_{k\to\infty} f_k$ υπάρχει. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\langle h, \tilde{f}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dy\right)}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^{-2\pi i \langle x,y\rangle} dx\right) \overline{\widehat{f}(y)}\, dy \\ &= \langle \mathcal{F}_2 h, \widehat{f}\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Δηλαδή,

$$\langle h, \tilde{f}\rangle = \langle \mathcal{F}_2 h, \widehat{f}\rangle = \langle \mathcal{F}_2 h, \mathcal{F}_2 f\rangle = \langle h, f\rangle$$

για κάθε $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι $f = \tilde{f}$. Θέτοντας $g = \widehat{f} = \mathcal{F}_2(f)$, έχουμε

$$\mathcal{F}_2^{-1} g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dy = (\mathcal{F}_2 g)(-x).$$

Η γενική περίπτωση έπεται αν γράψουμε την $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ως $\|\cdot\|_2 - \lim_{k\to\infty} g_k$ όπου $g_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, εφαρμόσουμε το προηγούμενο βήμα για τις g_k και περάσουμε στο όριο. $\square$

Έχοντας ορίσει τον μετασχηματισμό Fourier για συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και τον $L^2(\mathbb{R}^n)$ μπορούμε εύκολα να τον ορίσουμε για συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Αν $f = f_1 + f_2$ όπου $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε $\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$. Εδώ εννοούμε $\widehat{f_1} := \mathcal{F}_1(f_1)$ και $\widehat{f_2} = \mathcal{F}_2(f_2)$. Παρατηρήστε ότι αν $g_1 + g_2 = f_1 + f_2$, όπου $g_i \in L^i(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, τότε $g_1 - f_1 = f_2 - g_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, και αφού $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ στον $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $\widehat{g_1} - \widehat{f_1} = \widehat{f_2} - \widehat{g_2}$. Άρα, ο μετασχηματισμός Fourier είναι καλά ορισμένος στον $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.

Δεδομένου ότι για κάθε $1 \leqslant p \leqslant 2$ ισχύει $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, έχουμε ορίσει με αυτόν τον τρόπο τον μετασχηματισμό Fourier για συναρτήσεις στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Επίσης, αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ τότε $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

σχεδόν παντού.

8.4 Ο χώρος του Schwartz στο $\mathbb{R}$

Ορισμός 8.4.1 (ο χώρος του Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)**.** Η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ λέγεται *χώρος του Schwartz* και αποτελείται από όλες τις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ οι οποίες είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και *φθίνουν πολύ γρήγορα* με την εξής έννοια: για κάθε $k,\ell\geqslant 0$ υπάρχει $A_{k,\ell}>0$ ώστε

$$|x^k|\,|f^{(\ell)}(x)|\leqslant A_{k,\ell}\qquad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο χώρος του Schwartz είναι γραμμικός χώρος. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το γεγονός ότι η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι κλειστή ως προς την παραγώγιση και τον πολλαπλασιασμό με πολυώνυμα:

(i) Αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $f'\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(ii) Αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $xf(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Από την δεύτερη ιδιότητα έπεται άμεσα ότι: αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $p(x)$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, τότε $p(x)f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 8.4.2. *Έστω $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) Αν $g(x)=f'(x)$, τότε $\widehat{g}(\xi)=2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$.

(β) Αν $g(x)=-2\pi ixf(x)$, τότε $\widehat{g}(\xi)=\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$.

Απόδειξη. (α) Κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη: για κάθε $N>0$ έχουμε

$$\int_{-N}^{N} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}dx=\left[f(x)e^{-2\pi ix\xi}\right]_{-N}^{N}+2\pi i\xi\int_{-N}^{N} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\left[f(x)e^{-2\pi ix\xi}\right]_{-N}^{N}=f(N)e^{-2\pi iN\xi}-f(-N)e^{2\pi iN\xi}\to 0$$

όταν $N\to\infty$, διότι $f(\pm N)\to 0$. Αφήνοντας το $N\to\infty$ παίρνουμε

$$\widehat{g}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}dx=2\pi i\xi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx=2\pi i\xi\widehat{f}(\xi).$$

(β) Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)}{h}+\widehat{2\pi ixf}(\xi)=0.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)}{h}+\widehat{2\pi ixf}(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}dx+\int_{-\infty}^{\infty}2\pi ixf(x)e^{-2\pi ix\xi}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\left[\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}+2\pi ix\right]dx.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f(x)$ και $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, μπορούμε να βρούμε $N > 0$ ώστε

$$\int_{|x|\geqslant N} |f(x)|\, dx < \varepsilon \qquad \text{και} \qquad \int_{|x|\geqslant N} |x|\, |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε $h_0 > 0$ ώστε, για κάθε $0 < |h| < h_0$,

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| < \frac{\varepsilon}{2N(\|f\|_\infty + 1)}.$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| &= \left| \frac{\cos(2\pi x h) - 1}{h} - i\frac{\sin(2\pi x h)}{h} + 2\pi i x \right| \\
&= \left| \frac{-2\sin^2(\pi x h)}{h} - 2\pi i \frac{\sin(2\pi x h)}{2\pi h} + 2\pi i x \right| \\
&\leqslant 2\pi^2 x^2 |h| \left| \frac{\sin^2(\pi x h)}{(\pi x h)^2} \right| + 2\pi |x| \left| \frac{\sin(2\pi x h)}{2\pi x h} - 1 \right| \\
&\leqslant 2\pi^2 N^2 |h| + (2\pi)^4 N^4 |h|^2/6,
\end{aligned}$$

όπου, στο τέλος, χρησιμοποιήσαμε την $|\sin t - t| \leqslant |t|^3/6$. Έπεται ότι

$$\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} \xrightarrow{\text{ομ}} -2\pi i x$$

στο $[-N, N]$, όταν $h \to 0$. Συνεπώς, αν $0 < |h| < h_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)}{h} + \widehat{2\pi i x f}(\xi) \right| &< 2\varepsilon + \int_{-N}^{N} |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| dx \\
&< 2\varepsilon + 2N\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{2N(\|f\|_\infty + 1)} < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $-\widehat{2\pi i x f}(\xi) = \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$. □

