

Αναλυτική Θεωρία Αριθμών

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2022

Περιεχόμενα

1	Το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής	1
2	Αριθμητικές συναρτήσεις και γινόμενο Dirichlet	11
3	Μέσοι όροι αριθμητικών συναρτήσεων	29
4	Στοιχειώδη αποτελέσματα για την κατανομή των πρώτων	47
5	Το θεώρημα των πρώτων αριθμών	63
6	Σειρές Dirichlet	67
7	Πρώτοι σε αριθμητικές προόδους	75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής

1.1. Ολοκληρώστε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 1.2.5, 1.3.8 και 1.5.1.

Υπόδειξη. Οι αποδείξεις όλων των ισχυρισμών των Θεωρημάτων 1.2.5 και 1.5.1 είναι απλές. Για το Θεώρημα 1.3.8 αν θέλετε κοιτάξτε και την Άσκηση 1.3.

1.2. Δείξτε την εξής μορφή της ταυτότητας της διαίρεσης: αν $a, b \in \mathbb{Z}$ και $b \neq 0$, υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r τέτοιοι ώστε $a = bq + r$ και $-|b|/2 < r \leq |b|/2$.

Υπόδειξη. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $b \neq 0$. Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης, υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q_1 και r_1 τέτοιοι ώστε $a = |b|q_1 + r_1$ και $0 \leq r_1 < |b|$. Αν $r_1 \leq |b|/2$, παίρνουμε $q = \varepsilon q_1$ και $r = r_1$ όπου ε το πρόσημο του b . Τότε $a = bq + r$ και $-|b|/2 < 0 \leq r \leq |b|/2$.

Έστω ότι $|b|/2 < r_1 < |b|$. Τότε $-|b|/2 = |b|/2 - |b| < r_1 - |b| < 0$ και $a = |b|(q_1 + 1) + (r_1 - |b|)$, οπότε αν πάρουμε $q = \varepsilon(q_1 + 1)$ και $r = r_1 - |b|$ έχουμε $a = bq + r$ και $-|b|/2 < r < 0 \leq |b|/2$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Z}$ με $-|b|/2 < r \leq |b|/2$ και $a = bq + r$. Για τη μοναδικότητα εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του αλγορίθμου της διαίρεσης.

1.3. Ο ορισμός του μέγιστου κοινού διαιρέτη γενικεύεται ως εξής: αν $k \geq 2$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ και τουλάχιστον ένας από τους a_1, \dots, a_k δεν είναι μηδέν, ορίζουμε (a_1, \dots, a_k) εκείνον τον θετικό ακέραιο d που ικανοποιεί τα εξής:

(i) $d \mid a_j$ για κάθε $j = 1, \dots, k$.

(ii) Αν $s \in \mathbb{Z}$ και $s \mid a_j$ για κάθε j , τότε $s \leq d$.

(α) Αποδείξτε ότι $(a_1, \dots, a_k) = (|a_1|, \dots, |a_k|)$ και ότι υπάρχουν ακέραιοι x_1, \dots, x_k τέτοιοι ώστε $(a_1, \dots, a_k) = a_1x_1 + \dots + a_kx_k$.

(β) Αποδείξτε ότι $((a_1, \dots, a_{k-1}), a_k) = (a_1, \dots, a_k)$.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα την ύπαρξη του $(|a_1|, \dots, |a_k|)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$I = \{|a_1|u_1 + \dots + |a_k|u_k : u_i \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}.$$

Αφού οι a_i δεν είναι όλοι μηδέν, κάποιος $|a_{i_0}| \in \mathbb{N}$. Όμως $|a_{i_0}| \in I$ (γιατί;) άρα το I είναι μη κενό. Από την αρχή του ελαχίστου, το I έχει ελάχιστο στοιχείο d το οποίο γράφεται στη μορφή $d = |a_1|x_1 + \dots + |a_k|x_k$ για κάποιους $x_i \in \mathbb{Z}$.

Θα δείξουμε ότι ο d διαιρεί κάθε στοιχείο του I . Ας υποθέσουμε ότι $z = |a_1|u_1 + \dots + |a_k|u_k \in I$. Υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq r < d$ και $z = dq + r$. Παρατηρούμε ότι

$$r = z - dq = |a_1|(u_1 - qx_1) + \dots + |a_k|(u_k - qx_k) \in I.$$

Αν ήταν $0 < r < d$ τότε ο r θα ήταν στοιχείο του I μικρότερο από τον d , άτοπο από τον τρόπο ορισμού του d . Άρα $r = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι ο d διαιρεί τον z .

Αν $a_i \neq 0$ τότε $|a_i| \in I$, επομένως $d \mid |a_i|$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Αν $s \in \mathbb{N}$ και $s \mid |a_i|$ για κάθε i , τότε

$$s \mid |a_1|x_1 + \dots + |a_k|x_k = d.$$

Ειδικότερα, $s \leq d$. Η μοναδικότητα του d αποδεικνύεται εύκολα.

Για να δείξουμε ότι $(a_1, \dots, a_k) = (|a_1|, \dots, |a_k|)$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι γενικά $a \mid b$ αν και μόνο αν $a \mid |b|$, οπότε το σύνολο των κοινών θετικών διαιρετών των a_1, \dots, a_k συμπίπτει με το σύνολο των κοινών θετικών διαιρετών των $|a_1|, \dots, |a_k|$.

(β) Θέτουμε $d_1 = ((a_1, \dots, a_{k-1}), a_k)$ και $d = (a_1, \dots, a_k)$. Τότε $d_1 \mid (a_1, \dots, a_{k-1})$ και $d_1 \mid a_k$, άρα $d \mid |a_i|$ για κάθε $i \leq k$. Από το (α),

$$d_1 \mid (|a_1|, \dots, |a_k|) = (a_1, \dots, a_k) = d.$$

Αντίστροφα, $d \mid |a_i|$ για κάθε $i \leq k-1$, άρα $d \mid (|a_1|, \dots, |a_{k-1}|) = (a_1, \dots, a_{k-1})$. Επίσης, $d \mid |a_k|$, άρα

$$d \mid ((a_1, \dots, a_{k-1}), |a_k|) = ((a_1, \dots, a_{k-1}), a_k) = d_1.$$

Αφού $d, d_1 \in \mathbb{N}$ και $d_1 \mid d$, $d \mid d_1$, παίρνουμε $d_1 = d$.

1.4. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (α) Αν a, b και c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι και $(a, b) = (a, c) = 1$ τότε $(a, bc) = 1$.
- (β) Αν $a, b \in \mathbb{N}$ και $d = (a, b)$ τότε έχουμε $a = du$ και $b = dv$ για ακεραίους $u, v \in \mathbb{N}$ με $(u, v) = 1$.
- (γ) Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ με $(r_1, r_2) = 1$ και $r_1 \mid r_2m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $r_1 \mid m$.
- (δ) Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ με $(r_1, r_2) = 1$ και $r_1 \mid m$, $r_2 \mid m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $r_1r_2 \mid m$.
- (ε) Αν $a, b, w \in \mathbb{N}$ με $(a, b) = 1$ και $w \mid ab$ τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί u, v τέτοιοι ώστε $w = uv$ και $u \mid a$, $v \mid b$. Επιπλέον έχουμε $(u, v) = 1$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $d = (a, bc)$. Αφού $(a, b) = 1$, υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $ax + by = 1$ άρα $acx + bcy = c$. Έχουμε $d \mid a$ και $d \mid bc$, άρα $d \mid (acx + bcy) = c$. Τώρα, $d \mid a$ και $d \mid c$, άρα $d \mid (a, c) = 1$. Δηλαδή, $d = 1$.

(β) Εφόσον $d \mid a$ και $d \mid b$ μπορούμε να γράψουμε $a = du$ και $b = dv$ για κάποιους $u, v \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $d = ax + by$ και συνεπώς $d = dux + dvy$ δηλαδή $1 = ux + vy$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι κάθε κοινός διαιρέτης των u και v θα πρέπει να διαιρεί το 1, επομένως $(u, v) = 1$.

(γ) Υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $r_1x + r_2y = 1$. Άρα

$$r_1mx + r_2my = m.$$

Όμως $r_1 \mid r_1mx$ και $r_1 \mid r_2m \implies r_1 \mid r_2my$. Άρα $r_1 \mid (r_1mx + r_2my) = m$.

(δ) Υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $r_1x + r_2y = 1$. Άρα

$$r_1mx + r_2my = m.$$

Αφού $r_2 \mid m$ έχουμε $r_1r_2 \mid r_1mx$ και αφού $r_1 \mid m$ έχουμε $r_1r_2 \mid r_2my$. Άρα $r_1r_2 \mid (r_1mx + r_2my) = m$.

(ε) Έστω $u = (w, a)$. Από το (β) μπορούμε να γράψουμε $w = uv$ και $a = uv'$ για φυσικούς αριθμούς v και v' με $(v, v') = 1$. Έχουμε $uv = w \mid ab = uv'b$ και συνεπώς $v \mid v'b$. Εφόσον $(v, v') = 1$ από το (γ) προκύπτει ότι $v \mid b$. Ας δούμε γιατί $(u, v) = 1$: ο (u, v) διαιρεί τον u , άρα διαιρεί τον a . Ομοίως ο (u, v) διαιρεί τον v , άρα διαιρεί τον b . Έπεται ότι $(u, v) \mid (a, b) = 1$, οπότε $(u, v) = 1$.

Για τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι $w = u_1v_1$, όπου $u_1 \mid a$ και $v_1 \mid b$. Από τις $u_1 \mid w$ και $u_1 \mid a$ βλέπουμε ότι $u_1 \mid (w, a) = u$. Επίσης από τις $u_1 \mid a$, $v_1 \mid b$ και $(a, b) = 1$ συμπεραίνουμε όπως παραπάνω ότι $(u, v_1) = 1$. Επομένως από τη σχέση $u \mid w = u_1v_1$ και το (γ) προκύπτει ότι $u \mid u_1$. Άρα $u_1 = u$ και συνεπώς $v_1 = v$.

1.5. Έστω a, b, c και n φυσικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι αν $(a, b) = 1$ και $ab = c^n$, τότε $a = x^n$ και $b = y^n$ για κάποιους φυσικούς x και y .

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a, b > 1$ αλλιώς δεν έχουμε να δείξουμε κάτι. Θεωρούμε τις αναλύσεις $a = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ και $b = q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}$ των a και b σε γινόμενα πρώτων. Αφού $(a, b) = 1$, οι p_i και q_j είναι διακεκριμένοι. Από την $ab = c^n$ έπεται ότι $p_i \mid c$ και $q_j \mid c$, άρα $c = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} q_1^{t_1} \cdots q_s^{t_s}$ για κάποιους $r_1, \dots, r_k, t_1, \dots, t_s \geq 1$. Τότε,

$$p_1^{nr_1} \cdots p_k^{nr_k} q_1^{nt_1} \cdots q_s^{nt_s} = c^n = ab = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s},$$

άρα $nr_i = a_i$ και $nt_j = b_j$. Τώρα,

$$a = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} = (p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k})^n = x^n$$

όπου $x = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, και

$$b = q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s} = (q_1^{t_1} \cdots q_s^{t_s})^n = y^n$$

όπου $y = q_1^{t_1} \cdots q_s^{t_s}$.

1.6. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο μη μηδενικών ακεραίων a, b ορίζεται μέσω της

$$[a, b] = |ab|/(a, b).$$

Αποδείξτε ότι

$$(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)].$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $b = b_1d$ και $c = c_1d$, όπου $d = (b, c)$. Τότε, λόγω της $\left(\frac{d}{(a,d)}, \frac{a}{(a,d)}\right) = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} (a, [b, c]) &= \left(a, \frac{bc}{d}\right) = (a, b_1c_1d) = (a, d) \left(\frac{a}{(d,a)}, b_1c_1 \frac{d}{(a,d)}\right) \\ &= (a, b, c) \left(\frac{a}{(a,b,c)}, b_1\right) \left(\frac{a}{(a,b,c)}, c_1\right). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, πάλι χρησιμοποιώντας την $\left(\frac{d}{(a,d)}, \frac{a}{(a,d)}\right) = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} [(a, b), (a, c)] &= \frac{(a, b)(a, c)}{((a, b), (a, c))} = \frac{(a, b_1d)(a, c_1d)}{(a, b, c)} \\ &= (a, b, c) \left(\frac{a}{(a,b,c)}, b_1 \frac{d}{(a,b,c)}\right) \left(\frac{a}{(a,b,c)}, c_1 \frac{d}{(a,b,c)}\right) \\ &= (a, b, c) \left(\frac{a}{(a,b,c)}, b_1\right) \left(\frac{a}{(a,b,c)}, c_1\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς, $(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)]$.

1.7. Έστω a, b ακέραιοι. Αποδείξτε ότι αν $(a, b) = 1$ τότε ο $(a + b, a^2 - ab + b^2)$ είναι ίσος με 1 ή 3.

Υπόδειξη. Θέτουμε $d = (a + b, a^2 - ab + b^2)$. Έχουμε $d \mid (a + b)$, άρα $d \mid (a + b)^2$, και $d \mid (a^2 - ab + b^2)$. Συνεπώς,

$$d \mid (a + b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = 3ab.$$

Παρατηρούμε ότι $(d, ab) = 1$. Πράγματι, αν $(d, ab) > 1$ τότε υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $p \mid d$ και $p \mid ab$. Από το λήμμα του Ευκλείδη έχουμε είτε $p \mid a$ ή $p \mid b$. Αν $p \mid a$ τότε από την $p \mid d \mid (a + b)$ έχουμε $p \mid (a + b) - a = b$, το οποίο είναι άτοπο αφού $(a, b) = 1$. Ομοίως, αν $p \mid b$ βλέπουμε ότι $p \mid (a + b) - b = a$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Αφού $d \mid 3ab$ και όπως είδαμε $(d, ab) = 1$, συμπεραίνουμε ότι $d \mid 3$. Άρα, ο d είναι ίσος με 1 ή 3.

1.8. Έστω a, m και n θετικοί ακέραιοι και $m \neq n$. Να βρείτε τον (A_m, A_n) όπου $A_m = a^{2^m} + 1$.

Υπόδειξη. Έστω $m > n$. Γράφουμε

$$A_m - 2 = a^{2^m} - 1 = (a^{2^n})^{2^{m-n}} - 1 = (a^{2^n} + 1) \left((a^{2^n})^{2^{m-n}-1} - (a^{2^n})^{2^{m-n}-2} + \dots - a^{2^n} + 1 \right),$$

δηλαδή $A_n = a^{2^n} + 1 \mid A_m - 2$. Αν τώρα $d = (A_m, A_n)$ έχουμε $d \mid A_m$ και $d \mid A_n \implies d \mid A_m - 2$, συνεπώς $d \mid 2$, άρα $d = 1$ ή $d = 2$. Τέλος παρατηρούμε ότι αν ο a είναι άρτιος τότε όλοι οι A_k είναι περιττοί, οπότε $d \neq 2$ και αναγκαστικά $d = 1$, ενώ αν ο a είναι περιττός τότε όλοι οι A_k είναι άρτιοι, άρα $2 \mid (A_m, A_n) = d$ και αναγκαστικά $d = 2$.

1.9. Έστω n και k θετικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι αν $(n-1)^2 \mid (n^k - 1)$ τότε $(n-1) \mid k$. Από αυτό, ή με άλλον τρόπο, αποδείξτε ότι αν ο p είναι πρώτος τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) $O(p-1)! + 1$ είναι δύναμη του p .

(β) $p = 2, 3$ ή 5 .

Υπόδειξη. Γράφουμε $n^k - 1 = (n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n + 1)$, οπότε η υπόθεση μας δίνει ότι $(n-1) \mid (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n + 1)$. Τώρα, θέτοντας $m = n-1$ έχουμε ότι

$$m \mid (m+1)^{k-1} + (m+1)^{k-2} + \dots + (m+1) + 1$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε $s \geq 1$ ισχύει ότι $m \mid [(m+1)^s - 1]$, δηλαδή $(m+1)^s = a_s m + 1$ για κάποιον $a_s \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$(m+1)^{k-1} + (m+1)^{k-2} + \dots + (m+1) + 1 = am + k$$

για κάποιον $a \in \mathbb{N}$. Αφού $m \mid am$, συμπεραίνουμε ότι

$$m \mid [(m+1)^{k-1} + (m+1)^{k-2} + \dots + (m+1) + 1 - am] = k.$$

Δηλαδή, $n-1 = m \mid k$.

1.10. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $0 \leq k \leq n$, ορίζουμε τον διωνυμικό συντελεστή

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(α) Συμφωνούμε ότι $0! = 1$ και $\binom{0}{0} = 1$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

και

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

για κάθε $1 \leq k \leq n-1$.

(β) Αποδείξτε ότι το γινόμενο k διαδοχικών φυσικών διαιρείται με $k!$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Παίρνοντας αυτόν σαν ορισμό του $\binom{n}{k}$ στην περίπτωση $k=0$, έχουμε

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \text{ και } \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

αφού $0! = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Αν $n \geq 2$ και $1 \leq k \leq n-1$, τότε

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)}{k!} + \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)}{k!} + \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)k}{k!} \\ &= \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)[(n-k) + k]}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, δείχνουμε με επαγωγή ως προς $n \geq 2$ την εξής πρόταση $P(n)$: για κάθε $1 \leq k \leq n-1$, ο $\binom{n}{k}$ είναι ακέραιος.

Αν τώρα μας δώσουν k διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ($k \geq 2$) και αν n είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς, τότε το γινόμενο τους ισούται με $Q = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$. Αφού ο

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{Q}{k!}$$

είναι ακέραιος, συμπεραίνουμε ότι $k! \mid Q$.

1.11. (α) Αν ο n είναι πρώτος και ο k είναι ακέραιος με $1 \leq k \leq n-1$, αποδείξτε ότι ο n διαιρεί τον

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(β) Ισχύει το (α) χωρίς να υποθέσουμε ότι ο n είναι πρώτος;

Υπόδειξη. (α) Από την Άσκηση 1.10 έχουμε $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς $k!(n-k)! \mid n! = n \cdot (n-1)!$. Αφού ο n είναι πρώτος, οι $k!(n-k)!$ και n είναι σχετικώς πρώτοι. Άρα, $k!(n-k)! \mid (n-1)!$, δηλαδή $\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{Z}$. Με άλλα λόγια, $n \mid \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

(β) Όχι, π.χ. αν $n = 4$ και $k = 2$, αφού $\binom{4}{2} = \binom{4}{2} = 6$.

1.12. Έστω $a, m, n \in \mathbb{N}$ με $a > 1$. Αποδείξτε ότι $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $m = qn + r$ όπου $m \geq n$, $q, r \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq r < n$ τότε

$$(a^m - 1, a^n - 1) = (a^n - 1, a^r - 1).$$

Αν $d = (a^n - 1, a^r - 1)$, τότε χρησιμοποιώντας την $a^n - 1 \mid a^{qn} - 1$ βλέπουμε ότι

$$d \mid a^r(a^{qn} - 1) + (a^r - 1) = a^{qn+r} - 1 = a^m - 1,$$

άρα $d \mid (a^m - 1, a^r - 1)$. Αντίστροφα, αν $d_1 = (a^m - 1, a^n - 1)$, έχουμε $d_1 \mid a^n - 1 \mid a^{qn} - 1$, άρα

$$d_1 \mid a^m - 1 - a^r(a^{qn} - 1) = a^r - 1.$$

Επομένως $d_1 \mid (a^n - 1, a^r - 1) = d$.

