

- Βιβλιογραφία - Bertsimas, Tsitsiklis, Introduction of linear optimization ①
- Συμπεριφορά Μορφέα ②

- Υλγ: 1η Εν.: Εισαγωγή στο γραμμικό προγραμματισμό (Εισαγωγή + Κανονικοποίηση) ① ch:1 ② υπ:1
- 2η Εν.: Γεωμετρικές Δοξύτες π.γ.π. και Μέθοδος Simplex ① ch:2,3 ② υπ:2
- 3η Εν.: Δυναμική Δοξία ① ch:4 ② υπ:3
- 4η Εν.: Μέθοδος Εσωτερικού σημείου ① ch:9 ② υπ:-
- (5η Εν.): Ακέραιος προγραμματισμός ① ch:10,11 ② υπ:4

1η Ενότητα: Γραμμικός προγραμματισμός

► 1.1 Εισαγωγή

- Ορο: Πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης των $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ κάτω από ένα σύνολο περιορισμών που εκφράζονται ως γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις ως προς $x_1, \dots, x_n$. Οι $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι μεταβλητές απόφασης.

- Γενική μορφή π.γ.π.:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{ή} \quad \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \sim \text{ανταγωνιστική συνάρτηση}$$

$$\text{υπό: } \left. \begin{aligned} \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i=1, \dots, m_1 \\ \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i=m_1+1, \dots, m_2 \\ \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i=m_2+1, \dots, m \end{aligned} \right\}$$

παραστάσεις γραμμικών περιορισμών

όπου $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$
 $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$ ανήκουν
σταθερές και
 $a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{R}$: σταθερές
 $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$

με $x_j \geq 0, j=1, \dots, n_1$ και $x_j \leq 0, j=m_2+1, \dots, m_2$ και $x_j \in \mathbb{R}, j=m_2+1, \dots, n$ } περιορισμοί για πρόσημο των μεταβ. απόφ.

- Ένα π.γ.π. είναι σε **κανονική μορφή**, αν είναι:

- max
- όλοι οι γρ. περιορισμοί $\rightarrow$ ισότητες
- μεταβλητές απόφασης: $\geq$ μη αρνητικές

δηλαδή, αν έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i=1, \dots, m \\ \text{και } x_j \geq 0, \text{ για } j=1, \dots, n \end{cases}$$

- Ένα π.γ.π. είναι σε **ημ-κανονική μορφή**, αν είναι:

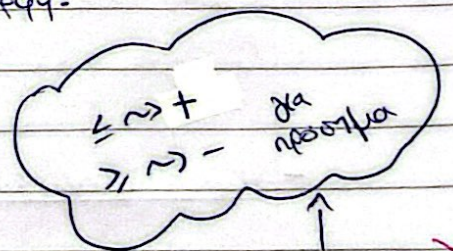
- max
- όλοι οι περιορισμοί $\rightarrow$ γρ. ανισότητες της μορφής $\leq$
- μεταβλητές απόφασης: $\geq$ μη αρνητικές

δηλαδή, να έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, i=1, \dots, m \\ \text{και } x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{cases}$$

- (N.K.) Μετατροπή ενός π.γ.π. σε κανονική μορφή:

$$\begin{aligned} \min &: 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \text{υπό} &: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$



(όπου x_2 **μεταβ.**)

α) θέτω $x_2 = -x_2' \geq 0$

$x_3 = x_3' - x_3'', x_3', x_3'' \geq 0$

οπότε $\min: 5x_1 - 3x_2' - 3x_3' + 3x_3''$

$$\text{υπό} : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2' + 7x_3' - 7x_3'' \leq 5 \\ 3x_1 - x_2' \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0 \end{cases}$$

β) (max, = **με εστία μεταβ.**)
1ος δίαφορα:

$-\max: -5x_1 + 3x_2' + 3x_3' - 3x_3''$

$\text{υπό}: 2x_1 + 3x_2' + 7x_3' - 7x_3'' + x_4 = 5$

$3x_1 - x_2' - x_5 = 7$

$x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0$

Κανονική μορφή προβλήματος

1.2 Μοντελοποίηση π.χ.π.

► 1.2.1. Πρόβλημα παραγωγής

- Πρόβλημα παραγωγής πολλών προϊόντων σε μια περίοδο:

Μια εταιρεία παράγει n προϊόντα χρησιμοποιώντας m κοινούς πόρους (π.χ. πρώτες ύλες, εργασία, κεφάλαιο, χώρο μηχανήματος)

• Όλα τα προϊόντα παράγονται και πωλούνται σε μια περίοδο

• Η διαθέσιμη ποσότητα του πόρου i είναι b_i , $i=1, \dots, m$

Για την ποσότητα παραγωγής μιας μονάδας προϊόντος j , απαιτούνται a_{ij} μονάδες από τον πόρο i , $i=1, \dots, m$ και $j=1, \dots, n$.