Θεώρημα 8.4.3. *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx,$$

δηλαδή η $\widehat{f}$ είναι φραγμένη. Για να δείξουμε ότι $\|\xi \widehat{f}(\xi)\|_\infty < +\infty$, παρατηρούμε ότι η $\xi \widehat{f}(\xi)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $\frac{1}{2\pi i} f'$, η οποία είναι επίσης στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Για να δείξουμε ότι η $\frac{d\widehat{f}}{d\xi}$ είναι φραγμένη, παρατηρούμε ότι η $\frac{d\widehat{f}}{d\xi}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $-2\pi i x f(x)$, η οποία είναι επίσης στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Γενικά, για κάθε $k, \ell \geqslant 0$, η συνάρτηση

$$\xi^k \left(\frac{d}{d\xi} \right)^\ell \widehat{f}(\xi)$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier της

$$h_{k,\ell}(x) := \frac{1}{(2\pi i)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-2\pi i x)^\ell f(x)].$$

Πράγματι, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\frac{d^\ell \widehat{f}}{d\xi^\ell} = \frac{d^{\ell-1}}{d\xi^{\ell-1}}\left(\frac{d\widehat{f}}{d\xi}\right) = \frac{d^{\ell-1}}{d\xi^{\ell-1}}\left(\widehat{-2\pi i x f}\right) = \cdots = (\widehat{2\pi i)^\ell x^\ell} f$$

για κάθε $\ell \geqslant 1$, και

$$\xi^k \widehat{f} = \xi^{k-1}\xi\widehat{f} = \frac{1}{2\pi i}\xi^{k-1}\widehat{f'} = \cdots = \frac{1}{(2\pi i)^k}\widehat{f^{(k)}}$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ταυτότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{h_{k,\ell}} &= \frac{1}{(2\pi i)^k}\widehat{\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-2\pi i x)^\ell f]} = \frac{1}{(2\pi i)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \widehat{[(-2\pi i x)^\ell f]} \\
&= \frac{(2\pi i)^k \xi^k}{(2\pi i)^k}(\widehat{-2\pi i x})^\ell f = \xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell}\widehat{f}.
\end{aligned}$$

Αφού η $h_{k,\ell}$ ανήκει στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, η συνάρτηση $\xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell}\widehat{f}$ είναι φραγμένη συνάρτηση. □

8.4.1 Ο τύπος άθροισης του Poisson

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε μια διαδικασία «περιοδικοποίησης» για συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και ανήκουν στην κλάση του Schwartz. Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, αντιστοιχίζουμε στην f την συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k).$$

Θα δούμε ότι η F ορίζεται καλά, είναι 1-περιοδική και συνεχής. Η F είναι η **περιοδικοποίηση** της f. Μία από τις εφαρμογές της είναι ο **τύπος άθροισης του Poisson**.

Θεώρημα 8.4.4 (τύπος άθροισης του Poisson). *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \tag{8.4.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k). \tag{8.4.2}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[-B,B]$, $B > 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι η F ορίζεται καλά στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεωρούμε τυχόν $B > 0$ και ορίζουμε $g_k(x) = f(x+k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, υπάρχει σταθερά $M_2 > 0$ ώστε
$$|y|^2|f(y)| \leqslant M_2$$
για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι, αν $|k| > 2B$ τότε για κάθε $x \in [-B, B]$ έχουμε $|x+k| \geqslant |k| - |x| \geqslant |k|/2$. Από την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι
$$|g_k(x)| = |f(x+k)| \leqslant \frac{M_2}{|x+k|^2} \leqslant \frac{4M_2}{k^2}$$
για κάθε $x \in [-B, B]$. Αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4M_2}{k^2} < +\infty$, από το κριτήριο του Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{|k|>2B} g_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-B, B]$, και αφού όλες οι g_k είναι συνεχείς συναρτήσεις, η σειρά
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$$
συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση στο $[-B, B]$.

Το γεγονός ότι η F είναι 1-περιοδική προκύπτει άμεσα από τον τρόπο ορισμού της F: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $m = k+1$ βλέπουμε ότι
$$F(x+1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+1+k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F(x).$$
Ορίζουμε τώρα $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με
$$G(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$
Η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα: γνωρίζουμε ότι $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, άρα $|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{1+k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου C θετική σταθερά. Αν λοιπόν ορίσουμε $h_k(x) = \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, τότε
$$\|h_k\|_\infty = |\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{1+k^2}$$
και, αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|h_k\|_\infty < +\infty$, το κριτήριο του Weierstrass εφαρμόζεται κι εδώ. Αφού κάθε h_k είναι συνεχής και 1-περιοδική (εξηγήστε γιατί), η G είναι επίσης συνεχής και 1-περιοδική.

Για την (8.4.1) αρκεί να δείξουμε ότι $F \equiv G$. Οι F και G είναι συνεχείς και 1-περιοδικές, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier. Στην περίπτωση μιας 1-περιοδικής συνάρτησης u, ο συντελεστής Fourier $\widehat{u}(k)$ ορίζεται από την
$$\widehat{u}(k) = \int_0^1 u(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$
Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Από το γεγονός ότι
$$s_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \xrightarrow{\text{ομ}} G(x)$$
και
$$\widehat{s_n}(m) = \int_0^1 s_n(x) e^{-2\pi i m x} dx = \widehat{f}(m)$$

για κάθε $n \geqslant |m|$, είναι φανερό ότι $\widehat{G}(k) = \widehat{f}(m)$. Από την άλλη πλευρά, από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ στο $[0,1]$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(m) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} f(x+k) \right) e^{-2\pi i m x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi i m x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_k^{k+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \widehat{f}(m).
\end{aligned}$$

Αφού $\widehat{F}(m) = \widehat{G}(m) = \widehat{f}(m)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $F \equiv G$. □

