

Μαθημα (48):

5/3/25

Κυρτή $\xleftarrow{\text{προσέγγιση}}$ κυρτή και κατά τμήματα γραμμική $\Leftrightarrow \max_{i=1, \dots, k} (\underline{c}_i x + d_i)$

κοίτη $\xleftarrow{\text{προσέγγιση}}$ κοίτη και κατά τμήματα γραμμική $\Leftrightarrow \min (\underline{c}_i x + d_i)$

Παράδειγμα:

Θεωρούμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους με μεταβλητές απόφασης $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ και εφικτή περιοχή F , η οποία εκφράζεται από γραμμικούς περιορισμούς.

Για κάθε εφικτή απόφαση $\underline{x}$ υπάρχουν και διαφορετικά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν. Το κέρδος αν συμβεί το ενδεχόμενο i είναι $\underline{c}_i \underline{x} + d_i$, $i=1, \dots, k$

Ο διαχειριστής (αποφασίζων) δεν έχει τη δυνατότητα να ελέγξει ποιο ενδεχόμενο θα πραγματοποιηθεί.

Ο διαχειριστής απορρίπτει συγκεκριμένη πρόταση, υποθέτει ότι θα συμβεί το χειρότερο ενδεχόμενο και θέλει να πραγματοποιήσει το κέρδος κάτω από το χειρότερο ενδεχόμενο.

$$\begin{aligned} \text{Το πρόβλημα είναι: } \max_{\underline{x}} \min_{i \in \{1, \dots, k\}} (\underline{c}_i \underline{x} + d_i) \quad \max Z \\ \Leftrightarrow \text{υπό } \underline{x} \in F \quad \text{υπό } Z \leq \underline{c}_i \underline{x} + d_i \quad i=1, \dots, k \\ \text{n.χ.η.} \end{aligned}$$

1.3.2. Πρόβλήματα προσέγγισης στόχων

- Έστω πρόβλημα με μεταβλητές απόφασης $\underline{x} \in R^n$ και επιθυμητή περιοχή F , η οποία ευφράζεται από γραμμικούς περιορισμούς
- Εντός των περιορισμών, που ορίζουν την επιθυμητή περιοχή F , υπάρχουν k προσέγγιστοι στόχοι της μορφής:

$$\underline{a}_i' \underline{x} = b_i, \quad i=1, \dots, k$$

$$\text{με } \underline{a}_i \in R^n \text{ και } b_i \in R$$

- Αν ενσωματώσουμε τους στόχους στην επιθυμητή περιοχή, είναι πιθανό το πρόβλημα να γίνει μη επιλυτό.
- Θεωρούμε ότι η F αποτελείται από τους ανεξαρτητούς περιορισμούς, αυτούς που είναι υποχρεωτικό να ικανοποιούνται, και οι στόχοι είναι ελαστικοί περιορισμοί. Δηλαδή, αυτοί που μπορεί να παραβιαστούν, αλλά με κάποια pénalty.
- Αν το $\underline{a}_i' \underline{x}$ υπερβαίνει το b_i , υπάρχει pénalty p_i ανά μονάδα διαφοράς.
- Αν το $\underline{a}_i' \underline{x}$ υποβ. το b_i , — " — — q_i — " —

Η συνολική pénalty για τον στόχο i είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\underline{x}) &= p_i \max(\underline{a}_i' \underline{x} - b_i, 0) + q_i \max(b_i - \underline{a}_i' \underline{x}, 0) = \\ &= p_i (\underline{a}_i' \underline{x} - b_i)^+ + q_i (\underline{a}_i' \underline{x} - b_i)^- \end{aligned}$$

$$\text{όπου } w^+ = \max(w, 0), \quad w^- = -\min(w, 0) = \max(-w, 0)$$

Το πρόβλημα γράφεται ως

$$\min \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)$$

$$\text{υπό } x \in F$$

Γράφεται σαν π.γ.π.;

Αν η $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)$ είναι κορτί και κατά τμήματα γραμμική (max αφιν.)

Το πρόβλημα ανάγεται σε π.γ.π.

