

Μάθημα 13^ο:

7/4/25

• Θεώρημα: Ισχυρό Δυϊκό Θεώρημα

Αν ένα π.χ.π. έχει βέλτιστη λύση, τότε και το δυϊκό του έχει βέλτιστη λύση και οι τιμές των α.σ. στις βέλτιστες λύσεις ταυτίζονται, δηλαδή $z_p = z_d$.

Απόδειξη

Έστω ότι το πρωτεύον πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση Β.Ε.Λ. $\underline{x}$, έχει βασικό πίνακα B . Γνωρίζουμε ότι $\bar{c}_j \leq 0, \forall j=1, 2, \dots, n$, δηλαδή $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}'_B B^{-1} A_j \leq 0, j=1, 2, \dots, n$ ①

Αντί τα έχουμε για π.χ.π. σε κανονική μορφή, άρα

$$\begin{aligned} z_p &= \max \underline{c}' \underline{x} \\ \text{υπό: } A \underline{x} &= \underline{b} \quad (P) \\ \underline{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Το δυϊκό του (P) είναι:

$$\begin{aligned} \min \underline{b}' \underline{w} \\ \text{υπό: } A' \underline{w} &\geq \underline{c} \quad (D) \\ \underline{w} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\underline{w}' = \underline{c}'_B B^{-1}$

Από ① $\Rightarrow c_j - \underline{w}' A_j \leq 0$. Άρα, $\underline{c}' - A' \underline{w} \leq 0 \Leftrightarrow \underline{c}' - \underline{w}' A \leq 0'$ ισχύει.

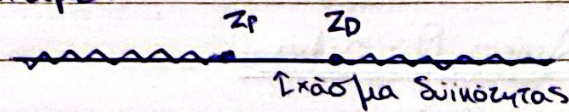
Άρα, $\underline{w} \in F_D$ (με $\underline{w}' = \underline{c}'_B B^{-1}$) επιλυτή λύση

Επίσης, $\underline{c}' \underline{x} = \underline{c}'_B \underline{x}_B = \underline{c}'_B B^{-1} \underline{b} = \underline{w}' \underline{b} = \underline{b}' \underline{w}$

$$\left. \begin{aligned} \underline{x} &\in F_P \\ \underline{w} &\in F_D \\ \underline{c}' \underline{x} &= \underline{b}' \underline{w} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{w} \text{ βέλτιστη λύση του (D) και } z_p = z_d.$$

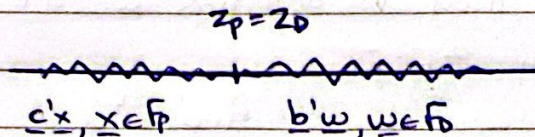
Δηλαδή, καταλαβαίνουμε:

Είχαμε:



$$\underline{c}'x \leq z_p \leq z_D \leq \underline{b}'w$$

και γίνεται:



• Πρόταση:

Αν ένα π.γ.π. είναι μν-φραγμένο, τότε το δύο του είναι μν-επιυτό.

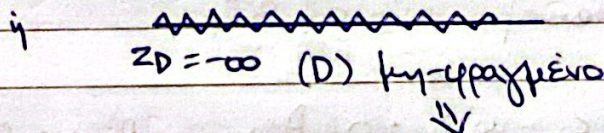
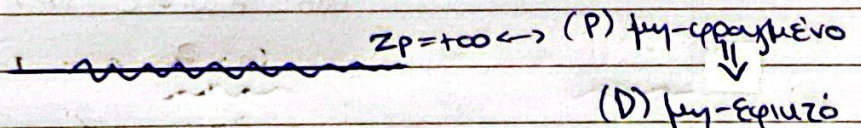
Απόδειξη

Έστω ότι το P είναι μν-φραγμένο. Τότε, $z_p = \max \underline{c}'x = +\infty$,
 άρα $z_D \geq z_p = +\infty$.

Έστω ότι υπάρχει $\underline{w} \in F_D$, τότε $\underline{b}'\underline{w} \geq z_D = \min_{\underline{w} \in F_D} \underline{b}'\underline{w} = \infty$. Άρα.

Άρα, $F_D = \emptyset$ (η επιυτή περιοχή είναι κενή) πενερασμένο

Συμπερασμα:



Αρα,	(P) μν-επιυτό			
	(P) \ (D)	μν-επιυτό	Βέλτιση λύση	μν-φραγμένο
μν-επιυτό		✓	✗	✓
Βέλτιση λύση		✗	✓	✗
μν-φραγμ.		✓	✗	✗

- Σημείωση: Αν ένα πρόβλημα είναι μη-επιλυτό, τότε το δual του είναι μη-επιλυτό ή μη-σφραγμένο.

• ΕΥΘΥΝΗ 3 (HW) (θα ανέβει και εντομία, αργότερα)

Έστω A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας ($A' = A$) και $c \in \mathbb{R}^n$

Θαρούμε το π.γ.π.: $\max c'x$
 υπό: $Ax \leq c$ (P)
 $x \geq 0$

Δείξτε ότι ένα διάνυσμα x^* που ικανοποιεί τις $Ax^* = c$ και $x^* \geq 0$ είναι βέλτιστη λύση του (P).