8.4.2 Η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg

Η αρχή της αβεβαιότητας ισχυρίζεται ότι αν το «μεγαλύτερο μέρος» της μάζας μιας συνάρτη- σης συγκεντρώνεται σε κάποιο διάστημα μήκους L, τότε το «μεγαλύτερο μέρος» της μάζας του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης δεν μπορεί να συγκεντρώνεται σε κάποιο διάστημα που έχει μήκος πολύ μικρότερο από $1/L$. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 8.4.5 (αρχή της αβεβαιότητας)**.** *Έστω $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Τότε,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geqslant \frac{1}{16\pi^2}. \tag{8.4.3}$$

Γενικότερα, για κάθε $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi-\xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geqslant \frac{1}{16\pi^2}. \tag{8.4.4}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την ανισότητα (8.4.3). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι ψ και ψ' φθίνουν πολύ γρήγορα, με ολοκλήρωση κατά μέρη και γράφοντας $|\psi|^2 = \psi\overline{\psi}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\overline{\psi'(x)}\psi(x) \right) dx.
\end{aligned}$$

Φράσσοντας απολύτως, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}1 &\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,|\psi(x)|\,|\psi'(x)|\,dx\\ &\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|^2dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Από την ταυτότητα του Plancherel και το γεγονός ότι $\widehat{\psi}'(\xi)=2\pi i\xi\widehat{\psi}(\xi)$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|^2dx=4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi.$$

Έπεται ότι

$$1\leqslant 4\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε την (8.4.3).

Η ανισότητα (8.4.4) προκύπτει άμεσα αν αντικαταστήσουμε την $\psi(x)$ με την $e^{-2\pi ix\xi_0}\psi(x+x_0)$ στην (8.4.3) και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. □

8.5 Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz

Έστω (p_0,q_0) και (p_1,q_1) δύο ζεύγη δεικτών με $1\leqslant p_j,q_j\leqslant\infty$. Ας υποθέσουμε ότι

$$\|T(f)\|_{q_0}\leqslant M_0\|f\|_{p_0}\quad\text{και}\quad\|T(f)\|_{q_1}\leqslant M_1\|f\|_{p_1},$$

όπου T είναι ένας γραμμικός τελεστής. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να πούμε ότι

$$\|T(f)\|_q\leqslant M\|f\|_p$$

για άλλα ζεύγη (p,q). Όπως θα δούμε, αυτή η ανισότητισχύει αν οι τιμές των p και q ικανοποιούν κατάλληλη γραμμική σχέση στην οποία εμφανίζονται οι αντίστροφοι των δεικτών p_0,p_1,q_0 και q_1.

Για την ακριβή διατύπωση του θεωρήματος εισάγουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Έστω (X,μ) και (Y,ν) δύο χώροι μέτρου. Θεωρούμε τον χώρο $L^{p_0}+L^{p_1}$ όλων των συναρτήσεων f στον (X,μ) που γράφονται στη μορφή $f=f_0+f_1$ για κάποιες $f_0\in L^{p_0}(X,\mu)$ και $f_1\in L^{p_1}(X,\mu)$. Ομοίως ορίζουμε τον χώρο $L^{q_0}+L^{q_1}$ (που αποτελείται από συναρτήσεις στον (Y,ν)).

Θεώρημα 8.5.1 (Riesz). *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής από τον $L^{p_0}+L^{p_1}$ στον $L^{q_0}+L^{q_1}$. Υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος από τον L^{p_0} στον L^{q_0} και από τον L^{p_1} στον L^{q_1}. Δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $M_0,M_1>0$ ώστε*

$$\|T(f)\|_{q_0}\leqslant M_0\|f\|_{p_0}\ \ \text{για κάθε } f\in L^{p_0}$$

και

$$\|T(f)\|_{q_1}\leqslant M_1\|f\|_{p_1}\ \ \text{για κάθε } f\in L^{p_1}.$$

Αν το ζεύγος (p,q) ικανοποιεί τις

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}\quad\text{και}\quad\frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}$$

για κάποιον $0 \leqslant t \leqslant 1$, τότε ο T είναι φραγμένος από τον L^p στον L^q, και

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p$. Επιπλέον, $M \leqslant M_0^{1-t} M_1^t$.

Πρέπει να τονίσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για L^p-χώρους συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές, διότι η απόδειξή του χρησιμοποιεί τεχνικές μιγαδικής ανάλυσης. Ξεκινώντας από τη λωρίδα $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(z) \leqslant 1$ στο μιγαδικό επίπεδο, θα ορίσουμε μια αναλυτική συνάρτηση Φ που σχετίζεται με τον T, τέτοια ώστε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0}$ και $\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1}$ να μεταφράζονται σε κάποια φράγματα για την Φ στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 1$ αντίστοιχα. Κατόπιν, το συμπέρασμα θα προκύψει από το γεγονός ότι η Φ θα είναι φραγμένη στο σημείο t του πραγματικού άξονα.

Η ανάλυσή μας για την Φ θα βασιστεί στο εξής λήμμα.

Λήμμα 8.5.2 (το λήμμα των τριών ευθειών). *Έστω $\Phi(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση στη λωρίδα $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$, η οποία είναι επίσης συνεχής και φραγμένη στην κλειστή θήκη της S. Αν*

$$M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(iy)| \quad \textit{και} \quad M_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(1+iy)|,$$

τότε

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(t+iy)| \leqslant M_0^{1-t} M_1^t$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Απόδειξη. Κάνουμε αρχικά την επιπλέον υπόθεση ότι $M_0 = M_1 = 1$ και $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\Phi(x+iy)| \to 0$ καθώς το $|y| \to \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε $M = \sup |\Phi(z)|$ όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα z στην κλειστή θήκη της S. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M > 0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{z_n\}$ σημείων της S με $|\Phi(z_n)| \to M$ καθώς το $n \to \infty$. Λόγω της υπόθεσής μας για την Φ, η ακολουθία $\{z_n\}$ δεν μπορεί να τείνει στο απειρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{z_{k_n}\}$ της $\{z_n\}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο z_0 στην κλειστή θήκη της S. Από την αρχή του μεγίστου, το z_0 δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο της λωρίδας (αλλιώς, η Φ είναι σταθερή και το συμπέρασμα έπεται κατά προφανή τρόπο). Άρα, το z_0 ανήκει στο σύνορο της S, όπου έχουμε $|\Phi| \leqslant 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $M \leqslant 1$ και έχουμε το ζητούμενο γι' αυτήν την ειδική περίπτωση.

