

για να γράψω εννοείται τους περιορισμούς, niveaus:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & 1 \\ & & & \dots & & & 1 \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

niveaus προγράμματος τότε $\sum_{j=1}^7 a_{ij} x_j \geq b_i, i=1, \dots, 7$

Μαθημα (3):

26/2/25

- Πρόβλημα 2: Ένα κατάστημα λειτουργεί 8:00 - 20:00
Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις δυνατές βάρδιες και υπερβελτίωση υπαλλήλων.

Βάρδια (j)	ώρες	υπερβελτίωση (c _j)
1	8:00 - 15:00	48
2	12:00 - 20:00	50
3	11:00 - 17:00	40
4	8:00 - 14:00	45
5	15:00 - 20:00	35

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο αριθμός υπαλλήλων που απαιτούνται σε κάθε διάστημα.

ώρες	# υπαλλήλων	Το κατάστημα θέλει να δει πόσοι υπάλληλοι θα προσληφθούν σε κάθε βάρδια, ώστε να υπάρχει πάντα ο απαιτούμενος αριθμός υπαλλ. και να ελαττώσει το συνολικό κόστος
8:00 - 11:00	4	
11:00 - 14:00	5	
14:00 - 17:00	7	
17:00 - 20:00	8	

Μοντελοποίηση:

x_j : Η υπαλληλίστρια που θα προσληφθεί για τη βάρδια j , $j=1, 2, \dots, 5$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η βάρδια } j \text{ είναι ενεργή στο διάστημα } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

χωρίζουμε τις εφημερίδες
ώρες στα παρακάτω
διάστημα

$A = [a_{ij}] =$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	1	0	1	1	0
3	1	1	1	1	0
4	1	1	1	0	0
5	0	1	1	0	1
6	0	1	0	0	1

χρονικό διάστημα (i)	ώρες	απαιτούμενοι υπάλληλοι (b_i)
1	8:00-11:00	4
2	11:00-12:00	5
3	12:00-14:00	5
4	14:00-15:00	7
5	15:00-17:00	7
6	17:00-20:00	8

$$\text{Άρα, } \min \sum_{j=1}^5 c_j x_j$$

$$\text{υπό: } \sum_{j=1}^5 a_{ij} x_j \geq b_i, i=1, \dots, 6$$

$$x_j \geq 0, j=1, \dots, 6$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, j=1, \dots, 6 \text{ (ως αριθμός υπαλλ.)}$$

(το είναι πρόβλημα ακεραίων προγρ.)

1.3 Προβλήματα που ανάγονται σε π.χ.π.

1.3.1 Προβλήματα με κατά τημήματα γραμμικές κυρτές ή κοίτες συναρτήσεις

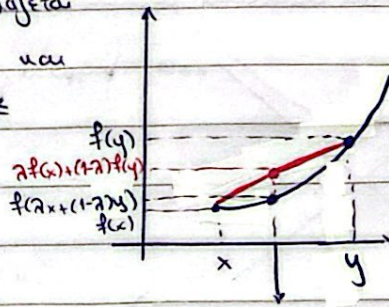
- **Ορισμός:** Κυρτή - κοίτη συνάρτηση:

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται

i) Κυρτή αν $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

ii) Κοίτη αν $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in [0, 1] \quad \text{συντομία συνδυασμός}$$



- **Παράδειγμα:** Έστω $f_1, \dots, f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις.

Τότε, η $f(x) = \max_{i=1, \dots, k} f_i(x)$ είναι επίσης κυρτή.

Απόδειξη

(Μέσω ορισμού.) Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \max_{i=1, \dots, k} f_i(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

$$\leq \max_{i=1, \dots, k} [\lambda f_i(x) + (1-\lambda)f_i(y)]$$

$$\leq \lambda \max_{i=1, \dots, k} f_i(x) + (1-\lambda) \max_{i=1, \dots, k} f_i(y)$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \Rightarrow f \text{ κυρτή}$$

κυρτή -
για το max
&
κοίτη -
για το min

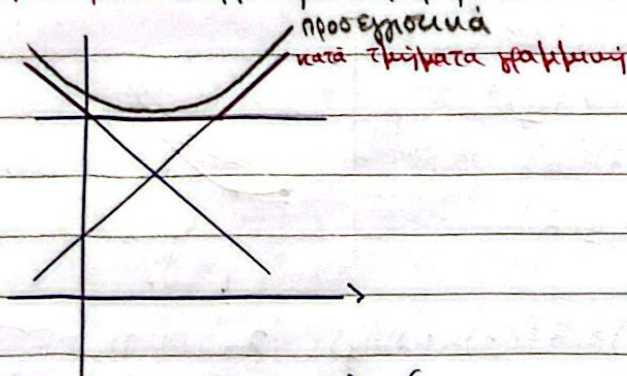
* **Σημείωση:** Ομοίως, αν $f_1, \dots, f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίτες τότε η $f(x) = \min_{i=1, \dots, k} f_i(x)$ είναι επίσης κοίτη.

