

Μάθημα (12^ο):

2/4/25

- Υπενθύμιση: γ/μ κανονική μορφή: $z_p = \max \underline{c}' \underline{x}$

$$\text{υπό: } A \underline{x} \leq \underline{b} \quad (1) \\ \underline{x} \geq 0$$

ορίσαμε τη Lagrangian συν/ση

$$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underline{c}' \underline{x} + \underline{w}' (\underline{b} - A \underline{x}) = \\ = \underline{c}' \underline{x} - \sum_{i=1}^m w_i (a_i' \underline{x} - b_i), \quad \forall \underline{w} \geq 0$$

με νέο πρόβλημα το $z_L(\underline{w}) = \max L(\underline{x}, \underline{w})$

$$\text{υπό } \underline{x} \geq 0$$

$$\text{ορίζεται } \underline{w} \geq 0$$

- Λήμμα: $z_L(\underline{w}) \geq z_p, \forall \underline{w} \geq 0$

παίρνουμε οπότε
άνω σφράγμα!

Απόδειξη

$$z_L(\underline{w}) = \max \{ L(\underline{x}, \underline{w}), \underline{x} \geq 0 \} \\ \geq \max \{ L(\underline{x}, \underline{w}), \underline{x} \geq 0, A \underline{x} \leq \underline{b} \}$$

Για $\underline{x} \geq 0$ και $A \underline{x} \leq \underline{b}$, τότε

$$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underbrace{\underline{c}' \underline{x}}_{+} + \underbrace{\underline{w}' (\underline{b} - A \underline{x})}_{+} \geq \underline{c}' \underline{x}$$

$$\text{Άρα, } z_L(\underline{w}) \geq \max \{ L(\underline{x}, \underline{w}), \underline{x} \geq 0, A \underline{x} \leq \underline{b} \} \\ \geq \max \{ \underline{c}' \underline{x}, \underline{x} \geq 0, A \underline{x} \leq \underline{b} \} \\ = z_p$$

Επομένως, $\forall \underline{w} \geq 0, z_L(\underline{w}) \geq z_p$

- Παρατηρήσεις:

1) Από την απόδειξη βλέπουμε ότι το π.γ.π. ② έχει μεγαλύτερη βέλτισση τιμή από το ①.

Αυτό γίνεται διότι:

α) Η εφικτή περιοχή του ① είναι υποσύνολο της εφικτής περιοχής του ②

β) Δείξε $\underline{x}$ που ανήκουν στην εφελκυστική περιοχή του ① ή $\underline{c}'\underline{x}$ παίρνει μικρότερη ή ίση τιμή από την $L(\underline{x}, \underline{w})$, $\forall \underline{w} \geq 0$

Έτσι, το ② λέγεται **πρόβλημα Lagrangeανής χατάρωσης του ①**.

Η βέλτιστη τιμή της Lagrangeανής χατάρωσης, $z_L(\underline{w})$, αποτελεί άνω φράγμα για το z_p , $\forall \underline{w} \geq 0$. (ή μιν αφού είναι υφέσιο)
Επομένως, το $\inf \{ z_L(\underline{w}), \underline{w} \geq 0 \}$ δίνει το καλύτερο άνω φράγμα, που προκύπτει από τη Lagrangeανή χατάρωση.

• Ορισμός: Το πρόβλημα βελτιστοποίησης $z_D = \inf \{ z_L(\underline{w}), \underline{w} \geq 0 \}$ ③ ονομάζεται **δύσκολο πρόβλημα** του προβλήματος ①.
↓
γενικά έχει φραγματική + μονοτονική εφελκυσία (αρκότερα)

• Γράφεται η ③ σε πιο απλή μορφή;

$$z_L(\underline{w}) = \max_{\underline{x} \geq 0} L(\underline{x}, \underline{w}) = \max_{\underline{x} \geq 0} \underline{c}'\underline{x} + \underline{w}'(\underline{b} - \underline{A}\underline{x}) =$$

$$= \underline{w}'\underline{b} + \max_{\underline{x} \geq 0} (\underline{c}' - \underline{w}'\underline{A})\underline{x}$$