Αν απλώς υποθέσουμε ότι $M_0 = M_1 = 1$, ορίζουμε

$$\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z)e^{\varepsilon(z^2-1)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Χρησιμοποιώντας την $e^{\varepsilon[(x+iy)^2-1]} = e^{\varepsilon(x^2-1-y^2+2ixy}$, βλέπουμε ότι $|\Phi_\varepsilon(z)| \leqslant 1$ στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Επιπλέον,

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\Phi_\varepsilon(x+iy)| \to 0 \;\text{ καθώς το }\; |y| \to \infty,$$

αφού η Φ είναι φραγμένη. Συνεπώς, από την πρώτη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι $|\Phi_\varepsilon(z)| \leqslant 1$ για κάθε z στην κλειστή θήκη της S. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, βλέπουμε ότι $|\Phi| \leqslant 1$ όπως θέλαμε.

Τέλος, αν δεν έχουμε κάποια πρόσθετη πληροφορία για τις τιμές των M_0 και M_1, ορίζουμε $\tilde{\Phi}(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z}\Phi(z)$, και παρατηρούμε ότι η $\tilde{\Phi}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της προηγούμενης περίπτωσης: η $|\tilde{\Phi}|$ είναι φραγμένη από 1 στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Άρα, $|\tilde{\Phi}(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in S$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.5.1. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι απλή συνάρτηση. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p = 1$.

Θεωρούμε τον συζυγή εκθέτη q^* του q και θα δείξουμε ότι

$$\left| \int (Tf) \cdot g \, d\nu \right| \leqslant M \|f\|_p \|g\|_{q^*} \tag{8.5.1}$$

για κάθε $g \in L^{q^*}(Y, \nu)$. Αν αποδείξουμε την (8.5.1), από δυϊσμό έπεται ότι

$$\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p.$$

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $p < \infty$ και $q > 1$. Θεωρούμε απλή συνάρτηση $f \in L^p$, και ορίζουμε

$$f_z = |f|^{\gamma(z)} \frac{f}{|f|} \quad \text{όπου} \quad \gamma(z) = p \left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \right)$$

και

$$g_z = |g|^{\delta(z)} \frac{g}{|g|} \quad \text{όπου} \quad \delta(z) = q^* \left(\frac{1-z}{q_0^*} + \frac{z}{q_1^*} \right),$$

με τους q^*, q_0^* και q_1^* να συμβολίζουν τους συζυγείς εκθέτες των q, q_0 και q_1 αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι $f_t = f$ και

$$\|f_z\|_{p_0} = 1 \quad \text{αν} \quad \mathrm{Re}\,(z) = 0$$

ενώ

$$\|f_z\|_{p_1} = 1 \quad \text{αν} \quad \mathrm{Re}\,(z) = 1.$$

Όμοια, $\|g_z\|_{q_0^*} = 1$ αν $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\|g_z\|_{q_1^*} = 1$ αν $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Επίσης, $g_t = g$. Το τέχνασμα είναι να θεωρήσουμε την

$$\Phi(z) = \int (Tf_z) \cdot g_z \, d\nu.$$

Αφού η f είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής $f = \sum_k a_k \chi_{E_k}$ με τα σύνολα E_k να είναι ξένα και να έχουν πεπερασμένο μέτρο, βλέπουμε ότι η f_z είναι επίσης απλή, και

$$f_z = \sum_k |a_k|^{\gamma(z)} \frac{a_k}{|a_k|} \chi_{E_k}.$$

Αφού η $g = \sum_j b_j \chi_{F_j}$ είναι επίσης απλή, έχουμε

$$g_z = \sum_j |b_j|^{\delta(z)} \frac{b_j}{|b_j|} \chi_{F_j}.$$

Συνεπώς,

$$\Phi(z) = \sum_{j,k} |a_k|^{\gamma(z)} |b_j|^{\delta(z)} \frac{a_k}{|a_k|} \frac{b_j}{|b_j|} \left(\int T(\chi_{E_k}) \chi_{F_j} \, d\nu \right),$$

άρα η συνάρτηση Φ είναι ολόμορφη στη λωρίδα $0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1$, και είναι φραγμένη και συνεχής στην κλειστή της θήκη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο T είναι φραγμένος στον L^{p_0} με νόρμα M_0, βλέπουμε ότι αν $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ τότε

$$|\Phi(z)| \leqslant \|T(f_z)\|_{q_0} \|g_z\|_{q_0^*} \leqslant M_0 \|f_z\|_{p_0} = M_0.$$

Όμοια βλέπουμε ότι $|\Phi(z)| \leqslant M_1$ στην ευθεία $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Από το λήμμα των τριών ευθειών συμπεραίνουμε ότι η $|\Phi|$ φράσσεται από $M_0^{1-t} M_1^t$ στην ευθεία $\mathrm{Re}\,(z) = t$. Αφού $\Phi(t) = \int (Tf) g \, d\nu$, έχουμε το ζητούμενο, τουλάχιστον στην περίπτωση που η f είναι απλή.

Γενικά, αν $f \in L^p$ και $1 \leqslant p < \infty$, επιλέγουμε μια ακολουθία $\{f_m\}$ απλών συναρτήσεων στον L^p έτσι ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Αφού $\|T(f_n)\|_q \leqslant M \|f_n\|_p$, βλέπουμε ότι η $\{T(f_n)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον L^q. Αν δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} T(f_n) = T(f)$ σχεδόν παντού, τότε θα έχουμε και $\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p$.