Το άθροισμα κορτίων και κατά τμήματα γραμμικών είναι κορτί και κατά τμήματα γραμμική;

- Άθροισμα κορτίων είναι κορτί

- Άθροισμα κατά τμήματα γραμμικών είναι κατά τμήματα γραμμική

(πχ) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 2 \\ 2x-3, & x \geq 2 \end{cases}$



$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x-4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Άρα, $\varepsilon_i(x)$ κορτί και κατά τμήματα γραμμική

Οπότε, και $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)$ γράζει i στο άθροισμα κορτί και κατά τμήματα γραμμική

Άρα, γράφεται σαν max αφινισμίων.

Οπότε, το πρόβλημα ανάγεται σε π.γ.π.

Ενότητα 2

- Ιδιότητες προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και μέθοδος Simplex

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή

$$\max \underline{c}' \underline{x}$$

$$\text{υπό } A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m, A$ $m \times n$ πίνακας με $\text{rank}(A) = m \leq n$

Εσφαλώς η άσκηση
ή θα αντιστοιχούσαν

Συμβολίζουμε με $\underline{a}_i'$ την i -οστή γραμμή του $A, i=1, \dots, m$

$\underline{A}_j$ την j -οστή στήλη, του $A, j=1, \dots, n$

τότε:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1' \\ \underline{a}_2' \\ \vdots \\ \underline{a}_m' \end{bmatrix} = [\underline{A}_1 \dots \underline{A}_n]$$

και τότε το σύστημα των γραμμικών περιορισμών γράφεται ως

$$A \underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{a}_1' \\ \vdots \\ \underline{a}_m' \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \underline{a}_1' \underline{x} = b_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_m' \underline{x} = b_m \end{matrix} \Leftrightarrow \underline{a}_i' \underline{x} = b_i, i=1, \dots, m$$

$$\text{και } A \underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow [\underline{A}_1 \underline{A}_2 \dots \underline{A}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{b} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \underline{A}_j x_j = \underline{b} !$$

↑
Το σύστημα $\underline{b}$ εμπίπτει
ως γραμμικός συνδυασμός
των $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_n$

2.2 Γεωμετρικές Ιδιότητες

2.2.1 Ορισμοί:

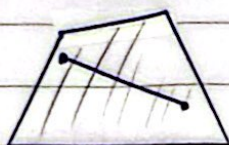
α) Κύριος συνδυασμός των σημείων $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ είναι κάθε σημείο $\underline{x}$ της μορφής $\underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ με $\lambda_i \geq 0, i=1, \dots, k$ και $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

(*)  ή  ή  ή άλλο με την περίμετρο

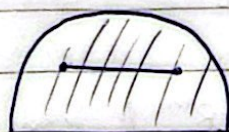
β) Κυρτή θύκη των σημείων $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών τους.

γ) Ένα σύνολο λέγεται **κυρτό** αν κάθε κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του συνόλου, ανήκει στο σύνολο αυτό.

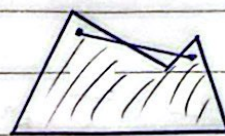
Άρα, το $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό, αν $\forall \underline{x}, \underline{y} \in K$ και $\forall \lambda \in [0, 1]$, το $\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in K$.



είναι



είναι



δεν είναι

δ) Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου K , είναι κάθε σημείο $\underline{x} \in K$ το οποίο δεν μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός δύο διαφορετικών σημείων του K , δηλ. δεν υπάρχουν $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K$ και $\lambda \in (0, 1)$

$$\text{τ.ω. } \underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$$

ε) το σύνολο $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ τ.ω. } A\underline{x} \geq \underline{b}\}$ όπου $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ και

A : πίνακας $m \times n$, ονομάζεται **πολύεδρο**.

Συνεπώς, η επιμέση περιοχή ενός π.χ.π. σε κανονική μορφή:

$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ είναι πολύεδρο.

στ) Αν $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ και $b \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a}'\underline{x} = b\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\}$$

ονομάζεται **υπερεπίπεδο**.

Επίσης, το σύνολο $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a}'\underline{x} \geq b\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b\}$

ονομάζεται **ημίσυχωρος**.

Άρα, ένα πολύεδρο είναι η τομή κάποιων ημίσυχωρων.