

Μάθημα 10:

26/3/25

- Παράδειγμα: βρούμε την $\max 2x_1 + x_2$
subject to $x_1 - x_2 \leq 4$
 $x_1 + x_2 \leq 8$
 $x_1, x_2 \geq 0$

- α) αναγνώριση προβλήματος
β) να βρούμε και να σχεδιάσουμε την F
γ) εφαρμογή με Simplex + εύρεση βέλτιστης λύσης

Λύση:

α) $\max 2x_1 + x_2$
subject to $x_1 - x_2 + x_3 = 4$
 $x_1 + x_2 + x_4 = 8$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad c' = [2 \ 1 \ 0 \ 0]$$

β) $W^0 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 + x_2 \\ x_4 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad \text{όπου } x \in W^0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 + t_2 \\ -t_1 - t_2 \end{pmatrix}$$

$$= t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

0 W^0 είναι γρ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης $n-m=2$ με βάση

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

• $F^0 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b\} = x^0 + W^0$, όπου x^0 λύση του $Ax = b$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ παραγωγή}$$

$$F^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

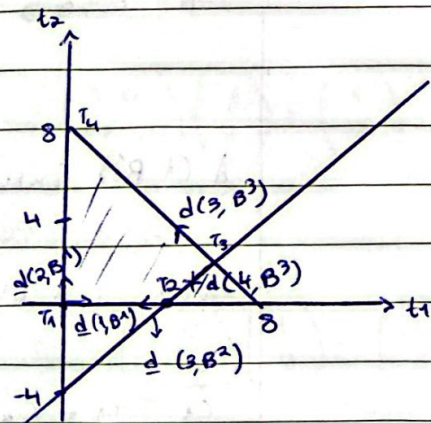
$$F = F^0 \cap \mathbb{R}_+^4$$

$$x_1 \geq 0 \Rightarrow t_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0 \Rightarrow 4 - t_1 + t_2 \geq 0 \Rightarrow t_1 - t_2 \leq 4$$

$$x_4 \geq 0 \Rightarrow 8 - t_1 - t_2 \geq 0 \Rightarrow t_1 + t_2 \leq 8$$



Εύρεση κορυφών

$$\text{κορυφή } T_1: t_1 = t_2 = 0 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{κορυφή } T_2: t_1 = 4, t_2 = 0 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{κορυφή } T_3: t_1 = 6, t_2 = 2 \quad x_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{κορυφή } T_4: t_1 = 0, t_2 = 8 \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~> γ) 1η ΕΠΙΛΥΣΗ: • 1ο Βήμα = υπολογισμός ΒΕΛ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c' = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 0), \quad \text{rank } A = 2$$

Επιλέγω για βάση τις A_3, A_4 :

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Η αντίστοιχη ΒΕΛ είναι } x_{B'} = (B')^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Η ΒΕΛ είναι } x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{με } s_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2ο Βήμα = έλεγχος βελτιστότητας + έλεγχος για κη-φραγή. η γη

$$I_N = \{1, 2\} \quad \text{Υπολογίζω } \underline{d}(1, B') \text{ και } \bar{c}_1 \\ \underline{d}(2, B') \text{ και } \bar{c}_2$$

$$\underline{d}(1, B') \text{ έχει } \underline{d}_{B'} = -(B')^{-1}A_1 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{άρα } \underline{d}(1, B') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = c_1 - c'_{B'}(B')^{-1}A_1 = c'_1 \underline{d}(1, B') = 2 > 0$$

$$\underline{d}(2, B') \text{ έχει } \underline{d}_{B'} = -(B')^{-1}A_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{άρα, } \underline{d}(2, B') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c}_2 = c_2 - c'_{B'}(B')^{-1}A_2 \text{ και } \underline{A}_2 = c'_2 \underline{d}(2, B') = 1 > 0$$

Επειδή έχω θετικά ελαττωμένα κόστη η x' δεν είναι βέλτιστη.

Δεν προκύπτει ότι

Ευνόητον, το πρόβλημα είναι κη-φραγμένο εδώ, διότι τα $\underline{d}$ είναι αρνητικές τιμές μέσα θα κινηθώ προς την $\underline{d}(1, B')$, γιατί $\bar{c}_1 > \bar{c}_2$.

• Το βήμα ελέγχου νέας ΒΕΛ

$$\theta_{\min} = \min \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{dB(i)}, B(i) \in I_B, dB(i) < 0 \right\} =$$

$$= \min \left\{ -\frac{4}{-1}, -\frac{8}{-1} \right\} = \min \{4, 8\} = 4$$

$$\text{Η νέα ΒΕΛ } x^2 = x^1 + \theta_{\min} \underline{d}(1, B^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

→ 2η Επανάληψη:

- 1ο βήμα: ΒΕΛ $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ με αντίστοιχο βασικό επίπεδο

$$B^2 = [A_1 \ A_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2ο βήμα: υπολογίζω $\underline{d}(2, B^2)$, $\underline{d}(3, B^2)$ και $\bar{c}_2, \bar{c}_3$

$$\text{Για το } \underline{d}(2, B^2) \text{ έχω } \underline{d}_{B^2} = -(B^2)^{-1} A_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d}(2, B^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ και } \bar{c}_2 = c'_2 \underline{d}(2, B^2) = 3 > 0$$

$$\text{Για το } \underline{d}(3, B^2) \text{ έχω } \underline{d}_{B^2} = -(B^2)^{-1} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{άρα, } \underline{d}(3, B^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \bar{c}_3 = c'_3 \underline{d}(3, B^2) = -2 < 0$$

η ΒΕΛ x^2 δεν είναι βέλτιστη, γιατί $\bar{c}_3 > 0$ δεν προκύπτει ότι το πρόβλημα είναι μη-σφαιρικό.

Θα περάσω προς την $\underline{d}(2, B^2)$

$$\text{- 3ο βήμα: } \theta_{\min} = \min \left\{ -\frac{4}{2} \right\} = 2$$

$$\text{Η νέα ΒΕΛ είναι } x^3 = x^2 + \theta_{\min} \underline{d}(2, B^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ 3η εναντιότυπη:

1η Βήμα: ΒΕΛ $x^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ με βασικό πίνακα

$$B^3 = [A_1 \ A_2] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{c}_{B^3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2η Βήμα: Βρίσκω $\underline{d}(3, B^3)$ και $\bar{c}_3$
 $\underline{d}(4, B^3)$ και $\bar{c}_4$

$$\text{Για το } \underline{d}(3, B^3) \text{ έχω } \underline{d}_{B^3} = (B^3)^{-1} A_3 = - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{οπότε, } \underline{d}(3, B^3) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } \bar{c}_3 = \underline{c}' \underline{d}(3, B^3) = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\text{Για το } \underline{d}(4, B^3) \text{ έχω } \underline{d}_{B^3} = -(B^3)^{-1} A_4 = - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{άρα, } \underline{d}(4, B^3) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \bar{c}_4 = -\frac{3}{2} < 0$$

$$\text{άρα βέλτισση, άρα } z^* = \max f(x) = \max \underline{c}' \underline{x} = \underline{c}' \underline{x}^3 = 14$$