Αναλυτική Θεωρία Αριθμών – 31 Μαΐου 2022

1. (4 μον.) (α) Αποδείξτε ότι για κάθε αριθμητική συνάρτηση $f(n)$,

$$\sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d\leqslant x} f(d)\left[\frac{x}{d}\right].$$

(β) Αποδείξτε ότι $\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\ln x + O(x)$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\sum_{n\leqslant x} nd(n) = \frac{1}{2}x^2\ln x + O(x^2)$.

(δ) Αποδείξτε ότι $(\sigma * \varphi)(n) = nd(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{n\leqslant x} (\sigma * \varphi)(n) = \frac{1}{2}x^2\ln x + O(x^2).$$

2. (2 μον.) Θεωρώντας γνωστό το θεώρημα των πρώτων αριθμών αποδείξτε ότι:

(α) Αν $0 < a < b$ τότε υπάρχει x_0 τέτοιος ώστε για κάθε $x \geqslant x_0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος ανάμεσα στον ax και τον bx.

(β) Κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < b$ περιέχει ρητό αριθμό της μορφής p/q όπου οι p και q είναι πρώτοι.

3. (2 μον.) (α) Έστω $d_3(n)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ο n γράφεται ως γινόμενο τριών φυσικών. Χρησιμοποιώντας το Θέμα 1 (β) αποδείξτε ότι

$$\sum_{n\leqslant x} d_3(n) = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + O(x\ln x).$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{(m,n)=1} \frac{1}{m^2n^2} = \frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}.$$

4. (2 μον.) (α) Εξηγήστε διαισθητικά γιατί αν $a, y \in \mathbb{C}$ με $|y| < 1$ και $|ay| < 1$ τότε

$$1 + (1+a)y + (1+a+a^2)y^2 + (1+a+a^2+a^3)y^3 + \cdots = \frac{1}{1-ay}\cdot\frac{1}{1-y}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι αν $\mathrm{Re}(s) > 2$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1).$$

5. (2 μον.) Έστω χ μη κύριος χαρακτήρας $\bmod m$.

(α) Αποδείξτε ότι $\sum_{n>x} \frac{\chi(n)}{n} = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

(β) Αν $a_n = \sum_{d|n} \chi(d)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπερβολής και το (α) αποδείξτε ότι $\sum_{n\leqslant x} a_n = xL(1,\chi) + O(\sqrt{x})$.

Καλή Επιτυχία!