

7^ο Μαθήμα:

17/3/25

2.3.3.

Γεωμετρική ερμηνεία βασικών επικτιών λύσεων

ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Θεώρημα: Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική επικτιή λύση του π.γ.π. αν και μόνο αν είναι αυτότετο (κορυφή) της επικτιής περιοχής F.

2.3.4.

Παράδειγμα - Εύρεση ΒΕΛ

Θεωρούμε το π.γ.π. με περιορισμούς

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 15$$

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 10$$

Σηλαδή, ο $A = \begin{bmatrix} \underline{A_1} & \underline{A_2} & \underline{A_3} & \underline{A_4} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$, $m=2$, $n=4$
 $n-m=2$

$$\text{rank}(A)=m=2$$

Έχουμε δει ότι η F είναι πολυέδρο διαστάσεως $n-m=2$ με κορυφές

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θα βρούμε τις **ΒΕΛ** του π.γ.π.

Θα επιβεβαιώσουμε ότι αυτές αντιστοιχούν στις κορυφές.

Οι βασικοί πίνακες που παίρνουμε από τον A είναι:

$$B^1 = (\underline{A_1} \ \underline{A_2}) \quad B^2 = (\underline{A_1} \ \underline{A_3}) \quad B^3 = (\underline{A_1} \ \underline{A_4})$$

$$B^4 = (\underline{A_2} \ \underline{A_3}) \quad B^5 = (\underline{A_2} \ \underline{A_4}) \quad B^6 = (\underline{A_3} \ \underline{A_4})$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

Για κάθε βασικό πίνακα θα βρω την αντιστοίχη ΒΛ.

$$\rightarrow B^1 = (\underline{A_1} \ \underline{A_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{x}^{B^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, B^1 \cdot \underline{x}^{B^1} = \underline{b}$$

Υπόδειξη:

$$B \cdot \underline{x}_B = \underline{b}$$

$$\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b}$$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5/3 \\ x_2 = 20/3 \end{cases}$$

Η Βασική λύση είναι $\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι και εφικτή (όλα τα στοιχεία ≥ 0)

άρα έχω ΒΕΛ που αντιστοιχεί στην κορυφή x_3 .

$$\rightarrow B^2 = (\underline{A}_1 \ \underline{A}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad x^{B^2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 x^{B^2} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_3 = 20 \end{cases}$$

Άρα δεν είναι εφικτή λύση $x_1 = -5 < 0$

$$\rightarrow B^3 = (\underline{A}_1 \ \underline{A}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad x^{B^3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$B^3 x^{B^3} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 15 \\ 2x_1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_4 = 10 \end{cases}$$

Η Βασική λύση είναι $\underline{x}^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ είναι εφικτή, άρα έχω ΒΕΛ που αντιστοιχεί στην κορυφή x_2

$$\rightarrow B^4 = (\underline{A}_2 \ \underline{A}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad x^{B^4} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Οπότε, } B^4 x^{B^4} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{Η Βασική λύση είναι } \underline{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{, είναι εφικτή}$$

Η ΒΕΛ αντιστοιχεί στην κορυφή x_4

$$\rightarrow B^5 = (A_2 \ A_4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{x}^{B^5} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα, } B^5 \cdot \underline{x}^{B^5} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 = 15 \\ x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 10 \\ x_4 = -5 \end{cases}$$

Είναι η Βασική λύση $\underline{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, δεν είναι εφικτή
(και δεν αντιστοιχεί και σε κάποια κορυφή)

$$\rightarrow B^6 = (A_3 \ A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \underline{x}^{B^6} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

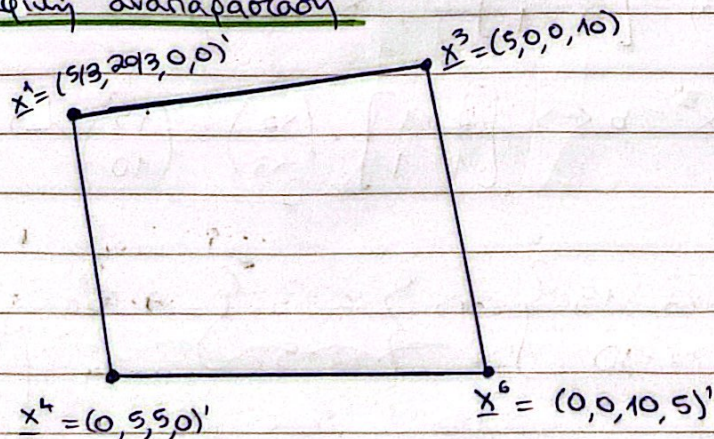
$$\text{Άρα } B^6 \cdot \underline{x}^{B^6} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 15 \\ x_4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5 \\ x_4 = 10 \end{cases}$$

Η Βασική λύση $\underline{x}^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, είναι εφικτή.