- **Ορο:** Αφηνική Συναρτηση

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \underline{c}'x + d$, όπου

$\underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ και $d \in \mathbb{R}$ σταθερές, ονομάζεται αφηνική συνάρτηση

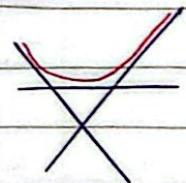
* **Σημείωση:** Μια αφηνική συνάρτηση είναι και κυρτή και κοίτη.



Η συνάρτηση $\max_{i=1, \dots, k} (\underline{c}_i'x + d_i)$ (αντίστοιχα $\min_{i=1, \dots, k} (\underline{c}_i'x + d_i)$)

είναι κατά τμήματα γραμμική

- είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίτη)
- μπορεί να προκύψει ως προσέγγιση κυρτής (αντ. κοίτης)



Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης η $\max_{i=1, \dots, k} (\underline{c}_i'x + d_i)$

μπορεί να προκύψει φυσικά ή να

προκύψει σαν προσέγγιση κυρτής από μία κυρτή και κατά τμήματα γραμμική.

Ερωτήματα:

1) Ένα πρόβλημα με α.σ. $\max_{i=1, \dots, k} (\underline{c}_i'x + d_i)$ μπορεί να αναχθεί σε η.γ.η.;

2) Ένα πρόβλημα, όπου η $\max_{i=1, \dots, k} (\underline{c}_i'x + d_i)$ υπάρχει στις περιοριστικές μπορεί να αναχθεί σε η.γ.η.;

Αναρτήσεις:

1) Έστω το π.μ.π. $\min_{i=1, \dots, k} \max (c_i'x + d_i)$

Εγινε βολή
λόγω min,
αλλιώς θα ήταν $\max_x \max_i c_i'x + d_i$

$$\text{υπό: } Ax = b \\ x \geq 0$$

(Π₁)
πρόβλημα 1

Το μέγιστο ενός πεπερασμένου συνόλου είναι το ελάχιστο στοιχείο από αυτά που είναι μεγαλύτερα ίσα από κάθε στοιχείο του συνόλου.

Άρα, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ το $\max_{i=1, \dots, k} (c_i'x + d_i)$ είναι

το ελάχιστο z τ.ω. $z \geq c_i'x + d_i, \forall i=1, \dots, k$

Συνεπώς, το (Π₁) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\min z$$

$$\text{υπό: } z \geq c_i'x + d_i, i=1, \dots, k$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

πρόβλημα γραμμικά προγραμματιστικό

(για min (υποβλ. αντ.) } ανάγεται σε π.γ.π.
γραμμικά
max (υποβλ.) $\nrightarrow$ δεν ανάγεται

Ομοίως, το π.μ.π. $\max_{i=1, \dots, k} \min (c_i'x + d_i)$

$$\text{υπό: } Ax = b \quad (\Pi_2) \\ x \geq 0$$

το πρόβλημα
ως π.γ.π.
ιδιαίτερα λόγω προβλ.

γράφεται ισοδύναμα ως $\max z$ υπό $z \leq c_i'x + d_i, i=1, \dots, k$

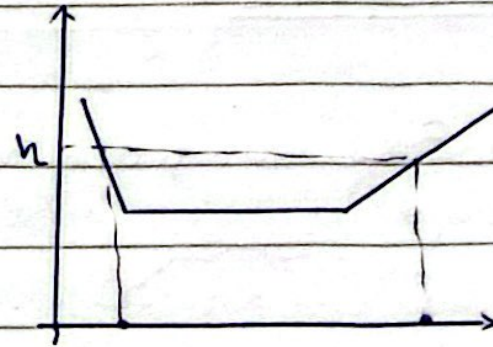
$$Ax = b \\ x \geq 0$$

2) - Αν υπάρχει περιτομή

$$\max_{i=1,2,\dots,k} (\overset{\text{αυξάνει}}{\underline{c_i}}' \underline{x} + d_i) \leq h$$

αυτό ισοδυναμεί με:

$$\underline{c_i}' \underline{x} + d_i \leq h, i=1, \dots, k$$



- Αντιστοίχα, αν υπάρχει περιτομή

$$\min_{i=1,\dots,k} (\overset{\text{μειώνει}}{\underline{c_i}}' \underline{x} + d_i) \geq h$$

αυτός ισοδυναμεί με $\underline{c_i}' \underline{x} + d_i \geq h, i=1, \dots, k$

Τότε, ανήκει σε n.f.p.