Τώρα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη. Υποθέτουμε ότι $m \geq n$. Αν $n \mid m$ το συμπέρασμα είναι προφανές, αλλιώς μπορούμε να βρούμε $q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{N}$ και $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ με $0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_1 < n$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1, \\ n &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}, \end{aligned}$$

και $(m, n) = r_n$. Ο προηγούμενος συλλογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned} (a^m - 1, a^n - 1) &= (a^n - 1, a^{r_1} - 1) = (a^{r_1} - 1, a^{r_2} - 1) = \dots = (a^{r_{n-1}} - 1, a^{r_n} - 1) \\ &= a^{r_n} - 1 = a^{(m,n)} - 1. \end{aligned}$$

1.13. Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4n - 1$.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος πρώτοι της μορφής $4n - 1$, οι q_1, q_2, \dots, q_N (υπάρχει τουλάχιστον ένας τέτοιος πρώτος, ο 3). Θεωρούμε τον αριθμό

$$S = 4q_1q_2 \dots q_N - 1.$$

Ο S είναι μεγαλύτερος από 1, άρα έχει ανάλυση $S = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ σε γινόμενο πρώτων διαιρετών, όπου $r_j \geq 1$ και όλοι οι p_j είναι περιττοί αφού ο S είναι περιττός. Αν όλοι οι p_j ήταν της μορφής $4k + 1$, τότε το γινόμενό τους θα ήταν κι αυτό της μορφής $4k + 1$, ενώ ο S είναι της μορφής $4k - 1$. Άρα ο S έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη p της μορφής $4n - 1$.

Αφού οι q_1, q_2, \dots, q_N είναι όλοι οι πρώτοι της μορφής $4n - 1$, συμπεραίνουμε ότι $p = q_i$ για κάποιον $i \leq N$. Όμως τότε, $p \mid 4q_1q_2 \dots q_N$ και $p \mid S$, άρα $p \mid (S - 4q_1q_2 \dots q_N) = 1$, το οποίο είναι άτοπο. Το άτοπο δείχνει ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4n - 1$.

1.14. Υποθέτουμε ότι ο $2^n + 1$ είναι πρώτος για κάποιον $n \geq 2$ (οι πρώτοι αυτής της μορφής λέγονται πρώτοι του Fermat). Αποδείξτε ότι ο n είναι δύναμη του 2.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $2^n + 1$ είναι πρώτος για κάποιον $n \geq 2$. Αν ο n δεν είναι δύναμη του 2, τότε γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $n = 2^k s$, όπου $s > 1$ περιττός φυσικός. Αν $x = 2^{2^k}$ τότε

$$2^n + 1 = x^s + 1 = (x + 1)(x^{s-1} - x^{s-2} + \dots - x + 1).$$

Αφού $1 < x + 1 < x^s + 1$, ο $2^n + 1$ είναι σύνθετος. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο n είναι δύναμη του 2.

1.15. Υποθέτουμε ότι ο $2^n - 1$ είναι πρώτος για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ (οι πρώτοι αυτής της μορφής λέγονται πρώτοι του Mersenne). Αποδείξτε ότι ο n είναι πρώτος.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $2^n - 1$ είναι πρώτος για κάποιον $n \geq 2$. Αν ο n δεν είναι πρώτος, τότε υπάρχουν $d, k > 1$ τέτοιοι ώστε $n = dk$. Από την ταυτότητα

$$2^n - 1 = (2^d)^k - 1 = (2^d - 1)(2^{d(k-1)} + \dots + 2^d + 1)$$

βλέπουμε ότι

$$2^d - 1 \mid 2^n - 1.$$

Αφού $1 < 2^d - 1 < 2^n - 1$, ο $2^n - 1$ είναι σύνθετος. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο n είναι πρώτος.

Σημείωση: Δεν ισχύει το αντίστροφο. Ο $p = 11$ είναι πρώτος, αλλά ο $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ είναι σύνθετος.

1.16. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι ο \sqrt{p} είναι άρρητος.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{p} = m/n$ για κάποιους $m, n \in \mathbb{N}$. Αν $r = m/(m, n)$ και $s = n/(m, n)$, έχουμε $\sqrt{p} = r/s$ και $(r, s) = 1$. Τότε, $p = r^2/s^2$ δηλαδή $p \mid ps^2 = r^2$. Αφού ο p είναι πρώτος, παίρνουμε $p \mid r$, άρα $r = px$ για κάποιον $x \in \mathbb{N}$. Επιστρέφοντας στην $ps^2 = r^2$ έχουμε $ps^2 = p^2x^2 \implies px^2 = s^2$. Όπως πριν, $p \mid px^2 = s^2$, άρα $p \mid s$. Όμως τότε $p \mid (r, s) = 1$, άτοπο. Άρα ο \sqrt{p} είναι άρρητος.

1.17. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$, $k \geq 1$, $a_k \neq 0$, με συντελεστές ακεραίους, για το οποίο όλοι οι αριθμοί $|f(n)|$, $n \geq 0$ να είναι πρώτοι.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι για το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$, $k \geq 1$, $a_k \neq 0$, έχουμε $|f(n)| = \text{πρώτος}$ για κάθε n . Ειδικότερα,

$$|f(1)| = p$$

όπου p πρώτος. Παρατηρούμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{N}$,

$$f(1 + sp) = a_0 + a_1(1 + sp) + \dots + a_k(1 + sp)^k = a_0 + a_1 \cdot 1 + \dots + a_k \cdot 1^k + Bp = f(1) + Bp,$$

όπου $B \in \mathbb{Z}$. Άρα $p \mid f(1) + Bp = f(1 + sp) \mid |f(1 + sp)|$. Όμως ο $|f(1 + sp)| = q$ είναι πρώτος από την υπόθεση, και αφού $p \mid q$ έπεται ότι $p = q$. Δηλαδή,

$$|f(1 + sp)| = p$$

για κάθε $s \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $\lim_{s \rightarrow \infty} |f(1 + sp)| = \infty$ (η f είναι πολυώνυμο βαθμού $k \geq 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$).

1.18. Έστω $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι ο $(n + 1)! + k$ είναι σύνθετος για κάθε $k = 2, \dots, n + 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχουν οσοδήποτε μακριά διαστήματα διαδοχικών σύνθετων αριθμών.

Υπόδειξη. Για κάθε $k = 2, \dots, n + 1$ έχουμε $k \mid (n + 1)!$ και $k \mid k$, άρα $k \mid (n + 1)! + k$. Δηλαδή ο $(n + 1)! + k$ είναι σύνθετος για κάθε $k = 2, \dots, n + 1$.

Οι $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1)$ είναι n διαδοχικοί σύνθετοι φυσικοί αριθμοί.

1.19. Έστω $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι ο $n!$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο: δεν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n! = m^2$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο n είναι άρτιος. Τότε $n/2 \in \mathbb{N}$ και από το αίτημα του Bertrand υπάρχει πρώτος p με $n/2 < p < n$. Παρατηρούμε ότι ο p δεν διαιρεί κανέναν $x \leq n$ εκτός από τον εαυτό του: τα πολλαπλάσια του p είναι οι αριθμοί $p, 2p, 3p, \dots$, και έχουμε $kp > n$ για κάθε $k \geq 2$.

Άρα στην ανάλυση του $n! = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ο p θα εμφανίζεται με εκθέτη 1, δηλαδή με περιττό εκθέτη. Τότε, ο $n!$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο: αν ήταν, όλοι οι πρώτοι διαιρέτες του θα είχαν άρτιο εκθέτη, άρα και ο p .

Αν $n = 2s + 1$, βρίσκουμε πρώτο p με $s < p < 2s$. Πάλι, $p \geq s + 1$ άρα $2p \geq 2s + 2 > n$, οπότε εφαρμόζεται το προηγούμενο επιχείρημα: ο p δεν διαιρεί κανέναν $x \leq n$ εκτός από τον εαυτό του, άρα ο εκθέτης του είναι 1 στην ανάλυση του $n!$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

1.20. Αν $n \geq 2$ αποδείξτε ότι το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

δεν είναι ακέραιος.

Υπόδειξη. Έστω $n \geq 2$. Υπάρχει μοναδικός $s \geq 1$ τέτοιος ώστε $2^s \leq n < 2^{s+1}$. Ορίζουμε B να είναι το γινόμενο όλων των περιττών φυσικών $m \leq n$. Παρατηρήστε ότι ο B είναι περιττός. Ας υποθέσουμε ότι $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^{s-1}B}{k} = 2^{s-1}B \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \in \mathbb{N}.$$

Αν $k \leq n$ και $k \neq 2^s$, τότε ο k γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $k = 2^\ell m$, όπου $0 \leq \ell < s$ και ο m είναι περιττός μικρότερος ή ίσος από n , άρα $2^\ell \mid 2^s$ και $m \mid B$. Συνεπώς, $k \mid 2^{s-1}B$ και έπεται ότι

$$\frac{B}{2} = \frac{2^{s-1}B}{2^s} = \sum_{k=1}^n \frac{2^{s-1}B}{k} - \sum_{k \neq 2^s} \frac{2^{s-1}B}{k} \in \mathbb{N}.$$

Αυτό είναι άτοπο αφού ο B είναι περιττός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αριθμητικές συναρτήσεις και γινόμενο Dirichlet

2.1. (Η συνάρτηση $\Lambda(n)$ του von Mangoldt). Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ορίζουμε

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & , \text{ αν } n = p^m \text{ για κάποιον } p \text{ και κάποιον } m \geq 1 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

(α) Είναι η $\Lambda(n)$ πολλαπλασιαστική;

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ,

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Υπόδειξη. (α) Η $\Lambda(n)$ δεν είναι πολλαπλασιαστική, διότι $\Lambda(1) = 0$.

(β) Η ισότητα ισχύει για $n = 1$, διότι και τα δύο μέλη της $\ln 1 = \Lambda(1)$ είναι ίσα με 0. Έστω $n > 1$. Γράφουμε τον n στη μορφή $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ και έχουμε

$$\ln n = \sum_{i=1}^k \alpha_i \ln p_i.$$

Στο άθροισμα $\sum_{d|n} \Lambda(d)$ οι μόνοι μη μηδενικοί όροι είναι αυτοί που αντιστοιχούν σε διαιρέτες της μορφής $p_i^{s_i}$ όπου $1 \leq s_i \leq \alpha_i$. Για κάθε τέτοιο διαιρέτη έχουμε $\Lambda(p_i^{s_i}) = \ln p_i$, συνεπώς

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^k \sum_{s_i=1}^{\alpha_i} \Lambda(p_i^{s_i}) = \sum_{i=1}^k \sum_{s_i=1}^{\alpha_i} \ln p_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \ln p_i.$$

Έπεται το ζητούμενο.

2.2. Μια αριθμητική συνάρτηση $f(n)$ λέγεται πλήρως πολλαπλασιαστική αν για οποιουδήποτε θετικούς ακέραιους m και n ,

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

(α) Αποδείξτε ότι αν η $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, τότε η Dirichlet αντίστροφη της $f(n)$ είναι η $\mu(n)f(n)$.

(β) Αποδείξτε ότι αν η $f(n)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση και $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ για κάθε θετικό ακέραιο n , τότε η $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $g(n) = \mu(n)f(n)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική έχουμε

$$(g * f)(n) = \sum_{d|n} g(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d)f(n) = f(n) \sum_{d|n} \mu(d) = f(n)I(n).$$

Για $n = 1$ έχουμε $f(1)I(1) = I(1)$ διότι $f(1) = 1$, ενώ για $n > 1$ έχουμε $f(n)I(n) = I(n)$ διότι $I(n) = 0$.

Δηλαδή, $(g * f)(n) = I(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $g * f = I$, το οποίο σημαίνει ότι $f^{-1}(n) = g(n) = \mu(n)f(n)$.

(β) Αφού η f είναι πολλαπλασιαστική, για να δείξουμε ότι είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αρκεί να δείξουμε ότι $f(p^s) = f(p)^s$ για κάθε πρώτο p και κάθε $s > 1$ (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση ότι $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ παίρνουμε

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = I(n) = 0$$

για κάθε $n > 1$. Για $n = p^s$, οι διαιρέτες του n είναι οι p^t , $0 \leq t \leq s$ και $\mu(p^t) = 0$ αν $t > 1$, άρα η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$\mu(1)f(1)f(p^s) + \mu(p)f(p)f(p^{s-1}) = 0$$

δηλαδή

$$f(p^s) - f(p)f(p^{s-1}) = 0$$

αφού $\mu(1) = f(1) = 1$ και $\mu(p) = -1$. Άρα, $f(p^s) = f(p)f(p^{s-1})$. Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι $f(p^s) = f(p)^s$.

2.3. Αποδείξτε ότι

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Και τα δύο μέλη της προτεινόμενης ισότητας είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις του n και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι ταυτίζονται όταν ο n είναι δύναμη πρώτου. Αν $n = p^r$ τότε

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = 1 + \frac{(-1)^2}{p-1} = \frac{p}{p-1} = \frac{n}{\varphi(n)}.$$

2.4. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ,

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n).$$

Υπόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων τότε ο μόνος d με την ιδιότητα $d^2 | n$ είναι ο 1, άρα

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu(1) = 1 = \mu^2(n).$$

Αλλιώς, έχουμε $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} m$, όπου $\alpha_i \geq 2$ και ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων. Οι φυσικοί d για τους οποίους $d^2 | n$ και $\mu(d) \neq 0$ είναι ακριβώς οι διαιρέτες του $p_1 \cdots p_r$. Συνεπώς,

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \cdots p_r} \mu(d) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^r = 0 = \mu^2(n).$$

2.5. (Άθροισμα Ramanujan). Το άθροισμα Ramanujan ορίζεται μέσω της

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e^{2\pi i \frac{a}{q} n}.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} d \mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση $c_q(n)$ όταν $n = 0$.

(γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $c_q(n)$ όταν $q = 1$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι αν $d | q$ τότε η απεικόνιση $a \mapsto b := aq/d$ είναι 1-1 και επί από το σύνολο των $a < d$ με $(a, d) = 1$ στο σύνολο των $b < q$ με $(b, q) = q/d$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \sum_{d|q} c_d(n) &= \sum_{d|q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,d)=1}}^d e^{2\pi i \frac{a}{d} n} = \sum_{d|q} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,d)=q/d}}^q e^{2\pi i \frac{b}{q} n} \\ &= \sum_{b=1}^q e^{2\pi i \frac{b}{q} n}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $t_{q,n} = e^{2\pi i \frac{n}{q}}$. Αν $q | n$ τότε $t_{q,n} = 1$, συνεπώς

$$\sum_{d|q} c_d(n) = \sum_{b=1}^q t_{q,n}^b = q.$$

Αν $q \nmid n$ τότε $t_{q,n} \neq 1$, συνεπώς

$$\sum_{d|q} c_d(n) = t_{q,n} \frac{t_{q,n}^q - 1}{t_{q,n} - 1} = 0$$

αφού $t_{q,n}^q = e^{2\pi i n} = 1$. Δηλαδή, αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g(q) = 0$ αν $q \nmid n$ και $g(q) = q$ αν $q \mid n$, και αν θέσουμε $f(q) = c_q(n)$, έχουμε

$$\sum_{d|q} f(d) = g(q).$$

Από τον τύπο αντιστροφής του Möbius έπεται ότι

$$c_q(n) = f(q) = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) g(d) = \sum_{d|(q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) g(d) = \sum_{d|(q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d,$$

όπου η προτελευταία ισότητα εξηγείται από το γεγονός ότι για έναν $d \mid q$ έχουμε $g(d) \neq 0$ αν και μόνο αν $d \mid n$, δηλαδή αν και μόνο αν $d \mid (q, n)$.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$c_q(0) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \mathbf{1} = \varphi(q).$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $c_1(n) = e^{2\pi i n} = 1$.

2.6. Για πραγματικό ή μιγαδικό α και για κάθε θετικό ακέραιο n , ορίζουμε

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha,$$

το άθροισμα των α -οστών δυνάμεων των διαιρετών του n .

(α) Αποδείξτε ότι η $\sigma_\alpha(n)$ είναι πολλαπλασιαστική.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\sigma_\alpha(p^k) = \begin{cases} \frac{p^{\alpha(k+1)} - 1}{p^\alpha - 1} & , \text{αν } \alpha \neq 0 \\ k + 1 & , \text{αν } \alpha = 0 \end{cases}.$$

(γ) Να βρείτε την Dirichlet αντίστροφη της $\sigma_\alpha(n)$.

(δ) Ένας θετικός ακέραιος n λέγεται τέλειος αν ισούται με το άθροισμα των θετικών διαιρετών του που είναι μικρότεροι από n . Με άλλα λόγια, ο n είναι τέλειος αν

$$\sigma(n) := \sigma_1(n) = 2n.$$

Αποδείξτε ότι αν ο $2^p - 1$ είναι πρώτος, τότε ο $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ είναι τέλειος.

(ε) Αποδείξτε ότι αν ο n είναι άρτιος τέλειος αριθμός, τότε ο n πρέπει να είναι της μορφής

$$2^{k-1}(2^k - 1),$$

όπου ο $2^k - 1$ είναι πρώτος.

Υπόδειξη. (α) Αν $N^\alpha(n) = n^\alpha$ τότε η N^α είναι πλήρως πολλαπλασιαστική και $\sigma_\alpha = N^\alpha * u$. Συνεπώς, η σ_α είναι πολλαπλασιαστική.

(β) Έστω $\alpha \neq 0$. Έχουμε

$$\sigma_\alpha(p^k) = \sum_{j=0}^k p^{\alpha j} = \sum_{j=0}^k (p^\alpha)^j = \frac{p^{\alpha(k+1)} - 1}{p^\alpha - 1}.$$

Αν $\alpha = 0$ τότε, προφανώς, $p^{\alpha j} = 1$ για κάθε $j = 0, 1, \dots, k$, άρα

$$\sigma_\alpha(p^k) = \sum_{j=0}^k p^{\alpha j} = k + 1.$$

(γ) Έχουμε $\sigma_\alpha = N^\alpha * u$ και $(N^\alpha)^{-1} = \mu \cdot N^\alpha$ αφού η N^α είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, άρα

$$\sigma_\alpha^{-1} = u^{-1} * (N^\alpha)^{-1} = \mu * (\mu N^{\alpha \text{ alpha}}).$$

Δηλαδή,

$$\sigma_\alpha^{-1}(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \mu(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

(δ) Έστω $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, όπου ο $2^p - 1$ είναι πρώτος. Παρατηρούμε ότι $(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σ είναι πολλαπλασιαστική παίρνουμε

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} \cdot 2^p$$

αφού $\sigma(q) = q + 1$ για κάθε πρώτο q . Άρα,

$$\sigma(n) = 2 \cdot 2^{p-1}(2^p - 1) = 2n,$$

το οποίο δείχνει ότι ο n είναι τέλειος.

(ε) Έστω n ένας άρτιος τέλειος αριθμός. Τότε ο n γράφεται στη μορφή $n = 2^{k-1}m$, όπου $k > 1$ και ο m είναι περιττός. Θα δείξουμε ότι $m = 2^k - 1$ και ότι ο m είναι πρώτος. Αφού ο n είναι τέλειος και $(2^{k-1}, m) = 1$, έχουμε

$$2n = \sigma(n) = \sigma(2^{k-1})\sigma(m) = (2^k - 1)\sigma(m),$$

δηλαδή

$$\sigma(m) = \frac{2^k m}{2^k - 1} = m + \frac{m}{2^k - 1}.$$

Αφού $\sigma(m) \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι ο $m/(2^k - 1)$ είναι φυσικός και βέβαια διαιρεί τον m . Στο δεξιά μέλος της προηγούμενης ισότητας έχουμε το άθροισμα δύο θετικών διαιρετών του m ενώ στο αριστερό μέλος έχουμε το άθροισμα όλων των θετικών διαιρετών του m . Αναγκαστικά, οι m και $m/(2^k - 1)$ είναι οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του m , δηλαδή ο m είναι πρώτος και $m/(2^k - 1) = 1$, το οποίο δείχνει ότι $m = 2^k - 1$. Έπεται ότι $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ με τον $2^k - 1$ πρώτο.

