

▶ Άσκηση 1 (HW)

Να αποδειχτεί ότι:

i) Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο

ii) Κάθε πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο

(Αν έχω διαφέρει (iii) Ο κυρτός συνδυασμός ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων ενός κυρτού συνόλου, ανήκει επίσης στο σύνολο.

iv) Η κυρτή θύλη ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων είναι κυρτό σύνολο.

2.2.2. Βασικές γεωμετρικές ιδιότητες της επιτυς περιοχής F

Η επιτυς περιοχή ενός η.χ.η.

$F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ είναι πολύεδρο. Άρα, είναι και κυρτό σύνολο.

- Άλλες ιδιότητες:

Υπερδιάστατος: $\text{rank}(A) = m \leq n$

Για τις λύσεις του συστήματος: το $Ax = b$, μοναδική λύση αν $m = n$, άπειρες λύσεις, αν $m < n$

- Έστω $F^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = b$.

Έστω $W^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

- Το W^0 είναι ο πυρήνας της απεικόνισης $\gamma_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, με $\gamma_A(x) = Ax$.
Ο W^0 είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n - m$.

- Έστω x^0 μια λύση του συστήματος του $Ax = b$.

Τότε το σύνολο λύσεων F^0 είναι $F^0 = x^0 + W^0 = \{x^0 + w : w \in W^0\}$

Άρα, καταλαβαίνουμε ότι: Το F^0 είναι επίσης πολύεδρο διάστασης $n - m$ που έχει προκύψει με παράλληλη μετατόπιση του W^0 κατά x^0 . Αν $b \neq 0$, ο F^0 δεν είναι γραμμικός υπόχωρος. Το F^0 αποτελείται συσχετισμένους υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

- Η εφικτή περιοχή $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$

$$F = F^0 \cap \mathbb{R}_+^n, \text{ onou } \mathbb{R}_+^n = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \geq 0 \}$$

Άρα, είναι πολυέδρο, κυρτό, διαστάσεις $n-m$, που βρίσκεται μέσα στο F° .

0 , έσρες ορίζεται από εξισώσεις της μορφής $x_j = 0$

0, auf μ es — " ————— $x_i = 0$ & $x_j = 0$

2.2.3. Παράδειγμα

θεωρούμε το σύστημα: $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

να μας δίνει την επιθυμία να φτιάξουμε ένα ηγν.

Θέλουμε να σχεδιάσουμε την F .

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 av. E.F. yaft. apa $\text{rank}(A) = 2$
 Apa, $m = 2$
 $n = 4$

Ματάδα Βαίνομε ότι ο W^0 θα έχει διαστάση $4-2=2$.

- Da brauche ich von W^0

$$W^\circ = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$$

Analisis: $Ax = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = x_1 - x_2 \\ x_3 = -2x_1 - x_2 \end{cases}$

Alpa, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ο χώρος των λύσεων παράγεται από αυτή τη βάση!

Άρα, ο W^0 είναι γραμμικός υπόχωρος διάστασης $4-2=2$ που παράγεται από τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

-Θα βρούμε τον F^0

$$F^0 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b\}$$

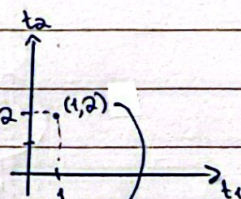
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Μια λύση είναι $\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

Άρα, $F^0 = \underline{x}^0 + W^0 = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Ο F^0 είναι πολύεδρο, διάστασης $n-m=2$, που έχει προκύψει κατά παράλληλη μετατόμιση του W^0 κατά $\underline{x}^0$.

! Μπορεί να αναπαράσχει γραμμά ως το ελλειψο (t_1, t_2)



όπου, $(1,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

-Βρίσκουμε F

$F = F^0 + R_+$, άρα το F προσδιορίζεται από τους παραπάνω περιορισμούς:
 $\{x \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

άρα: $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow t_1 \geq 0$

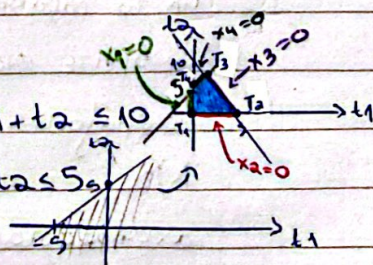
$x_2 \geq 0 \Leftrightarrow t_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 10 - 2t_1 - t_2 \geq 0 \Leftrightarrow 2t_1 + t_2 \leq 10$

$x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 5 + t_1 - t_2 \geq 0 \Rightarrow -t_1 + t_2 \leq 5$

Άρα, η εφελκυστική περιοχή $\rightarrow F$

στο T_3 : $x_3 = x_4 = 0$, στο T_2 : $x_2 = x_3 = 0$ κ.ο.κ.



Η F είναι πολυέδρο, διάστασης 2. Έχει 4 κορυφές.

$$T_1: t_1 = t_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ έχει } x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$T_2: t_1 = 5, t_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ έχει } x_2 = x_3 = 0$$

$$T_3: \text{σημείο τομής ευθειών: } \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 10 \\ -t_1 + t_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5/3 \\ t_2 = 5 + t_1 = 20/3 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } t_1 = \frac{5}{3} \text{ και } t_2 = \frac{20}{3}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_4: t_1 = 0, t_2 = 5: \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ έχει } x_1 = 0, x_4 = 0$$

Εξαρχής, ρυθισμε ως προς x_1, x_2 .

Αν το ρυθισαμε αλλιως, αλλο σχημα, αλλα ιδια x

Η αναπαράσταση δεν είναι μοναδική. Μπορούμε να βρούμε άλλη βάση του W^0 . Για όλες τις αναπαραστάσεις οι κορυφές της F αντιστοιχούν στα ίδια x . (ίδια αυξήματα)

► Άσκηση 2

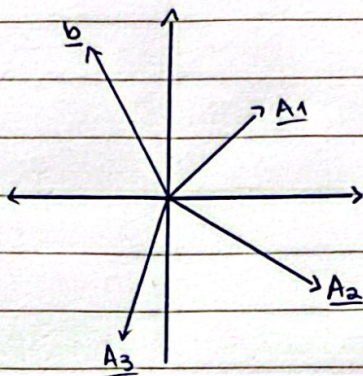
Για το παράδειγμα της ενότητας 2.2.3, να βρείτε εναλλακτική αναπαράσταση των W^0, F^0 και F , επιγράφοντας τα x_1, x_2 ως προς x_3, x_4 .

Νόο τα αυξήματα της F είναι ίδια με αυτά της αρχικής αναπαράστασης.

2.2.4. Εναλλακτική Γεωμετρική Αναπαράσταση

Θεωρούμε τις στήλες του A : $\underline{A_1}, \underline{A_2}, \dots, \underline{A_n}$, όπως και το διάνυσμα $\underline{b}$ ως στοιχεία του $\mathbb{R}^m$.

(n*) για $m=2, n=3$



Μ' αυτή την ερμηνεία, το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow [\underline{A_1} \ \underline{A_2} \ \dots \ \underline{A_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{b}$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j \underline{A_j} = \underline{b}$ αντιστοιχεί σε μια έκφραση του $\underline{b}$

ως γραμμικός συνδυασμός των $\underline{A_j}, j=1, 2, \dots, n$