

Μάθημα 9:

24/3/2025

• Θεώρημα (Κριτήριο Βελτισιότητας)

Έστω ότι όλες οι ΒΕΛ είναι μη-εκφυλισμένες. Τότε, μια ΒΕΛ είναι βέλτιστη αν $\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω $\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$

Επειδή, $\bar{c}_j = 0 \quad \forall j \in I_B$ έχω ότι $\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \in I_N$

Έστω $x_1 \in F$, επειδή F κυρτή υπάρχει επιρική υατίδων d , η οποία από την ΒΕΛ x οδηγεί στην x_1

Εφόσον d επιρική υατίδων $\exists \theta_0 > 0$ τ.ω. $x(\theta) = x + \theta d \in F$
 $= f(x)$

$$f(x(\theta)) = \underline{c}'x(\theta) = \underline{c}'x + \underline{c}'\theta d = \underbrace{(\underline{c}'x)}_{\substack{\geq 0 \\ \bar{c}_j \leq 0}} + \theta \underline{c}' \sum_{j \in I_N} d_j d(j, B)$$

$$\Rightarrow f(x(\theta)) - f(x) = \theta \sum_{j \in I_N} d_j \underline{c}'d(j, B) \leq 0$$

Αρα, όταν κινούμαστε από την ΒΕΛ x προς κάποια επιρ. υατ. d , τότε

βλέπω ότι η τιμή της α.σ. δεν αυξάνεται. Οπότε $x =$ **τοπικό μέγιστο**

Επειδή, α.σ. είναι γραμμική συν. θα είναι και **ολικό μέγιστο**.

($\Rightarrow$) Έστω x $m \times n$ B.E.N. x είναι βέλτιστη.

Έστω υπάρχει $j_0 \in I_N$ τ.ω. $\bar{c}_{j_0} > 0$.

Θεωρώ τη βασική κατ. $\underline{d}(j_0, B)$ και παίρνω $x(\theta) = x + \theta \underline{d}(j_0, B)$,
 με $0 \leq \theta \leq \theta_{\min}$ με $\theta_{\min} = \min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \mid i=1, 2, \dots, m \text{ και } d_{B(i)} < 0 \right\}$
 $\rightarrow > 0$ m -εκφυλισμένη

Άρα, $\theta_{\min} > 0$ λόγω m -εκφυλισμένης λύσης.

Τότε:

$$f(x(\theta)) - f(x) = \theta \sum_{j \in I_N} d_j \bar{c}_j = \theta \bar{c}_{j_0} \bar{c}_{j_0} = \theta \bar{c}_{j_0}^2 > 0 \text{ άρα όχι,}$$

αφού x βέλτιστη δεν γίνεται να μεγαλίσει η α.σ.

άρα $\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \in I_N \Rightarrow$

$$\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

- Όταν η B.E.N. δεν είναι βέλτιστη, πώς πάλι σε καλύτερη;

Αν η B.E.N. x με βασικό πίνακα B δεν είναι βέλτιστη, τότε

$\exists j \in I_N : \bar{c}_j > 0$. Αν υψώσω κατά m φορές αυτής της υατέδωξης
 $\underline{d}(j, B)$ πάλι σε καλύτερες λύσεις.

Περίπτωση 1: Αν για το $\underline{d}(j, B) = \begin{pmatrix} d_B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{j=B^{-1}A_j}$ ισχύει ότι $d_{B(i)} < 0$
 για κάποιο $i \in I_B = \{1, \dots, m\}$

Τότε θέτουμε $\theta_{\min} = \min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \mid i=1, \dots, m, d_{B(i)} < 0 \right\}$

$x(\theta_{\min}) = x + \theta_{\min} \underline{d}(j, B)$ είναι B.E.N. και πάλι δίνει καλύτερη
 τιμή στην α.σ.

Άρα, θα βεβαιωνόμαστε ότι B.E.N. $x(\theta_{\min})$ και θα ελέγξω
 πάλι αν είναι βέλτιστη.

Περίπτωση 2: Αν για το $\underline{d}(j, B)$ ισχύει ότι $d_{B(i)} > 0$, τότε $x(\theta) = x + \theta \underline{d}(j, B)$
 για $\forall \theta > 0$ και $f(x(\theta)) = f(x) + \theta \bar{c}_j \rightarrow \infty$ (αφού $\bar{c}_j > 0$), άρα m -εκφυλισμένο πρόβλημα.

Αλγόριθμος Simplex

Περιγραφή αλγορίθμου όταν όλες οι ΒΕΛ είναι $\mu\eta$ -εμφωδιότητες.

1. Εύρεση ΒΕΛ

Για έναν βασικό πίνακα B , παίρνω τη ΒΕΛ x με $x_B = B^{-1}b$
σύνολο βασικών δεικτών I_B και $\mu\eta$ -βασικών δεικτών I_N .

$$\text{Συμβολισμοί } C_B = \begin{pmatrix} C_{B(1)} \\ \vdots \\ C_{B(m)} \end{pmatrix}$$

2. Έλεγχος βελτιστότητας

$\forall j \in I_N$ υπολογίζω τα $-B^{-1}A_j$ και τα $\bar{C}_j = C_j - C_B B^{-1}A_j$

• Αν $\bar{C}_j \leq 0 \quad \forall j \in I_N$ τότε η ΒΕΛ x είναι βέλτιστη
STOP

• Διαφορετικά, υπάρχουν τα $j \in I_N: \bar{C}_j > 0$

3. Εύρεση νέας ΒΕΛ ή $\mu\eta$ -φραγκ. πρόβλημα

Υπολογίζω το δείκτη της βασικής μεταβλητής j $d(j, B) = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

• Αν $d(j, B) \geq 0$ τότε το π.χ.π. είναι $\mu\eta$ -φραγκ.

$$\text{και } z = \max C'x = +\infty$$

• Αλλιώς, δέτω $\theta_{\min} = \min_{i \in I_B} \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}(j, B)} \mid d_{B(i)}(j, B) < 0 \right\}$

και παίρνω νέα ΒΕΛ.

$$x^{\text{new}} = x + \theta_{\min} d(j, B) \quad \text{και επιστρέφω στο βήμα 1}$$

Παρατηρήσεις

1) Αν στο Β2 υπάρχουν πάνω από ένας δείκτες j με $\bar{C}_j > 0$, τότε ο αλγόριθμος μπορεί να επιλέξει αυθαίρετα οποιοδήποτε από αυτά για να πεί σε νέα ΒΕΛ. Συνήθως αυτό με το μεγαλύτερο $\bar{C}_j$

2) Εφόσον, έχω υποδείξει ότι οι ΒΕΛ x και x^{new} είναι $\mu\eta$ -εμφ.

το $\theta_{\min} > 0$ να το $\theta_{\min}$ επιτυγχάνεται σε μοναδική σειρά $B(i)$.

3) Χωρίς την παραπάνω υπόθεση μπορεί να συμβούν τα παρακάτω:

- Αν έχω ευφ. ΒΕΛ x (σηλ. υπάρχει 0 σε βασική μεταβλητή)

να αν $\exists j$ με $\bar{c}_j > 0$ τότε μπορεί $\theta_{\min} = 0$, τότε

$$\underline{x}^{\text{new}} = \underline{x} + \theta_{\min} \underline{d}(j, B) = \underline{x}$$

σηλ. η ίδια με πριν (► μπορεί να αλλάξει η βάση όπως)