2.7. (Η συνάρτηση $\lambda(n)$ του Liouville). Έστω $\lambda(1) = 1$. Έστω n τυχών θετικός ακέραιος που δίνεται από την $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Ορίζουμε

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}.$$

Αποδείξτε ότι η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική και ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν ο } n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο} \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, να βρείτε την λ^{-1} .

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda(n) = (-1)^{\sum_p \alpha_p(n)}$$

όπου $n = \prod_p p^{\alpha_p(n)}$, το γινόμενο είναι πάνω από όλους τους πρώτους και $\alpha_p(n) = 0$ αν $p \nmid n$ ενώ $\alpha_p(n)$ είναι ο εκθέτης του p στην ανάλυση του n αν $p \mid n$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$mn = \prod_p p^{\alpha_p(m)} \prod_p p^{\alpha_p(n)} = \prod_p p^{\alpha_p(m) + \alpha_p(n)},$$

δηλαδή $\alpha_p(mn) = \alpha_p(m) + \alpha_p(n)$, απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda(mn) &= (-1)^{\sum_p \alpha_p(mn)} = (-1)^{\sum_p (\alpha_p(m) + \alpha_p(n))} = (-1)^{\sum_p \alpha_p(m) + \sum_p \alpha_p(n)} \\ &= (-1)^{\sum_p \alpha_p(m)} \cdot (-1)^{\sum_p \alpha_p(n)} = \lambda(m)\lambda(n). \end{aligned}$$

Άρα, η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

Θέτουμε $f(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$. Η f είναι πολλαπλασιαστική, άρα αν $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ έχουμε

$$f(n) = \prod_{i=1}^k f(p_i^{\alpha_i}).$$

Παρατηρούμε ότι ο n είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνο αν όλοι οι α_i είναι άρτιοι. Θα έχουμε λοιπόν

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν ο } n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο} \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases},$$

αν δείξουμε ότι για κάθε πρώτο p και $s \geq 1$ ισχύει $f(p^s) = 1$ αν ο s είναι άρτιος και $f(p^s) = 0$ αν ο s είναι περιττός. Αυτό ελέγχεται εύκολα, αφού

$$f(p^s) = \lambda(1) + \lambda(p) + \lambda(p^2) + \cdots + \lambda(p^s) = \sum_{j=0}^s (-1)^j.$$

Τέλος, αφού η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, έχουμε

$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n).$$

Δηλαδή, $\lambda^{-1}(n) = 0$ αν ο n δεν είναι ελεύθερος τετραγώνων, $\lambda^{-1}(1) = 1$ και $\lambda(n) = 1$ αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων, αφού αν $n = p_1 \cdot p_k$ έχουμε $\mu(n) = \lambda(n) = (-1)^k$.

2.8. Έστω $d(n)$ ο πλήθος των θετικών διαιρετών του n . Με άλλα λόγια,

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = (u * u)(n).$$

Αποδείξτε ότι

$$\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}.$$

Υπόδειξη. Όταν ο k διατρέχει τους θετικούς διαιρετές του n , τότε ο n/k διατρέχει κι αυτός τους θετικούς διαιρετές του n . Άρα

$$\left(\prod_{k|n} k \right)^2 = \prod_{k|n} k \cdot \prod_{k|n} \frac{n}{k} = \prod_{k|n} n = n^{d(n)},$$

αφού το πλήθος των θετικών διαιρετών του n ισούται με $d(n)$. Έπεται το ζητούμενο.

2.9. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k|n} d(k)^3 = \left(\sum_{k|n} d(k) \right)^2.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε τις αριθμητικές συναρτήσεις

$$A(n) = \sum_{k|n} d(k)^3 \quad \text{και} \quad B(n) = \sum_{k|n} d(k).$$

Δείχνουμε πρώτα ότι οι A και B είναι πολλαπλασιαστικές: αν $(m, n) = 1$, τότε για $r = 1, 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k|mn} d(k)^r &= \sum_{k_1|m} \sum_{k_2|n} d(k_1 k_2)^r = \sum_{k_1|m} \sum_{k_2|n} d(k_1)^r d(k_2)^r \\ &= \left(\sum_{k_1|m} d(k_1)^r \right) \left(\sum_{k_2|n} d(k_2)^r \right), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι η d είναι πολλαπλασιαστική και το ότι όταν οι k_1, k_2 διατρέχουν τους θετικούς διαιρετές των m, n αντίστοιχα, τότε ο $k_1 k_2$ διατρέχει τους θετικούς διαιρετές του mn , και $(k_1, k_2) = 1$ αφού $(m, n) = 1$.

Αφού η B είναι πολλαπλασιαστική, το ίδιο ισχύει και για την B^2 . Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $A(p^k) = B^2(p^k)$. Έχουμε:

$$A(p^k) = d(1)^3 + d(p)^3 + \dots + d(p^k)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3$$

και

$$B^2(p^k) = (d(1) + d(p) + \dots + d(p^k))^2 = (1 + 2 + \dots + (k+1))^2.$$

Όμως,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = (1+2+\cdots+(k+1))^2,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

2.10. (α) Αποδείξτε ότι ο $d(n)$ είναι περιττός αν και μόνο αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο.

(β) Αποδείξτε ότι $d(n) \leq d(2^n - 1)$ για κάθε φυσικό n .

(γ) Αποδείξτε ότι $d(n) < 2\sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(δ) Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους ισχύει $d(2n) = n$.

Υπόδειξη. (α) Αν $n = 1$, τότε $d(n) = 1$ και το ζητούμενο ισχύει: ο 1 είναι τέλειο τετράγωνο και ο $d(1)$ περιττός. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n \geq 2$ και ότι $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ είναι η κανονική αναπαράσταση του n . Τότε,

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1),$$

άρα ο $d(n)$ είναι περιττός αν και μόνο αν όλοι οι k_j είναι άρτιοι (αν κάποιος k_j είναι περιττός τότε ο $d(n)$ διαιρείται με τον άρτιο $k_j + 1$, δηλαδή είναι άρτιος). Από την άλλη πλευρά, όλοι οι k_j είναι άρτιοι αν και μόνο αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο. Πράγματι, αν $k_j = 2s_j$ τότε $n = m^2$ όπου $m = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_r^{s_r}$. Το αντίστροφο ελέγχεται εντελώς ανάλογα.

(β) Έστω A το σύνολο των θετικών διαιρετών του n και B το σύνολο των θετικών διαιρετών του $2^n - 1$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $g: A \rightarrow B$ με $g(k) = 2^k - 1$. Η g είναι καλά ορισμένη: αν $k \mid n$ τότε $(2^k - 1) \mid (2^n - 1)$. Η g είναι προφανώς ένα προς ένα, άρα το A έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα έχει το B . Με άλλα λόγια, $d(n) \leq d(2^n - 1)$.

(γ) Παρατηρούμε ότι αν $d \mid n$ τότε $d \leq \sqrt{n}$ ή $n/d \leq \sqrt{n}$ (διαφορετικά θα είχαμε $n = \sqrt{n}\sqrt{n} < d \cdot (n/d) = n$) και συνεπώς $d \in \{1, 2, \dots, [\sqrt{n}]\}$ ή $n/d \in \{1, 2, \dots, [\sqrt{n}]\}$. Προκύπτει ότι το πλήθος $d(n)$ των θετικών διαιρετών του n δεν ξεπερνά το διπλάσιο του πλήθους των στοιχείων του $\{1, 2, \dots, [\sqrt{n}]\}$, επομένως $d(n) \leq 2\sqrt{n}$. Εύκολα βλέπουμε από τα παραπάνω ότι η περίπτωση της ισότητας δεν υφίσταται.

(δ) Αν $d(2n) = n$, από το (γ) έχουμε $n = d(2n) < 2\sqrt{2n}$, άρα $\sqrt{n} < 2\sqrt{2}$ ή $n < 8$. Οι λύσεις με $n < 8$ είναι οι $n = 4$ και $n = 6$.

2.11. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k \mid n} \mu(k) d\left(\frac{n}{k}\right) = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{k \mid n} \mu(k) \sigma\left(\frac{n}{k}\right) = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Έχουμε $d(n) = \sum_{k \mid n} u(k)$, όπου $u(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από τον τύπο αντιστροφής του Μόβιους παίρνουμε

$$1 = u(n) = \sum_{k \mid n} \mu(k) d\left(\frac{n}{k}\right).$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο η σχέση $\sigma(n) = \sum_{k|n} N(k)$, όπου $N(k) = k$, δίνει

$$n = N(n) = \sum_{k|n} \mu(k) \sigma\left(\frac{n}{k}\right).$$

2.12. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(n) = (-1)^{n-1}$ είναι πολλαπλασιαστική και υπολογίστε το άθροισμα

$$h(n) = \sum_{k|n} (-1)^{k-1} \mu\left(\frac{n}{k}\right)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $(m, n) = 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$(-1)^{mn-1} = (-1)^{m-1} (-1)^{n-1}$$

δηλαδή ότι ο $mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1)$ είναι άρτιος. Αυτό δεν θα μπορούσε να ισχύει μόνο αν οι m, n ήταν και οι δύο άρτιοι, το οποίο αποκλείεται αφού υποθέσαμε ότι $(m, n) = 1$. Άρα η $f(n) = (-1)^{n-1}$ είναι πολλαπλασιαστική. Η συνάρτηση

$$h(n) = \sum_{k|n} (-1)^{k-1} \mu\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k|n} f(k) \mu\left(\frac{n}{k}\right)$$

είναι πολλαπλασιαστική γιατί οι f, μ είναι πολλαπλασιαστικές. Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή $h(p^k)$, όπου p πρώτος και $k \geq 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} h(p^k) &= \mu(p^k) + (-1)^{p-1} \mu(p^{k-1}) + \dots + (-1)^{p^{k-1}-1} \mu(p) + (-1)^{p^k-1} \mu(1) \\ &= (-1)^{p^{k-1}-1} (-1) + (-1)^{p^k-1} = (-1)^{p^{k-1}} + (-1)^{p^k-1}. \end{aligned}$$

Όμως αν ο p είναι περιττός πρώτος τότε ο p^{k-1} είναι περιττός και ο $p^k - 1$ είναι άρτιος, ενώ αν $p = 2$ και $k > 1$ έχουμε το αντίθετο. Συνεπώς $h(p^k) = 0$ εκτός αν $p = 2$ και $k = 1$, οπότε $h(2) = -2$. Αφού η h είναι πολλαπλασιαστική, για κάθε $n \geq 3$ έχουμε $h(n) = 0$. Τέλος $h(1) = (-1)^0 \mu(1) = 1$.

2.13. Να βρείτε μια αριθμητική συνάρτηση $f(n)$ τέτοια ώστε, για κάθε θετικό ακέραιο n ,

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Υπόδειξη. Στην Άσκηση 2.3 είδαμε ότι

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}.$$

Συνεπώς, ζητάμε $f(n)$ τέτοια ώστε

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{d|n} \frac{n}{d} f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} df(d).$$

Είναι τώρα φανερό ότι αρκεί να θεωρήσουμε την

$$f(n) = \frac{1}{n} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}.$$

Χωρίς να καταφύγουμε στην Άσκηση 2.3, παρατηρούμε ότι η ζητούμενη f πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{N} * f.$$

Η $\frac{1}{N}$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, άρα έχει αντίστροφη την $\frac{\mu}{N}$, από την Άσκηση 2.2. Έπεται ότι

$$f = \left(\frac{\mu}{N} * \frac{1}{N} \right) * f = \frac{\mu}{N} * \left(\frac{1}{N} * f \right) = \frac{\mu}{N} * \frac{1}{\varphi}.$$

2.14. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n k = \frac{n\varphi(n)}{2}$$

για κάθε $n \geq 2$.

Υπόδειξη. Έστω $n \geq 2$. Παρατηρούμε ότι αν $1 \leq k < n$ τότε $(k, n) = 1$ αν και μόνο αν $(n - k, n) = 1$. Άρα

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n k = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n (n - k).$$

Έπεται ότι

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n k = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n k + \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n (n - k) \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n n = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

2.15. Αποδείξτε ότι $\varphi(n)d(n) \geq n$ για $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι αν ο p είναι πρώτος και $k \geq 1$ τότε

$$\varphi(p^k)d(p^k) = p^{k-1}(p-1)(k+1) \geq p^k$$

διότι $(p-1)(k+1) \geq 2p-2 \geq p$. Τώρα, αφού οι φ και d είναι πολλαπλασιαστικές, αν $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} \geq 2$ έχουμε

$$\varphi(n)d(n) = \prod_{i=1}^s \varphi(p_i^{k_i}) \cdot \prod_{i=1}^s d(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^s \varphi(p_i^{k_i})d(p_i^{k_i}) \geq \prod_{i=1}^s p_i^{k_i} = n.$$

Τέλος, είναι φανερό ότι $\varphi(1)d(1) = 1$.

2.16. Έστω $n \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $\varphi(n) \mid n$. Αποδείξτε ότι $n = 2^a 3^b$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Υπόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $n = 2^a 3^b p_3^{k_3} \cdots p_r^{k_r}$, όπου $a, b \geq 0$ και $k_i > 0$, είναι η κανονική αναπαράσταση του n , και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αν $a, b > 0$, έχουμε

$$\varphi(n) = 2^{a-1} 3^{b-1} \cdot 2 \cdot p_3^{k_3-1} (p_3 - 1) \cdots p_r^{k_r-1} (p_r - 1),$$

και από την υπόθεση,

$$2^a 3^{b-1} (p_3 - 1) \cdots (p_r - 1) \mid 2^a 3^b p_3 \cdots p_r.$$

Όμως, η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί το δεξιό μέλος είναι 2^a ενώ το αριστερό μέλος διαιρείται με 2^{a+1} αφού οι $p_3 - 1, \dots, p_r - 1$ είναι άρτιοι.

Έστω ότι $n = 2^a p_3^{k_3} \cdots p_r^{k_r}$, όπου $a > 0$, $p_i \geq 5$ και $k_i > 0$. Όπως πριν, παίρνουμε

$$2^{a-1} (p_3 - 1) \cdots (p_r - 1) \mid 2^a p_3 \cdots p_r \implies (p_3 - 1) \cdots (p_r - 1) \mid 2 p_3 \cdots p_r.$$

Όμως τότε $(p_3 - 1) \mid 2 p_2 \cdots p_r$, το οποίο είναι άτοπο γιατί θα είχαμε $(p_3 - 1) \mid 2$ ή $(p_3 - 1) \mid p_j$ για κάποιον j , άτοπο αφού ο $p_3 - 1$ είναι άρτιος και μεγαλύτερος ή ίσος του 4.

2.17. Υποθέτουμε ότι $p_1 < p_2 < \cdots < p_N$ είναι όλοι οι πρώτοι αριθμοί. Αποδείξτε ότι

$$\varphi(p_1 p_2 \cdots p_N) = 1$$

και καταλήξτε σε άτοπο (έτσι, παίρνετε άλλη μια απόδειξη για την απειρία των πρώτων αριθμών).

Υπόδειξη. Έστω $1 < x < p_1 p_2 \cdots p_N$. Τότε ο x έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη, ο οποίος είναι κάποιος από τους p_i , $i = 1, \dots, N$ (έχουμε υποθέσει ότι αυτοί είναι όλοι οι πρώτοι). Άρα $(x, p_1 p_2 \cdots p_N) > 1$. Έπεται ότι

$$\varphi(p_1 p_2 \cdots p_N) = 1$$

(από όλους τους $1 \leq x \leq p_1 p_2 \cdots p_N$, μόνο ο 1 είναι σχετικά πρώτος προς τον $p_1 p_2 \cdots p_N$). Από την άλλη πλευρά, η φ είναι πολλαπλασιαστική, άρα

$$\varphi(p_1 p_2 \cdots p_N) = \varphi(p_1) \varphi(p_2) \cdots \varphi(p_N) \geq \varphi(2) \varphi(3) = 1 \cdot 2 = 2$$

(οι πρώτοι δύο από τους p_1, \dots, p_N είναι οι $p_1 = 2$ και $p_2 = 3$). Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

2.18. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k \mid n} \sigma(k) \varphi\left(\frac{n}{k}\right) = nd(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι φ, σ και d είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις, ελέγχουμε ότι οι $nd(n)$ και $h(n) = \sum_{k \mid n} \sigma(k) \varphi\left(\frac{n}{k}\right)$ είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $h(p^r) = p^r d(p^r)$. Έχουμε $\sigma(p^r) = \sum_{k=0}^r p^k$, άρα

$$\begin{aligned} h(p^r) &= \sigma(p^r) \varphi(1) + \sum_{k=0}^{r-1} \sigma(p^k) \varphi(p^{r-k}) = \sum_{k=0}^r p^k + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} p^{r-k-1} (p - 1) \\ &= \sum_{k=0}^r p^k + \sum_{k=0}^{r-1} (p^{k+1} - 1) p^{r-k-1} = \sum_{k=0}^r p^k + \sum_{k=0}^{r-1} (p^r - p^{r-k-1}) \\ &= p^r + \sum_{k=0}^{r-1} p^k + (r + 1) p^r - \sum_{k=0}^{r-1} p^{r-k-1} = (r + 1) p^r = p^r d(p^r), \end{aligned}$$

αφού $\sum_{k=0}^{r-1} p^k = \sum_{k=0}^{r-1} p^{r-k-1}$.

2.19. Έστω $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ πολλαπλασιαστική αριθμητική συνάρτηση. Αν $m, n \in \mathbb{N}$, $d = (m, n)$ και $D = mn/d$ αποδείξτε ότι

$$f(m)f(n) = f(d)f(D).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $m = \prod_{i=1}^t p_i^{r_i}$ και $n = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i}$ όπου p_1, p_2, \dots, p_t είναι διακεκριμένοι πρώτοι και r_i, s_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Τότε $d = (m, n) = \prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$ και $D = mn/d = \prod_{i=1}^t p_i^{\beta_i}$ όπου $\alpha_i = \min\{r_i, s_i\}$ και $\beta_i = (r_i + s_i) - \min\{r_i, s_i\}$. Παρατηρώντας ότι $r_i + s_i = \alpha_i + \beta_i$ για κάθε i , από την πολλαπλασιαστικότητα της f έχουμε

$$f(m)f(n) = \prod_{i=1}^t f(p_i^{r_i}) \prod_{i=1}^t f(p_i^{s_i}) = \prod_{i=1}^t f(p_i^{\alpha_i}) \prod_{i=1}^t f(p_i^{\beta_i}) = f(d)f(D).$$

2.20. Ορίζουμε $\nu(1) = 0$ και για $n > 1$ ορίζουμε $\nu(n)$ να είναι το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων παραγόντων του n . Αποδείξτε ότι αν $f = \mu * \nu$ τότε $f(n) = 0$ ή $f(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Έστω $g(n)$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου των πρώτων, δηλαδή $g(n) = 1$ αν ο n είναι πρώτος και $g(n) = 0$ αν ο n δεν είναι πρώτος. Παρατηρούμε ότι

$$(g * u)(n) = \sum_{d|n} g(d) = \sum_{p|n} \mathbf{1} = \nu(n),$$

δηλαδή $\nu = g * u$. Έπεται ότι $g = \mu * \nu = f$. Δηλαδή, η f είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου των πρώτων. Ειδικότερα, $f(n) = 0$ ή $f(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2.21. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ ορίζουμε $\varphi(x, n)$ να είναι το πλήθος των θετικών ακεραίων $k \leq x$ που είναι σχετικώς πρώτοι προς τον n . Παρατηρήστε ότι $\varphi(n, n) = \varphi(n)$. Αποδείξτε ότι

$$\varphi(x, n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] \quad \text{και} \quad \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}\right) = [x].$$

Υπόδειξη. Ξεκινώντας από το δεξιό μέλος γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] &= \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{[x/d]} \mu(d) = \sum_{k=1}^{[x]} \sum_{d|(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{[x]} I((n, k)) \\ &= \varphi(x, n). \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ισότητα θεωρούμε τη διαμέριση του $S = \{1, \dots, [x]\}$ στα $S_d = \{k \in S : (k, n) = d\}$, όπου $d | n$. Αν r_d είναι ο πληθλαριθμος του S_d , έχουμε

$$r_d = |\{k \leq x : (k, n) = d\}| = |\{q \leq x/d : (q, n/d) = 1\}| = \varphi\left(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}\right).$$

Άρα,

$$\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} r_d = \sum_{d|n} |S_d| = |S| = [x].$$

2.22. Αν $f(n), g(n) > 0$ για κάθε n και $a(n) \in \mathbb{R}$, $a(1) \neq 0$, αποδείξτε ότι

$$g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{a(n/d)} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad f(n) = \prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)},$$

όπου $b = a^{-1}$ είναι η αντίστροφη Dirichlet της a .

