

2.2.5.

Θαυρήματα: Σχετικά με την ύπαρξη βέλτιστων λύσεων και τα σημεία της F , στα οποία μπορεί να πετυχαινούνται βέλτιστες λύσεις.

► Αν η F είναι μη-κενό και φραγμένο σύνολο, τότε το π.χ.π. έχει βέλτιστη λύση.

► Η F έχει πεπερασμένο πλήθος ακραίων (υπαρχούν)

► Αν το π.χ.π. έχει βέλτιστη λύση, τότε υπάρχει ταυτόχρονα μία κορυφή της F , στην οποία αντιστοιχεί βέλτιστη λύση.

► Αν δύο ή περισσότερες κορυφές της F είναι βέλτιστες λύσεις, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι βέλτιστες λύσεις.

(* Για τις αποδείξεις $\leadsto$ 2.2, 2.5 και 2.6 από βιβλίο Bertsimas, Tsitsiklis)



Άρα, για να βρούμε τη βέλτιστη λύση, αν F φραγμένο, αρκεί να εξετάσουμε τις τιμές της α.σ. στις κορυφές της F και να τις συγκρίνουμε.

2.3

Βασικές Λύσεις:

2.3.1

Ορισμοί:

► Για ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε τα σύνολα:

$I^+(x) = \{j : x_j > 0\}$ δηλ. τα σύνολα δεικτών που αντιστοιχούν

$I^-(x) = \{j : x_j < 0\}$ στις θετικές, αρνητικές, μηδεν. τιμές του x .

$I^0(x) = \{j : x_j = 0\}$

Τα $I^+(x), I^-(x), I^0(x)$ ονομάζονται το $\{1, 2, \dots, n\}$

► Έστω ο A $m \times n$ πίνακας και $I = \{1, 2, \dots, n\}$

Ορίζουμε $A_I = (A_j; j \in I)$ τον υποπίνακα του A , διάστασης $m \times |I|$, που αποτελείται από τις στήλες του A , που αντιστοιχούν στις δείκτες από το σύνολο I .

► 1ος ορισμός Βασικής Λύσης:

Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **Βασική Λύση (ΒΛ)** του π.χ.π. αν:

i) $Ax = b$

ii) Οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές συνιστώσες του x είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Δηλ., οι στήλες που αντιστοιχούν $I^+(x) \cup I^-(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left(n \times x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ θα πρέπει } 1, 2, 4 \neq 0 \text{ στήλες να είναι μεταξύ τους} \right)$$

γραμμικά ανεξάρτητες.

► 2ος ορισμός της Βασικής Λύσης:

Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι Βασική Λύση (ΒΛ), αν $Ax = b$ και υπάρχουν δείκτες $B(1), B(2), \dots, B(m)$, τ.ω.:

i) Οι στήλες $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$, που αντιστοιχούν σ' αυτούς τους δείκτες, να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ii) $I^+(x) \cup I^-(x) \subseteq \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$

► Ορισμός: Βασική Εμπεική Λύση:

Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **Βασική Εμπεική Λύση (ΒΕΛ)** εάν είναι Βασική Λύση και $x \geq 0$ (όλα τα στοιχεία του ≥ 0)

- Μια βασική Λύση είναι **μη-εκφυλισμένη**, αν το π.χ.π. θ.σ

$|I^+(x) \cup I^-(x)| = m$, δηλαδή έχει m μη-μηδενικά στοιχεία. Μια ΒΛ που έχει λιγότερα από m μη-μηδενικά στοιχεία, ονομάζεται **εκφυλισμένη**.

► Ορισμός: Βασικός πίνακας Βασικός και μη βασικός μεταβ.

Έστω υποπίνακας $m \times m$ του A , ο $B = (A_{B(1)}, A_{B(2)}, \dots, A_{B(m)})$, που αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A .

Τότε, ο B ονομάζεται **Βασικός Πίνακας** ή **Βάση**.

• Οι μεταβλητές $x_{B(1)}, x_{B(2)}, \dots, x_{B(m)}$ ονομάζονται **Βασικές Μεταβλητές** και οι υπόλοιπες **μη-Βασικές**.

(πχ) 3×5 πίνακας.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = [A_1 \ A_2 \ A_5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A) = 3$ και το ποσό $\binom{5}{3}$ δυνατοί βασικοί πίνακες

2.3.2 Σχέση Βασικών Πίνακων & Βασικών Πινάκων

- Περίπτωση 1η: Μη Εκφρασμένη Βασική Λύση

Έστω x μια μη-εκφρασμένη βασική λύση. Έστω $B(1), B(2), \dots, B(m)$

οι δείκτες των μη-μυδενικών στοιχείων της x , δηλαδή:

$$I^+(x) \cup I^-(x) = \{B(1), \dots, B(m)\}$$

Ορίζουμε: $x_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, το διάνυσμα που αποτελείται

από τα μη-μυδενικά στοιχεία του x .

Επίσης, $B = [A_{B(1)} \ A_{B(2)} \ \dots \ A_{B(m)}]$ είναι ο $m \times m$ βασικός πίνακας με τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$

Τότε, x λύση $\Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j A_j = b \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^m x_{B(i)} A_{B(i)} + \sum_{j \in \{B(1), \dots, B(m)\}^c} x_j A_j = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [A_{B(1)} \ A_{B(2)} \ \dots \ A_{B(m)}] \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{bmatrix} = \underline{b}$$

$$\Leftrightarrow B \cdot \underline{x}_B = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b}, B \text{ αντιστρέφεται}$$

Άρα, το $\underline{x}$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τον B και αντίστροφα.

$$\underline{x} \leftrightarrow B$$

μν-εκφ.

Βασικός πίνακας

Βασική λύση

- 2η Περίπτωση: Εμφωτισμένη Λύση:

Έστω $\underline{x}$ εμφωτισμένη Β.Λ.

Έστω $B(1), B(2), \dots, B(k)$ οι σειρές που αντιστοιχούν στα μν-μν δεικνύει στοιχεία: τυς $\underline{x} (k < m)$

Υπάρχουν άλλοι $m-k$ σειρές $B(k+1), B(k+2), \dots, B(m)$, ώστε ο

$B = [A_{B(1)} \dots A_{B(k)} \ A_{B(k+1)} \dots A_{B(m)}]$ να είναι βασικός.

τότε,

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ x_{B(k+1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

το δάκτυλο των
Βασικών μεταβλητών.

Όπως πριν, προκύπτει $\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b}$

$A: m \text{ γρ. ανεξ. στύλ.} \rightarrow B \text{ βασικός} \rightarrow \text{Βασική λύση } \underline{x}_B = B^{-1} \underline{b}$
 $B \underline{x}_B = \underline{b}$

* το ποσό $\binom{n}{m}$ τρόποι!