

Συνέχεια από το προηγ. (τέλος 7ης μαθήματος)

ii) Που μπορεί να οδηγήσει η κίνηση πάνω σε μια βασική κατεύθυνση:

Κάθε μοναδιαία πάνω σε βασική κατεύθυνση j^o της βάσης B , περνάει από σφαιρά

$$x(\theta) = x + \theta \cdot d(j^o; B) =$$

$$\begin{pmatrix} x_{B(1)} + \theta d_{B(1)} \\ x_{B(2)} + \theta d_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} + \theta d_{B(m)} \\ \vdots \\ 0 + \theta_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

≥ 0

$\theta \geq 0$

ΣΚΕΨΗ:
Αν $d_{B(i)} > 0$
ο μπορεί να μετακινηθεί όσο θέλει
Αν $d_{B(i)} < 0$,
μόνο τα σφαιρά πρέπει να είναι μηδέν
Επιτυχής περίπτωση

Υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Αν το $\underline{d}_B = -B^{-1}A_j^o$, τέτοιο ώστε υπάρχει $i \in I_B$: $\underline{d}_{B(i)} < 0$, τότε

$$x(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow x_{B(i)} + \theta \underline{d}_{B(i)} \geq 0, \forall i \in I_B$$

Για τα i με $\underline{d}_{B(i)} \geq 0$, ισχύει $x_{B(i)} + \theta \underline{d}_{B(i)} \geq 0, \forall \theta \geq 0$

Για τα i με $\underline{d}_{B(i)} < 0$, ισχύει $x_{B(i)} + \theta \underline{d}_{B(i)} \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq -\frac{x_{B(i)}}{\underline{d}_{B(i)}}$

Άρα, για να είναι επιτυχής η $x(\theta)$ πρέπει:

$$\theta \leq \min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{\underline{d}_{B(i)}} : i \in I_B, \underline{d}_{B(i)} < 0 \right\} = \theta_{\min}$$

Έστω i^o , το οποίο πετυχαίνει το $\theta_{\min}$, δηλαδή

$$\theta_{\min} = -\frac{x_{B(i^o)}}{\underline{d}_{B(i^o)}} \Leftrightarrow x_{B(i^o)} + \theta_{\min} \underline{d}_{B(i^o)} = 0$$

Τότε, το $x(\theta_{\min})$ έχει 0 στη θέση i^o

$$\hookrightarrow x + \theta_{\min} \underline{d}(j^o, B)$$

τουλάχιστον μια τέτοια, μπορεί να παραχθεί

Άρα, η $x(\theta_{\min})$ είναι ΒΕΛ για την οποία $x_{i^o} = 0$ και η x_{j^o} είναι μέγιστη, δηλαδή προκύπτει με εναλλαγή της i^o με την j^o .

Μια νέα ΒΕΛ αυτής της μορφής ονομάζεται γείτονική της x στην βασική κατεύθυνση j^0 .

Περίπτωση 2: Αν $d_B(i) \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$,
τότε $x(\theta) \geq 0$, $\forall \theta \geq 0$

Άρα, όλα τα σημεία πάνω στην ημιευθεία που ξεκινά από το x και έχει κατεύθυνση $d(j^0; B)$ βρίσκονται μέσα στην επιθυτή περιοχή.

Η F είναι $\mu\eta$ -φραγμένη.

• Ορισμός:

Μια βασική κατεύθυνση $d(j^0; B)$ με $d_B \geq 0 \Leftrightarrow -B^{-1}A_j^0 \geq 0$ ονομάζεται ακραία κατεύθυνση ή η ακραία αντίνα για την F . Αν η F έχει ακραίες κατευθύνσεις, τότε είναι $\mu\eta$ -φραγμένο.

• Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν μια ΒΕΛ είναι βέλτιστη;

Θεωρούμε μια ΒΕΛ x , με βασικό πίνακα B , με σύνολο βασικών δεικτών I_B και σύνολο $\mu\eta$ βασικών δεικτών I_N .