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f(n) > 0$ και $g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{a(n/d)}$. Τότε, η g παίρνει θετικές τιμές και παίρνοντας λογαρίθμους έχουμε

$$\ln g(n) = \sum_{d|n} a(n/d) \ln f(d) = (a * (\ln f))(n).$$

Αφού $b = a^{-1}$ έχουμε

$$b * (\ln g) = b * (a * (\ln f)) = (b * a) * (\ln f) = I * (\ln f) = \ln f.$$

Δηλαδή,

$$\ln f(n) = \sum_{d|n} b(n/d) \ln g(d) = \ln \left(\prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)} \right),$$

άρα

$$f(n) = \prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)}.$$

Για το αντίστροφο χρειάζεται η υπόθεση ότι $g(n) > 0$. Κατά τα άλλα, η απόδειξη είναι εντελώς παρόμοια με την παραπάνω.

2.23. Έστω $P(n)$ το γινόμενο των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι από n και σχετικώς πρώτοι προς τον n . Αποδείξτε ότι

$$P(n) = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n} \left(\frac{d!}{d^d} \right)^{\mu(n/d)}.$$

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 2.22, αφού $\mu^{-1} = u$, έχουμε

$$\frac{P(n)}{n^{\varphi(n)}} = \prod_{d|n} \left(\frac{d!}{d^d} \right)^{\mu(n/d)} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \frac{n!}{n^n} = \prod_{d|n} \frac{P(d)}{d^{\varphi(d)}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \prod_{d|n} \frac{P(d)}{d^{\varphi(d)}} &= \prod_{d|n} \frac{1}{d^{\varphi(d)}} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^d k \\ &= \prod_{d|n} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^d \frac{k}{d} = \prod_{d|n} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^d \frac{kn/d}{n}. \end{aligned}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι αν $A = \{kn/d : d \mid n, 1 \leq k \leq d, (k, d) = 1\}$ τότε κάθε $1 \leq m \leq n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή kn/d για κάποιους $d \mid n$ και $1 \leq k \leq d$ με $(k, d) = 1$. Αρκεί να πάρουμε $k = m/(m, n)$ και $d = n/(m, n)$ (ελέγξτε το μονοσήμαντο). Συνεπώς,

$$\prod_{d \mid n} \prod_{\substack{k=1 \\ (k,d)=1}}^d \frac{kn/d}{n} = \prod_{m=1}^n \frac{m}{n} = \frac{n!}{n^n}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{n!}{n^n} = \prod_{d \mid n} \frac{P(d)}{d^{\varphi(d)}}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

2.24. Η συνάρτηση J_k του Jordan γενικεύει τη συνάρτηση φ του Euler και ορίζεται από την

$$J_k(n) = n^k \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right).$$

Αποδείξτε ότι

$$J_k(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k \quad \text{και} \quad n^k = \sum_{d \mid n} J_k(d).$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η J_k είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αν $(m, n) = 1$ τότε (αφού ένας πρώτος p διαιρεί τον mn αν και μόνο αν διαιρεί ακριβώς έναν από τους m και n)

$$\begin{aligned} J_k(mn) &= (mn)^k \prod_{p \mid mn} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = m^k n^k \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \\ &= m^k \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) n^k \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = J_k(m) J_k(n). \end{aligned}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$J_k(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k = (\mu * N^k)(n).$$

Αφού οι J_k και $\mu * N^k$ είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $n = p^s$ για κάποιον πρώτο p και κάποιον $s \geq 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid p^s} \mu(d) \left(\frac{p^s}{d}\right)^k &= \mu(1)(p^s)^k + \mu(p)(p^{s-1})^k = p^{sk} - p^{(s-1)k} = p^{sk}(1 - p^{-k}) \\ &= (p^s)^k \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = J_k(p^s) \end{aligned}$$

και έπεται το ζητούμενο. Τώρα, από τον τύπο αντιστροφής του Möbius,

$$J_k = \mu * N^k \implies J_k * u = N^k,$$

δηλαδή

$$n^k = (J_k * u)(n) = \sum_{d|n} J_k(d).$$

2.25. Έστω $f(n)$ πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$$

για κάθε ελεύθερο τετραγώνων φυσικό αριθμό n και ότι

$$f^{-1}(p^2) = f(p)^2 - f(p^2)$$

για κάθε πρώτο p . Αποδείξτε επίσης ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αν και μόνο αν $f^{-1}(p^k) = 0$ για κάθε πρώτο p και κάθε ακέραιο $k \geq 2$.

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι αν $n = p_1 \cdots p_k$ είναι φυσικός αριθμός που είναι ελεύθερος τετραγώνων τότε $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$. Γνωρίζουμε ότι $f^{-1}(1) = 1 = \mu(1)f(1)$ και ότι η f^{-1} προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την αναδρομική σχέση

$$f^{-1}(n) = - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f(n/d)f^{-1}(d).$$

Ειδικότερα, αν $n = p$ πρώτος, έχουμε

$$f^{-1}(p) = -f(p)f^{-1}(1) = -f(p) = \mu(p)f(p).$$

Υποθέτουμε ότι $n > 1$ και $f^{-1}(m) = \mu(m)f(m)$ για κάθε $m < n$ που είναι ελεύθερος τετραγώνων. Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν ο n είναι ελεύθερος τετραγώνων τότε οι $d, n/d$ είναι επίσης ελεύθεροι τετραγώνων και $(d, n/d) = 1$ αφού οι d και n/d έχουν διαφορετικούς πρώτους παράγοντες. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned} f^{-1}(n) &= - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f(n/d)f^{-1}(d) = - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f(n/d)\mu(d)f(d) = - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f(n/d)f(d)\mu(d) \\ &= - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f(n)\mu(d) = -f(n) \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} \mu(d) = -f(n)(I(n) - \mu(n)) = f(n)\mu(n), \end{aligned}$$

δηλαδή $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$.

Με την ίδια λογική, αφού οι διαιρέτες του p^2 που είναι γνήσια μικρότεροι από p^2 είναι ο 1 και ο p , γράφουμε

$$f^{-1}(p^2) = - \sum_{\substack{d|p^2 \\ d < p^2}} f(p^2/d)f^{-1}(d) = -f(p^2)f^{-1}(1) - f(p)f^{-1}(p) = -f(p^2) + f(p)^2,$$

χρησιμοποιώντας την $f^{-1}(p) = -f(p)$ που ελέγξαμε προηγουμένως.

2.26. (α) Έστω $f \neq 0$ πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$(*) \quad (f \cdot g)^{-1} = f \cdot g^{-1}$$

για κάθε αριθμητική συνάρτηση g με $g(1) \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι αν η f είναι πολλαπλασιαστική και η $(*)$ ισχύει για την $g = \mu^{-1}$, τότε η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

Υπόδειξη. (α) Αφού $g(1) \neq 0$, γνωρίζουμε (Θεώρημα 2.4.1) ότι η g^{-1} ορίζεται. Γράφουμε

$$\begin{aligned} ((f \cdot g) * (f \cdot g^{-1}))(n) &= \sum_{d|n} f(d)g(d)f\left(\frac{n}{d}\right)g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= f(n) \sum_{d|n} g(d)g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= f(n)(g * g^{-1})(n) = f(n)I(n) = I(n), \end{aligned}$$

αφού $I(n) = 0$ αν $n > 1$ και $f(1) = I(1) = 1$. Το γεγονός ότι η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική μας επέτρεψε να γράψουμε $f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$ για κάθε $d | n$.

(β) Αν η f είναι πολλαπλασιαστική και υποθέσουμε ότι η $(*)$ ισχύει για $g = \mu^{-1} = u$, τότε $f^{-1} = (f \cdot u)^{-1} = f \cdot \mu$, οπότε η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική από την Άσκηση 2.2(β).

2.27. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\sigma(n) \leq n(1 + \ln n).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sigma(n) = \sum_{k|n} k = \sum_{k|n} \frac{n}{k} \leq n \sum_{s=1}^n \frac{1}{s},$$

χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι ο n/k διατρέχει τους θετικούς διαιρέτες του n όταν ο k διατρέχει τους θετικούς διαιρέτες του n . Όμως

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{s} \leq 1 + \int_1^2 \frac{dt}{t} + \dots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln n,$$

άρα $\sigma(n) \leq n(1 + \ln n)$.

2.28. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες

$$\frac{1}{2} < \frac{\varphi(n)\sigma(n)}{n^2} \leq 1.$$

Αποδείξτε επίσης ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\varphi(n) > \frac{n}{2(1 + \ln n)}.$$

Υπόδειξη. Στην περίπτωση $n = 1$ είναι $\varphi(n) = \sigma(n) = 1$, οπότε έχουμε ισότητα στο δεξιό μέλος. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n \geq 2$ και θεωρούμε την ανάλυση $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ του n . Τότε,

$$\sigma(n) = \prod_{j=1}^r \frac{p_j^{k_j+1} - 1}{p_j - 1}$$

και

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^r p_j^{k_j-1} (p_j - 1),$$

άρα

$$\sigma(n)\varphi(n) = \prod_{j=1}^r p_j^{k_j-1} (p_j^{k_j+1} - 1) = \prod_{j=1}^r p_j^{2k_j} \left(1 - \frac{1}{p_j^{k_j+1}}\right),$$

δηλαδή

$$\sigma(n)\varphi(n) = n^2 \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j^{k_j+1}}\right).$$

Το γινόμενο στο δεξιό μέλος είναι προφανώς μικρότερο ή ίσο από 1, άρα

$$\frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2} \leq 1.$$

Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j^{k_j+1}}\right) &\geq \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \geq \prod_{m=2}^n \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \\ &= \prod_{m=2}^n \frac{m+1}{m} \cdot \prod_{m=2}^n \frac{m-1}{m} = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η $\sigma(n)\varphi(n)/n^2 > 1/2$. Χρησιμοποιώντας και την Άσκηση 2.27 παίρνουμε

$$\varphi(n) > \frac{n^2}{2\sigma(n)} > \frac{n}{2(1 + \ln n)}.$$

2.29. Αποδείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $C > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$d(n) > C(\ln n)^k.$$

Υπόδειξη. Θέλουμε να κατασκευάσουμε φυσικούς n με μεγάλο (σε σχέση με το n) πλήθος διαιρετών. Θεωρούμε τους $(k+1)$ μικρότερους πρώτους αριθμούς $p_1 < p_2 < \dots < p_k < p_{k+1}$ και δοκιμάζουμε φυσικούς n της μορφής

$$n = (p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1})^m,$$

όπου ο m θα επιλεγεί κατάλληλα. Έχουμε

$$d(n) = \prod_{j=1}^{k+1} (m+1) = (m+1)^{k+1}$$

και

$$C(\ln n)^k = C m^k (\ln(p_1 p_2 \dots p_{k+1}))^k.$$

Αν ικανοποιείται η

$$m^{k+1} > C m^k (\ln(p_1 p_2 \dots p_{k+1}))^k,$$

το οποίο εξασφαλίζεται αν επιλέξουμε $m > C(\ln(p_1 p_2 \cdots p_{k+1}))^k$, τότε θα έχουμε

$$d(n) = (m+1)^{k+1} > m^{k+1} > C(\ln n)^k.$$

2.30. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε

$$d(n) \leq C(\varepsilon)n^\varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, το πλήθος των διαιρετών του n «φράσσεται» από n^ε .

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Για κάθε $n \geq 2$ με κανονική αναπαράσταση την $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, έχουμε

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} = \frac{1+k_1}{p_1^{\varepsilon k_1}} \cdots \frac{1+k_r}{p_r^{\varepsilon k_r}}.$$

Οι p_1, \dots, p_r χωρίζονται σε δύο ομάδες. Αν κάποιος p_j ικανοποιεί την $2 \leq p_j < 2^{1/\varepsilon}$, τότε (αφού $p_j \geq 2$) έχουμε

$$\frac{1+k_j}{p_j^{\varepsilon k_j}} \leq \frac{1+k_j}{2^{\varepsilon k_j}} = \frac{1+k_j}{e^{(\ln 2)\varepsilon k_j}} < \frac{1+k_j}{1+(\ln 2)\varepsilon k_j} < \frac{1}{(\ln 2)\varepsilon},$$

διότι $1+(\ln 2)\varepsilon k_j > (\ln 2)\varepsilon(1+k_j)$. Αν πάλι $p_j \geq 2^{1/\varepsilon}$, τότε

$$\frac{1+k_j}{p_j^{\varepsilon k_j}} \leq \frac{1+k_j}{2^{k_j}} \leq 1.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις βλέπουμε ότι

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} \leq \prod_{p < 2^{1/\varepsilon}} \frac{1}{(\ln 2)\varepsilon} =: C(\varepsilon),$$

όπου η σταθερά $C(\varepsilon)$ εξαρτάται μόνο από το ε : αν μας δοθεί το ε βρίσκουμε πόσοι πρώτοι δεν ξεπερνούν τον $2^{1/\varepsilon}$ και υψώνουμε τον $1/[\varepsilon(\ln 2)]$ σε αυτή τη δύναμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέσοι όροι αριθμητικών συναρτήσεων

3.1. Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης *Euler-Maclaurin* αποδείξτε ότι για κάθε $x \geq 3$,

$$\sum_{n \leq x} (\ln n)^2 = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + O((\ln x)^2).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = (\ln t)^2$, $t \geq 1$. Έχουμε $f'(t) = 2\frac{\ln t}{t}$, άρα

$$\sum_{n \leq x} (\ln n)^2 = \int_1^x (\ln t)^2 dt + 2 \int_1^x \{t\} \frac{\ln t}{t} dt - x(\ln x)^2.$$

Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \int_1^x (\ln t)^2 dt &= \int_1^x (t)' (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - \int_1^x t \frac{2 \ln t}{t} dt \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int_1^x \ln t dt = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$2 \int_1^x \{t\} \frac{\ln t}{t} dt \leq 2 \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = 2 \int_0^{\ln x} y dy = (\ln x)^2.$$

Επίσης, $0 \leq x(\ln x)^2 \leq (\ln x)^2$. Άρα,

$$\left| 2 \int_1^x t \frac{\ln t}{t} dt - x(\ln x)^2 \right| \leq 2(\ln x)^2.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n \leq x} (\ln n)^2 = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + O((\ln x)^2).$$

3.2. Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης Euler-Maclaurin αποδείξτε ότι για κάθε $x \geq 2$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

όπου A είναι μια σταθερά, και

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \ln n} = \ln(\ln x) + B + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right)$$

όπου B είναι μια σταθερά.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t \geq 1$. Έχουμε $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$, άρα

$$\sum_{n \leq x} \frac{\ln n}{n} = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt + \int_1^x \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt - \{x\} \frac{\ln x}{x}.$$

Υπολογίζουμε το

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \int_0^{\ln x} y dy = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Στη συνέχεια γράφουμε

$$\int_1^x \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt = \int_1^\infty \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt - \int_x^\infty \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt,$$

και θέτουμε

$$A := \int_1^\infty \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει γιατί η συνάρτηση $t \mapsto \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας (τους φυσικούς) σε κάθε διάστημα $[1, M]$, όπου $M > 1$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, M]$, και για κάθε $N > M \geq e$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_M^N \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt \right| &\leq \int_M^N \frac{1 + \ln t}{t^2} dt \leq 2 \int_M^N \frac{\ln t}{t^2} dt = -2 \frac{\ln t}{t} \Big|_M^N + 2 \int_M^N \frac{1}{t^2} dt \\ &= 2 \left(\frac{\ln M}{M} - \frac{\ln N}{N} \right) + 2 \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

όταν $M, N \rightarrow \infty$, το οποίο δείχνει ότι υπάρχει το

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt$$

(εξηγήστε γιατί). Για $x \geq e$ φράσσουμε το

$$\left| \int_x^\infty \{t\} \frac{1 - \ln t}{t^2} dt \right| \leq \int_x^\infty \frac{\ln t - 1}{t^2} dt = \frac{\ln x}{x}.$$

Τέλος, $0 \leq \{x\} \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln x}{x}$. Συνολικά,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$, $t \geq 2$. Έχουμε $f'(t) = -\frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t}$, άρα

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n \ln n} &= \int_1^x \frac{1}{t \ln t} dt - \int_1^x \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + \{x\} \frac{1}{x \ln x} \\ &= \ln(\ln x) - \int_1^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + \int_x^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \\ &= \ln(\ln x) + B + \int_x^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right). \end{aligned}$$

όπου

$$B = - \int_1^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_x^\infty \{t\} \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt \right| \leq \int_x^\infty \frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} dt = - \int_x^\infty f'(t) dt = f(x) = \frac{1}{x \ln x},$$

οπότε τελικά

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n \ln n} = \ln(\ln x) + B + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

3.3. Αποδείξτε ότι για κάθε αριθμητική συνάρτηση $f(n)$,

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d \leq x} f(d) \left[\frac{x}{d} \right].$$

Συμπεράνατε ότι

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Η πρώτη ταυτότητα έχει αποδειχθεί στη θεωρία (Θεώρημα 3.4.6). Δεδομένου ότι

$$d(n) = \sum_{d|n} 1,$$

γράφουμε

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d \leq x} 1 \cdot \left[\frac{x}{d} \right] = \sum_{d \leq x} \frac{x}{d} + \sum_{d \leq x} \left\{ \frac{x}{d} \right\}.$$

Έχουμε

$$\sum_{d \leq x} \frac{x}{d} = x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} = x \left(\ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = x \ln x + \gamma x + O(1)$$

και

$$\sum_{d \leq x} \left\{ \frac{x}{d} \right\} \leq \sum_{d \leq x} 1 \leq x.$$

Άρα,

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + \gamma x + O(1) + O(x) = x \ln x + O(x).$$

3.4. Χρησιμοποιήστε τον τύπο άθροισης κατά μέρη για να δείξετε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2\gamma(\ln x) + O(1)$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler.

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 3.2(α) γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{d \leq x} \frac{\ln d}{d} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

για κάποια σταθερά $A > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n} &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sum_{d|n} 1 = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{dq} = \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \left(\sum_{q \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{q} \right) \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \left(\ln \frac{x}{d} + \gamma + O\left(\frac{d}{x}\right) \right) \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} (\ln x + \gamma) - \sum_{d \leq x} \frac{\ln d}{d} + \sum_{d \leq x} O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (\ln x + \gamma) \left(\ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \right) + O(1) \\ &= (\ln x)^2 + 2\gamma \ln x + \gamma^2 + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) + O(1) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2\gamma \ln x + O(1), \end{aligned}$$

αφού οι όροι $O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ και $O\left(\frac{1}{x}\right)$ και οι σταθερές γ^2 και A είναι $O(1)$.