3.4 Συμπληρωματικότητα Βέλτιστων Λύσεων

Θα δώσουμε κάποιες σχέσεις για τις βέλτιστες λύσεις πρωτεύοντος και δual. Έχουμε:

$$z_p = \max c'x \quad \Leftrightarrow \quad z_p = \max c'x$$

υπό: $Ax \leq b$
 $x \geq 0$

υπό: $a_i'x \leq b_i, i=1, \dots, m$
 $x \geq 0$

i-οστή π.ρ. του π.γ.π. ως α.γ.π.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:

$$A = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n]$$

$$\Leftrightarrow \quad z_p = \max c'x$$

υπό: $b_i - a_i'x \geq 0, i=1, 2, \dots, m$ (P)
 $x \geq 0$

και $z_d = \min b'w$

υπό: $A'w \geq c$
 $w \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\min b'w$
 υπό: $A_j'w \geq c_j, j=1, 2, \dots, n$
 $w \geq 0$

→ 1 ποικιλία από ιδιοαντιρροπία του

$$\begin{aligned} & \min \underline{b}' \underline{w} \\ \Leftrightarrow & \quad \text{uno: } \underline{w}' \underline{A}_j - c_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n \quad (D) \\ & \underline{w} \geq 0 \end{aligned}$$

Εξαιρέσει ότι: • j -οστή μετ. αντίστροφος $\leftrightarrow j$ -οστό γρ. νερ. του (D)
του (P)

$$x_j \longleftrightarrow \underline{w}' \underline{A}_j - c_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n$$

• i -οστή μετ. αντίστροφος $\leftrightarrow i$ -οστό γρ. νερ. του (P)
του (D)

$$w_i \longleftrightarrow b_i - \underline{a}_i' \underline{x} \geq 0, i=1, 2, \dots, m$$

Ορίζουμε τα γινόμενα:

$$u_i = w_i (b_i - \underline{a}_i' \underline{x}), i=1, 2, \dots, m$$

$$v_j = x_j (\underline{w}' \underline{A}_j - c_j), j=1, 2, \dots, n$$

• Αν $\underline{x} \in F_P$, $\underline{w} \in F_D$, τότε: $\underline{v}_j \geq 0, j=1, \dots, n$ και $u_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης, } \sum_{i=1}^m u_i &= \sum_{i=1}^m w_i (b_i - \underline{a}_i' \underline{x}) = \sum_{i=1}^m w_i b_i - \sum_{i=1}^m w_i \underline{a}_i' \underline{x} = \\ &= \underline{b}' \underline{w} - \underline{w}' \underline{A} \underline{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αντίστροφα, } \sum_{j=1}^n v_j &= \sum_{j=1}^n x_j (\underline{w}' \underline{A}_j - c_j) = \underline{w}' \sum_{j=1}^n x_j \underline{A}_j - \sum_{j=1}^n x_j c_j = \\ &= \underline{w}' \underline{A} \underline{x} - \underline{c}' \underline{x} \end{aligned}$$

- Αν $\underline{x} \in F_P$ και $\underline{w} \in F_D$, τότε:

$$0 \leq \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = \underline{b}'\underline{w} - \underline{w}'A\underline{x} + \underline{w}'A\underline{x} - \underline{c}'\underline{x}$$

άρα, $\underline{x} \in F_P$ και $\underline{w} \in F_D$, τότε:

$$\underline{b}'\underline{w} - \underline{c}'\underline{x} \geq 0 \Rightarrow \underline{b}'\underline{w} \geq \underline{c}'\underline{x} \Rightarrow \text{αδυνάμεις δυνάμεις}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Εάν } \underline{x} \text{ βέλτιστη λύση του (P)} \\ \text{και } \underline{w} \text{ βέλτιστη λύση του (D)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_i = 0, \forall i=1,2,\dots,m \\ v_j = 0, \forall j=1,2,\dots,n \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_i (b_i - a_i' \underline{x}) = 0, i=1,2,\dots,m \\ x_j (w_j' A_j - c_j) = 0, j=1,2,\dots,n \end{array} \right\} \text{ Συνθήκες συμπληρωματικότητας} \\ \text{χαλαρότητας}$$

- Θεώρημα: Συνδυαστικότητα (Complementary Slackness Theorem)

Έστω $\underline{x}, \underline{w}$ εφικτές λύσεις του (P) και (D) αντίστοιχα. Ο $\underline{x}, \underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις για τα (P) (D) αντίστοιχα.

$$\text{α.ν.ν.} \left\{ \begin{array}{l} w_i (b_i - a_i' \underline{x}) = 0, i=1,2,\dots,m \\ x_j (w_j' A_j - c_j) = 0, j=1,2,\dots,n \end{array} \right.$$