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε $f = f^U + f^L$, όπου $f^U(x) = f(x)$ αν $|f(x)| \geqslant 1$ και $f^U(x) = 0$ αλλιώς, ενώ $f^L(x) = f(x)$ αν $|f(x)| < 1$ και $f^L(x) = 0$ αλλιώς. Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε κάθε f_n σαν άθροισμα $f_n = f_n^U + f_n^L$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_0 \leqslant p_1$ (η περίπτωση $p_0 \geqslant p_1$ εξετάζεται με ανάλογο τρόπο). Τότε, $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$, και αφού $f \in L^p$ έχουμε $f^U \in L^{p_0}$ και $f^L \in L^{p_1}$. Επιπλέον, αφού $\|f_n - f\|_p \to 0$, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\|f_n^U - f^U\|_{p_0} \to 0$ και $\|f_n^L - f^L\|_{p_1} \to 0$. Από την υπόθεση, $T(f_n^U) \to T(f^U)$ στον L^{q_0} και $T(f_n^L) \to T(f^L)$ στον L^{q_1}. ερνώντας σε κατάλληλες υπακολουθίες βλέπουμε ότι η $T(f_n) = T(f_n^U) + T(f_n^L)$ συγκλίνει στην $T(f)$ σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

(β) Μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $q = 1$ και $p = \infty$. Στην περίπτωση $p = \infty$ έχουμε αναγκαστικά $p_0 = p_1 = \infty$, οπότε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_\infty$ και $\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_\infty$ σε συνδυασμό με την ανισότητα Hölder μας δίνουν

$$\|T(f)\|_q \leqslant (\|T(f)\|_{q_0})^{1-t} (\|T(f)\|_{q_1})^t \leqslant M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_\infty.$$

Τέλος, αν $p < \infty$ και $q = 1$, τότε $q_0 = q_1 = 1$ και μπορούμε επιλέγοντας $g_z = g$ για κάθε z να ακολουθήσουμε την ίδια πορεία με αυτήν της απόδειξης για την περίπτωση $q > 1$. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 8.5.3. Ένας λίγο διαφορετικός, αλλά χρήσιμος, τρόπος να δούμε το Θεώρημα 8.5.1 είναι ο εξής: υποθέτουμε ότι ο γραμμικός τελεστής T είναι αρχικά ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου. Ρωτάμε για ποιά ζεύγη (p,q) ο T είναι ισχυρού τύπου (p,q), δηλαδή υπάρχει $M = M_{p,q} > 0$ ώστε

$$\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p \tag{8.5.2}$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Η χρήσιμη ιδιότητα της κλάσης των απλών συναρτήσεων είναι ότι είναι η ίδια για όλους τους χώρους L^p. Επιπλέον, αν η (8.5.2) ισχύει, τότε ο T επεκτείνεται μονοσήμαντα στον L^p και αν $p < \infty$ τότε η (8.5.2) εξακολουθεί να ισχύει για κάθε $f \in L^p(\mu)$, με την ίδια σταθερά $M_{p,q}$ (το ίδιο ισχύει και για $p = \infty$ αν $\mu(X) < \infty$).

Ξεκινώντας από αυτήν την παρατήρηση, ορίζουμε το *διάγραμμα Riesz* του T να αποτελείται από όλα τα σημεία $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ για τα οποία ο T είναι ισχυρού τύπου $(1/x, 1/y)$ και θέτουμε

$M_{x,y}$ την μικρότερη θετική σταθερά για την οποία ισχύει

$$\|T(f)\|_{1/y} \leqslant M_{x,y}\|f\|_{1/x} \tag{8.5.3}$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Με αυτήν τν ορολογία έχουμε το εξής:

Θεώρημα 8.5.4. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου.*

(α) *Το διάγραμμα Riesz του T είναι κυρτό υποσύνολο του $[0,1]\times[0,1]$.*

(β) *Η $(x,y)\mapsto \log M_{x,y}$ είναι κυρτή συνάρτηση σε αυτό το σύνολο.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός του Θεωρήματος 8.5.4 μας λέει ότι αν $(x_0,y_0)=(1/p_0,1/q_0)$ και $(x_1,y_1)=(1/p_1,1/q_1)$ είναι δύο σημεία στο διάγραμμα Riesz του T, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T. Αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 8.5.1. Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αρκεί να ελέγξουμε την κυρτότητα της $\log M_{x,y}$ σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα που περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T, κάτι που προκύπτει από την ανισότητα $M\leqslant M_0^{1-t}M_1^t$ του Θεωρήματος 8.5.1. □

Λόγω της διατυπωσης του Θεωρήματος 8.5.4, το Θεώρημα 8.5.1 συχνά αποκαλείται «θεώρημα κυρτότητας του Riesz».

8.6 Ανισότητα Hausdorff-Young

Θα δώσουμε τέσσερις εφαρμογές του θεωρήματος του riesz. Η πρώτη είναι η ανισότητα Hausdorff-Young για τους συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης $f\in L^p(\mathbb{T})$, $1\leqslant p\leqslant 2$.

Θεώρημα 8.6.1 (ανισότητα Hausdorff-Young)**.** *Έστω $1\leqslant p\leqslant 2$. Αν $f\in L^p(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_ke^{ikx}$ είναι η σειρά Fourier της f, τότε*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}, \tag{8.6.1}$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι στην περίπτωση $p=q=2$ η (8.6.1) ισχύει ως ισότητα, από την ταυτότητα του Parseval. Επίσης, έχουμε δεί ότι ισχύει στην περίπτωση $p=1$ και $q=\infty$: αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ τότε

$$|c_k(f)|\leqslant \|f\|_1$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, άρα $\sup\{|c_k| : k\in\mathbb{Z}\}\leqslant\|f\|_1$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.5.1 για τους χώρους $X=\mathbb{T}$ με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue και $Y=\mathbb{Z}$ με το μέτρο αρίθμησης, το οποίο δίνει μάζα 1 σε κάθε μονοσύνολο. Θεωρούμε τον τελεστή $T: L^2(\mathbb{T})+L^1(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{Z})+L^\infty(\mathbb{Z})$ ο οποίος απεικονίζει την f στην ακολουθία $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ των συντελεστών Fourier της. Παρατηρήστε ότι $L^2(\mathbb{T})\subset L^1(\mathbb{T})$, άρα $L^2(\mathbb{T})+L^1(\mathbb{T})=L^1(\mathbb{T})$. Επίσης, $L^2(\mathbb{Z})\subset L^\infty(\mathbb{Z})$, άρα $L^2(\mathbb{Z})+L^\infty(\mathbb{Z})=L^\infty(\mathbb{Z})$.