3.5. Αν $x \geq 2$ και $\alpha > 1$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha} \ln x}{1-\alpha} + \zeta(\alpha)^2 + O(x^{1-\alpha}).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{d|n} 1 = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{(dq)^\alpha} = \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^\alpha} \left(\sum_{q \leq n/d} \frac{1}{q^\alpha} \right).$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\sum_{m \leq y} \frac{1}{m^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} + \zeta(\alpha) + O(y^{-\alpha})$$

και την

$$\sum_{m \leq x} \frac{1}{m} = \ln x + \gamma + O(1/x)$$

πρώτα για $m = q$, $y = x/d$ και μετά για $m = d$, $y = x$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n^\alpha} &= \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^\alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha} (x/d)^{1-\alpha} + \zeta(\alpha) + O((x/d)^{-\alpha}) \right) \\ &= \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} + \zeta(\alpha) \sum_{d \leq x} \frac{1}{d^\alpha} + O(x^{1-\alpha}) \\ &= \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} (\ln x + \gamma + O(1/x)) + \zeta(\alpha) \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \zeta(\alpha) + O(x^{-\alpha}) \right) + O(x^{1-\alpha}) \\ &= \frac{x^{1-\alpha} \ln x}{1-\alpha} + \gamma \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O(x^{-\alpha}) + \zeta(\alpha) \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \zeta(\alpha)^2 + O(x^{-\alpha}) + O(x^{1-\alpha}) \\ &= \frac{x^{1-\alpha} \ln x}{1-\alpha} + \zeta(\alpha)^2 + O(x^{1-\alpha}). \end{aligned}$$

3.6. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n . Πιο συγκεκριμένα,

$$\omega(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } n = 1 \\ k & , \text{ αν } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geq 3$,

$$\sum_{n \leq x} 2^{\omega(n)} = \frac{6}{\pi^2} x \ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Η $2^{\omega(n)}$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$2^{\omega(p^m)} = 2 = \sum_{d|p^m} |\mu(d)| = (|\mu| * u)(p^m).$$

Έπεται ότι

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} |\mu(d)| = \sum_{d|n} \mu^2(d).$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu^2(d) = \sum_{d \leq x} \mu^2(d) [x/d] = x \sum_{d \leq x} \frac{\mu^2(d)}{d} + O \left(\sum_{d \leq x} \mu^2(d) \right) = x \sum_{d \leq x} \frac{\mu^2(d)}{d} + O(x).$$

Από τις ιδιότητες του γινομένου Dirichlet και την $I = \mu * u$ παίρνουμε

$$\mu^2 = \mu^2 * I = \mu^2 * (\mu * u) = u * (\mu^2 * \mu).$$

Θέτουμε $g = \mu^2 * \mu$. Η g είναι πολλαπλασιαστική και για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$g(p^m) = \sum_{k=0}^m \mu^2(p^k) \mu(p^{m-k}) = \mu(p^m) + \mu(p^{m-1})$$

αφού $\mu(p^k) = 0$ αν $k \geq 2$ και $\mu^2(1) = \mu^2(p) = 1$. Έπεται ότι $g(p^m) = 0$ αν $m \neq 2$ και $g(p^2) = -1$. Από αυτές τις σχέσεις βλέπουμε εύκολα ότι $g(d) = 0$ εκτός αν $d = m^2$ για κάποιον m ο οποίος είναι ελεύθερος τετραγώνων, και σε αυτή την περίπτωση έχουμε $g(d) = \mu(m)$. Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq x} \mu^2(d) &= \sum_{d \leq x} (u * g)(d) = \sum_{d \leq x} g(d) [x/d] = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \mu(m) \left(\frac{x}{m^2} + O(1) \right) \\ &= x \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} + O \left(\sum_{m \leq \sqrt{x}} |\mu(m)| \right) \\ &= x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} - x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Τώρα,

$$x \left| \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} \right| = O \left(x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{1}{m^2} \right) = O(\sqrt{x}),$$

άρα τελικά

$$\sum_{d \leq x} \mu^2(d) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

Έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{d \leq x} \mu^2(d) = \frac{6}{\pi^2},$$

και από την Άσκηση 3.20 συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{d \leq x} \frac{\mu^2(d)}{d} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Τελικά,

$$\sum_{n \leq x} 2^{\omega(n)} = x \sum_{d \leq x} \frac{\mu^2(d)}{d} + O(x) = \frac{6}{\pi^2} x \ln x + O(x).$$

3.7. Αν $x \geq 2$ αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right]^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \ln x)$$

και

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left[\frac{x}{n} \right] = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\ln x).$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \geq 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right]^2 &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right) x^2 - 2x \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left\{ \frac{x}{n} \right\} + \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\}^2. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \sum_{n > x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right| \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

άρα

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n > x} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Συνεπώς,

$$\left(\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right) x^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x).$$

Φράσσουμε τώρα τους άλλους δύο όρους. Έχουμε

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right| \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

άρα

$$x \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = O(x \ln x),$$

και

$$\left| \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\}^2 \right| \leq \sum_{n \leq x} 1 \leq x,$$

δηλαδή

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\}^2 = O(x).$$

Τελικά,

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right]^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x) + O(x \ln x) + O(x) = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \ln x).$$

(β) Είναι παρόμοιο και απλούστερο. Έχουμε

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left[\frac{x}{n} \right] = \left(\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right) x - \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left\{ \frac{x}{n} \right\}.$$

Όπως πριν, βλέπουμε ότι

$$\left(\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right) x = \left(\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) x = \frac{x}{\zeta(2)} + O(1).$$

Για τον δεύτερο όρο έχουμε δει ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = O(\ln x).$$

Συνολικά,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left[\frac{x}{n} \right] = \frac{x}{\zeta(2)} + O(1) + O(\ln x) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\ln x).$$

3.8. Έστω $x \geq 1$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right]^2 + \frac{1}{2}.$$

Από αυτή τη σχέση συμπεράνατε ότι για κάθε $x \geq 2$

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \ln x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{\{(q,d): qd \leq x\}} \mu(d) q \\ &= \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{q \leq \frac{x}{d}} q = \sum_{d \leq x} \mu(d) \frac{1}{2} \left[\frac{x}{d} \right] \cdot \left(\left[\frac{x}{d} \right] + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d \leq x} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{d \leq x} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d \leq x} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right]^2 + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

διότι

$$\sum_{d \leq x} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] = 1$$

από το Θεώρημα 3.4.7. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ταυτότητα. Στη συνέχεια, από την Άσκηση 3.7(α) παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \ln x) \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\zeta(2)} x^2 + O(x \ln x).$$

3.9. Έστω $x \geq 1$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left[\frac{x}{n} \right].$$

Από αυτή τη σχέση συμπεράνατε ότι για κάθε $x \geq 2$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\ln x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{\{(q,d): qd \leq x\}} \frac{\mu(d)}{d} \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{q \leq \frac{x}{d}} 1 = \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} \left[\frac{x}{d} \right]. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ταυτότητα. Στη συνέχεια, από την Άσκηση 3.7(β) παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\ln x).$$

3.10 Αν $x \geq 2$ αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \ln x + \frac{\gamma}{\zeta(2)} - A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler και

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \ln n}{n^2}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την $\varphi = \mu * u$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^2} &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} \frac{1}{(qd)^2} \mu(d) \frac{qd}{d} \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{q \leq x/d} \frac{1}{q} = \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} (\ln x - \ln d + \gamma + O(d/x)) \\ &= (\ln x + \gamma) \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} + \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} \cdot O(1/x). \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 3.4.9 έχουμε

$$\left| \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} \right| \leq 1.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\left| \sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d>x} \frac{1}{d^2} = O(1/x)$$

άρα

$$(\ln x + \gamma) \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = (\ln x + \gamma) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - (\ln x + \gamma) \sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} (\ln x + \gamma) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

και

$$\left| \sum_{d>x} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} \right| \leq \sum_{d>x} \frac{\ln d}{d^2} = O\left(\int_x^{\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt\right) = O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

άρα

$$\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) = A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} (\ln x + \gamma) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) - A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) + O(1/x),$$

δηλαδή

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \ln x + \frac{\gamma}{\zeta(2)} - A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

3.11. Έστω n τυχόν θετικός ακέραιος και

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Υποθέτουμε γνωστή την

$$\zeta(2) = \pi^2/6.$$

(α) Αποδείξτε ότι αν $n \geq 2$ τότε

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < \frac{\pi^2}{6} \frac{\sigma(n)}{n}.$$

(β) Έστω $x \geq 2$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{n}{\varphi(n)} = O(x).$$

Υπόδειξη. (α) Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα (βλέπε Κεφάλαιο 5)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \prod_p (1 - p^{-2})^{-1}$$

και το γεγονός ότι $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - p^{-1})$. Έστω $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{n}{\varphi(n)} &= \prod_{p|n} \frac{1}{1 - p^{-1}} = \prod_{p|n} \frac{1 + p^{-1}}{1 - p^{-2}} < \prod_p (1 - p^{-2})^{-1} \prod_{p|n} (1 + p^{-1}) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{n} \prod_{i=1}^k (p_i^{a_i} + p_i^{a_i-1}) \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{n} \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{a_i} - 1}{p_i - 1} \\ &= \frac{\pi^2}{6} \frac{\sigma(n)}{n}. \end{aligned}$$

Για το κάτω φράγμα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{n}{\varphi(n)} &= \prod_{p|n} \frac{1}{1 - 1/p} = \prod_{i=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} > \prod_{i=1}^k (1 + p_i^{-1} + \cdots + p_i^{-a_i}) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{i=1}^k (p_i^{a_i} + \cdots + p_i + 1) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{a_i} - 1}{p_i - 1} = \frac{\sigma(n)}{n}. \end{aligned}$$

(β) Από το (α) αρχεί να εκτιμήσουμε το

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{d}{n} = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} \frac{d}{qd} = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} \frac{1}{q} \\ &= \sum_{d \leq x} \left(\ln x - \ln d + \gamma + \frac{1}{x} O(d) \right) = (\ln x + \gamma)[x] - \sum_{d \leq x} \ln d + \frac{1}{x} O(x^2) \\ &= x \ln x + \gamma x - \{x\}(\ln x + \gamma) - (x \ln x + O(x)) + O(x) \\ &= \gamma x + O(\ln x) + O(x) = O(x). \end{aligned}$$

3.12. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) \sim c_1 x^2$$

για κάποια σταθερά $c_1 > 0$.

Υπόδειξη. Έχουμε $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, άρα

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \sigma(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{d \leq x} \sum_{k \leq \frac{x}{d}} d = \sum_{k \leq x} \sum_{d \leq \frac{x}{k}} d \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \left[\frac{x}{k} \right] \left(\left[\frac{x}{k} \right] + 1 \right) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \left(\frac{x}{k} - \left\{ \frac{x}{k} \right\} \right) \left(\frac{x}{k} + 1 - \left\{ \frac{x}{k} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \frac{x^2}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \frac{x}{k} \left\{ \frac{x}{k} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \frac{x}{k} \left(1 - \left\{ \frac{x}{k} \right\} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \left\{ \frac{x}{k} \right\} \left(1 - \left\{ \frac{x}{k} \right\} \right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

- $\frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \frac{x}{k} \left\{ \frac{x}{k} \right\} = x O \left(\sum_{k \leq x} \frac{1}{k} \right) = O(x \ln x)$.

- $\frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \frac{x}{k} (1 - \{\frac{x}{k}\}) = xO\left(\sum_{k \leq x} \frac{1}{k}\right) = O(x \ln x)$.
- $\frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \{\frac{x}{k}\} (1 - \{\frac{x}{k}\}) = O\left(\sum_{k \leq x} 1\right) = O(x)$.

Επίσης,

$$\frac{1}{2} \sum_{k \leq x} \frac{x^2}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{k > x} \frac{x^2}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x)$$

διότι $\sum_{k > x} \frac{1}{k^2} = O(1/x)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \ln x),$$

άρα

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) \sim \frac{\pi^2}{12} x^2.$$

3.13. Αν $x \geq 2$ αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = O(\ln x).$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.11 (α) γράφουμε

$$\frac{6}{\pi^2} \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} \leq \sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n^2} = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{d}{n^2} = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} \frac{d}{(qd)^2} = \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \sum_{q \leq x/d} \frac{1}{q^2}.$$

Από το Θεώρημα 3.3.3 (β) βλέπουμε ότι

$$\sum_{q \leq x/d} \frac{1}{q^2} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} - \sum_{q > x/d} \frac{1}{q^2} = \zeta(2) - \frac{d}{x} + O((d/x)^2).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{6}{\pi^2} \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} &= \zeta(2) \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} - \sum_{d \leq x} \frac{1}{x} + \sum_{d \leq x} \frac{O(d)}{x^2} \\ &= \zeta(2)O(\ln x) + O(1) = O(\ln x). \end{aligned}$$

3.14. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} \frac{1}{n} \sim \frac{\varphi(k)}{k} \ln x.$$

Γενικότερα, αν $s > 0$ να βρείτε ασυμπτωτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} \frac{1}{n^s}.$$

Υπόδειξη. Έστω $x \geq k$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} \frac{1}{n} &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} I((n,k)) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sum_{d|(n,k)} \mu(d) \\ &= \sum_{d|k} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} \frac{1}{n} = \sum_{d|k} \mu(d) \sum_{q \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{qd} \\ &= \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{q \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{q} = \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} \left(\ln \frac{x}{d} + \gamma + O\left(\frac{d}{x}\right) \right) \\ &= \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} \left(\ln \frac{x}{d} + O(1) \right). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} \frac{1}{n} = \left(\sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} \right) \ln x - \sum_{d|k} \frac{\mu(d) \ln d}{d} + O\left(\sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} \right).$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) \frac{k}{d} = \frac{\varphi(k)}{k}$ και ότι η ποσότητα $C_k := \sum_{d|k} \frac{\mu(d) \ln d}{d}$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το k . Άρα,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} \frac{1}{n} = \frac{\varphi(k)}{k} \ln x + O\left(C_k + \frac{\varphi(k)}{k} \right),$$

απ' όπου έπεται άμεσα ότι

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} \frac{1}{n} \sim \frac{\varphi(k)}{k} \ln x.$$

3.15. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} n = \frac{\varphi(k)}{2k} x^2 + O(d(k)x),$$

όπου $d(k)$ είναι το πλήθος των θετικών διαιρετών του k .

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} n &= \sum_{n \leq x} n I((n,k)) = \sum_{n \leq x} n \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|k} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} n = \sum_{d|k} \mu(d) \sum_{q \leq x/d} qd \\ &= \sum_{d|k} \mu(d) d \sum_{q \leq x/d} q = \sum_{d|k} \mu(d) d \left(\frac{x^2}{2d^2} + O\left(\frac{x}{d}\right) \right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{d|k} \mu(d) d \cdot \frac{x^2}{2d^2} = \frac{x^2}{2k} \sum_{d|k} \mu(d) \frac{k}{d} = \frac{\varphi(k)}{2k} x^2.$$

Επίσης,

$$\sum_{d|k} \mu(d)d \cdot O\left(\frac{x}{d}\right) = x \left(\sum_{d|k} \mu(d) \right) O(1)$$

και

$$\left| \sum_{d|k} \mu(d) \right| \leq \sum_{d|k} 1 = d(k).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,k)=1}} n = \frac{\varphi(k)}{2k} x^2 + O(d(k)x).$$

3.16. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = [\sqrt{x}].$$

Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $\lambda(1) = 1$ και $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}$ αν $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d).$$

Ο ισχυρισμός είναι ότι $g(n) = 1$ αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο και $g(n) = 0$ αλλιώς. Κατ' αρχάς, η λ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, άρα η $g = \lambda * u$ είναι πολλαπλασιαστική. Προφανώς, $g(1) = 1$. Έστω $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \geq 2$. Έχουμε $g(n) = g(p_1^{\alpha_1}) \dots g(p_k^{\alpha_k})$. Όμως,

$$g(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{k=0}^{\alpha_i} \lambda(p^k) = \sum_{k=0}^{\alpha_i} (-1)^k,$$

άρα $g(p_i^{\alpha_i}) = 1$ αν ο α_i είναι άρτιος και $g(p_i^{\alpha_i}) = 0$ αν ο α_i είναι περιττός. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $g(n) = 1$ αν και μόνο αν όλοι οι α_i είναι άρτιοι, δηλαδή αν και μόνο αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ $g(n) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάποιος από τους α_i που είναι περιττός, δηλαδή αν και μόνο αν ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.4.6 γράφουμε

$$\sum_{n \leq x} \lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \lambda(d) = \sum_{n \leq x} g(n) = \sum_{m^2 \leq x} g(m^2) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} 1 = [\sqrt{x}].$$

3.17. Έστω $k \geq 2$. Ορίζουμε $q_k(n) = 1$ αν ο n δεν διαιρείται με k -οστή δύναμη πρώτου και $q_k(n) = 0$ αλλιώς. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} q_k(n) = c_k x + O(x^{1/k}),$$

όπου

$$c_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k}.$$

Υπόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι η $q_k(n)$ είναι πολλαπλασιαστική και ότι αν $n = p^m$ τότε

$$q_k(p^m) = \sum_{d^k | p^m} \mu(d).$$

Η συνάρτηση $\sum_{d^k | n} \mu(d)$ είναι επίσης πολλαπλασιαστική, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$q_k(n) = \sum_{d^k | n} \mu(d).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} q_k(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d^k | n} \mu(d) = \sum_{d^k \leq x} \mu(d) \sum_{q \leq x/d^k} \mathbf{1} = \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \left[\frac{x}{d^k} \right] \\ &= \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \frac{x}{d^k} + O(x^{1/k}) \\ &= x \sum_{d \leq x^{1/k}} \frac{\mu(d)}{d^k} + O(x^{1/k}). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $c_k = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$ και παρατηρήσουμε ότι

$$\left| \sum_{d > x^{1/k}} \frac{\mu(d)}{d^k} \right| \leq \sum_{d > x^{1/k}} \frac{1}{d^k} = O(x^{\frac{1-k}{k}})$$

από το Θεώρημα 3.3.3 (γ), καταλήγουμε στην

$$\sum_{n \leq x} q_k(n) = c_k x + xO(x^{\frac{1}{k}-1}) + O(x^{1/k}) = c_k x + O(x^{1/k}).$$

3.18. Ορίζουμε $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} M\left(\frac{x}{n}\right) = 1.$$

Υπόδειξη. Από το Θεώρημα 3.4.6 έχουμε

$$\sum_{n \leq x} M\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{n \leq x} I(n) = 1.$$

3.19. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geq 2$,

$$\sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p} \right] \ln p = x \ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p} \right] \ln p = \sum_{p \leq x} x \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leq x} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \ln p = x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p \right) = x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + O(x),$$

αφού

$$\sum_{p \leq x} \ln p = \vartheta(x) = O(x).$$

Από τις εκτιμήσεις του Mertens (Θεώρημα 4.4.1 (β)) έχουμε $\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1)$, άρα

$$\sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p} \right] \ln p = x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + O(x) = x \ln x + O(x) + O(x) = x \ln x + O(x).$$

3.20. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$M(x) = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n \quad \text{και} \quad L(x) = \frac{1}{\ln x} \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n}.$$

(α) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \ell$, αποδείξτε ότι υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x)$ και είναι επίσης ίσο με ℓ .

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $a_n \in [0, 1]$ για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x)$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x)$.

