Αρμονική Ανάλυση (2021–22)
Υποδείξεις για τις Ασκήσεις των Φυλλαδίων

1.1. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού.

(β) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A)<\infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το σύνολο $D(x)=\{n\in\mathbb{N}: n^2x\in A\}$ είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo-Levi έχουμε

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2x)|\,d\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int |f(n^2x)|\,d\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int |f(x)|\,d\lambda(x)=\frac{\pi^2}{6}\|f\|_1<\infty.$$

Έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|f(n^2x)|<\infty$ σχεδόν για κάθε x, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού.

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση χ_A βλέπουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_A(n^2x)<\infty$ σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Όμως, $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_A(n^2x)=|D(x)|$, το πλήθος των στοιχείων του $D(x)$, άρα σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το σύνολο $D(x)$ είναι πεπερασμένο.

1.2. Η συνάρτηση Γάμμα $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\qquad x>0.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε $x>0$,

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n^xn!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η $g_x(t)=t^{x-1}e^{-t}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$: υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $t^{x-1}e^{-t}\leqslant 1/t^2$ στο $[M,\infty)$, ενώ στο $(0,M]$ η g_x είναι φραγμένη.

Ορίζουμε $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\chi_{[0,n]}(t)$. Τότε, $f_n\leqslant g_x$ και $f_n\to g_x$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} f_n d\lambda\to\int_0^{\infty} g_x d\lambda=\Gamma(x),$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\Gamma(x).$$

Για τη δεύτερη ισότητα θέτουμε

$$b_{n,k}(x)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k}t^{x+k-1}dt$$

και με ολοκλήρωση κατά μέρη δείχνουμε ότι

$$b_{n,k}(x)=\frac{n-k}{n(x+k)}b_{n,k+1}(x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt&=b_{n,0}(x)=\frac{n!}{n^nx(x+1)\cdots(x+n-1)}b_{n,n}(x)\\&=\frac{n!}{n^nx(x+1)\cdots(x+n-1)}\frac{n^nn^x}{x+n}=\frac{n^xn!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},\end{aligned}$$

και έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

1.3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-m,m]$. Αν $t>2m$ τότε έχουμε $g(x+t)=0$ για κάθε $x\in[-m,m]$. Επίσης, αν $g(x+t)\neq 0$ τότε $x\in[-t-m,-t+m]$ άρα $g(x)=0$ αφού $-t+m<-m$. Δηλαδή, για κάθε $t>2m$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}}|g(x+t)+g(x)|\,d\lambda(x)=\int_{[-m,m]}|g(x)|\,d\lambda(x)+\int_{[-t-m,-t+m]}|g(x+t)|\,d\lambda(x)=2\int_{\mathbb{R}}|g(x)|\,d\lambda(x).$$

Έστω τώρα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι φανερό ότι

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x)\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,d\lambda(x)+\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)|\,d\lambda(x)=2\|f\|_1$$

για κάθε $t>0$. Για τυχόν $\epsilon>0$ βρίσκουμε συνεχή $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-m,m]$ ώστε $\|f-g\|_1\leqslant\epsilon$. Τότε, υπάρχει $t_0>0$ ώστε

$$2\|g\|_1\leqslant\int_{\mathbb{R}}|g(x+t)+g(x)|\,d\lambda(x)+\epsilon$$

για κάθε $t\geqslant t_0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}2\|f\|_1&\leqslant 2\|g\|_1+2\epsilon\leqslant\int_{\mathbb{R}}|g(x+t)+g(x)|\,d\lambda(x)+3\epsilon\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x)+\int_{\mathbb{R}}|g(x+t)-f(x+t)|\,d\lambda(x)+\int_{\mathbb{R}}|g(x)-f(x)|\,d\lambda(x)+3\epsilon\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x)+2\|g-f\|_1+3\epsilon\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x)+5\epsilon\end{aligned}$$

για κάθε $t\geqslant t_0$ και έπεται ότι

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x)=2\|f\|_1.$$

1.4. Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες, τέτοιες ώστε $f_n\to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1|f_n|^2\,d\lambda\leqslant 1$$

για κάθε $n\geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1|f_n|\,d\lambda\to 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\epsilon\in(0,1)$. Αφού $f_n\to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$, από το θεώρημα του Egorov υπάρχει μετρήσιμο $A\subset[0,1]$ με $\lambda(A)<\epsilon^2$ τέτοιο ώστε $f_n\to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,1]\setminus A$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n\geqslant n_0$ και $x\in[0,1]\setminus A$ να έχουμε $|f_(x)|\leqslant\epsilon$. Τότε, για κάθε $n\geqslant n_0$ παίρνουμε

$$\int_0^1|f_n|\,d\lambda=\int_{[0,1]\setminus A}|f_n|\,d\lambda+\int_A|f_n|\,d\lambda\leqslant\epsilon\lambda([0,1]\setminus A)+\sqrt{\lambda(A)}\left(\int_A|f_n|^2d\lambda\right)^{1/2}\leqslant\epsilon+\sqrt{\epsilon^2}\|f_n\|_2^2\leqslant 2\epsilon.$$

1.5. Έστω $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και $f \in L^p[0,\infty)$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\, dx = 0.$$