Έχουμε $\|T(f)\|_{L^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|T(f)\|_{L^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 8.5.1 για τα ζεύγη $(2,2)$ και $(1,\infty)$ με $M_{2,2}=1$ και $M_{1,\infty}=1$. Αν $p\in(1,2)$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, βλέπουμε ότι οι p,q ικανοποιούν τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{2}$$

με $t = 1-\frac{2}{q}\in(0,1)$. Από το Θεώρημα 8.5.1 παίρνουμε αμέσως την

$$\|T(f)\|_q \leqslant M_{2,2}^{1-t}M_{1,\infty}^t\|f\|_p = \|f\|_p$$

για κάθε $f\in L^p(\mathbb{T})$. Η τελευταία ανισότητα είναι ακριβώς ισοδύναμη με την (8.6.1). □

Η δεύτερη εφαρμογή μας είναι η δυϊκή ανισότητα Hausdorff-Young:

Θεώρημα 8.6.2 (δυϊκή ανισότητα Hausdorff-Young)**.** *Έστω $2\leqslant q\leqslant\infty$ και έστω p ο συζυγής εκθέτης του q. Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(f)|^p<\infty$, τότε $f\in L^q(\mathbb{T})$ και*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^q dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^p\right)^{1/p}. \tag{8.6.2}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι στην περίπτωση $p=q=2$ η (8.6.2) ισχύει ως ισότητα: η υπόθεση ότι $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\in L^2(\mathbb{Z})$ και το θεώρημα Riesz-Fisher εξασφαλίζουν ότι $f\in L^2(\mathbb{T})$ και ότι $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\{c_k\}\|_{L^2(\mathbb{Z})}$. Η περίπτωση $p=1$ και $q=\infty$ είναι απλή: αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|<\infty$ τότε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f για την οποία έχουμε $c_k(f)=c_k$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}\right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|$$

για κάθε $x\in\mathbb{T}$, άρα $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leqslant\|\{c_k\}\|_{L^1(\mathbb{Z})}$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.5.1 για τους χώρους $Q=\mathbb{Z}$ με το μέτρο αρίθμησης και $U=\mathbb{T}$ με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τον τελεστή $T' : L^2(\mathbb{Z})+L^1(\mathbb{Z})\to L^2(\mathbb{T})+L^\infty(\mathbb{T})$ ο οποίος απεικονίζει την $\{c_k\}$ στη συνάρτηση $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$. Έστω $1<p<2$. Παρατηρήστε ότι $L^p(\mathbb{Z})\subset L^2(\mathbb{Z})$, άρα, αν $\{c_k\}\in L^p(\mathbb{T})$ έχουμε ότι η

$$T'(\{c_k\})(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}\in L^2(\mathbb{T}).$$

Έχουμε $\|T'(\{c_k\})\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\{c_k\}\|_{L^2(\mathbb{Z})}$ αν $\{c_k\}\in L^2(\mathbb{Z})$ και $\|T'(\{c_k\})\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leqslant\|\{c_k\}\|_{L^1(\mathbb{Z})}$ αν $\{c_k\}\in L^1(\mathbb{Z})$. Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 8.5.1 για τα ζεύγη $(2,2)$ και $(1,\infty)$ με $M_{2,2}=1$ και $M_{1,\infty}=1$. Αφού οι p,q ικανοποιούν τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{2} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{2}$$

με $t=1-\frac{2}{q}\in(0,1)$, από το Θεώρημα 8.5.1 συμπεραίνουμε ότι αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}\in L^p(\mathbb{Z})$ τότε $f\in L^q(\mathbb{T})$ και

$$\|f\|_q = \|T'(\{c_k\})\|_q \leqslant M_{2,2}^{1-t}M_{1,\infty}^t\|\{c_k\}\|_p.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ακριβώς ισοδύναμη με την (8.6.2). □

Η επόμενη εφαρμογή είναι η ανισότητα Hausdorff-Young για το μετασχηματισμό Fourier στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 8.6.3 (ανισότητα Hausdorff-Young)**.** *Έστω $1 \leqslant p \leqslant 2$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}$ επεκτείνεται μονοσήμαντα από την κλάση των απλών $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $\mathcal{F}(f) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leqslant \|f\|_p. \tag{8.6.3}$$

Απόδειξη. Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι ο $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί την $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, και ότι ο ο $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί την $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Επίσης, οι $\mathcal{F}_1$ και $\mathcal{F}_2$ συμφωνούν στις απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Από την $1 \leqslant p \leqslant 2$ έχουμε ότι $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Άρα, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ μπορούμε να ορίσουμε την $\mathcal{F}(f)$ (εξηγήστε γιατί) και το Θεώρημα 8.5.1 μας δίνει την (8.6.3). Η μοναδικότητα της επέκτασης προκύπτει από την πυκνότητα των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Παρατήρηση 8.6.4. Αξίζει τον κόπο να δούμε το διάγραμμα Riesz που αντιστοιχεί σε καθένα από τα παραπάνω τρία θεωρήματα:

(α) Θεώρημα 8.6.1: Το διάγραμμα Riesz είναι το κλειστό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$.

(β) Θεώρημα 8.6.2: Το διάγραμμα Riesz είναι το κλειστό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$.

(γ) Θεώρημα 8.6.3: Το διάγραμμα Riesz είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$, δηλαδή το κοινό σύνορο των παραπάνω δύο τριγώνων.