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $S(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ και $T(x) = \sum_{n \leq x} a_n/n$. Από την υπόθεση έχουμε $S(x)/x \rightarrow \ell$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $T(x)/\ln x \rightarrow \ell$. Γράφουμε

$$T(x) = \frac{S(x)}{x} + \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt =: \frac{S(x)}{x} + R(x).$$

Διαιρώντας με $\ln x$ και παρατηρώντας ότι $\frac{1}{x \ln x} S(x) \rightarrow \ell$, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\ln x} R(x) = \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt \rightarrow \ell.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $t_0 \geq 1$ τέτοιος ώστε $|S(t)/t - \ell| \leq \varepsilon$ για κάθε $t \geq t_0$. Για $1 \leq t \leq t_0$ έχουμε $|S(t)/t - \ell| \leq \sum_{n \leq t_0} |a_n| + |\ell| \leq M(t_0)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left| \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt - \ell \ln x \right| &= \left| \int_1^x \frac{1}{t} \left(\frac{S(t)}{t} - \ell \right) dt \right| \leq \int_1^{t_0} \frac{M}{t} dt + \int_{t_0}^x \frac{\varepsilon}{t} dt \\ &\leq M \ln t_0 + \varepsilon \ln(x/t_0) \leq M \ln t_0 + \varepsilon \ln x. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\left| \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt - \ell \right| \leq M \frac{\ln t_0}{\ln x} + \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $x \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt - \ell \right| \leq \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται το ζητούμενο.

(β) Ορίζουμε $a_n = n$ αν $n = 2^k$, $k \geq 0$ και $a_n = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2^k} \sum_{n \leq 2^k} a_n = \frac{1}{2^k} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k) = 2 - \frac{1}{2^k},$$

ενώ αν $2^{k-1} \leq x < 2^k$ έχουμε

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{x} (2^k - 1) \rightarrow 1 - \frac{1}{2^k}$$

καθώς το $x \rightarrow 2^k$ από αριστερά. Δηλαδή, η συνάρτηση $x \mapsto \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n$ παρουσιάζει άλμα ίσο με 1 σε όλους τους $x = 2^k$. Άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n$.

Από την άλλη πλευρά,

$$\frac{1}{\ln x} \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{\ln x} \sum_{\{k: 2^k \leq x\}} \frac{2^k}{2^k} = \frac{1}{\ln x} \left(\left[\frac{\ln x}{\ln 2} \right] + 1 \right) = \frac{1}{\ln 2} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

άρα $\frac{1}{\ln x} \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\ln 2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στοιχειώδη αποτελέσματα για την κατανομή των πρώτων

4.1. Αποδείξτε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $[1, 2, \dots, n]$ των $1, 2, \dots, n$ είναι ίσο με

$$[1, 2, \dots, n] = e^{\psi(n)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $k = \prod_{p \leq n} p^{a_p(k)}$ για κάθε $1 \leq k \leq n$ και $[1, 2, \dots, n] = \prod_{p \leq n} p^{a_p}$. Παρατηρήστε ότι

$$a_p = \max_{1 \leq k \leq n} a_p(k)$$

για κάθε πρώτο $p \leq n$. Τώρα, έστω $p \leq n$. Για κάθε $1 \leq k \leq n$ έχουμε $p^{a_p(k)} \leq k \leq n$, άρα $a_p(k) \leq \lfloor \ln n / \ln p \rfloor$. Έπεται ότι

$$a_p \leq \lfloor \ln n / \ln p \rfloor.$$

Όμως, αν ορίσουμε $k_p := p^{\lfloor \ln n / \ln p \rfloor}$ έχουμε $k_p \leq p^{\ln n / \ln p} = n$, άρα

$$a_p \geq a_p(k_p) = \lfloor \ln n / \ln p \rfloor.$$

Τελικά, για κάθε $p \leq n$ έχουμε $a_p = \lfloor \ln n / \ln p \rfloor$, άρα

$$\begin{aligned} \ln[1, 2, \dots, n] &= \sum_{p \leq n} a_p \ln p = \sum_{p \leq n} \ln p \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor \\ &= \sum_{p \leq n} \ln p \sum_{p^m \leq n} \mathbf{1} = \sum_{p^m \leq n} \Lambda(p^m) = \sum_{d \leq n} \Lambda(d) = \psi(n), \end{aligned}$$

και έπεται ότι $[1, 2, \dots, n] = e^{\psi(n)}$.

4.2. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω δύο σχέσεις είναι ισοδύναμες.

$$(\alpha) \quad \pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

$$(\beta) \vartheta(x) = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Υπόδειξη. Έχουμε αποδείξει ότι

$$\pi(x) = \frac{1}{\ln x} \vartheta(x) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

(α) \implies (β) Υποθέτοντας το (α) και χρησιμοποιώντας τη σχέση των π και ϑ έχουμε

$$\vartheta(x) = \ln x \pi(x) + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

(β) \implies (α) Υποθέτοντας το (β) και χρησιμοποιώντας τη σχέση των π και ϑ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{1}{\ln x} \left(x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) \right) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \\ &= \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \end{aligned}$$

4.3. Θεωρώντας γνωστό το θεώρημα των πρώτων αριθμών αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $\frac{\pi(ax)}{\pi(bx)} \sim \frac{a}{b}$ καθώς το $x \rightarrow \infty$.

(β) Αν $0 < a < b$ τότε υπάρχει x_0 τέτοιος ώστε $\pi(ax) < \pi(bx)$ για κάθε $x \geq x_0$.

(γ) Αν $0 < a < b$ τότε υπάρχει x_0 τέτοιος ώστε για κάθε $x \geq x_0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος ανάμεσα στον ax και τον bx .

(δ) Κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < b$ περιέχει ρητό αριθμό της μορφής p/q όπου οι p και q είναι πρώτοι.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε τον λόγο των δύο ποσοτήτων ως

$$\frac{\pi(ax)}{a} \frac{b}{\pi(bx)} = \frac{\pi(ax) \ln(ax)}{ax} \frac{bx}{\pi(bx) \ln(bx)} \frac{\ln(bx)}{\ln(ax)}.$$

Από το θεώρημα των πρώτων αριθμών έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(ax) \ln(ax)}{ax} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx}{\pi(bx) \ln(bx)} = 1.$$

Έχουμε επίσης,

$$\frac{\ln(bx)}{\ln(ax)} = \frac{\ln(b) + \ln(x)}{\ln(a) + \ln(x)} \rightarrow 1$$

καθώς το $x \rightarrow \infty$. Έπεται το ζητούμενο.

(β) Θεωρούμε c τέτοιοι ώστε $a/b < c < 1$. Από το (α) έχουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(ax)}{\pi(bx)} < c$, άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \geq x_0$ να ισχύει

$$\frac{\pi(ax)}{\pi(bx)} < c < 1 \implies \pi(ax) < c \pi(bx).$$

(γ) Θεωρούμε b_1 τέτοιον ώστε $a < b_1 < b$. Εφαρμόζοντας το (β) για τους $a < b_1$ βρίσκουμε $x_0 > 0$ τέτοιον ώστε, για κάθε $x \geq x_0$,

$$|\{p : p \leq ax\}| < |\{p : p \leq b_1x\}|$$

και αφού προφανώς $\{p : p \leq ax\} \subseteq \{p : p \leq b_1x\}$, έπεται ότι υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $ax < p \leq b_1x < bx$.

(δ) Για τον x_0 του (γ) μπορούμε να βρούμε πρώτο $q > x_0$ αφού υπάρχουν άπειροι πρώτοι. Εφαρμόζοντας το (γ) βρίσκουμε πρώτο p ώστε $aq < p < bq$. Τότε για τους πρώτους p και q έχουμε $p/q \in (a, b)$.

4.4. Ορίζουμε $P(x) = \prod_{p \leq x} p$. Αποδείξτε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)^{1/x} = e.$$

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln P(x)}{x} = 1 \quad \text{ή ισοδύναμα με την} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} \ln p = 1.$$

Όμως,

$$\sum_{p \leq x} \ln p =: \vartheta(x)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την $\vartheta(x) \sim x$, και αυτή η ισοδυναμία έχει αποδειχθεί στο μάθημα.

4.5. Έστω $a(n)$ φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_p a(p)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(n)}{\ln n}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θέτουμε $a(0) = a(1)$, οπότε η ακολουθία $(a(n))_{n \geq 0}$ εξακολουθεί να είναι φθίνουσα. Έστω $c > 0$ και $b_n = [cn \ln n]$, $n \geq 1$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(b_n) < +\infty \iff \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} < +\infty.$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a(b_n) < +\infty$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $b_{n+1} - b_n \rightarrow \infty$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $b_n < b_{n+1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=b_{n_0}}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} \frac{a(k)}{\ln k} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_n) \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} \frac{1}{\ln k} \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_n) \frac{b_{n+1} - b_n}{\ln b_n}. \end{aligned}$$

Με απλούς υπολογισμούς βλέπουμε ότι $\frac{b_{n+1} - b_n}{\ln b_n} \rightarrow c$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\frac{b_{n+1} - b_n}{\ln b_n} \leq M$ για κάθε $n \geq n_0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=b_{n_0}}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} \leq M \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_n) < \infty,$$

και έχουμε δείξει τη μία κατεύθυνση της ισοδυναμίας.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\sum_{k=b_{n_0}}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} < +\infty$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=b_{n_0}}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} \frac{a(k)}{\ln k} \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_{n+1}) \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} \frac{1}{\ln k} \\ &\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_{n+1}) \frac{b_{n+1} - b_n}{\ln b_{n+1}}. \end{aligned}$$

Με απλούς υπολογισμούς βλέπουμε ότι $\frac{b_{n+1}-b_n}{\ln b_{n+1}} \rightarrow c$, άρα υπάρχει $m > 0$ τέτοιος ώστε $\frac{b_{n+1}-b_n}{\ln b_{n+1}} \geq m$ για κάθε $n \geq n_0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=b_{n_0}}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} \geq m \sum_{n=n_0}^{\infty} a(b_{n+1}),$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a(b_n) < +\infty$.

Τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.3.8. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{6}n \ln n < p_n < 15n \ln n,$$

όπου $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία των πρώτων σε αύξουσα διάταξη. Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία που δείξαμε με $b_n = \lceil \frac{1}{6}n \ln n \rceil$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(p_n) < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a(b_n) < +\infty \implies \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} < +\infty.$$

Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία που δείξαμε με $b_n = \lceil 15n \ln n \rceil$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a(k)}{\ln k} < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a(b_n) < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a(p_n) < \infty.$$

4.6. Για $x \geq 2$ ορίζουμε

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} - \frac{2}{\ln 2}.$$

Πιο γενικά, αποδείξτε ότι

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{(\ln x)^k} \right) + n! \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} + C_n,$$

όπου C_n είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από το x .

(β) Για $x \geq 2$ αποδείξτε ότι

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = O\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right).$$

Υπόδειξη. (α) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_2^x (t)' \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} - \frac{2}{\ln 2}.$$

Γενικότερα, χρησιμοποιώντας την

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} = \frac{x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+1}} + (n+1) \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}},$$

η οποία προκύπτει πάλι με ολοκλήρωση κατά μέρη, επαγωγικά έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Li}(x) &= \frac{x}{\ln x} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{(\ln x)^k} \right) + n! \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} + C_n \\ &= \frac{x}{\ln x} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{(\ln x)^k} \right) + n! \left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+1}} + (n+1) \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}} \right) \\ &= \frac{x}{\ln x} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k!}{(\ln x)^k} \right) + (n+1) \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}} + C_{n+1}, \end{aligned}$$

όπου η σταθερά C_{n+1} είναι ανεξάρτητη από το x .

(β) Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hôpital βλέπουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_2^x dt/(\ln t)^n}{x/(\ln x)^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(\ln x)^n}{1/(\ln x)^n - n/(\ln x)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - n/\ln x} = 1.$$

Άρα,

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} \sim \frac{x}{(\ln x)^n},$$

και συνεπώς

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = O\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right).$$

4.7. Έστω $f(n)$ μια αριθμητική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\sum_{p \leq x} f(p) \ln p = (ax + b) \ln x + cx + O(1)$$

για $x \geq 2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά A , που εξαρτάται από την f , τέτοια ώστε, για $x \geq 2$,

$$\sum_{p \leq x} f(p) = ax + (a+c) \left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \right) + b \ln \ln x + A + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $a(n)$ με $a(n) = f(n) \ln n$ αν ο n είναι πρώτος και $a(n) = 0$ αλλιώς, και τη συνάρτηση $g(t) = \frac{1}{\ln t}$, $t \geq 2$. Έχουμε

$$\sum_{p \leq x} f(p) = \sum_{2 \leq n \leq x} a(n)g(n) = \frac{A(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t \ln^2 t} dt,$$

όπου

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n) = \sum_{p \leq x} f(p) \ln p.$$

Από την υπόθεση έχουμε

$$\frac{A(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} \sum_{p \leq x} f(p) \ln p = ax + b + c \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Επίσης,

$$\int_2^x \frac{A(t)}{t \ln^2 t} dt = a \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt + b \int_2^x \frac{1}{t \ln t} dt + c \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt + \int_2^x \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt,$$

όπου R φραγμένη συνάρτηση. Υπολογίζουμε χωριστά τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt &= \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt - \frac{2}{\ln 2}, \\ \int_2^x \frac{1}{t \ln t} dt &= \ln \ln x - \ln \ln 2, \\ \int_2^x \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt &= \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt = C_1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} f(p) &= ax + b + c \frac{x}{\ln x} + a \frac{x}{\ln x} + a \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt + b \ln \ln x + c \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt \\ &+ C_1 - \frac{2a}{\ln 2} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \\ &= ax + (a+c) \left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}\right) + b \ln \ln x + A + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \end{aligned}$$

όπου $A = C_1 - \frac{2a}{\ln 2}$.

4.8. Έστω $S(x)$ και $T(x)$ πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$T(x) = \sum_{n \leq x} S\left(\frac{x}{n}\right)$$

για κάθε $x \geq 1$. Αν $S(x) = O(x)$ και c είναι μια θετική σταθερά, αποδείξτε ότι η σχέση

$$S(x) \sim cx \text{ καθώς το } x \rightarrow \infty$$

συνεπάγεται την

$$T(x) \sim cx \ln x \text{ καθώς το } x \rightarrow \infty.$$

Υπόδειξη. Αφού $S(x) \sim cx$, μπορούμε να γράψουμε $S(x) = cx + xf(x)$, όπου $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Τότε,

$$T(x) = \sum_{n \leq x} S\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \left(\frac{cx}{n} + \frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right)\right) = cx \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + \sum_{n \leq x} \frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O(1/x)$, άρα

$$cx \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = cx \ln x + c\gamma x + O(1).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, υπάρχει $t_0 > 1$ τέτοιος ώστε $|f(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t > t_0$. Θεωρούμε $x > t_0$ και γράφουμε

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \sum_{n < \frac{x}{t_0}} \frac{x}{n} \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| + \sum_{\frac{x}{t_0} \leq n \leq x} \frac{x}{n} \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right|.$$

Αν $n < x/t_0$ τότε $x/n > t_0$ άρα $|f(x/n)| < \varepsilon$. Συνεπώς,

$$\sum_{n < \frac{x}{t_0}} \frac{x}{n} \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \varepsilon \sum_{n < \frac{x}{t_0}} \frac{x}{n} = \varepsilon x (\ln(x/t_0) + O(1)).$$

Στο $[1, t_0]$ η $f(x) = S(x) - cx$ είναι φραγμένη από κάποιον $M > 0$. Άρα,

$$\sum_{\frac{x}{t_0} \leq n \leq x} \frac{x}{n} \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq M \sum_{\frac{x}{t_0} \leq n \leq x} \frac{x}{n} \leq Mt_0 \left(x - \frac{x}{t_0}\right) \leq Mt_0 x.$$

Δηλαδή,

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{x}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \varepsilon x \ln x + g(x)$$

όπου $g(x) = O(x)$. Τελικά,

$$T(x) = cx \ln x + u(x)$$

όπου $u(x) \leq \varepsilon x \ln x + O(x)$, άρα

$$\left| \frac{T(x)}{cx \ln x} - 1 \right| \leq \varepsilon + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

καθώς $x \rightarrow \infty$. Αυτό δείχνει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T(x)}{cx \ln x} = 1$, δηλαδή $T(x) \sim cx \ln x$.

4.9. Έστω $f(n)$ αριθμητική συνάρτηση και

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(n).$$

Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = \ell > 0,$$

τότε

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = \ell \ln x + o(\ln x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = \frac{S(x)}{x} + \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = \ell$, υπάρχει $t_0 > 1$ τέτοιος ώστε: αν $t \geq t_0$ τότε $\left| \frac{S(t)}{t} - \ell \right| \leq \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|S(x)| \leq Mx$ για κάθε $x \geq 1$.

Θεωρούμε x αρκετά μεγάλο ώστε αν θέσουμε $y = \ln x$ να ισχύει $y \geq t_0$. Έχουμε

$$\left| \int_y^x \frac{S(t)}{t^2} dt - \ell \int_y^x \frac{1}{t} dt \right| \leq \varepsilon \int_y^x \frac{1}{t} dt = \varepsilon \ln(x/y).$$

Επίσης,

$$\left| \int_1^y \frac{S(t)}{t^2} dt \right| \leq M \int_1^y \frac{1}{t} dt = M \ln y.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, διαιρώντας με $\ell \ln x$ και θέτοντας $y = \ln x$, παίρνουμε

$$\left| \frac{1}{\ell \ln x} \int_1^x \frac{S(t)}{t^2} dt - \frac{\ln x - \ln \ln x}{\ln x} \right| \leq \frac{M \ln \ln x}{\ell \ln x} + \varepsilon \frac{\ln x - \ln \ln x}{\ell \ln x}.$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{1}{\ell \ln x} \frac{S(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{\ln x - \ln \ln x}{\ln x} \rightarrow 1, \quad \frac{M \ln \ln x}{\ell \ln x} \rightarrow 0$$

όταν $x \rightarrow \infty$, και δεδομένου ότι το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{\ell \ln x} \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} \rightarrow 1$$

όταν $x \rightarrow \infty$, δηλαδή

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = \ell \ln x + o(\ln x).$$

4.10. Αποδείξτε ότι αν οι p, q είναι πρώτοι, τότε

$$\sum_{pq \leq x} \frac{1}{pq} = (\ln \ln x)^2 + O(\ln \ln x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{pq \leq x} \frac{1}{pq} = \sum_{p, q \leq x} \frac{1}{pq} - \sum_{\substack{p, q \leq x \\ pq > x}} \frac{1}{pq}.$$

Από τις εκτιμήσεις του Mertens έχουμε

$$\sum_{p, q \leq x} \frac{1}{pq} = \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^2 = (\ln \ln x + O(1))^2 = (\ln \ln x)^2 + O(\ln \ln x).$$

Επίσης,

$$\sum_{\substack{p, q \leq x \\ pq > x}} \frac{1}{pq} \leq \sum_{p \leq x} \sum_{\sqrt{x} < q \leq x} \frac{1}{pq} + \sum_{q \leq x} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{pq} = 2 \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{\sqrt{x} < q \leq x} \frac{1}{q} \right).$$

Έχουμε

$$\sum_{\sqrt{x} < q \leq x} \frac{1}{q} = \frac{\pi(x)}{x} - \frac{\pi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt$$

και, από τις εκτιμήσεις του Chebyshev,

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt &\leq c_1 \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{t \ln t} dt = c_1 \int_{\ln(\sqrt{x})}^{\ln x} \frac{1}{y} dy \\ &= c_1 [\ln(\ln x) - \ln(\ln(\sqrt{x}))] = c_1 \ln \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{2} \ln x} \right) = c_1 \ln 2. \end{aligned}$$

Συνολικά,

$$\sum_{\sqrt{x} < q \leq x} \frac{1}{q} = O(1),$$

άρα

$$\sum_{\substack{p, q \leq x \\ pq > x}} \frac{1}{pq} = O(\ln \ln x) \cdot O(1) = O(\ln \ln x).$$

Έπεται ότι

$$\sum_{p, q \leq x} \frac{1}{pq} = (\ln \ln x)^2 + O(\ln \ln x).$$

4.11. Έστω $\omega(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 3.6. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = x \ln \ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε $\omega(n) = \sum_{p|n} \mathbf{1}$. Τότε,

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{p|n} \mathbf{1} = \sum_{p \leq x} \sum_{d \leq \frac{x}{p}} \mathbf{1} = \sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p} \right] = \sum_{p \leq x} \frac{x}{p} - \sum_{p \leq x} \left\{ \frac{x}{p} \right\}.$$

Από το Θεώρημα 4.4.1 (εκτιμήσεις του Mertens) έχουμε

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + O(1).$$

Η απόδειξη αυτής της ασθενέστερης σχέσης μπορεί να γίνει με τις γνώσεις αυτού του κεφαλαίου αν γράψουμε

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{n \leq x} a(n) f(n),$$

όπου $f(t) = \frac{1}{\ln t}$, $t \geq 2$ και $a(n) = \frac{\ln n}{n}$ αν ο n είναι πρώτος και 0 αλλιώς, και χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.2.1. Έπεται ότι

$$\sum_{p \leq x} \frac{x}{p} = x \ln \ln x + O(x).$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\left| \sum_{p \leq x} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \right| \leq \sum_{p \leq x} \mathbf{1} = \pi(x) \leq x.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.