Υπόδειξη. Αν $p = 1$ τότε $|f(x)e^{-nx}| \leqslant |f(x)|$ για κάθε $x \in (0,\infty)$ και $f(x)e^{-nx} \to 0$ για κάθε x με $|f(x)| < \infty$, δηλαδή σχεδόν παντού αφού η f είναι ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\, dx = 0.$$

Αν $p = \infty$ τότε

$$\left| \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\, dx \right| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^\infty e^{-nx} dx = \frac{1}{n}\|f\|_\infty \to 0.$$

Έστω ότι $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Τότε, από την ανισότητα Hölder,

$$\left| \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\, dx \right| \leqslant \|f\|_p \left(\int_0^\infty e^{-nqx} dx \right)^{1/q}.$$

Αφού

$$\int_0^\infty e^{-nqx} dx = \frac{1}{qn} \to 0,$$

έπεται πάλι το ζητούμενο.

1.6. Έστω $1 < p < \infty$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lambda(\{g > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{\{g>\alpha\}} f\, d\lambda$$

για κάθε $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\|g\|_p \leqslant q\, \|f\|_p,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} g^p\, d\lambda &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \lambda(\{x : g(x) > \alpha\})\, d\alpha \leqslant \int_0^\infty p\alpha^{p-2} \int_{\{g>\alpha\}} f\, d\lambda\, d\alpha \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_0^\infty p\alpha^{p-2} \chi_{\{g(x)>\alpha\}}(x,\alpha)\, d\alpha\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_0^{g(x)} p\alpha^{p-2}\, d\alpha\, d\lambda(x) \\
&= \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)^{p-1}\, d\lambda(x) \leqslant \frac{p}{p-1} \Big(\int_{\mathbb{R}} f^p\, d\lambda \Big)^{1/p} \Big(\int_{\mathbb{R}} g^{q(p-1)} d\lambda \Big)^{1/q} \\
&= q\|f\|_p \Big(\int_{\mathbb{R}} g^p\, d\lambda \Big)^{1/q} = q\|f\|_p\, \|g\|_q^{p/q}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|g\|_p \leqslant q\, \|f\|_p,$$

1.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y)\, dy.$$

(α) Αποδείξτε ότι $g_n(x) \to f(x)$ λ-σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda$.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue.
(β) Γράφουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x,x+1/n]}(y)|f(y)|\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[y-1/n,y]}(x)\, dx \right) |f(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy.$$

(γ) Από το (α) και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda.$$

Από το (β) έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

Έπεται το ζητούμενο.

1.8. Έστω $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση με $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1} d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda} = \|f\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Έχουμε $f^{n+1} \leqslant f^n \|f\|_\infty$ σχεδόν παντού, άρα

$$\int_0^1 f^{n+1} d\lambda \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 f^n d\lambda.$$

Άρα, για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\frac{\int_0^1 f^{n+1} d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda} \leqslant \|f\|_\infty,$$

συνεπώς

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1} d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda} \leqslant \|f\|_\infty.$$

Από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\int_0^1 f^n d\lambda \leqslant \left(\int_0^1 f^{n+1} d\lambda \right)^{\frac{n}{n+1}},$$

άρα

$$\frac{\int_0^1 f^{n+1} d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda} \geqslant \frac{\int_0^1 f^{n+1} d\lambda}{\left(\int_0^1 f^{n+1} d\lambda \right)^{\frac{n}{n+1}}} = \|f\|_{n+1}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \|f\|_{n+1} = \|f\|_\infty$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1} d\lambda}{\int_0^1 f^n d\lambda} \geqslant \|f\|_\infty.$$

Έπεται το ζητούμενο.

1.9. Έστω $1 < p < \infty$ και $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dy\right)^p dx\right]^{1/p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)^p dx\right)^{1/p} dy.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ (όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p) με $\|g\|_q = 1$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dy\right) |g(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)|g(x)|dx\right) dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)^p dx\right)^{1/p} \|g\|_q\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)^p dx\right)^{1/p} dy.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dy\right)^p dx\right]^{1/p} &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dy\right) |g(x)|\,dx : \|g\|_q = 1\right\} \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)^p dx\right)^{1/p} dy.\end{aligned}$$

1.10. (α) Έστω $1 < p_j < \infty$ με $\sum_{j=1}^n 1/p_j = 1$. Αν $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, αποδείξτε ότι

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_1 \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

(β) Έστω $1 < p, q, r < \infty$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, αποδείξτε την *ανισότητα του Young*:

$$\|f * g\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r.$$

Υπόδειξη. (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f_j\|_{p_j} = 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, \infty)$ και την υπόθεση ότι $\sum_{j=1}^n 1/p_j = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ έχουμε

$$|f_1(x)|\,|f_2(x)| \cdots |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{p_1}|f_1(x)|^{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}|f_n(x)|^{p_n}$$

(η ανισότητα ισχύει προφανώς αν $|f_j(x)| = 0$ για κάποιο j. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_1 \leqslant \frac{1}{p_1}\|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}\|f_n\|_{p_n}^{p_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1 = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

