

2.5

Οικονομικές Ερμηνείες των $\bar{c}_j$

• Ερμηνεία $\bar{c}_j$ όταν x B.E.N.

Έστω x B.E.N. με βασικό πίνακα B .

Αν σκεφτούμε κατά μήκος της βασικής μεταβλητής j , με $j \in I_N$, η μεταβολή της α.σ. είναι

(βέλτιστη) B.E.N.

$$\bar{c}_1 = 0$$

$$\bar{c}_2 = 0$$

$$\bar{c}_3$$

$$\bar{c}_4$$

Diagram showing a node with $x_1=0$, $x_4=0$, and a vector $\bar{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. An arrow points from the node to the $\bar{c}_j$ values.

$$x(\theta) = x + \theta d(j, B)$$

$$\begin{aligned} f(x(\theta)) &= c'(x + \theta d(j, B)) = \\ &= \underbrace{c'x}_{f(x)} + \theta \underbrace{c'd(j, B)}_{\bar{c}_j} \Rightarrow f(x(\theta)) - f(x) = \theta \bar{c}_j \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f(x(\theta)) - f(x) = \theta \bar{c}_j$$

Επομένως, έχουμε $x(\theta) = x + \theta d(j, B)$ με $x_j(\theta) = \theta$

Άρα, το $\bar{c}_j$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η μεταβολή της α.σ. ανά μονάδα αύξησης της x_j κατά την κίνηση κατά μήκος της βασικής μεταβλητής j .

• Ερμηνεία $\bar{c}_j$ όταν x βέλτιστη B.E.N.*

Όταν η x είναι βέλτιστη B.E.N., τότε $\bar{c}_j \leq 0, j \in I_N$

Τότε το $\bar{c}_j$ δείχνει τον ρυθμό μείωσης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης αν επιλέξουμε η μη-βασική μεταβλητή x_j να πάρει θετικές τιμές και οι υπόλοιπες μη βασικές να παραμείνουν 0.

όσο αυτό είναι αρνητικό.

(N*) $\max c'x$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{βέλτιστη B.E.N.} \\ x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(x^*) = 20 \\ \bar{c}_3 = -2 \end{array} \right.$

extra: $x_3 \geq 2$.

$f(x^*) = 20 - 2 \cdot 2 = 16$? Ναι, αν μείνω πάνω στην οριακή και επιπλέον επωφεληθώ.

• Παράδειγμα:

Θεωρούμε το πρόβλημα παραγωγής μιας περιόδου (Σειρά 1η διαλέξη)
 Σε κανονική μορφή είναι:

$$\max C_j x_j$$

$\swarrow$ ποσότητα προϊόντος
 $\searrow$ τιμή πώλησης

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$\swarrow$ διαθέσιμη ποσότητα
 $\swarrow$ απαιτούμενη ποσότητα
 $\swarrow$ περιθώρια

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m$$

- Αν στη βέλτιστη Β.Ε.Λ. η x_j είναι k_j -βάσιμη, δηλαδή $x_j^* = 0$, τότε το $\bar{c}_j \leq 0$ ερμηνεύεται ως η μείωση στο συνολικό κέρδος ανά μονάδα παραγωγής του προϊόντος j στην περίπτωση που απαιτούσε να παραχθεί μια θετική ποσότητα από αυτό το προϊόν και οι υπολ. k_j -βάσιμες μεταβλητές είναι και παραμένουν 0 και αυτό να είναι βέλτο.

- Αν στη βέλτιστη Β.Ε.Λ. η y_i είναι k_i -βάσιμη, δηλαδή $y_i^* = 0$, τότε η πρώτη ιση i εξαρτάται κάτω από τη βέλτιστη λύση. Τότε $\bar{c}_i \leq 0$ είναι ο αριθμός μείωσης της α.σ. αν αυξήσω $y_i > 0$ να πάρει δηλ. θετικές τιμές, δηλαδή να παραμείνει θετικό από δεξιά στην αριθμική, δηλ. αν οι υπολ. k_i -βάσιμες μεταβλ. μείνουν ως έχουν.

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} x_j + y_i &= b_i \\ y_i^* &= 0 \\ \Rightarrow a_{ij} x_j &= b_i \\ \text{απαιτούμενη ποσ.} &= \text{διαθέσιμη ποσότητα} \end{aligned} \right\}$$

(αν η περιθώρια είναι 0, ταυτίζονται τα άλλα δύο)

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΔΥΣΚΟΤΗΤΑΣ

3.1 Εισαγωγή

Για κάθε π.γ.π. ορίζεται το δύσκολο π.γ.π. του.
Θα δούμε πρώτα π.γ.π. σε γλυκανονική μορφή.