4.12. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geq 2$,

$$\sum_{n \leq x} \psi \left(\frac{x}{n} \right) = x \ln x + O(x).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \psi \left(\frac{x}{n} \right) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d \leq \frac{x}{n}} \Lambda(d) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \sum_{n \leq x/d} \mathbf{1} = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d} \right] \\ &= \sum_{d \leq x} \sum_{m|d} \Lambda(m) = \sum_{d \leq x} \ln d = \ln([x]!) = x \ln x + O(x) \end{aligned}$$

από το Θεώρημα 3.4.8. Μάλιστα εκεί αποδεικνύεται η ακριβέστερη εκτίμηση $x \ln x - x + O(\ln x)$.

4.13. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geq 1$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\vartheta(n)}{n^2} = \ln x + O(1).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\vartheta(n)}{n^2} &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} \sum_{p \leq n} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p \cdot \sum_{p \leq n \leq x} \frac{1}{n^2} = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p^2} + \sum_{p \leq x} \ln p \cdot \sum_{p < n \leq x} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{p \leq x} \ln p \cdot \sum_{p < n \leq x} \frac{1}{n^2} + O(1), \end{aligned}$$

αφού $\sum \frac{\ln p}{p^2} < \infty$. Από το Θεώρημα 3.3.3 (β) παίρνουμε

$$\sum_{p < n \leq x} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Άρα,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\vartheta(n)}{n^2} = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} \ln p + O\left(\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^2} \sum_{p \leq x} \ln p\right).$$

Αφού $\sum \frac{\ln p}{p^2} < \infty$, έχουμε $O\left(\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p^2}\right) = O(1)$. Αφού $\sum_{p \leq x} \ln p = \vartheta(x) = O(x)$, έχουμε $O\left(\frac{1}{x^2} \sum_{p \leq x} \ln p\right) = O(1/x)$. Άρα,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\vartheta(n)}{n^2} = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} \ln p + O(1) = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + O(1).$$

Τέλος, από τις εκτιμήσεις του Mertens (Θεώρημα 4.4.1 (β)) έχουμε

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1),$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

4.14. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p-1} = \ln x + O(1).$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p-1} = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + \sum_{p \leq x} \ln p \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

και παρατηρούμε ότι $\sum_p \frac{\ln p}{p(p-1)} < \infty$ άρα $\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p(p-1)} = O(1)$, ενώ από τις εκτιμήσεις του Mertens (Θεώρημα 4.4.1 (β)) έχουμε

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

Συνδυάζοντας αυτά τα δύο παίρνουμε το ζητούμενο.

4.15. Έστω x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling επαληθεύστε ότι

$$\ln[x]! - 2 \ln[x/2]! < \frac{3x}{4} \quad \text{αν } x > 0.$$

Υπόδειξη.

4.16. Συμπληρώστε την απόδειξη του αιτήματος του Bertrand που έδωσε ο Erdős εξηγώντας τα ακόλουθα βήματα:

(α) Έστω $r(p)$ τέτοιος ώστε

$$p^{r(p)} \leq 2n < p^{r(p)+1}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\binom{2n}{n} \mid \prod_{p \leq 2n} p^{r(p)}.$$

(β) Αποδείξτε ότι αν $p > 2$ και $\frac{2n}{3} < p \leq n$ τότε

$$p \nmid \binom{2n}{n}.$$

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n.$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα αποδείξτε το αίτημα του Bertrand.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε πρώτο p ορίζουμε $t(p, n)$ τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό t για τον οποίο ο p^t διαιρεί τον $\binom{2n}{n}$. Από την ταυτότητα του Legendre, ο εκθέτης του p στην ανάλυση του $n!$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ισούται με

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor,$$

άρα

$$t(p, 2n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right).$$

Όμως, κάθε όρος στο τελευταίο άθροισμα είναι είτε ίσος με μηδέν ή 1, και όλοι οι όροι για $j > \log_p(2n)$ μηδενίζονται. Συνεπώς, $t(p, n) \leq \log_p(2n)$, το οποίο δείχνει ότι $t(p, n) \leq r(p)$. Έπεται ότι

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{t(p, n)} \mid \prod_{p \leq 2n} p^{r(p)}.$$

(β) Υπάρχουν ακριβώς δύο παράγοντες του p στον αριθμητή του κλάσματος $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, οι οποίοι προέρχονται από τους δύο όρους p και $2p$ στο $(2n)!$, και ομοίως υπάρχουν δύο παράγοντες του p στον παρονομαστή, οι οποίοι οφείλονται στα δύο αντίτυπα του όρου p στο $n!$. Οι παράγοντες αυτοί διαγράφονται, και έτσι δεν υπάρχουν παράγοντες του p στον $\binom{2n}{n}$.

Η υπόθεση $p \geq \frac{2n}{3}$ εξασφαλίζει ότι $3p > 2n$ και έτσι ο $3p$ δεν είναι όρος του αριθμητή, και η υπόθεση ότι ο p είναι περιττός εξασφαλίζει ότι ο $2p$ συνεισφέρει μόνο έναν παράγοντα του p στον αριθμητή.

(γ) Θέτουμε $G(n) = \prod_{p \leq n} p$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 3$ ισχύει

$$G(n) < 2^{2n-3}.$$

Αφού ο $\binom{2m-1}{m}$ είναι φυσικός και όλοι οι πρώτοι $m+1 \leq p \leq 2m-1$ εμφανίζονται στον αριθμητή του αλλά δεν εμφανίζονται στον παρονομαστή του, έχουμε

$$\frac{G(2m-1)}{G(m)} \leq \binom{2m-1}{m} = \frac{1}{2} \left(\binom{2m-1}{m-1} + \binom{2m-1}{m} \right) < \frac{1}{2} (1+1)^{2m-1} = 2^{2m-2}.$$

Συνεχίζουμε την απόδειξη με επαγωγή ως προς n .

(i) Αν $n = 3$, τότε $G(n) = 6 < 8 = 2^{2n-3}$.

(ii) Αν $n = 4$, τότε $G(n) = 6 < 32 = 2^{2n-3}$.

(iii) Αν ο $n \geq 5$ είναι περιττός, δηλαδή $n = 2m - 1$, τότε από την προηγούμενη ανισότητα και την επαγωγική υπόθεση, αφού $m \geq 3$ και $m < n$ παίρνουμε

$$G(n) = G(2m-1) < G(m) \cdot 2^{2m-2} < 2^{2m-3} 2^{2m-2} = 2^{4m-5} = 2^{2n-3}.$$

(iv) Αν ο $n = 2m$ είναι άρτιος και $n \geq 6$, τότε από την προηγούμενη ανισότητα και την επαγωγική υπόθεση, αφού $m \geq 3$ και $n-1 < n$ παίρνουμε

$$G(n) = G(2m) = G(2m-1) = G(n-1) < 2^{2(n-1)-3} < 2^{2n-3}.$$

(δ) Υποθέτουμε ότι για κάποιον φυσικό $n \geq 2$ δεν υπάρχουν πρώτοι που να ικανοποιούν την $n < p \leq 2n$. Από τα προηγούμενα ερωτήματα βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν πρώτοι παράγοντες p του $\binom{2n}{n}$ τέτοιοι ώστε:

- $2n < p$, διότι κάθε τέτοιος παράγοντας πρέπει να διαιρεί τον $(2n)!$.
- $p = 2n$, διότι ο $2n$ δεν είναι πρώτος.
- $n < p < 2n$, διότι υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι πρώτοι αριθμοί.
- $\frac{2n}{3} < p \leq n$, λόγω του (β).

Συνεπώς, κάθε πρώτος παράγοντας p του $\binom{2n}{n}$ ικανοποιεί την

$$p \leq \frac{2n}{3}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $p > \sqrt{2n}$ τότε ο φυσικός $\binom{2n}{n}$ έχει το πολύ έναν παράγοντα p . Από το (α) για κάθε πρώτο p έχουμε $p^{t(p,n)} \leq 2n$, άρα το γινόμενο των $p^{t(p,n)}$ πάνω από τους πρώτους που είναι μικρότεροι ή ίσοι από $\sqrt{2n}$ είναι το πολύ ίσο με $(2n)^{\sqrt{2n}}$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{4^n}{2n} &\leq \binom{2n}{n} = \left(\prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{t(p,n)} \right) \left(\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}} p^{t(p,n)} \right) < (2n)^{\sqrt{2n}} \prod_{1 < p \leq \frac{2n}{3}} p \\ &= (2n)^{\sqrt{2n}} G\left(\frac{2n}{3}\right) \leq (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{2n/3}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους καταλήγουμε στην

$$\frac{\ln 4}{3}n \leq (\sqrt{2n} + 1) \ln(2n).$$

Αφού το δεξιό μέλος είναι κοίλη συνάρτηση του n , η τελευταία αυτή ανισότητα ισχύει σε κάποιο διάστημα τιμών του n . Εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει για $n = 467$ και δεν ισχύει για $n = 468$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $n < 468$.

Τώρα όμως μπορούμε να αποκλείσουμε και αυτό το ενδεχόμενο ως εξής: Για οποιονδήποτε $2 \leq n < 468$, επιλέγοντας ως p κάποιον από τους πρώτους αριθμούς 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631 (καθένας από τους οποίους είναι μικρότερος από το διπλάσιο του προηγούμενου του) μπορούμε να έχουμε $n < p < 2n$.

4.17. Αποδείξτε ότι αν n είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος από 1, τότε ο $n!$ δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο.

Υπόδειξη. Από την ταυτότητα του Legendre (Θεώρημα 3.4.10) έχουμε

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{a(p)},$$

όπου

$$a(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^m} \right].$$

Αν ο $n!$ είναι τέλειο τετράγωνο θα πρέπει ο $a(p)$ να είναι άρτιος για κάθε πρώτο $p \leq n$. Αν όμως θεωρήσουμε $p \leq n$ με $p > \sqrt{n}$ τότε $[n/p^m] = 0$ για κάθε $m \geq 2$, άρα $a(p) = 1$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Τώρα, χρησιμοποιώντας το αίτημα του Bertrand ελέγχουμε εύκολα ότι για κάθε $n > 1$ υπάρχει πρώτος $p \leq n$ με $p > \sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

4.18. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $m > 20$ υπάρχει πρώτος ανάμεσα στον $m/2$ και τον $m - 6$. Αποδείξτε ότι ο n μπορεί να γραφεί ως άθροισμα διακεκριμένων πρώτων όταν $n > 6$.

Υπόδειξη.

4.19. Χρησιμοποιώντας το αίτημα του Bertrand αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n > 1$, ο αριθμός

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι ποτέ ακέραιος.

Υπόδειξη. Από το αίτημα του Bertrand υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $\frac{n}{2} < p \leq n$. Αν $1 \leq k \leq n$ με $k \neq p$, τότε ο k δεν διαιρείται με τον p (αφού $sp > n$ για κάθε $s \geq 2$). Συνεπώς,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \frac{1}{k} = \frac{t}{s}$$

για κάποιους $t, s \in \mathbb{N}$ τέτοιους ώστε $p \nmid s$. Υποθέτοντας ότι ο

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

είναι ακέραιος, έχουμε

$$\frac{t}{s} + \frac{1}{p} \in \mathbb{N} \implies \frac{s}{p} \in \mathbb{N},$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $p \nmid s$.

4.20. Χρησιμοποιώντας επαγωγή και το αίτημα του Bertrand αποδείξτε ότι, συμβολίζοντας με p_n τον n -οστό πρώτο, για κάθε $n > 3$,

$$p_n < p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}.$$

Υπόδειξη. Για $n = 4$ ζητάμε $p_4 < p_1 + p_2 + p_3$ δηλαδή $7 < 2 + 3 + 5$ που ισχύει. Έστω ότι για κάποιον $n > 3$ έχουμε

$$p_n < p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}.$$

Από το αίτημα του Bertrand υπάρχει πρώτος q τέτοιος ώστε $p_n < q < 2p_n$, συνεπώς $p_{n+1} < 2p_n$. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι

$$p_{n+1} < 2p_n = p_n + p_n < (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + p_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$

4.21. Ξεκινώντας από την

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \mu(d)$$

αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Υπόδειξη. Ακολουθώντας την υπόδειξη γράφουμε

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{(dm)^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \zeta(2) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

4.22. (α) Έστω f, f_0, g αριθμητικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f = f_0 * g$. Αν $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$ και $F_0(x) = \sum_{n \leq x} f_0(n)$, αποδείξτε ότι

$$F(x) = \sum_{d \leq x} g(d) F_0(x/d).$$

(β) Γράφοντας $\mu^2 = u * (\mu^2 * \mu)$ και χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$

Με την υπόθεση ότι ισχύει το θεώρημα των πρώτων αριθμών, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + o(\sqrt{x}).$$

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $f(n) = \sum_{d|n} g(d) f_0(n/d)$, άρα

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} g(d) f_0(x/n) = \sum_{d \leq x} g(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} f_0(n/d) \\ &= \sum_{d \leq x} g(d) \sum_{m \leq x/d} f_0(m) = \sum_{d \leq x} F_0(x/d). \end{aligned}$$

(β) Από τις ιδιότητες του γινομένου Dirichlet και την $I = \mu * u$ παίρνουμε

$$\mu^2 = \mu^2 * I = \mu^2 * (\mu * u) = u * (\mu^2 * \mu).$$

Θέτουμε $g = \mu^2 * \mu$. Η g είναι πολλαπλασιαστική και για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$g(p^m) = \sum_{k=0}^m \mu^2(p^k) \mu(p^{m-k}) = \mu(p^m) + \mu(p^{m-1})$$

αφού $\mu(p^k) = 0$ αν $k \geq 2$ και $\mu^2(1) = \mu^2(p) = 1$. Έπεται ότι $g(p^m) = 0$ αν $m \neq 2$ και $g(p^2) = -1$. Από αυτές τις σχέσεις βλέπουμε εύκολα ότι $g(n) = 0$ εκτός αν $n = m^2$ για κάποιον m ο οποίος είναι ελεύθερος τετραγώνων, και σε αυτή την περίπτωση έχουμε $g(n) = \mu(m)$.

Εφαρμόζοντας το (α) με $f_0 = u$, οπότε $F_0(x) = \sum_{n \leq x} u(n) = [x]$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \mu^2(n) &= \sum_{n \leq x} (u * g)(n) = \sum_{d \leq x} g(d)[x/d] = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \mu(m) \left(\frac{x}{m^2} + O(1) \right) \\ &= x \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} + O \left(\sum_{m \leq \sqrt{x}} |\mu(m)| \right) \\ &= x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} - x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Τώρα,

$$x \left| \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{m^2} \right| = O \left(x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{1}{m^2} \right) = O(\sqrt{x}),$$

άρα τελικά

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το θεώρημα των πρώτων αριθμών

5.1. Για δοσμένο $A > 0$ αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε: για $|t| \geq 2$, $\sigma \geq \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{A}{\ln|t|}\right)$,

$$|\zeta'(s)| \leq M \ln^2 |t|.$$

Υπόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο για $A = \frac{1}{12}$. Θεωρούμε γνωστό (έχει γίνει στη θεωρία) ότι αν $|t| \geq 2$ και $\sigma \geq 1 - \frac{1}{4 \ln|t|}$ τότε $|\zeta(s)| \leq M_1 \ln |t|$.

Αν $\sigma \geq 2$ τότε από την $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}$ βλέπουμε ότι

$$|\zeta'(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} =: C_1$$

Αφού $|t| \geq 2$ έπεται προφανώς ότι $C_1 \leq M \ln^2 |t|$, όπου $M := C_1 / (\ln 2)^2$.

Στην ένωση των δύο ορθογωνίων $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$, $2 \leq |t| \leq 3$ η $\zeta'(s)$ είναι αναλυτική, άρα συνεχής. Λόγω συμπαγείας έχουμε $|\zeta'(s)| \leq C_2$ για κάποια σταθερά $C_2 > 0$, άρα όπως πριν παίρνουμε $|\zeta'(s)| \leq M \ln^2 |t|$ αν επιλέξουμε κατάλληλα την απόλυτη σταθερά $M > 0$.

Ζητάμε λοιπόν την ανισότητα $|\zeta'(s)| \leq M_2 \ln^2 |t|$ για κάποια απόλυτη σταθερά $M_2 > 0$, με τις υποθέσεις

$$1 - \frac{1}{12 \ln |t|} \leq \sigma \leq 2 \quad \text{και} \quad |t| \geq 3.$$

Έστω $s = \sigma + it$ που ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{12 \ln |t|}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $s_1 = \sigma_1 + it_1$ στον κύκλο $C(s, \delta) = \{s_1 \in \mathbb{C} : |s - s_1| = \delta\}$ ισχύουν τα εξής:

- $|t_1| \leq |t| - \delta \geq 3 - 1 = 3$, και
- $|t_1| \leq |t| + \delta \leq |t| + \frac{1}{12 \ln e} \leq |t| + \frac{1}{12} |t| = \frac{13}{12} |t| \leq |t|^{3/2}$, διότι $|t| \geq 2 \geq (13/12)^2$, άρα

$$|\sigma_1| \geq |\sigma| - \frac{1}{12 \ln |t|} \geq 1 - \frac{1}{5 \ln |t|} \geq 1 - \frac{1}{4 \ln |t_1|}.$$

Δηλαδή, για κάθε $s \in C(s, \delta)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του (β), και συνεπώς,

$$|\zeta(s_1)| \leq M_1 \ln |t_1|.$$

Τώρα, από τον τύπο του Cauchy παίρνουμε

$$\begin{aligned} |\zeta'(s)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s, \delta)} \frac{\zeta'(s_1)}{(s_1 - s)^2} ds_1 \right| \leq \delta \cdot \frac{1}{\delta^2} M_1 \max_{s_1 \in C(s, \delta)} \ln |t_1| \\ &= 12M_1 \ln |t| \cdot \frac{3}{2} \ln |t| = 18M_1 \ln^2 |t|, \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο με $M := 18M_1$. Συνδυάζοντας τις τρεις περιπτώσεις που εξετάσαμε παραπάνω, επιλέγουμε κατάλληλα τη σταθερά $M_2 > 0$ ώστε το φράγμα να ισχύει για όλους τους s που θεωρήσαμε.

5.2. Γράφοντας $b(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$, αποδείξτε ότι

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{b(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Συμπεράνατε ότι το δεξιό μέλος είναι μια αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ στο $\sigma > -1$ και ότι

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Υπόδειξη.

5.3. Έστω $b > 0$, $T \geq 1$ και $0 < y < 1$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s} ds = O\left(\frac{y^b}{T|\ln y|}\right).$$

Υπόδειξη.