Αυτό που μας δίνουν τα παραπάνω τρία θεωρήματα είναι ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$ περιέχεται στο διάγραμμα Riesz και στις τρείς πριπτώσεις. Στο Θεώρημα 8.6.1 έχουμε και το σημείο $(0,0)$ λόγω της τετριμμένης ανισότητας $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$. Από την κυρτότητα του διαγράμματος Riesz έπεται το (α). Στο Θεώρημα 8.6.2 έχουμε και το σημείο $(1,1)$ λόγω της ανισότητας $\|T'(\{c_k\}\|_1 \leqslant \|T'(\{c_k\}\|_\infty \leqslant \|\{c_k\}\|_1$. Από την κυρτότητα του διαγράμματος Riesz έπεται το (β). Το γεγονός ότι το τρίτο διάγραμμα δεν μπορεί να επεκταθεί αφήνεται ως άσκηση.

Η τελευταία μας εφαρμογή είναι η ανισότητα του Young για την συνέλιξη στον $\mathbb{R}^n$ (την οποία έχουμε ήδη σηζητήσει στις ασκήσεις του Κεφαλαίου 1).

Θεώρημα 8.6.5 (ανισότητα Young)**.** *Έστω $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ τότε $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r. \tag{8.6.4}$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την (8.6.4) για απλές ολοκληρώσιμες f και g. Σταθεροποιούμε την g και θεωρούμε τον τελεστή $f \mapsto T(f) = f * g$. Μια βασική ανισότητα για συνλίξεις (απλή συνέπεια της ανισότητας Minkowski) που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει, μας εξασφαλίζει ότι

$$\|T(f)\|_r = \|f * g\|_r \leqslant M_g \|f\|_1$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f, όπου $M_g = \|g\|_r$. Επίσης, από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\|T(f)\|_\infty = \|f * g\|_\infty \leqslant \|g\|_r \|f\|_{r^*} = M_g \|f\|_{r^*}$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f, όπου r^* είναι ο συζυγής εκθέτης του r. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.5.1 ως εξής: από την υπόθεση για τα p, q και r έχουμε $t = r\left(1 - \frac{1}{p}\right) \in [0,1]$, και γι' αυτήν την τιμή του t ικανοποιούνται οι $\frac{1-t}{r} + \frac{t}{\infty} = \frac{1}{q}$ και $\frac{1-t}{1} + \frac{t}{r^*} = \frac{1}{p}$. Άρα, το Θεώρημα 8.5.1 μας δίνει

$$\|T(f)\|_q = \|f * g\|_q \leqslant M_g^{1-t} M_g^t \|f\|_p = \|g\|_r \|f\|_p$$

για κάθε απλή ολοκληρώσιμη f. □

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για τους $L^p(\mathbb{T})$: αν οι $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, τότε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $g \in L^q(\mathbb{T})$ έχουμε $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ και

$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r. \tag{8.6.5}$$

Εδώ, το εύρος των (p, q, r) για τα οποία ισχύει η ανισότητα είναι αυτομάτως μεγαλύτερο, αφού $\|g\|_{r_1} \leqslant \|g\|_r$ όταν $r_1 \leqslant r$.

Το διάγραμμα Riesz της ανισότητας του Young στον $\mathbb{R}^n$ (για σταθερή τιμή του r) είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεια $\left(1 - \frac{1}{r}, 0\right)$ και $\left(1, \frac{1}{r}\right)$. Το αντίστοιχο διάγραμμα Riesz της ανισότητας του Young στο $\mathbb{T}$ (για σταθερή τιμή του r) είναι το τραπέζιο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$, $\left(1 - \frac{1}{r}, 0\right)$ και $\left(1, \frac{1}{r}\right)$.

8.7 Ασκήσεις

1. (α) Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $f(z) = e^{-\pi z^2}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy για το ορθογώνιο με κορυφές $-R, R, R + ix, -R + ix$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t x} dt = e^{-\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = e^{-\pi x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

(β) Έστω $G(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε ότι η f είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και για κάθε $0 \leqslant j \leqslant k$ ισχύει $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

και

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{c(k,f)}{|\xi|^k}, \qquad \xi \neq 0$$

όπου η σταθερά $c(k, f)$ εξαρτάται από το k και την f (αλλά όχι από το ξ).

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f'' είναι συνεχής και ότι $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $g(x) = x f(x)$. Αν $g \in L^1(\mathbb{R}$, δείξτε ότι η $\widehat{f}$ είναι παραγωγίσιμη και

$$\left(\widehat{f}\right)'(\xi) = -2\pi i \widehat{g}(\xi).$$

4. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = f(x+t) - f(x)$ δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{g}$ της g έχει άπειρες ρίζες.

5. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)\,d\xi.$$

6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{αν } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} \qquad \text{και} \qquad \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2,$$

με τη σύμβαση $\widehat{f}(0) = 2$ και $\widehat{g}(0) = 1$.

7. Υπολογίστε το

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

8. (α) Δείξτε ότι: αν $0 < \varepsilon < t < \infty$ τότε

$$\left| \int_\varepsilon^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\,d\xi \right| \leqslant 4.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ περιττή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν $0 < \varepsilon < t < \infty$ τότε

$$\left| \int_\varepsilon^t \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi \right| \leqslant 4\|f\|_1.$$

(γ) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια περιττή συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $g(\xi) = \frac{1}{\log \xi}$ για κάθε $\xi \geqslant 2$. Δείξτε ότι $g \in C_0(\mathbb{R})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε $\widehat{f} = g$.

9. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ η συνάρτηση $F(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^\varepsilon}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την

$$f(x) = \int_0^\infty K_\delta(x) e^{-\pi\delta} \delta^{\varepsilon - 1} d\delta,$$

όπου $K_\delta(x) = \delta^{-n/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini ελέγξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\pi\delta|\xi|^2} e^{-\pi\delta} \delta^{\varepsilon-1} d\delta.$$

Τέλος, υπολογίστε αυτό το ολοκλήρωμα (θα χρειαστείτε την $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, $s > 0$).