(β) Θέτουμε $a = 1 - \frac{p}{q}$ και $b = 1 - \frac{r}{q}$. Παρατηρούμε ότι $q \geqslant p$ και $q \geqslant r$ λόγω των υποθέσεων ότι $p, q, r \geqslant 1$ και $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Ορίζουμε $p_1 = \frac{pq}{q-p}$ και $p_2 = \frac{qr}{q-r}$. Τότε, $p_1, p_2 \geqslant 1$ και $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q} = 1$. Γράφουμε

$$|(f * g)(x)| = \left|\int f(x-y)g(y)\,d\lambda(y)\right| \leqslant \int (|f(x-y)|^{1-a}|g(y)|^{1-b})|f(x-y)|^a|g(y)|^b d\lambda(y).$$

Χρησιμοποιώντας το (α) έχουμε

$$\begin{aligned}|(f * g)(x)| &\leqslant \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)q}|g(y)|^{(1-b)q}d\lambda(y)\right)^{1/q} \left(\int |f(x-y)|^{ap_1}d\lambda(y)\right)^{1/p_1} \left(\int |g(y)|^{bp_2}d\lambda(y)\right)^{1/p_2} \\ &= \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)q}|g(y)|^{(1-b)q}d\lambda(y)\right)^{1/q} \|f\|_{ap_1}^a \|g\|_{bp_2}^b.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-a)q = p$ και $(1-b)q = r$. Υψώνοντας στην q και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|f*g\|_q^q &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{aq}\|g\|_{bp_2}^{bq}\left[\int\left(\int |f(x-y)|^p d\lambda(x)\right)|g(y)|^r d\lambda(y)\right]\\ &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{aq}\|g\|_{bp_2}^{bq}\|f\|_p^p\|g\|_r^r.\end{aligned}$$

Όμως, $ap_1 = p$ και $bp_2 = r$. Άρα,

$$\|f*g\|_q^q \leqslant \|f\|_p^{p+aq}\|g\|_r^{r+bq} = \|f\|_p^q\|g\|_r^q,$$

δηλαδή, $\|f*g\|_q \leqslant \|f\|_p\|g\|_r$.

2.1. (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.
(β) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε $f*g = f$. Αποδείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$. Η g είναι άρτια, άρα $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\, dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Από την υπόθεση παίρνουμε επίσης ότι $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\, dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Έπεται ότι $\widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και αφού η g είναι συνεχής συμπεραίνουμε ότι $g \equiv 0$. Άρα $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x, δηλαδή η f είναι περιττή.
(β) Από την $f*g = f$ έχουμε $\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε $\widehat{g}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\widehat{g}(k)| < 1$ αν $|k| \geqslant k_0$. Έπεται ότι $\widehat{f}(k) = 0$ για $|k| \geqslant k_0$, συνεπώς η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από k_0.

2.2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ για $|x| \leqslant \pi$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

Υπόδειξη. Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της f. Με (απλές) πράξεις βλέπουμε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})$, ενώ αν $k \neq 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}.$$

Άρα, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}e^{ikx},$$

η οποία συγκλίνει απολύτως. Έπεται ότι $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και θέτοντας $x = \pi$ παίρνουμε

$$f(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}\frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}(-1)^k = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1},$$

απ' όπου υπολογίζουμε το $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

2.3. Εκφράστε τη συνάρτηση $\cos x$ σαν σειρά ημιτόνων στο διάστημα $(0,\pi)$. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας υπολογίστε το

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}.$$

Υπόδειξη. Επεκτείνουμε την $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Έχουμε $a_k(f) = 0$, αφού η f είναι περιττή, και

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, d\lambda(x) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin kx \, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(k-1)x + \sin(k+1)x] \, d\lambda(x). \end{aligned}$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $b_k = 0$ ενώ αν ο $k = 2s$ τότε

$$b_{2s}(f) = \frac{8}{\pi} \frac{s}{4s^2 - 1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$S(f, x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}.$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ συμπεραίνουμε ότι αν $0 < x < \pi$ τότε

$$\cos x = S(f, x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}.$$

Επίσης, από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(f)|^2 = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2 - 1)^2}.$$

Αφού

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{64}.$$

2.4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \, dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε αρχικά τις $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Για $n = 0$ έχουμε $f_0 \equiv 1$ και η ζητούμενη ισότητα ισχύει (μάλιστα, για κάθε N). Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $n \neq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_n(x + k\alpha) = \frac{1}{N} e^{inx + ink\alpha} = e^{inx} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (e^{in\alpha})^k = e^{inx} \frac{e^{in\alpha}(e^{iNn\alpha} - 1)}{e^{in\alpha} - 1},$$

συνεπώς

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_n(x+k\alpha)\right| \leqslant \frac{|e^{iNn\alpha}-1|}{N|e^{in\alpha}-1|} \leqslant \frac{2}{N|e^{in\alpha}-1|} \longrightarrow 0$$

όταν $N\to\infty$, αφού $\alpha/\pi\notin\mathbb{Q}$ και συνεπώς $|e^{in\alpha}-1|>0$. Όμως,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_n(t)\,dt = 0,$$

άρα και πάλι ισχύει η ζητούμενη ισότητα. Επειδή τώρα η ισότητα είναι γραμμική ως προς f, συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p(t)\,dt$$

για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p και κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για τυχόν $\epsilon>0$ βρίσκουμε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f-p\|_\infty\leqslant\epsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt\right| \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|f(x+k\alpha)-p(x+k\alpha)| + \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p(t)\,dt\right| + \|f-p\|_1 \\
&\qquad\leqslant \|f-p\|_\infty + \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p(t)\,dt\right| + \|f-p\|_\infty \\
&\qquad\leqslant \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p(t)\,dt\right| + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $N\to\infty$ έχουμε

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt\right| \leqslant 2\epsilon,$$

και αφού το $\epsilon>0$ ήταν τυχόν παίρνουμε το ζητούμενο.

