

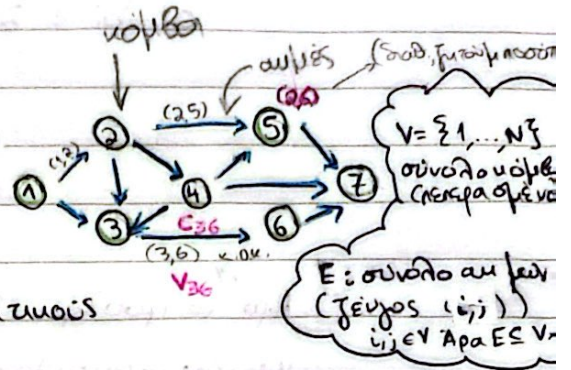
1.2.2 Προβλήματα ροής σε δίκτυα

Υπάρχει ένα προϊόν το οποίο διακινείται πάνω σε ένα δίκτυο.

Το δίκτυο αποτελείται από κόμβους και ακμές, που συνδέουν τους κόμβους.

Οι κόμβοι αντιστοιχούν σε αρχικούς, τελικούς, ενδιάμεσους σταθμούς.

Οι ακμές αντιστοιχούν σε δυνατές διαδρομές για τη μεταφορά του προϊόντος.



Σε κάθε ακμή $(i,j) \in E$ αντιστοιχεί ορισμένο μοναδιαίο κόστος μεταφοράς C_{ij} και χωρητικότητα V_{ij} .

Σε κάθε κόμβο $i \in V$ αντιστοιχεί διαθέσιμη ποσότητα a_i να αναταίρεται ποσότητα b_i .

- Πρόβλημα Διαμεταφορών (transshipment problem)

Να υπολογιστούν οι μεταφερόμενες ποσότητες που ικανοποιούν τις διαθεσίμες και αναταίρεμες ποσότητες σε κάθε κόμβο, δεν υπέρβυναν τις χωρητικότητες των ακμών και ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Μεταβλητές απόφασης: x_{ij} = ποσότητα που θα μεταφερθεί μέσω της ακμής (i,j) , $\forall (i,j) \in E$

$$\min \sum_{(i,j) \in E} C_{ij} x_{ij}$$

$$\text{υπό } \begin{cases} x_{ij} \leq V_{ij} & \text{και } x_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in E \\ \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} + a_i \geq b_i + \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} & i \in V \end{cases}$$

$\sum_{(j,i) \in E} x_{ji} + a_i$: εισερχόμενα ροή
 $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}$: εξερχόμενα ροή
 a_i : διαθέσιμη ποσότητα
 b_i : αναταίρεση ποσότητα
 } περιορισμοί χωρητικότητας
 } περιορισμοί ροής

Προσθήκη, οι περιορισμοί που γράφονται ως:

$$a_i - b_i \geq \sum_{j: (i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in E} x_{ji}$$

Αν σε κόμβο:



αν ήταν $(4,6) \equiv (0,4)$

Άρα, το πρόβλημα εξαρτάται από τη διαδεσμένη ποσότητα a_i , και την ανατούμενη ποσότητα b_i , μόνο μέσω της διαφοράς των $a_i - b_i$.

- Αν $a_i - b_i > 0$, στον κόμβο υπάρχει μεγαλύτερη διαδεσμένη ποσότητα, άρα είναι κόμβος ηγής. Μπορούμε x.β.γ. να θεωρούμε $a_i \geq 0, b_i = 0$.
- Αν $a_i - b_i < 0$, στον κόμβο υπάρχει μεγαλύτερη ανατούμενη ποσότητα, άρα είναι κόμβος προορισμός και μπορούμε x.β.γ. να θεωρούμε $a_i = 0, b_i > 0$.
- Αν $a_i - b_i = 0$ $(n \times) (4,4) \rightarrow (0,0)$ είναι κόμβος διαμεταστροφής και x.β.γ. μπορούμε να θεωρούμε $a_i = b_i = 0$.

Συνέπως, το σύνολο των κόμβων διαμερίζεται σε 3 σύνολα:

- $V_s = \{i \in V: a_i > 0, b_i = 0\}$: σύνολο ηγών
- $V_d = \{i \in V: a_i = 0, b_i > 0\}$: σύνολο προορισμών
- $V_t = \{i \in V: a_i = b_i = 0\}$: σύνολο διαμεταστροφών

- Πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους (min-cost flow problem)

Είναι ένα πρόβλημα διαμεταστροφής στο οποίο μας ενδιαφέρει μόνο το κόστος, και δεν υπάρχουν περιορισμοί χωρητικότητας.