10. (α) Εξετάστε αν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με την ιδιότητα

$$f * f = f.$$

(β) Εξετάστε αν υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με την ιδιότητα

$$f * g = f \ \text{ για κάθε } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

11. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι:

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = |\det T|^{-1}(\widehat{f} \circ T^{-t})(\xi).$$

(β) Μια συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ λέγεται ακτινικά συμμετρική αν υπάρχει $G : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $g(x) = G(|x|)$. Ισοδύναμα, αν $g(Ux) = g(x)$ για κάθε ορθογώνιο γραμμικό μετασηματισμό U του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν η $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι ακτινικά συμμετρική τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι επίσης ακτινικά συμμετρική συνάρτηση.

12. Έστω $A \subset L^1(\mathbb{R})$. Συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή του θήκη: $g \in \overline{A}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $f \in A$ ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε με T_f το σύνολο όλων των συναρτήσεων της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x + b_k).$$

Δηλαδή, το T_f αποτελείται από όλους τους πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς *μεταφορών της* f.

(α) Δείξτε ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάποιο ξ, τότε $\widehat{g}(\xi) = 0$ για κάθε $g \in \overline{T_f}$.

(β) Δείξτε ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\overline{T_f} = L^1(\mathbb{R})$ τότε $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

13. Δείξτε ότι υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε: $\widehat{g}(\xi) > 0$ αν $\xi > 0$ και $\widehat{g}(\xi) = 0$ αν $\xi \leqslant 0$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $g(x) = \frac{1}{(1+ix)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

14. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos(nx)}{nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n * f - f\|_1 = 0.$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ο μετασχηματισμός Fourier της $g_n * f$ έχει συμπαγή φορέα, άρα οι $h \in L^1(\mathbb{R})$ που έχουν μετασχηματισμό Fourier με συμπαγή φορέα σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $L^1(\mathbb{R})$.

15. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα: υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) = 0$ αν $|x| > M$. Δείξτε ότι

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1 \cdot e^{2\pi M|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

16. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_a^b x^2|f(x)|^2 dx \geqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx$$

και

$$\int_c^d \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Δείξτε ότι

$$(b-a)(d-c) \geqslant \frac{1}{2\pi}.$$

17. Θεωρούμε τον *τελεστή του Hermite* $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ που ορίζεται από την σχέση

$$L(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f.$$

Στον $S(\mathbb{R})$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\langle L(f), f \rangle \geqslant \langle f, f \rangle$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

(β) Θεωρούμε τους τελεστές A και A^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A(f) = \frac{df}{dx} + xf \qquad \text{και} \qquad A^*(f) = -\frac{df}{dx} + xf.$$

Δείξτε ότι, για κάθε $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

(i) $\langle A(f), g \rangle = \langle f, A^*(g) \rangle$.

(ii) $\langle A(f), A(f) \rangle = \langle A^* A(f), f \rangle \geqslant 0$.

(iii) $A^* A = L - I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

(γ) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τους τελεστές A_t και A_t^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A_t(f) = \frac{df}{dx} + txf \qquad \text{και} \qquad A_t^*(f) = -\frac{df}{dx} + txf.$$

Δείξτε ότι $\langle A_t^* A_t(f), f \rangle \geqslant 0$ και με βάση αυτήν την παρατήρηση δώστε μια δεύτερη απόδειξη της αρχής της αβεβαιότητας: αν $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, τότε

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{df}{dx} \right|^2 dx \right) \geqslant \frac{1}{4}.$$

18. Ο *n-οστός πυρήνας του Landau* είναι η συνάρτηση

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n} & \text{αν } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{αν } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

όπου η σταθερά $c_n > 0$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x)\, dx = 1.$$

Δείξτε ότι η $\{L_n\}_{n \geqslant 0}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα δείξτε ότι, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1/2, 1/2]$, τότε η ακολουθία $\{f * L_n\}$ είναι ακολουθία πολυωνύμων στο $[-1/2, 1/2]$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

19. Οι *αριθμοί Bernoulli* B_n ορίζονται από την

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

(α) Δείξτε ότι $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ και $B_5 = 0$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_j.$$

(γ) Δείξτε ότι $B_k = 0$ αν ο k είναι περιττός και $k > 1$.

(δ) Έστω $t > 0$. Εφαρμόζοντας τον τύπο άθροισης του Poisson για την $f(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ και την $\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi t|k|}.$$

(ε) Η *συνάρτηση ζήτα* ορίζεται από την σχέση

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}, \qquad s > 1.$$

Για κάθε $t > 0$ δείξτε τις ταυτότητες

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+k^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\zeta(2m)t^{2m-1}$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi t|k|} = \frac{2}{1-e^{-2\pi t}} - 1.$$

(στ) Χρησιμοποιώντας την

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m}$$

δείξτε ότι, για κάθε $m \geqslant 1$,

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}.$$

20. Οι *συναρτήσεις Hermite* $h_k(x)$, $k \geqslant 0$, ορίζονται ως εξής:

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^k(e^{-x^2}).$$

(α) Δείξτε ότι $h_0(x) = e^{-x^2/2}$ και $h_1(x) = 2xe^{-x^2/2}$.

(β) Δείξτε ότι $h_k(x) = P_k(x)e^{-x^2/2}$, όπου P_k είναι πολυώνυμο βαθμού k και συμπεράνατε ότι $h_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(γ) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}h_k(x)\frac{t^k}{k!} = e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}.$$

(δ) Δείξτε ότι *η οικογένεια* $\{h_k\}_{k\geqslant 0}$ *είναι πλήρης*: αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$\langle f, h_k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)h_k(x)\,dx = 0$$

για κάθε $k \geqslant 0$, τότε $f \equiv 0$ (χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8).

(ε) Ορίζουμε $h_k^*(x) = h_k(\sqrt{2\pi}x)$. Δείξτε ότι

$$\widehat{h_k^*}(\xi) = (-i)^k h_k^*(\xi).$$

Δηλαδή, οι h_k^* είναι ιδιοσυναρτήσεις του μετασχηματισμού Fourier.

(στ) Αν $L(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f$, δείξτε ότι

$$L(h_k) = (2k+1)h_k$$

για κάθε $k \geqslant 0$. Συμπεράνατε ότι οι h_k είναι ορθογώνιες ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ του Schwartz.

(ζ) Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} [h_k(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^k k!.$$