2.5. Έστω $f\in C^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $0<\alpha\leqslant 1$ και $M>0$ ώστε

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Υπόδειξη. Για κάθε $k\neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
ik\widehat{f}(k) = \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\pi/k}^{\pi-\pi/k} f'(x+\pi/k)e^{-ik(x+\pi/k)}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\pi/k}^{\pi-\pi/k} f'(x+\pi/k)e^{-ikx}dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,
\end{aligned}$$

άρα

$$2ik\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x)-f'(x+\pi/k))e^{-ikx}dx.$$

Έπεται ότι

$$2|k||\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x) - f'(x+\pi/k))|dx \leqslant \frac{M\pi^\alpha}{2\pi}\frac{1}{|k|^\alpha}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| \leqslant |\widehat{f}(0)| + \frac{M\pi^\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\alpha}} < \infty.$$

Είναι τότε γνωστό ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

2.6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos^4(k_nx + t_n)\,dx.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\cos^4\theta = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos^4(k_nx+t_n)\,dx &= \frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2(k_nx+t_n)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 4(k_nx+t_n)\,dx.\end{aligned}$$

Αφού $k_n \to \infty$, από την $\cos 2(k_nx + t_n) = \cos(2k_nx)\cos(2t_n) - \sin(2k_nx)\sin(2t_n)$ και το λήμμα Riemann-Lebesgue παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2(k_nx+t_n)\,dx = \cos(2t_n)\int_0^{2\pi} f(x)\cos(2k_nx)dx - \sin(2t_n)\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2k_nx)dx \longrightarrow 0$$

και όμοια

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos 4(k_nx+t_n)\,dx \longrightarrow 0.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos^4(k_nx+t_n)\,dx = \frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

2.7. Έστω $E \subseteq [0, 2\pi]$ με $\lambda(E) > 0$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ και $a_n\cos nx + b_n\sin nx \longrightarrow 0$ για κάθε $x \in E$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(β) Αν η πραγματική τριγωνομετρική σειρά $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in E$ τότε η σειρά $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ συγκλίνει και η τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n\cos nx + b_n\sin nx = r_n\cos(nx - \vartheta_n)$, όπου $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $(a_n/r_n)^2 + (b_n/r_n)^2 = 1$, άρα υπάρχει ϑ_n τέτοιος ώστε $\cos\vartheta_n = a_n/r_n$ και $\sin\vartheta_n = b_n/r_n$). Τώρα, αν δείξουμε ότι $r_n \to 0$ θα έχουμε $a_n \to 0$ και $b_n \to 0$.

Αν η (r_n) δεν είναι μηδενική ακολουθία, τότε μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ και υπακολουθία (r_{k_n}) της (r_n) τέτοια ώστε $r_{k_n} \geqslant \delta$ για κάθε n. Αφού

$$r_{k_n} \cos(k_n x - \vartheta_{k_n}) = a_{k_n} \cos k_n x + b_{k_n} \sin k_n x \to 0$$

για κάθε $x \in E$, αναγκαστικά έχουμε $\cos(k_n x - \vartheta_{k_n}) \to 0$ για κάθε $x \in E$, άρα και $\cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n}) \to 0$ για κάθε $x \in E$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_E \cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n})\, dx \longrightarrow 0,$$

όμως

$$\int_E \cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n})\, dx = \frac{1}{2}\int_E (1 + \cos 2(k_n x - \vartheta_{k_n}))\, dx \longrightarrow \frac{1}{2}\lambda(E),$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $\lambda(E) > 0$.

(β) Όπως στο (α) για κάθε $k \geqslant 1$ βρίσκουμε $\vartheta_k \in \mathbb{R}$ ώστε $a_k \cos kx + b_k \sin kx = r_k \cos(kx - \vartheta_k)$, όπου $r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Αφού $|a_k|, |b_k| \leqslant r_k$, για το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$.

Από την υπόθεση, για κάθε $x \in E$ ορίζεται η

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k |\cos(kx - \vartheta_k)| < \infty.$$

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_N = \{x \in E : g(x) \leqslant N\}$. Η $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$ αυξάνει προς το E, άρα υπάρχει N τέτοιος ώστε $\lambda(E_N) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(E)$. Άρα,

$$N\lambda(E_N) \geqslant \int_{E_N} g(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \int_{E_N} |\cos(kx - \vartheta_k)|\, dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} r_k \int_{E_N} \cos^2(kx - \vartheta_k)\, dx.$$

Αφού

$$\int_{E_N} \cos^2(kx - \vartheta_k)\, dx \longrightarrow \frac{1}{2}\lambda(E_N),$$

υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε: για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$\int_{E_N} \cos^2(kx - \vartheta_k)\, dx \geqslant \frac{1}{4}\lambda(E_N).$$

Άρα,

$$N\lambda(E_N) \geqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k \int_{E_N} \cos^2(kx - \vartheta_k)\, dx \geqslant \frac{1}{4}\lambda(E_N) \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k,$$

το οποίο δείχνει ότι

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k \leqslant 4N < \infty,$$

άρα $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$.

