Αναλυτική Θεωρία Αριθμών – 17 Ιουνίου 2022

1. (3 μον.) (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geqslant 1$,

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \qquad \text{και} \qquad \sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n).$$

(β) Αποδείξτε ότι $\varphi(n)d(n) \geqslant n$ για κάθε $n \geqslant 1$.

2. (3 μον.) (α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης Euler-Maclaurin αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geqslant 2$,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

όπου A είναι μια σταθερά.
(β) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2\gamma(\ln x) + O(1)$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler.

3. (2 μον.) (α) Αποδείξτε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $1, 2, \ldots, n$ είναι ίσο με $e^{\psi(n)}$.
(β) Αποδείξτε ότι ο

$$e^{\psi(2n+1)} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$$

είναι ακέραιος και συμπεράνατε ότι $\psi(2n+1) \geqslant 2(\ln 2)n$.

4. (2 μον.) (α) Αποδείξτε ότι $\sum_{m=1}^{\infty} m x^m = \frac{x}{(x-1)^2}$ για $|x| < 1$.
(β) Αποδείξτε ότι, για $s = \sigma + it$ με $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

5. (2 μον.) Έστω χ μη κύριος χαρακτήρας mod m. Ορίζουμε $a(n) = \sum_{d|n} \chi(d)$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπερβολής αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} = 2L(1, \chi)\sqrt{x} + O(1).$$

Καλή Επιτυχία!