$f_L(\underline{w})$

$$\mu \epsilon \quad f_L(\underline{w}) = \max_{\underline{x} \geq 0} (\underline{c}' - \underline{w}'\underline{A})\underline{x} = \max_{\underline{x} \geq 0} \sum_{j=1}^n (c_j - \underline{w}'\underline{A}_j) x_j = \begin{cases} 0, & \text{αν } \underline{c}' - \underline{w}'\underline{A} \leq 0 \\ +\infty, & \text{αν } \exists j, \underline{c}_j - \underline{w}'\underline{A}_j > 0 \end{cases}$$

για κάποιο j

ΟΠΩΣ, $z_L(\underline{w}) = \begin{cases} \underline{w}'\underline{b}, & \text{αν } \underline{c}' - \underline{w}'\underline{A} \leq 0 \\ +\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Επομένως, αφού $z_D = \inf \{ z_L(\underline{w}), \underline{w} \geq 0 \}$, το z_D ως $\inf$ της $z_L(\underline{w})$, θα πετυχαίνεται σε $\underline{w}$ τ.ω. $\underline{c}' - \underline{w}'\underline{A} \leq 0$.

Οπότε, $z_D = \inf \{ z_L(\underline{w}), \underline{w} \geq 0 \} = \inf \{ \underline{w}'\underline{b}, \underline{w} \geq 0, \underline{c}' - \underline{w}'\underline{A} \leq 0 \}$

Τέλος, το πρόβλημα γράφεται ως:

$$z_D = \min_{1 \times m} \underbrace{\underline{w}'}_{m \times 1} \underbrace{\underline{b}}_{1 \times 1} \leadsto 1 \times 1, \text{ τοίκειο } \underline{z}_D$$

$$\text{υπό: } \underline{c}' - \underline{w}' A \leq \underline{0} \Leftrightarrow \underline{c}' \leq \underline{w}' A$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

$$z_D = \min \underline{b}' \underline{w}$$

$$\text{υπό } A' \underline{w} \geq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

#Συϊκό

αναμέν. μπορεί ελαχιστοποίησης

Παρατηρούμε ότι το Συϊκό του $HK(1, A, \underline{b}, \underline{c})$ είναι το $HK(0, A', \underline{c}, \underline{b})$

Από τον τρόπο που προέκυψε το Συϊκό προκύπτει άμεσα το
Ασθενές Συϊκό Θεώρημα :

• Θεώρημα: $\underline{c}' \underline{x} \leq z_P \leq z_D \leq \underline{b}' \underline{w}$ για κάθε $\underline{x} \in F_P, \underline{w} \in F_D$.

• Θεώρημα: Το Συϊκό του (D) είναι (P)

Απόδειξη

Για να γράψω το Συϊκό του (D), πρέπει να το γέρω σε HK-max

$$\min \underline{b}' \underline{w} \quad -\max (-\underline{b}' \underline{w})$$

υπό:

$$A' \underline{w} \geq \underline{c} \Leftrightarrow$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

υπό:

$$(-A') \underline{w} \leq -\underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

Το Συϊκό του είναι

$$-\min (-\underline{c})' \underline{x}$$

$$\text{υπό } -A \underline{x} \geq -\underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \max \underline{c}' \underline{x}$$

$$\text{υπό: } A \underline{x} \leq \underline{b} \quad (P)$$

$\underline{x} \geq \underline{0}$ δηλ. το D είναι Συϊκό του P.

$$z_P = \max \underline{c}' \underline{x}$$

$$\text{υπό } A \underline{x} \leq \underline{b} \quad (P)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$z_D = \min \underline{b}' \underline{w}$$

$$\text{υπό } A' \underline{w} \geq \underline{c} \quad (D)$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