- Ορισμός: Ένα π.γ.π. βρίσκεται σε γλυκανονική μορφή (HK) αν έχει εμφραστεί με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

$$\begin{aligned} \max \quad & c'x \\ \text{υπό} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

με max: περιορισμός-μέχρι να

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{υπό} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

με min: να να έκω τουλ. κάτι

όπου $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$, A $m \times n$ πίνακας.

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι έχουμε γλυκανονική μορφή μεγιστοποίησης (HK-max). Στην 2η περίπτωση έχουμε γλυκανονική μορφή ελαχιστοποίησης (HK-min).

• Σημειώσεις:

- Σε προβλήματα μεγιστοποίησης γράφουμε ως προβλεπόμενη γραμμή περιορι.: $\leq$
- Σε προβλήματα ελαχιστοποίησης: $\geq$
- Άρα, ένα π.γ.π. είναι σε γλυκανονική μορφή αν οι γραμμικοί περιορισμοί έχουν την προβλεπόμενη γραμμή και αν οι μεταβλ. απόφασης είναι μν-αρν. ($x \geq 0$)

- Ένα π.γ.π. σε γλυκανονική μορφή ορίζεται από μια τετράδα της μορφής $P = HK(p, A, b, c)$, όπου $p = \begin{cases} 0, & \text{αν είναι min} \\ 1, & \text{αν είναι max} \end{cases}$ και

Α ο μηχανήματα των οποίων στους γρ. περιορισμούς

$\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ το δεξιό μέλος στα δεξιά των

$\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ — " — σιγαστικά αλφ. α. σ.

— Ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή ορίζεται ως $P = \text{HK}(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c})$

• Παράδειγμα:

Να γέρετε σε HK-max μορφή το π.γ.π.

$$\min : 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{υπό} : 3x_1 + 7x_2 = 6$$

$$x_1 - 5x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = -x_1'$$

$$x_1' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_2 = x_2' - x_2''$$

$$x_2', x_2'' \geq 0$$

$$\min : -2x_1' + 5x_2' - 5x_2''$$

$$\text{υπό} : -3x_1' + 7x_2' - 7x_2'' = 6$$

$$-x_1' - 5x_2' + 5x_2'' \geq 3$$

$$x_1', x_2', x_2'' \geq 0$$

$$-\max : 2x_1' - 5x_2' + 5x_2''$$

$$\Leftrightarrow \text{υπό} : -3x_1' + 7x_2' - 7x_2'' \leq 6$$

$$3x_1' - 7x_2' + 7x_2'' \leq -6$$

$$x_1' + 5x_2' - 5x_2'' \leq -3$$

$$x_1', x_2', x_2'' \geq 0$$

3.2

Ορισμός Σεικού προβλήματος

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα π.γ.π. σε HK-max μορφή $P = \text{HK}(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c})$

$$z = \max \underline{c}'\underline{x}$$

$$\text{υπό} \underline{A}\underline{x} \leq \underline{b} \quad (1)$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Αποφασίζουμε ότι $\underline{A}\underline{x} \leq \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a}_i' \underline{x} \leq b_i, \forall i=1,2,\dots,m \Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^n x_j A_j \leq \underline{b}$$

Ορίζουμε την **Λαγρανζιανή συνάρτηση** : $L(\underline{x}, \underline{w})$ με:

$$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underline{c}' \cdot \underline{x} - \sum_{i=1}^m w_i (\underline{a}_i' \underline{x} - b_i),$$

Σημάδι η Λαγρανζιανή συνάρτηση προκύπτει αν από την α.σ. των ① αφαιρεθούν οι ποσότητες $w_i (\underline{a}_i' \underline{x} - b_i)$, που είναι οι τιμές για την περίπτωση που παραβιάζεται ο i -οστός περιορισμός όταν δηλ. $\underline{a}_i' \underline{x} - b_i \geq 0$.

Η ποσότητα $w_i \geq 0$ ονομάζεται **πολλαπλασιαστές Lagrange** των περιορισμών i και δείχνει την "ποινή" ανά μονάδα παραβίασης των περιορισμών.

Ορίζουμε ένα νέο πρόβλημα μεγιστοποίησης $\forall \underline{w} \geq \underline{0}$

$$Z_L(\underline{w}) = \max_{\underline{x} \geq \underline{0}} L(\underline{x}, \underline{w})$$

• Λήμμα: $Z_L(\underline{w}) \geq Z_P$