Άρα, προκύπτει από το πρόβλημα διαμεταστροφής $v_{ij} = \infty$

και τα νόδια ομοίως: $\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

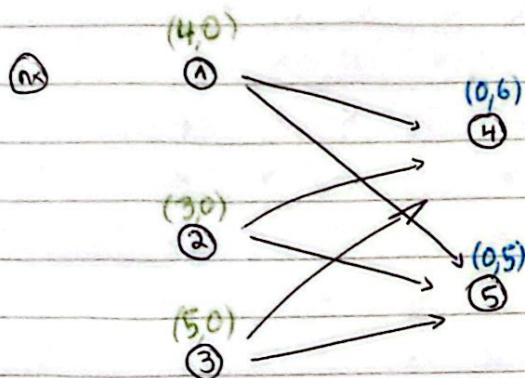
υπό: $x_{ij} \geq 0, (i,j) \in E$

$a_i - b_i \geq \sum x_{ij} - \sum x_{ji}, i \in V$

Πρόβλημα μεταφοράς (transportation problem)

Είναι ένα πρόβλημα διαμετανομής στο οποίο μας ενδιαφέρει να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος, δεν υπάρχουν περιορισμοί χωρητικότητας, δεν υπάρχουν κόμβοι διαμετανομής και από κάθε σταθμό πηγή μπορεί να γίνει μεταφορά προς κάθε σταθμό προορισμού.

$$\text{Άρα } V_t = \emptyset, \quad E = V_s \times V_d$$



Οι περιορισμοί πηγών για τις μγές γίνονται:

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ji} \leq a_i - b_i, \quad i \in V_s$$

(δεν υπάρχει εισερχ. ποσότητα)

Οι περιορισμοί προορισμών γίνονται:

$$\sum_{i \in V_s} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in V_d$$

παραπομπή

$$\sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ji} \leq a_i - b_i \Rightarrow \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} \geq b_i, \quad i \in V_d$$

(δεν έχει εισερχ. ποσ.)

Άρα, το πρόβλημα γράφεται ως $\min \sum_{i \in V_s} \sum_{j \in V_d} c_{ij} x_{ij}$

⊗ Ένα πρόβλημα μεταφοράς ονομάζεται ισορροπικό, αν ισχύει ότι η συνολική διαθεσίμη ποσότητα = συνολική απαιτούμενη ποσότητα

$$\text{υπό: } \sum_{j \in V_d} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in V_s$$

$$\sum_{i \in V_s} x_{ij} \geq b_i, \quad i \in V_d$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in V_s, j \in V_d$$

$$\sum_{i \in V_s} a_i = \sum_{j \in V_d} b_j, \quad \text{τότε οι ανισ. } \rightarrow \text{γίνονται "="}$$

1.2.3 Προβλήματα προγραμματισμού εργασίας

1^ο πρόβλημα: να αναλογιστεί ατόμων και βάρδους μέσα στη βδομάδα. Η εταιρεία δίνει 7/7 για 8/μέρα και θεωρείται ότι ναύτε εργάζονται 5 μέρες συνεχ. και 2 περιό.

Έτσι προκύπτουν 7 ναυτιλίες προσημνωμένες:

ημέρα i \ βάρδ. j	1	2	3	4	5	6	7
1	x	-	-	x	x	x	x
2	x	x	-	-	x	x	x
3	x	x	x	-	-	x	x
4	x	x	x	x	-	-	x
5	x	x	x	x	x	-	-
6	-	x	x	x	x	x	-
7	-	-	x	x	x	x	x

b_i = # ατόμων που χρειάζονται την ημέρα i , $i=1,2,\dots,7$

c_j = μισθός εργαζ. ναυτ. j , $j=1,\dots,7$

πίσους σε ναύτε βάρδια; ώστε ελάχιστο κόστος + να έχει αναπ. εργάζ.

Μοντελοποίηση: x_j = # εργαζ. για βάρδια j ;

$$\min: \sum_{j=1}^7 c_j x_j$$

$$\text{υπό: } x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq b_1 \text{ (Δευτέρα)}$$

...

$$\dots x_3 + x_4 \dots + x_7 \geq b_7 \text{ (Κυριακή)}$$

$$x_j \geq 0, j=1,\dots,7$$

$[x_j \in \mathbb{N} \text{ (Ακέραια)}] \rightarrow$ πρόβλημα ακεραίου προγρ.

για να γράψω εννιά α τους περιορισμούς, niveaus:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & 1 \\ & & & \dots & & & 1 \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

niveaus προηγούμενης τότε $\sum_{j=1}^7 a_{ij} x_j \geq b_i, i=1, \dots, 7$