Αρμονική Ανάλυση (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 3 Απριλίου 2022)

1. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την

$$\int |f(tx)|d\lambda(x) = \frac{1}{t}\int |f(x)|d\lambda(x), \qquad t>0.$$

(β) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A)<\infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το σύνολο $D(x)=\{n\in\mathbb{N}: n^2x\in A\}$ είναι πεπερασμένο.

2. Η συνάρτηση Γάμμα $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x>0.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε $x>0$,

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη: Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.

4. Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες, τέτοιες ώστε $f_n\to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 |f_n|^2\,d\lambda \leqslant 1$$

για κάθε $n\geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 |f_n|\,d\lambda \to 0.$$

5. Έστω $1\leqslant p\leqslant\infty$ και $f\in L^p[0,\infty)$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f(x)e^{-nx}\,dx = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε τις περιπτώσεις $p=1$ και $1<p<\infty$ χωριστά.

6. Έστω $1<p<\infty$ και $f,g\in L^p(\mathbb{R})$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lambda(\{g>\alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\{g>\alpha\}} f\,d\lambda$$

για κάθε $\alpha>0$. Αποδείξτε ότι

$$\|g\|_p \leqslant q\,\|f\|_p,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$g_n(x) = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y)\,dy.$$

(α) Αποδείξτε ότι $g_n(x)\to f(x)$ λ-σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} |g_n|\,d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\,d\lambda$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} |g_n|\,d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|\,d\lambda$.

8. Έστω $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση με $0<\|f\|_\infty<+\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^{n+1}d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda} = \|f\|_\infty.$$

9. Έστω $1<p<\infty$ και $f:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left[\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dy\right)^p dx\right]^{1/p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)^p dx\right)^{1/p} dy.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$ (όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p) με $\|g\|_q=1$, και φράξτε κατάλληλα το

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dy\right)|g(x)|\,dx.$$

10. (α) Έστω $1<p_j<\infty$ με $\sum_{j=1}^n 1/p_j = 1$. Αν $f_j\in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant j\leqslant n$, αποδείξτε ότι

$$\|f_1f_2\cdots f_n\|_1 \leqslant \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\cdots\|f_n\|_{p_n}.$$

(β) Έστω $1<p,q,r<\infty$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-1$. Αν $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ και $g\in L^r(\mathbb{R}^d)$, αποδείξτε την *ανισότητα του Young*:

$$\|f*g\|_q \leqslant \|f\|_p\|g\|_r.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να υποθέσετε ότι $f,g\geq 0$. Θα βοηθήσει να γράψετε

$$f(y)g(x-y) = f(y)^a g(x-y)^b\big[(f(y)^{1-a}g(x-y)^{1-b}\big]$$

για κατάλληλους a και b, και να χρησιμοποιήσετε το (α).