2.8. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos kt\, dt = \frac{1}{k^2}.$$

(β) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -2$ και

$$f(t) = \frac{t^2 - 2\pi t}{2\pi \sin(t/2)}, \qquad 0 < t \leqslant \pi.$$

Αποδείξτε ότι
$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} f(t)\sin[(n+1/2)t]\,dt + \frac{\pi^2}{3}$$
και συμπεράνατε ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Υπόδειξη. (α) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt &= \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)^2\frac{\sin kt}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt\\ &= -\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\cos kt}{k^2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi k^2}\int_0^{\pi}\cos kt\,dt\\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^3}\sin kt\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

(β) Θεωρούμε την $g(t) = t^2 - 2\pi t$ στο $[0,\pi]$ και την επεκτείνουμε σε άρτια συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Έχουμε
$$a_0(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)\,dt = -\frac{4\pi^2}{3}$$
και για $k \geqslant 1$ από το (α) παίρνουμε
$$a_k(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^2-2\pi t)\cos kt\,dt = 4\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt = \frac{4}{k^2}.$$
Αφού η g είναι άρτια, έχουμε επίσης $b_k(g) = 0$ για κάθε $k]gr1$. Τώρα παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned}2\int_0^{\pi} f(t)\sin[(n+1/2)t]\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(t)\,dt = s_n(g,0) &= \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(g)\\ &= -\frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\end{aligned}$$
που είναι το ζητούμενο. Από το λήμμα Riemann-Lebesgue βλέπουμε (εύκολα) ότι
$$\int_0^{\pi} f(t)\sin[(n+1/2)t]\,dt \longrightarrow 0$$
όταν $n\to\infty$. οπότε
$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3},$$
απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.9. Αποδείξτε ότι για κάθε πραγματική συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει η ταυτότητα
$$\pi b_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/n}\left[f\left(\frac{2k\pi}{n}+\theta\right) - f\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}+\theta\right)\right]\sin n\theta\,d\theta.$$
για κάθε $n \geqslant 1$ και συμπεράνατε ότι αν η f είναι φθίνουσα στο $(0,2\pi)$ τότε $b_n \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta &= \int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(u+2k\pi/n)\sin nu\,du - \int_0^{\pi/n} f(u+(2k+1)\pi/n)\sin nu\,du\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \big[f(u+2k\pi/n)-f(u+(2k+1)\pi/n)\big]\sin nu\,du.\end{aligned}$$

Αθροίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(\theta)\sin n\theta d\theta\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/n}\left[f\left(\frac{2k\pi}{n}+u\right)-f\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}+u\right)\right]\sin nu\,du.\end{aligned}$$

Αν η f είναι φθίνουσα τότε $f(u+2k\pi/n)-f(u+(2k+1)\pi/n)\geqslant 0$ για κάθε k και $u\in[0,\pi/n]$, άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\big[f(u+2k\pi/n)-f(u+(2k+1)\pi/n)\big]\sin nu\,du \geqslant 0$$

για κάθε $0\leqslant k\leqslant n-1$. Έπεται ότι $\pi b_n\geqslant 0$.

2.10. (α) Έστω $p(t)=\sum_{s=-n}^n a_s e^{-ist}$ και $q(t)=\sum_{k=-n}^n b_k e^{-ikt}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αποδείξτε ότι

$$\|p\|_2^2=\sum_{s=-n}^n |a_s|^2 \qquad \text{και} \qquad \|q\|_2^2=\sum_{k=-n}^n |b_k|^2$$

και ότι για κάθε $f\in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)q(t)f(t)e^{-it}dt = \sum_{s,k=-n}^n a_s b_k \widehat{f}(s+k+1).$$

(β) Αν $f_0(t)=t-\pi$ στο $[0,2\pi)$, αποδείξτε ότι $\widehat{f_0}(0)=0$ και $\widehat{f_0}(n)=\frac{i}{n}$ για κάθε $n\neq 0$.
(γ) Αν για τα πολυώνυμα p και q του (α) ισχύει ότι $a_s=b_k=0$ για κάθε $-n\leqslant s,k<0$, χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα του (α) για τη συνάρτηση f_0 του (β) αποδείξτε ότι

$$\left|\sum_{s,k=0}^n \frac{a_s b_k}{s+k+1}\right| \leqslant \pi\left(\sum_{s=0}^n |a_s|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^n |b_k|^2\right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. (α) Οι πρώτες δύο ισότητες προκύπτουν άμεσα από την ταυτότητα του Parseval ή με απλές πράξεις αν π.χ. γράψουμε

$$\|p\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\overline{p(t)}dt = \sum_{k,s=-n}^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_s\overline{a_k}e^{-i(s-k)t}dt.$$

Για τη δεύτερη ισότητα ομοίως γράφουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)q(t)f(t)e^{-it}dt = \sum_{s,k=-n}^n a_s b_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(s+k+1)t}dt = \sum_{s,k=-n}^n a_s b_k\widehat{f}(s+k+1).$$

(β) Βρίσκουμε τους συντελεστές Fourier της f_0 με απευθείας υπολογισμό.
(γ) Χρησιμοποιώντας το (β) και την υπόθεση ότι $a_s = b_k = 0$ για κάθε $-n \leqslant s, k < 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{s,k=0}^{n} \frac{a_s b_k}{s+k+1}\right| &= \left|\sum_{s,k=-n}^{n} a_s b_k \widehat{f_0}(s+k+1)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} p(t)q(t)f_0(t)e^{-it}dt\right| \\ &\leqslant \|f_0\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(t)q(t)|dt \leqslant \|f_0\|_\infty \|p\|_2 \|q\|_2 \\ &= \pi\left(\sum_{s=0}^{n} |a_s|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\|f_0\|_\infty = \pi$, την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το (α).