Θέλουμε να δούμε πως αλλάζει η τιμή της α.σ. $f(x) = c'x$ όταν μεταβάσουμε κατά μήκος μιας βασικής κατεύθυνσης $d(j^0; B)$ με $j^0 \in I_N$. Καθώς μεταβάσουμε πάνω σε αυτή την κατεύθυνση περνάμε από τα $x(\theta) = x + \theta d(j^0; B)$

$$f(x(\theta)) = c'x(\theta) = c'(x + \theta d(j^0; B))$$

$$\Rightarrow f(x(\theta)) = c'x + \theta c'd(j^0; B) = f(x) + \theta(c_B d_B + c_{j^0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x(\theta)) = f(x) + \theta (c_{j^0} - c_B B^{-1} A_{j^0})$$

$$\bar{c}_{j^0}$$

$$\text{γιατί } c' = (c_B \ c_N) \\ d(j^0; B) = \begin{pmatrix} d_B \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{όπου } d_B = -B^{-1}A_{j^0}$$

! Άρα, όταν μεταβάσουμε πάνω στη βασική κατεύθυνση j

από τη ΒΕΛ x , η τιμή της α.σ. αυξάνεται με ρυθμό

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} A_j \quad \# \text{ λέγεται ελαττωμένο κόστος}$$

και θα μείνει μόνο το σκέλετο να δούμε με το 1.

• Ορισμός:

Η ποσότητα $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j = c' d(j; B)$ ονομάζεται ελαττωμένο κόστος (reduced cost) της μεταβλητής x_j στη ΒΕΛ x με βασικό nivava B .

• Παρατηρήσεις:

- Το ελαττωμένο κόστος $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j$ για $j \in I_B$ είναι 0
- Αν κάποιο $\bar{c}_j$ είναι θετικό, τότε η ΒΕΛ x δεν είναι βέλτιστη.
- Αν $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j$, τότε δεν αυξάνεται η τιμή της α.σ. όταν κινηθούμε προς κάποια βασική μεταβλητή.

Λήμμα:

Έστω x μια ΒΕΛ με βασικό nivava B , ορισμό βασικών δεικτών $I_B = \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$ και ορισμό μη-βασικών δεικτών I_N .

Έστω μια επιλογή μεταβλητών $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)'$ στη ΒΕΛ x .

Τότε, ισχύουν: i) $d_j \geq 0, \forall j \in I_N$

$$ii) \underline{d} = \sum_{j \in I_N} d_j \underline{d}(j, B)$$

Απόδειξη

i) Το $\underline{d}$ είναι επιλογή μεταβλητών στη ΒΕΛ x

$$\underline{x}(\theta) = x + \theta \underline{d} \geq 0 \text{ για } 0 \leq \theta \leq \theta_0$$

$$\underline{x} + \theta \underline{d} = \begin{pmatrix} x(1) + \theta d(1) \\ x(B(1)) + \theta d(B(1)) \\ \vdots \\ x(m) + \theta d(m) \\ 0 + \theta d_N(1) \\ \vdots \\ 0 + \theta d_N(n-m) \end{pmatrix} \geq 0$$

Για να έχω: $\theta d_j \geq 0$
 $\forall \theta \in [0, \theta_0], \forall j \in I_N$
 πρέπει $d_j \geq 0 \ \forall j \in I_N$

ii) Το $\underline{d}$ είναι επιλογή μεταβλητών στο $x \Rightarrow A \underline{d} = \underline{0} \Rightarrow$

$$[A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^n d_j A_j = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\sum_{j \in I_B} d_j A_j + \sum_{j \in I_N} d_j A_j = \underline{0} \Rightarrow B \underline{d}_B = - \sum_{j \in I_N} d_j A_j \Rightarrow \underline{d}_B = - \sum_{j \in I_N} d_j B^{-1} A_j$$

Εξάγετε ότι: $\underline{d}(j, B) = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

$$\underline{d} = \left(\frac{d\theta}{dN} \right) = \sum_{j \in I_N} d_j \underline{d}(j, B)$$

⑦ $f(x(0)) = x + 0 \underline{d}$, $\bar{c}_j$ στο ενόπλευρο παράγωγα.