5.4. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{s \rightarrow 1} (1-s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = 1.$$

Υπόδειξη. Στο $H_0 = \{s : \sigma > 0\}$ η $\zeta(s)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $G(s)$, ολόμορφη στο H_0 , τέτοια ώστε $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + G(s)$ στο $H_0 \setminus \{1\}$. Αυτό σημαίνει ότι $\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + G'(s)$ στο $H_0 \setminus \{0\}$. Άρα,

$$(1-s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-(s-1)^2 \zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} = \frac{1 = (s-1)^2 G'(s)}{1 + (s-1)G(s)} \rightarrow 1$$

καθώς το $s \rightarrow 1$.

5.5. Αποδείξτε ότι για $0 < \sigma < 1$,

$$-\frac{1}{1-\sigma} < \zeta(\sigma) < 0.$$

Υπόδειξη.

5.6. Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Υπόδειξη. Έχουμε $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ και, για $\sigma > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Θεωρούμε το μερικό άθροισμα

$$\sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(N)}{N^s} + s \int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Έχουμε

$$\left| \frac{\psi(N)}{N^s} \right| = \frac{\psi(N)}{N^\sigma} \leq \frac{cN}{N^\sigma} \rightarrow 0$$

καθώς το $N \rightarrow \infty$. Επίσης, $|\psi(x)/x^{s+1}| \leq c/x^\sigma$ για κάθε $x \geq 1$, άρα

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} \right| dx \leq c \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx < \infty,$$

απ' όπου έπεται ότι το

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx$$

υπάρχει. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(N)}{N^s} + s \int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx \right) \\ &= s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Σειρές Dirichlet

6.1. Έστω $\omega(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 3.6. Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}.$$

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $\omega(n)$ μετράει το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n και είναι πολλαπλασιαστική. Παρατηρούμε ότι για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$2^{\omega(p^m)} = 2 = \sum_{d|p^m} |\mu(d)| = (|\mu| * u)(p^m).$$

Έπεται ότι

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} |\mu(d)|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$|2^{\omega(n)}| = \sum_{d|n} |\mu(d)| \leq d(n).$$

Έστω $\sigma > 1$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $\sigma - \varepsilon > 1$. Στην Άσκηση 2.30 είδαμε ότι υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε $d(n) \leq C(\varepsilon)n^{\varepsilon}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\frac{|2^{\omega(n)}|}{n^{\sigma}} \leq C(\varepsilon) \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}},$$

και έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^{\sigma}}$ συγκλίνει απολύτως. Άρα, για $\sigma > 1$, από το Θεώρημα 5.3.2

έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s} &= \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{\omega(p^m)}}{p^{ms}} = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{p^{ms}} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{2p^{-s}}{1-p^{-s}} \right) \\ &= \prod_p \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2} = \prod_p (1-p^{-s})^{-2} / \prod_p (1-p^{-2s})^{-1} \\ &= \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}. \end{aligned}$$

6.2. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{(m,n)=1} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n)=1} \frac{1}{m^2 n^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I((m,n))}{m^2 n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|(m,n)} \frac{1}{m^2 n^2} \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(dr)^2 (dt)^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} \\ &= \zeta^2(2) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^4} = \frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}. \end{aligned}$$

6.3. Αποδείξτε ότι αν $\kappa(1) = 1$ και $\kappa(n) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$ όταν $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, τότε για $s > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}.$$

Υπόδειξη. Η κ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση και για κάθε $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\kappa(n) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \leq (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = d(n).$$

Έστω $\sigma > 1$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $\sigma - \varepsilon > 1$. Στην Άσκηση 2.30 είδαμε ότι υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε $d(n) \leq C(\varepsilon)n^\varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\frac{|\kappa(n)|}{n^\sigma} \leq C(\varepsilon) \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}},$$

και έπεται ότι για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma > 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s}$ συγκλίνει απολύτως. Θα χρειαστούμε την ταυτότητα

$$\sum_{m=1}^{\infty} mx^m = \frac{x}{(x-1)^2}$$

η οποία ισχύει για $|x| < 1$. Τώρα, για κάθε s με $\sigma > 1$, από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} &= \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa(p^m)}{p^{ms}} = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{p^{ms}} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} \right) \\ &= \prod_p \frac{1-p^{-s}+p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2} = \prod_p \frac{1+p^{-3s}}{(1+p^{-s})(1-p^{-s})^2} \\ &= \prod_p \frac{1-p^{-6s}}{(1-p^{-3s})(1-p^{-2s})(1-p^{-s})} \\ &= \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \prod_p (1-p^{-2s})^{-1} \prod_p (1-p^{-3s})^{-1} / \prod_p (1-p^{-6s})^{-1} \\ &= \frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}. \end{aligned}$$

6.4. Έστω f μια πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση τέτοια ώστε $f(p) = f(p)^2$ για κάθε πρώτο p . Αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

συγκλίνει απολύτως για $\sigma > \sigma_a$ και έχει άθροισμα $F(s)$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\lambda(n)}{n^s} = \frac{F(2s)}{F(s)} \quad \text{αν } \sigma > \sigma_a,$$

και $F(s) \neq 0$.

Υπόδειξη. Για $\sigma > \sigma_a$ οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mu(n)}{n^s}$ συγκλίνουν και οι δύο απολύτως, και αφού η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική έχουμε

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mu(n)}{n^s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} f(d)\mu(d)f(n/d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{d|n} \mu(d) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)I(n)}{n^s} = f(1) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

άρα

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \neq 0.$$

Αφού $f(p) = f(p^2)$ και η $f(n)\lambda(n)$ είναι πολλαπλασιαστική, από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\lambda(n)}{n^s} &= \prod_p \frac{1}{1-f(p)\lambda(p)p^{-s}} = \prod_p \frac{1}{1+f(p)p^{-s}} = \prod_p \frac{1-f(p)p^{-s}}{1-f(p)^2p^{-2s}} \\ &= \prod_p \frac{1-f(p)p^{-s}}{1-f(p)p^{-2s}} = \prod_p \frac{1}{1-f(p)p^{-2s}} / \prod_p \frac{1}{1-f(p)p^{-s}} = \frac{F(2s)}{F(s)}. \end{aligned}$$

6.5. Ορίζουμε

$$F(\sigma, t) = 3 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it).$$

Αν $\sigma > 1$, αποδείξτε ότι η $F(\sigma, t)$ έχει πραγματικό μέρος ίσο με

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \operatorname{Re}\{3 + 4n^{-it} + n^{-2it}\}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\operatorname{Re}F(\sigma, t) \leq 0.$$

Υπόδειξη. Από το Λήμμα 5.8.2 έχουμε

$$\begin{aligned} 3 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4 \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) &= -3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+2it}} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} (3 + 4n^{-it} + n^{-2it}). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\operatorname{Re}F(\sigma, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \operatorname{Re}(3 + 4n^{-it} + n^{-2it}).$$

Αν $\vartheta = t \ln n$ τότε $n^{-it} = \exp(-i\vartheta) = \cos \vartheta - i \sin \vartheta$ και $n^{-2it} = \exp(-i2\vartheta) = \cos 2\vartheta - i \sin 2\vartheta$, άρα

$$\operatorname{Re}(3 + 4n^{-it} + n^{-2it}) = 3 + 4 \cos \vartheta + \cos 2\vartheta \geq 0$$

από το Λήμμα 5.5.2. Έπεται ότι $\operatorname{Re}F(\sigma, t) \leq 0$.

6.6. Έστω $c_q(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 2.5. Αποδείξτε ότι

$$c_q(n) = \sum_{d|(n,q)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right),$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q(n)}{q^2}.$$

Υπόδειξη. Η πρώτη ισότητα αποδείχθηκε στην Άσκηση 2.5. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q(n)}{q^2} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \sum_{d|(n,q)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(dm)^2} d\mu(m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{n}{d} \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{n} \sum_{d|n} d = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{\sigma(n)}{n}, \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

6.7. Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

Από αυτή τη σχέση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, δείξτε ότι

$$\mu^2 * d = \mu * d^2.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $(m, n) = 1$ τότε $(m^2, n^2) = 1$ και, αφού η d είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση, έπεται ότι η $n \mapsto d(n^2)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Το γεγονός ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως για $\sigma > 1$ εξηγείται όπως στην Άσκηση 6.1 (με βάση το φράγμα της Άσκησης 2.30 για την $d(n^2)$). Από το Θεώρημα 5.3.2, για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d(p^{2m})}{p^{ms}} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}}.$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\sum_{m=1}^{\infty} mx^m = \frac{x}{(x-1)^2}$$

η οποία ισχύει για $|x| < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}} &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} m(p^{-s})^m + \sum_{m=0}^{\infty} (p^{-s})^m = \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1}{1-p^{-s}} \\ &= \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1-p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3} = \prod_p (1-p^{-s})^{-3} / \prod_p (1-p^{-2s})^{-1} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

6.8. Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m, n]^{\sigma}} = \frac{\zeta^3(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $D(k) = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : [a, b] = k\}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m, n]^{\sigma}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^{\sigma}},$$

όπου $f(k) = |D(k)|$ είναι ο πληθώραριθμός του $D(k)$. Αν $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ τότε

$$|D(k)| \leq (\alpha_1 \cdots \alpha_s)^2 \leq d^2(k).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 2.30 όπως στην Άσκηση 6.3 βλέπουμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma > 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s}$ συγκλίνει απολύτως.

Παρατηρούμε ότι

$$D(p^m) = \{(1, p^m), (p^m, 1), (p, p^m), (p^m, p), \dots, (p^m, p^m)\},$$

άρα

$$f(p^m) = |D(p^m)| = 2m + 1.$$

Από το Θεώρημα 5.3.2, για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}}.$$

Όπως στην Άσκηση 6.7 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{p^{ms}} &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} m(p^{-s})^m + \sum_{m=0}^{\infty} (p^{-s})^m = \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1}{1-p^{-s}} \\ &= \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1-p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3}, \end{aligned}$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3} = \prod_p (1-p^{-s})^{-3} / \prod_p (1-p^{-2s})^{-1} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

6.9. Αποδείξτε ότι για $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)} \lambda(n)}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta^2(\sigma)}.$$

Υπόδειξη. Η $2^{\omega(n)} \lambda(n)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι για κάθε πρώτο p και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$2^{\omega(p^m)} = 2 = \sum_{d|p^m} |\mu(d)| = (|\mu| * u)(p^m).$$

Έπεται ότι

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} |\mu(d)|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$|2^{\omega(n)} \lambda(n)| = \sum_{d|n} |\mu(d)| \leq d(n).$$

Έστω $\sigma > 1$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $\sigma - \varepsilon > 1$. Στην Άσκηση 2.30 είδαμε ότι υπάρχει σταθερά $C(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε $d(n) \leq C(\varepsilon)n^{\varepsilon}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\frac{|2^{\omega(n)} \lambda(n)|}{n^{\sigma}} \leq C(\varepsilon) \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}},$$

και έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}\lambda(n)}{n^{\sigma}}$ συγκλίνει απολύτως. Τώρα, για κάθε $\sigma > 1$, από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}\lambda(n)}{n^{\sigma}} &= \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{\omega(p^m)}\lambda(p^m)}{p^{m\sigma}} = \prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{p^{m\sigma}} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{-2p^{-\sigma}}{1+p^{-\sigma}} \right) \\ &= \prod_p \frac{1-p^{-\sigma}}{1+p^{-\sigma}} = \prod_p \frac{(1-p^{-\sigma})^2}{1-p^{-2\sigma}} = \prod_p (1-p^{-2\sigma})^{-1} / \prod_p (1-p^{-\sigma})^{-2} \\ &= \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta^2(\sigma)}. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Πρώτοι σε αριθμητικές προόδους

7.1. Αποδείξτε ότι κάθε αριθμητική συνάρτηση f που είναι περιοδική $(\text{mod } k)$ και ικανοποιεί την $f(n) = 0$ αν $(n, k) > 1$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός χαρακτήρων $(\text{mod } k)$.

Υπόδειξη. Ζητάμε t_χ ώστε $f = \sum_\chi t_\chi \chi$, όπου χ οι $\varphi(k)$ το πλήθος χαρακτήρες $(\text{mod } k)$. Αν υπάρχουν τέτοιοι συντελεστές τότε για κάθε χαρακτήρα $\chi (\text{mod } k)$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^k f(n) \overline{\chi(n)} = \sum_n \sum_\psi t_\psi \psi(n) \overline{\chi(n)} = \sum_\psi t_\psi \sum_{n=1}^k \psi(n) \overline{\chi(n)} = \varphi(k) t_\chi$$

λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας

$$\sum_{n=1}^k \psi(n) \overline{\chi(n)} = \begin{cases} \varphi(k) & , \text{ αν } \psi = \chi \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

Δηλαδή, θα πρέπει να ορίσουμε

$$t_\chi := \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^k f(n) \overline{\chi(n)}.$$

Με αυτόν τον ορισμό βλέπουμε εύκολα ότι

$$\sum_\chi t_\chi \chi(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{m=1}^k f(m) \sum_\chi \chi(n) \overline{\chi(m)} = f(n)$$

για κάθε $1 \leq n \leq k$ με $(n, k) = 1$, λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \chi(n) \overline{\chi(m)} = \delta_{n,m}.$$

Αφού $f(n) = 0$ αν $(n, k) > 1$, έπεται ότι $\sum_\chi t_\chi \chi(n) = f(n)$ και στην περίπτωση που $(n, k) > 1$.

7.2. Έστω $k > 1$ ένας ακέραιος. Έστω χ ένας όχι-κύριος χαρακτήρας $(\text{mod } k)$. Αποδείξτε ότι για οποιοσδήποτε ακέραιους $a < b$ έχουμε

$$\left| \sum_{n=a}^b \chi(n) \right| \leq \frac{\varphi(k)}{2}.$$

Υπόδειξη. Αφού ο χαρακτήρας χ έχει περίοδο k , μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1 \leq a < b \leq k$. Θέτουμε s το πλήθος των $a \leq n \leq b$ για τους οποίους $(n, k) = 1$. Αν $s \leq \varphi(k)/2$ τότε

$$\left| \sum_{n=a}^b \chi(n) \right| \leq \sum_{n=a}^b |\chi(n)| = s \leq \frac{\varphi(k)}{2}.$$

Αν $s > \varphi(k)/2$ τότε το πλήθος των $n \in \{1, \dots, a-1\} \cup \{b+1, \dots, k\}$ με $(n, k) = 1$ είναι $\varphi(k) - s < \varphi(k)/2$. Αφού ο χ δεν είναι κύριος, έχουμε $\sum_{n=1}^k \chi(n) = 0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=a}^b \chi(n) \right| &= \left| -\sum_{n=1}^{a-1} \chi(n) - \sum_{n=b+1}^k \chi(n) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{a-1} \chi(n) \right| + \left| \sum_{n=b+1}^k \chi(n) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{a-1} |\chi(n)| + \sum_{n=b+1}^k |\chi(n)| \leq \varphi(k) - s < \frac{\varphi(k)}{2}. \end{aligned}$$

7.3. Κατασκευάστε ένα άπειρο σύνολο S πρώτων με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $p \in S$ και $q \in S$ τότε

$$\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2} \right) = (p, q-1) = (p-1, q) = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε $p_1 > 2$ και επαγωγικά ορίζουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία πρώτων ως εξής: αν έχουν οριστεί οι $p_1 < \dots < p_n$ τότε από το θεώρημα του Dirichlet υπάρχει πρώτος

$$p_{n+1} = a_n \cdot 2 \prod_{p \leq p_n} p - 1$$

όπου $a_n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το άπειρο σύνολο $S = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n > m$, τότε:

- (α) Έχουμε $p_m \mid p_n + 1$. Αφού $p_m > 2$ δεν μπορούμε να έχουμε $p_m \mid p_n - 1$, άρα $(p_m, p_n - 1) = 1$.
- (β) Έχουμε $p_n > p_m - 1$, άρα δεν μπορούμε να έχουμε $p_n \mid p_m - 1$, συνεπώς $(p_n, p_m - 1) = 1$.
- (γ) Έστω q ένας πρώτος διαιρέτης του $\frac{p_n+1}{2}$. Τότε, ο q δεν διαιρεί τον $\frac{p_n+1}{2} = a_n \prod_{p \leq p_{n-1}} p$, άρα $q > p_{n-1}$. Όμως $\frac{p_m-1}{2} < p_m \leq p_{n-1}$, άρα ο q δεν διαιρεί τον $\frac{p_m-1}{2}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}) = 1$.

7.4. Έστω $c_q(n)$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην Άσκηση 2.3. Ορίζουμε

$$\langle f, g \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} f(n) \overline{g(n)}.$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 2.3, αποδείξτε ότι

$$\langle c_q, c_{q'} \rangle = \begin{cases} \varphi(q) & , \text{ αν } q = q' \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}.$$

Υπόδειξη.

7.5. (α) Έστω $f(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ με ακέραιους συντελεστές και ας υποθέσουμε ότι για κάθε πρώτο p , υπάρχουν φυσικός m και πρώτος q τέτοιοι ώστε $f(p) = q^m$. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό t ,

$$q^{m+1} \mid (f(p + tq^{m+1}) - f(p)).$$

(β) Συμπεράνατε από το (α) ότι αν $p \neq q$ και o $p + tq^{m+1}$ είναι πρώτος, τότε

$$f(p + tq^{m+1}) = q^m.$$

(γ) Καταλήξτε σε άτοπο από το (β) χρησιμοποιώντας το θεώρημα του *Dirichlet* για τους πρώτους σε αριθμητικές προόδους και συμπεράνατε ότι $p = q$, ή ισοδύναμα ότι για κάθε πρώτο p υπάρχει ακέραιος m_p τέτοιος ώστε

$$f(p) = p^{m_p}.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι $f(p) = q^m$ για κάποιον πρώτο q και κάποιον $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$ με απλές πράξεις έχουμε

$$q^{m+1} \mid f(p + \ell q^{m+1}) - f(p).$$

(β) Έστω ότι $q \neq p$. Αφού $(p, q^{m+1}) = 1$, υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $p + \ell q^{m+1}$. Αν λοιπόν o $p + \ell q^{m+1}$ είναι πρώτος, τότε υπάρχουν πρώτος d και $s \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d^s = f(p + \ell q^{m+1}) = f(p) + aq^{m+1} = q^m(aq + 1)$$

για κάποιον ακέραιο a . Τότε, $q \mid d^s$, άρα τελικά $q = d$ και αναγκαστικά $a = 0$ και $s = m$. Δηλαδή,

$$f(p + \ell q^{m+1}) = q^m.$$

(γ) Αφού αυτό συμβαίνει για άπειρες τιμές του ℓ , το πολυώνυμο $f(x)$ είναι σταθερό και ίσο με q^m , το οποίο είναι άτοπο αφού έχει βαθμό $n \geq 1$. Έπεται ότι $q = p$. Δηλαδή, για κάθε πρώτο p υπάρχει φυσικός m_p τέτοιος ώστε $f(p) = p^{m_p}$.

Σημείωση: Δεδομένου ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f(p)}{p^n} = a_n$, όπου a_n είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $f(x)$, συμπεραίνουμε ότι $m_p = n$ για όλους τελικά τους πρώτους p , δηλαδή $f(p) = p^n$ για όλους τελικά τους πρώτους. Αφού το $f(x)$ είναι πολυώνυμο, αναγκαστικά είναι το $f(x) = x^n$.

7.6. (α) Έστω m και k θετικοί ακέραιοι και f ένας χαρακτήρας *Dirichlet* (mod k). Λέμε ότι o m είναι περίοδος της f αν $f(n + m) = f(n)$ για κάθε θετικό ακέραιο n . Αν o k είναι ελεύθερος τετραγώνων, αποδείξτε ότι o k είναι η μικρότερη θετική περίοδος της f .

(β) Δώστε παράδειγμα ενός χαρακτήρα *Dirichlet* (mod k) για τον οποίο o k δεν είναι η μικρότερη θετική περίοδος της f .

Υπόδειξη.