• Ανεύδειας εύρεση δυνάμει

Υπενδύμηση: προβλεπόμενη φορά γρ. περιορισμών:

$$\max \longleftrightarrow \leq$$

$$\min \longleftrightarrow \geq$$

προβλεπόμενη φορά για περιορισμούς προσήκου:

$$\max \longleftrightarrow x_j \geq 0$$

$$\min \longleftrightarrow w_i \geq 0$$

Κανόνες:

(P)

(D)

$$\max \longrightarrow \min$$

$$\min \longrightarrow \max$$

i-οστός γρ. περιορισμός με προβλεπόμενη φορά $\rightarrow$ i-οστή μετ. απόφασης ≥ 0

i-οστός γρ. περιορ. με φορά αντίθετη της προβλεπ. $\rightarrow$ i-οστή μετ. απόφ. ≤ 0

i-οστός γρ. περιορ. είναι ισόχυτα $\rightarrow$ i-οστή μετ. απόφ. $\in \mathbb{R}$

j-οστή μετ. απόφασης $\geq 0 \rightarrow$ j-οστός γρ. περιορ. έχει προβλεπ. φορά

j-οστή μετ. απόφασης $\leq 0 \rightarrow$ j-οστός γρ. περιορισμός έχει φορά αντιθ. της προβλεπόμενης

j-οστή μετ. απόφ. $\in \mathbb{R} \rightarrow$ j-οστός γρ. περιορ. είναι ισόχυτα

• Παράδειγμα (P)

$$\min: 5x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$\text{υπό: } x_1 + x_2 - x_3 \leq 8$$

$$2x_1 - 7x_2 + x_3 \geq 9$$

$$x_1 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R}$$

(D)

$$\max: 8w_1 + 9w_2 + 6w_3 + 3w_4$$

$$\text{υπό: } 1w_1 + 2w_2 + w_3 + 3w_4 \leq 5$$

$$1w_1 - 7w_2 + 0w_3 + 2w_4 \geq 3$$

$$-1w_1 + 1w_2 - 1w_3 - 7w_4 = -7$$

$$w_1 \leq 0, w_2 \geq 0, w_3 \in \mathbb{R}, w_4 \leq 0$$

4 γρ. περιορ. $\rightarrow$ 4 μεταβλ. απόφασης

3 μεταβλ. απόφ. $\rightarrow$ 3 γρ. περιορισμοί

3.3 Ισχυρό Δυϊνό Θεώρημα:

Λήμμα: Αν $\underline{x}^*$ και $\underline{w}^*$ είναι εφικτές λύσεις των (P) και (D), αντιστοίχα, και ισχύει $\underline{c}'\underline{x}^* = \underline{b}'\underline{w}^*$, τότε οι $\underline{x}^*$ και $\underline{w}^*$ είναι βέλτιστες λύσεις των (P) και (D) αντιστοίχα.

Απόδειξη

Από Α.Δ.Θ. έχουμε $\underline{c}'\underline{x} \leq \underline{b}'\underline{w} \quad \forall \underline{x} \in F_P, \underline{w} \in F_D$

• για το $\underline{w}^*$: $\underline{c}'\underline{x} \leq \underline{b}'\underline{w}^* \quad \forall \underline{x} \in F_P$

$$\Rightarrow \underline{c}'\underline{x} \leq \underline{c}'\underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in F_P$$

$\Rightarrow \underline{x}^*$ βέλτιστη λύση για το (P)

• Επίσης, για $\underline{x}^*$: $\underline{c}'\underline{x}^* \leq \underline{b}'\underline{w} \quad \forall \underline{w} \in F_D$

$$\Rightarrow \underline{b}'\underline{w}^* \leq \underline{b}'\underline{w} \quad \forall \underline{w} \in F_D$$

$\Rightarrow \underline{w}^*$ βέλτιστη λύση για το (D) ■

$$\underline{c}'\underline{x}, \underline{x} \in F_P \quad \underline{b}'\underline{w}, \underline{w} \in F_D$$

κρίση δυϊμότητας

$$\underline{c}'\underline{x} \leq Z_P \leq Z_D \leq \underline{b}'\underline{w}$$