Η ΒΕΛ αντιστοιχεί στην κορυφή $\underline{x}_1$

Γραφική αναπαράσταση



Simplex

2.4 Αλλαγή Βάσης - Μέθοδος Simplex

Έχουμε ότι:

- Αν το π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση, τότε αυτή περικλείεται σε κορυφή της F .
- Οι κορυφές της F αντιστοιχούν σε ΒΕΛ.
- Από κάθε βασικό πίνακα βρίσκουμε μια ΒΛ (μπορεί να είναι εφικτή ή όχι) από τη σχέση $x_B = B^{-1}b$

Οπότε, για να βρούμε βέλτιστη λύση αρκεί να περιοριστούμε στο σύνολο των ΒΕΛ, που είναι πεπερασμένο.

Συμμεπιμένα, αν $K(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0, x \in \text{ΒΕΛ}\}$
τότε $N_K(F) = |K(F)| \leq \binom{n}{m}$

Όμως, φαίνεται ότι το $N_K(F)$ μεγαλώνει ραγικά καθώς αυξάνεται η τάξη του προβλήματος, δηλαδή τα n, m .

~ Simplex...

Αρα, χρειαζόμαστε έναν αλγόριθμο επίλυσης που να μην εξετάζει όλες τις ΒΕΛ. Ο αλγόριθμος Simplex είναι ένας τέτοιος αλγόριθμος, δόκιμα διαθέτει 2 σημαντικά εργαλεία για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

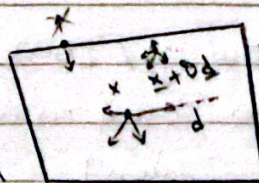
1) Ένα κριτήριο Βελτιστότητας, δηλαδή, έναν τρόπο να ελέγξει αν μια ΒΕΛ είναι βέλτιστη, χωρίς να τη συγκρίνει με τις υπόλοιπες ΒΕΛ.

2) Μια μέθοδο Βελτίωσης, δηλαδή, έναν τρόπο μεταβαίνει από ΒΕΛ σε ενόψει ΒΕΛ που δίνει καλύτερη τιμή στην α.σ.

• Ορισμός: (Εφικτή κατεύθυνση)

Έστω x μια εφικτή λύση του π.γ.π. ($x \in F$). Ένα διάνυσμα $d \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται

εφικτή κατεύθυνση στο σημείο x αν $\exists \theta_0 > 0$ τ.ω. $x + \theta d \in F, \forall \theta \in [0, \theta_0]$



- Αναγκαία συνθήκη για να είναι η d επιτρεπτή κατεύθυνση στο x

$$x \in F \Rightarrow \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

d επιτρεπτή κατεύθυνση $\Rightarrow \exists \theta_0: x + \theta d \in F \quad \forall 0 \leq \theta \leq \theta_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(x + \theta d) = b \\ x + \theta d \geq 0 \end{cases}, \quad \forall 0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad \Rightarrow \begin{cases} Ax + \theta Ad = b \\ x + \theta d \geq 0 \end{cases}, \quad \forall 0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \theta \cdot Ad = 0, \quad \forall 0 \leq \theta \leq \theta_0 \Rightarrow \boxed{Ad = 0} \Rightarrow d \in W^0$$

δυνατότητα

- Ευθυγραμμισμένες για τις επιτρεπτές κατευθύνσεις που οδηγούν από μια ΒΕΛ σε άλλη ΒΕΛ

Έστω ΒΕΛ x που ευθυγραμμίζεται με αντιστοιχικό βασικό πίνακα

$$B = (Ab(1), Ab(2), \dots, Ab(m))$$

Ισχύει, $x_j > 0$ για $j \in \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$ και $x_j = 0$, για $j \notin \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$

$$\text{π.β.γ. } x = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Έστω $j_0 \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$

- Έστω επιτρεπτή κατεύθυνση d με $d_{j_0} = 1$ και $d_j = 0$, για $j \in \{B(1), B(2), \dots, B(m), j_0\}$

$$d = \begin{pmatrix} d_{B(1)} \\ d_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{j_0}$$

• Αυτή η κατεύθυνση οδηγεί σε λύσεις:

$x + \theta d$ για τις οποίες όλες οι m βασικές μεταβλητές της x διατηρούνται μηδενικές, ενώ της x_{j_0} θα αρχίζει να παίρνει θετικές τιμές.

i) Η συνθήκη $d_{j_0} = 1, d_k = 0 \forall k \notin \{B(1), \dots, B(m), j_0\}$ μαζί με την $A\underline{d} = \underline{0}$, προσδιορίζει μονοσήμαντα την εφικτή κατεύθυνση $\underline{d}$.

$$\text{Πράγματι, } A\underline{d} = \underline{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^m A_j d_j = \underline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^m A_{B(i)} d_{B(i)} + 1 \cdot A_{j_0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow B\underline{d}_B = -A_{j_0} \Rightarrow \boxed{\underline{d}_B = -B^{-1}A_{j_0}}$$

$\hookrightarrow$ βασική τιμή του $\underline{d}$

Το διάνυσμα $\underline{d}$, που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, ονομάζεται Βασική κατεύθυνση j_0 και συμβολίζεται $\underline{d}(j_0 : B)$

$\times$