Το κέρδος από την πώληση προϊόντος μιας μονάδας j είναι c_j

ΣΚΟΠΟΣ: Η εταιρεία θέλει να προσδιορίσει το σχέδιο παραγωγής:

μονάδων που θα παράγει από κάθε προϊόν για μεγιστοποίηση κέρδους συνολικά

- Μοντελοποίηση

Μεταβλητές απόφασης: x_j = ποσότητα που θα παραχθεί από το προϊόν j ($j=1, \dots, n$)

πρόβλημα: $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$

υπό: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$, για $i=1, \dots, m$
 $x_j \geq 0$, για $j=1, \dots, n$

- Παραγωγή ενός προϊόντος σε πολλές περιόδους:

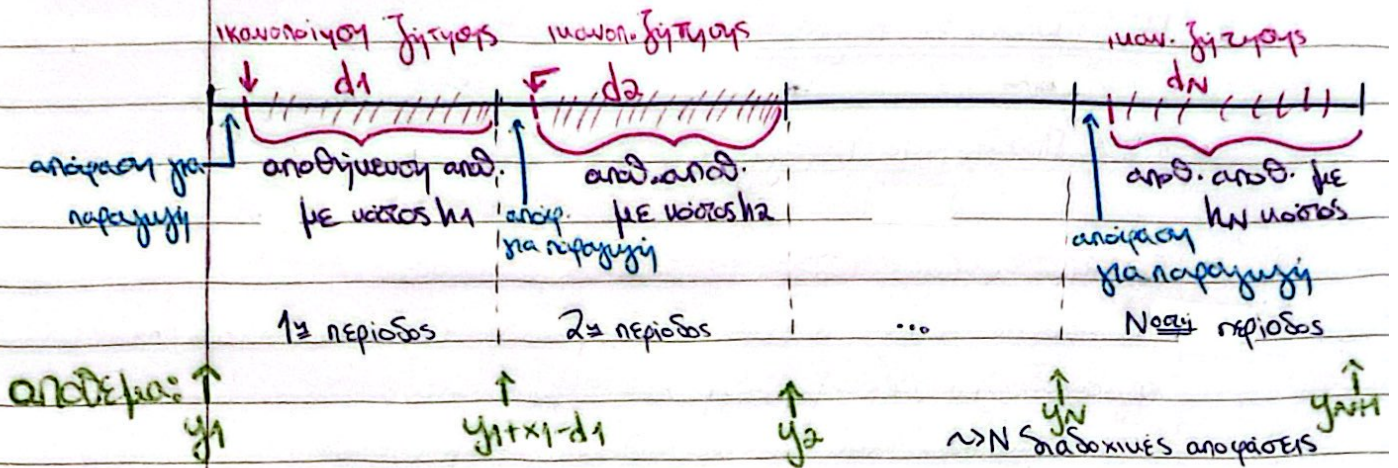
Μια εταιρεία παράγει ένα μόνο προϊόν, το οποίο μπορεί να διατηρηθεί σε απόθεμα και να πωληθεί σε μεταγενέστερη χρονική περίοδο.

N : # περιόδων που λειτουργεί το σύστημα

Στην αρχή κάθε περιόδου λαμβάνεται μια απόφαση για την ποσότητα που θα παράγει

Στην περίοδο t ($t=1, \dots, N$), θα πρέπει να ικανοποιηθεί η ζήτηση d_t

και το μοναδιαίο κόστος παραγωγής c_t και το μον. κόστος αποθήκευσης h_t



Η παραγωγή γίνεται αναγκαία στην αρχή της περιόδου, η ζήτηση ικανοποιείται αναγκαία, αμέσως μετά την παραγωγή. Το απόθεμα αποθηκεύεται ως την αρχή της επόμενης περιόδου. Δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την ποσότητα παραγωγής και αποθήκευσης. Η ζήτηση περιόδου πρέπει να ικανοποιηθεί. Δεν επιτρέπονται ελλείψεις. Το απόθεμα στην αρχή της 1ης περιόδου είναι y_1 . Η εταιρεία θέλει να αποφασίσει την ποσότητα που θα παράγει σε κάθε περίοδο, ώστε να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος παραγωγής.

μεταβλητές απόφασης: $x_t = \#$ μονάδων που θα παραχθούν στην περίοδο t , $t=1, \dots, N$

$$\min: c_1 x_1 + h_1 (y_1 + x_1 - d_1) + c_2 x_2 + h_2 (y_1 + x_1 - d_1 + x_2 - d_2) + \dots$$

Η έκφραση φαίνεται πολύπλοκη και θα χρησιμοποιήσουμε βοηθητικές μεταβλητές απόφασης: $y_t = \#$ μονάδων που υπάρχει ως απόθεμα στην αρχή της περιόδου t , $t=1, \dots, N, N+1$

$$\textcircled{N} y_3 = y_2 + x_2 - d_2 \text{ και } y_{N+1} = y_N + x_N - d_N$$

$$\text{πρόβλημα: } \min \sum_{t=1}^N (c_t x_t + h_t y_{t+1})$$

$$\text{υπό: } (y_t + x_t \geq d_t, t=1, \dots, N)$$

$$y_{t+1} = y_t + x_t - d_t, t=1, \dots, N$$

$$t=1, 2, \dots, N \leftarrow x_t \geq 0, y_t \geq 0, t=2, \dots, N+1$$