3.1. Έστω $0 < \alpha \leqslant \pi$ και $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)$.

(α) Αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{\alpha}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ ισχύει

$$\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\alpha)}{k^2}.$$

Υπόδειξη. (α) Για $k = 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathbf{1}\, dx = \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi},$$

ενώ για $k \neq 0$ παίρνουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi ik\alpha} e^{-ikx}\Big|_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2\pi ik}(e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha} = \frac{2i\sin k\alpha}{2\pi ik} = \frac{\sin k\alpha}{\pi k}.$$

(β) Για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο x. Από το θεώρημα Dini παίρνουμε

$$\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x) = f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Θέτοντας $x = 0$ στο (β) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\frac{\sin \alpha x}{\pi x}$ είναι άρτια, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi}{2}\sum_{k\neq 0} \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Για τη δεύτερη ισότητα υπολογίζουμε αρχικά την

$$\|f\|_2^2 = \|\chi_{[-\alpha,\alpha]}\|_2^2 = \frac{\alpha}{\pi}.$$

Από την ταυτότητα Parseval παίρνουμε

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\alpha^2}{\pi^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k\alpha)}{\pi^2k^2},$$

και με απλές πράξεις καταλήγουμε στην

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k\alpha)}{k^2}=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}.$$

3.2. Δίνονται $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$. Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ με $f(x)=\sum_{k=1}^n\epsilon_ke^{ikx}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in[0,2\pi]\}\geq\sqrt{n}.$$

Υπόδειξη. Από την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\|f\|_2^2=\sum_{k=1}^n|\epsilon_k|^2=n,$$

δηλαδή $\|f\|_2=\sqrt{n}$. Έπεται ότι $\|f\|_\infty\geqslant\|f\|_2=\sqrt{n}$.

3.3. Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$ τριγωνομετρική σειρά και $s_n(x)=\sum_{k=-n}^nc_ke^{ikx}$, $n\in\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f\in C(\mathbb{T})$ και υπακολουθία $\{s_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ της $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε $\|f-s_{k_n}\|_\infty\to 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{Z}$,

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx.$$

Υπόδειξη. Έστω $k\in\mathbb{Z}$. Αν $n\geqslant|k|$ τότε $k_n\geqslant|k|$, άρα

$$\widehat{s_{k_n}}(k)=c_k.$$

Τότε, για κάθε $n\geqslant|k|$ έχουμε

$$|\widehat{f}(k)-c_k|\leqslant|\widehat{f}(k)-\widehat{s_{k_n}}(k)|+|\widehat{s_{k_n}}(k)-c_k|=|\widehat{f}(k)-\widehat{s_{k_n}}(k)|\leqslant\|f-s_{k_n}\|_1\leqslant\|f-s_{k_n}\|_\infty\to 0$$

από την υπόθεση, άρα

$$c_k=\widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx.$$

3.4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική φραγμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Ισχύει πάντα ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\widehat{f}(k)|<\infty$; Ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2<\infty$;

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $a>\frac{1}{2}$ ισχύει $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\widehat{f}(k)|}{k^a}<\infty$.

Υπόδειξη. (α) Αν $f_0(t)=t-\pi$ στο $[0,2\pi)$ είναι η συνάρτηση της Άσκησης 2.10 (β), τότε η 2π-περιοδική επέκταση της f_0 είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη, ενώ απλός υπολογισμός δείχνει ότι $\widehat{f_0}(0)=0$ και $\widehat{f_0}(n)=\frac{i}{k}$ για κάθε $k\neq 0$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{f_0}(k)|=\infty.$$

Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε $f \in L^2(\mathbb{T})$. Από την ταυτότητα Parseval,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 < \infty.$$

(β) Αφού $a > \frac{1}{2}$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2a}} < \infty$. Από το (α) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k^a} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2a}}\right)^{1/2} < \infty.$$

3.5. (α) Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Γνωστό από τη θεωρία. Αφού $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, η ακολουθία συναρτήσεων $s_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία έχουμε $\widehat{f}(k) = \lim\limits_{N\to\infty} \widehat{s_N}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(β) Αν υπήρχε τέτοια $f \in C(\mathbb{T})$ τότε θα είχαμε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και από την ταυτότητα Parseval θα παίρναμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 < \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.
(γ) Θεωρούμε την ακολουθία $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ αν $n = k^4$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ και $a_n = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Από το (α) υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, για κάθε n της μορφής $n = k^4$ (δηλαδή για άπειρους $n \in \mathbb{N}$) έχουμε $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.6. (α) Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 &= \|f(g - s_n(g)) + (f - s_n(f))s_n(g)\|_1 \leqslant \|f(g - s_n(g))\|_1 + \|(f - s_n(f))s_n(g)\|_1 \\ &\leqslant \|f\|_2\|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2\|s_n(g)\|_2\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$ και $\|g - s_n(g)\|_2 \to 0$. Επίσης, $\|s_n(g)\|_2 \leqslant \|g\|_2$ από την ανισότητα Bessel. Έπεται ότι

$$\|f\|_2\|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2\|s_n(g)\|_2 \leqslant \|f\|_2\|g - s_n(g)\|_2 + \|f - s_n(f)\|_2\|g\|_2 \to 0$$

και έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\widehat{fg}(k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-ikx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x) - s_n(f,x)s_n(g,x)|\,dx \\ &= \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

όταν $n \to \infty$, άρα

$$\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx.$$

(γ) Έστω $k < 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\widehat{f}(m) = 0$ αν $m < 0$ και $\widehat{g}(\ell) = 0$ αν $\ell < 0$, για $n > |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx &= \sum_{m=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{f}(m)\widehat{g}(\ell)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x}dx \\ &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \widehat{f}(m)\widehat{g}(\ell)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x}dx = 0,\end{aligned}$$

διότι αν $m, \ell \geqslant 0$ τότε $m + \ell - k > 0$ και συνεπώς

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+\ell-k)x}dx = 0.$$

Από το (β) έπεται ότι

$$\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx = 0.$$

3.7. Έστω $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} < \cdots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} e^{is_n x}.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_{k^2}(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$ τότε

$$\left|f_m(x) - \frac{k^2}{m}f_{k^2}(x)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

(γ) Αποδείξτε ότι $f_m(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\|f_{k^2}\|_2^2=\Big\|\frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k^2}e^{is_nx}\Big\|_2^2=\frac{1}{k^4}\sum_{n=1}^{k^2}\mathbf{1}=\frac{k^2}{k^4}=\frac{1}{k^2},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_{k^2}(x)|^2dx=\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{k^2}\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\Big|f_m(x)-\frac{k^2}{m}f_{k^2}(x)\Big|=\Big|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}e^{is_nx}-\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{k^2}e^{is_nx}\Big|=\Big|\frac{1}{m}\sum_{n=k^2+1}^{m}e^{is_nx}\Big|$$
$$\leqslant\frac{m-k^2}{m}\leqslant\frac{2k}{m}\leqslant\frac{2}{\sqrt{m}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $m-k^2<(k+1)^2-k^2<2k+1\implies m-k^2\leqslant 2k$.

(γ) Από το (α) και από το θεώρημα Beppo-Levi έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}|f_{k^2}|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού. Συνεπώς, $f_{k^2}(x)\to 0$ σχεδόν για κάθε x.

Έστω x τέτοιος ώστε $f_{k^2}(x)\to 0$. Από το (β) βλέπουμε ότι αν $k^2\leqslant m<(k+1)^2$ τότε

$$|f_m(x)|\leqslant\frac{k^2}{m}|f_{k^2}(x)|+\Big|\frac{k^2}{m}f_{k^2}(x)-f_m(x)\Big|\leqslant\frac{k^2}{m}|f_{k^2}(x)|+\frac{2}{\sqrt{m}}\leqslant|f_{k^2}(x)|+\frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Έστω $\epsilon>0$. Βρίσκουμε $k_0\in\mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $|f_{k^2}(x)|<\epsilon/2$ για κάθε $k\geqslant k_0$. και $\frac{2}{k_0}<\epsilon/2$. Τότε, για κάθε $m\geqslant k_0^2$ υπάρχει $k\geqslant k_0$ τέτοιος ώστε $k^2\leqslant m<(k+1)^2$ και από τα παραπάνω έχουμε

$$|f_m(x)|\leqslant|f_{k^2}(x)|+\frac{2}{\sqrt{m}}\leqslant|f_{k^2}(x)|+\frac{2}{k_0}<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Έπεται ότι για κάθε x για το οποίο $f_{k^2}(x)\to 0$ έχουμε επίσης $f_m(x)\to 0$. Άρα $f_m(x)\to 0$ σχεδόν παντού.

3.8. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x\in(0,2\pi)$,

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ για $x\in[0,2\pi)$. Έστω x_n ο μικρότερος θετικός αριθμός στον οποίο η $s_n(f,x)$ έχει τοπικό μέγιστο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x_n)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ στο $(0,2\pi)$ και ορίζουμε $f(0)=0$. Η 2π-περιοδική επέκταση της f είναι περιττή, άρα $a_k(f)=0$ για κάθε $k\geqslant 0$. Επίσης,

$$b_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\sin kx\,dx=\frac{1}{k}$$

για κάθε $k\geqslant 1$. Δηλαδή,

$$S(f,x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (0, 2\pi)$, άρα το κριτήριο του Dini μας δίνει

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

για κάθε $x \in (0, 2\pi)$.
(β) Παραγωγίζοντας την $s_n(f)$ παίρνουμε

$$s_n(f)'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}.$$

Αν x_n είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός στον οποίο η $s_n(f, x)$ έχει τοπικό μέγιστο, ο x_n είναι η μικρότερη θετική λύση της $s_n(f)'(x) = 0$ και από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι

$$x_n = \frac{\pi}{n+1}.$$

Τότε,

$$s_n(f, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+1} \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k\pi}{n+1}}$$

που είναι άθροισμα Riemann της $\frac{\sin x}{x}$ στο $[0, \pi]$ για διαμέριση πλάτους $\frac{\pi}{n+1} \to 0$. Έπεται ότι

$$s_n(f, x_n) \longrightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

που είναι το ζητούμενο.

