Αναλυτική Θεωρία Αριθμών – 6 Σεπτεμβρίου 2022

1. (2 μον.) Έστω k (σταθερός) φυσικός αριθμός και $f(n), g(n)$ αριθμητικές συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι αν

$$f(n) = \sum_{d^k|n} g(n/d^k)$$

τότε

$$g(n) = \sum_{d^k|n} \mu(d) f(n/d^k)$$

και αντίστροφα.

2. (3 μον.) Έστω $a(n)$ μια αριθμητική συνάρτηση και $A(x) = \sum_{n\leqslant x} a(n)$.

(α) Αποδείξτε ότι αν x είναι ένας φυσικός αριθμός τότε

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)\ln(x/n) = \int_1^x \frac{A(t)}{t}dt.$$

(β) Έστω $\delta > 0$. Αποδείξτε ότι αν $A(x) = O(x^\delta)$ τότε, για κάθε s με $\mathrm{Re}(s) > \delta$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{A(t)}{t^{s+1}}dt.$$

3. (3 μον.) Έστω $\nu(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n.

(α) Για κάθε $t \geqslant 2$ ορίζουμε $N(t) = \prod_{p\leqslant t} p$. Εξηγήστε (με βάση γνωστό θεώρημα) γιατί $\ln N(t) \approx t$.

(β) Έστω $n \geqslant 2$ και t_n ο μεγαλύτερος φυσικός t για τον οποίο $N(t) \leqslant n$. Αποδείξτε ότι

$$\nu(n) \leqslant \pi(t_n).$$

(γ) Αποδείξτε ότι $\ln n = O(t_n)$ και συμπεράνατε ότι

$$\nu(n) = O\left(\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right).$$

4. (2 μον.) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\ln n = \psi(x)\ln x + O(x).$$

5. (2 μον.) Έστω $d(n)$ το πλήθος των διαιρετών του n. Αποδείξτε ότι αν $\mathrm{Re}(s) > 1$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}.$$

Καλή Επιτυχία!