3.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη 2π-περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι αύξουσα και μη αρνητική στο $[-\pi, \pi)$. Αποδείξτε ότ υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_k(f)| \leqslant \frac{M}{k}$ και $|b_k(f)| \leqslant \frac{M}{k}$ για κάθε $k \geqslant 1$.

*Υπόδειξη.*Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*) \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$ του ιδίου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r = f^{-1}(I_r)$, $r = 1, \ldots, m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ του $[-\pi, \pi]$, όπου $[b_s, b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s = \inf\{f(x) : b_s \leqslant x \leqslant b_{s+1}\}$, τότε $|f(x) - t_s| \leqslant \frac{1}{m}$ στο (b_s, b_{s+1}). Επίσης, $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα. Αν ορίσουμε $g_m(x) = \sum_{s=1}^{N} t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)| \, dx \leqslant \frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής $(*)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)| \leqslant M$, τότε από την $(**)$ παίρνουμε

$$|k\widehat{f}(k)| \leqslant |k\widehat{g_m}(k)| + |k||\widehat{f}(k) - \widehat{g_m}(k)| \leqslant M + |k| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)| \, dx \leqslant M + |k| \frac{1}{m}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m \to \infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)| \leqslant M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s,b_{s+1}]}$: αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{b_s}^{b_{s+1}} e^{-ikx}dx = \frac{e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi ik}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x) = \sum_{s=1}^N t_s\chi_{[b_s,b_{s+1}]}(x)$,

$$2\pi ik\widehat{g}(k) = \sum_{s=1}^N t_s(e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}) = t_1e^{-ib_1x} - t_Ne^{-ib_{N+1}x} + \sum_{s=2}^N e^{-ikb_s}(t_s - t_{s-1}).$$

Συνεπώς,

$$2\pi|k\widehat{g}(k)| \leqslant |t_1| + |t_N| + \sum_{k=2}^N (t_s - t_{s-1}) = |t_1| + |t_N| + (t_N - t_1) \leqslant 4\|f\|_\infty,$$

διότι $t_N - t_1 \leqslant \|f\|_\infty - (-\|f\|_\infty) = 2\|f\|_\infty$. Έπεται το ζητούμενο, με $M = 2\|f\|_\infty/\pi$.

3.10. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

αποδείξτε ότι $s_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση, με σειρά Fourier

$$S(f,x) \sim \sum_{k=1}^\infty (a_{n_k}\cos(n_kx) + b_{n_k}\sin(n_kx))$$

για κάποια ακολουθία $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ φυσικών αριθμών που ικανοποιούν την $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \gamma$ για κάποιον $\gamma > 1$ και κάθε $k \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι $s_{n_k}(f,x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $g_n := s_n(f) - \sigma_n(f)$. Χρησιμοποιώντας την $\sigma_n = \frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n}$ και την υπόθεση, θα δείξουμε ότι $g_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)| &= \frac{|(s_0 - s_n) + (s_1 - s_n) + \cdots (s_{n-1} - s_n)|}{n}\\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^n\sum_{k=j}^n (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|\\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j=1}^k 1\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|\\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^n k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k|a_k\cos kx + b_k\sin kx|.\end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη ανισότητα $|a\cos\theta + b\sin\theta| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε:

$$\|s_n(f) - \sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$. Από το θεώρημα του Fejér ξέρουμε $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε x. Από την τριγωνική ανισότητα

$$|f(x) - s_n(f,x)| \leqslant |f(x) - \sigma_n(f,x)| + \|\sigma_n(f) - s_n(f)\|_\infty \to 0$$

σχεδόν για κάθε x.

(β) Όπως στο (α) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{m} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} = 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Από το Λήμμα Riemann-Lebesgue υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} \leqslant \epsilon$ για κάθε $k \geqslant k_0$. Η $\sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$ είναι επίσης φραγμένη από κάποιον $M > 0$. Για $m > k_0$ γράφουμε

$$\frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{m} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} = \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{k_0-1} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} + \frac{1}{n_m} \sum_{k=k_0}^{m} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}.$$

Είναι φανερό ότι

$$\frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{k_0-1} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} \longrightarrow 0$$

όταν $m \to \infty$. Για το δεύτερο άθροισμα έχουμε

$$\frac{1}{n_m} \sum_{k=k_0}^{m} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} \leqslant \epsilon \sum_{k=k_0}^{m} \frac{n_k}{n_m}.$$

Από την υπόθεση, για κάθε $k_0 \leqslant k \leqslant m$ έχουμε

$$n_k \leqslant \frac{1}{\gamma} n_{k+1} \leqslant \frac{1}{\gamma^2} n_{k+2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{\gamma^{m-k}} n_m.$$

Άρα,

$$\frac{1}{n_m} \sum_{k=k_0}^{m} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} \leqslant \epsilon \sum_{k=k_0}^{m} \frac{1}{\gamma^{m-k}} = \epsilon \sum_{s=0}^{m-k_0} \frac{1}{\gamma^s} \leqslant \frac{\gamma}{\gamma - 1} \epsilon.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{m} n_k \sqrt{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} \leqslant \frac{\gamma}{\gamma - 1} \epsilon$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται το ζητούμενο.