

Мадыра (140):

2815125

- Υπενδύμηση: θεωρούμε το π.χ.π. $\max c'x$

o no $Ax \leq b$ (P)

$x \geq 0$

$$\max c'x$$

(=) uno $b_i - a_i \cdot x \geq 0, i=1, \dots, m$

$$\underline{x \geq 0}$$

uue to Siivó to min biw

min b'w

(D) $\text{und } A'w \geq c \Leftrightarrow \text{und } A_j'w - c_j \geq 0, j=1, \dots, n$

$$\omega \geq 0$$

$$\omega \geq 0$$

Προσέγγιση: τα (P) και (D) $\leadsto$ σε υφιστάμενη μορφή για θ. ζυγιστογραφικότητα

• Dejinyka Infundapukatuotykas:

Εάν $x \in \mathbb{F}_p$, $w \in \mathbb{F}_p$, οι x, w είναι βέλτιστες λύσεις των (P) και (D) αντίστοιχα αν και μόνο αν:

$$x_j(A'_{jw} - \underline{c}_j) = 0 \quad \forall i=1, \dots, n \rightsquigarrow x_j = 0 \text{ ή } 0 \leq j \leq m \text{ ούτως ώστε να ισχύει το σπινίτζι}$$

$$w_i (b_i - \underline{a_i} \cdot \underline{x}) = 0, \forall i=1, \dots, m \leadsto w_i = 0 \vee b_i - \underline{a_i} \cdot \underline{x} = 0 \quad (P)$$

Σημείωση: Αν έχω βρει βέλτισση λ για το (P) την x^* , μπορεί με χρήση του λ συμπληρωματικότητας να βρω τη λύση του (D).

Για $\forall \delta \in x_j^*, j=1, 2, \dots, n$

- Αν $x_j^* = 0$, δε βάλω συνέπασμα

- $A v \ x_j > 0 \Rightarrow A_j' \omega - c_j = 0$

Για να δε νεποριστιο του (P)

- Av bi $-a_i x = 0$, se gjaftu sultnastika

- An $b_i - a_i'x > 0 \Rightarrow w_i = 0$

(P) με φραγμένο $\Rightarrow$ (D) με Εξισό

(P) μ ε $\mathbb{R}^{n \times n}$ $\Rightarrow$ (P) μ $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ μ ε $\mathbb{R}^{n \times n}$

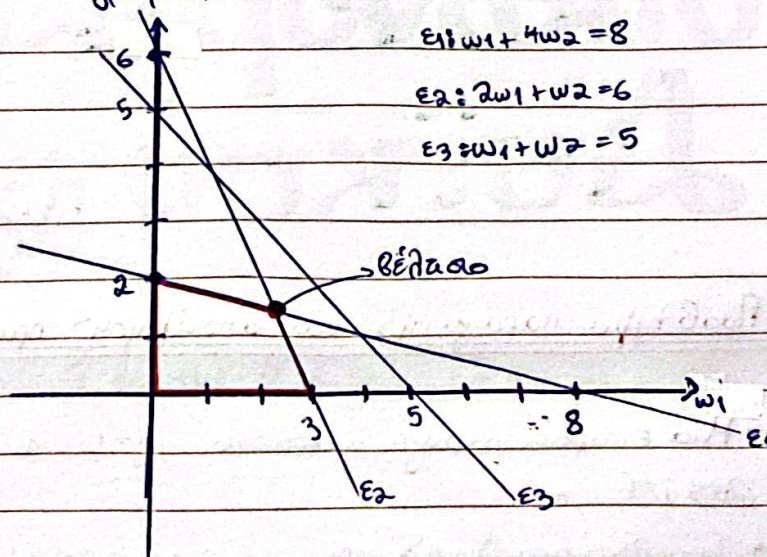
• Ασκήση: Να λυθεί το π.γ.π.

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{υπό} \quad & 1x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \quad (P) \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Το (P) είναι σε HK-min μορφή. Το δuality του είναι:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3w_1 + 2w_2 \\ \text{υπό} \quad & 1w_1 + 4w_2 \leq 8 \\ & 2w_1 + 1w_2 \leq 6 \quad (D) \\ & 1w_1 + 1w_2 \leq 5 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Το (D) λύνεται γραφικά:



Το βέλτιστο σημείο κομής των E_1 και E_2 :

$$\begin{cases} 1w_1 + 4w_2 = 8 \\ 2w_1 + 1w_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + 24 - 8w_1 = 8 \\ w_2 = 6 - 2w_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = \frac{16}{7} \\ w_2 = \frac{10}{7} \end{cases}$$

Άρα, η βέλτιστη λύση του (D) είναι: $(w_1^*, w_2^*) = (\frac{16}{7}, \frac{10}{7})$ και

$$z^* = 3 \cdot \frac{16}{7} + 2 \cdot \frac{10}{7} = \frac{68}{7}$$

Εφαρμόζω το Θ. Διφορτωματικότητας για να βρω τη λύση (P) ~
(x_1^*, x_2^*, x_3^*).

$$\omega_1^* = \frac{16}{7} > 0 \Rightarrow 1x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 3 \quad (1)$$

$$\omega_2^* = \frac{10}{7} > 0 \Rightarrow 4x_1^* + x_2^* + x_3^* = 2 \quad (2)$$

$$\triangleright 1 \cdot \omega_1^* + 4\omega_2^* = \frac{16}{7} + 4 \cdot \frac{10}{7} = 8, \text{ δε βάζω σύμπερασμα}$$

$$\triangleright 2\omega_1^* + 1\omega_2^* = 2 \cdot \frac{16}{7} + 1 \cdot \frac{10}{7} = 6, -11$$

$$\triangleright 1\omega_1^* + 1\omega_2^* = \frac{16}{7} + \frac{10}{7} = \frac{26}{7} \Rightarrow x_3^* = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (1), (2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1^* + 2x_2^* = 3 \\ 4x_1^* + x_2^* = 2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 3 - 2x_2^* \\ 12 - 8x_2^* + x_2^* = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{1}{7} \\ x_2^* = \frac{10}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Οικονομική ΕΡΜΗΝΕΙΑ Δυϊκού π.χ.π.

3.5.1

Πρόβλημα παραγωγής και απόζήτησης πρώτων υλών

- Η εταιρεία παράγει n -προϊόντα, $j=1, \dots, n$ χρησιμοποιώντας m πρώτες ύλες $i=1, \dots, m$
- Το κόστος ανά μονάδα παραγωγής προϊόντος j είναι $c_j=1, \dots, n$
- Για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντων j απαιτούνται a_{ij} μονάδες από την πρώτη ύλη $i=1, 2, \dots, m, j=1, \dots, n$

Η εταιρεία έχει b_i μονάδες πρώτης ύλης i διαθέσιμες $i=1, 2, \dots, m$

(A) Η εταιρεία θέλει να απορροφήσει όλες τις μονάδες που φτιάχνει

από κάθε προϊόν, ώστε να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος.

(B) Ένας εξωτερικός αγοραστής θέλει να αγοράσει τις διαθέσιμες πρώτες ύλες από την εταιρεία. Ο αγοραστής θέλει να προσδιορίσει τις τιμές που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος (πρέπει η εταιρεία να είναι διαθέσιμη να πουλήσει)

Να προσεδομηθούν τα ζητούμενα.

(A) x_j = ποσότητα που θα πουληθεί από το προϊόν j , $j=1, 2, \dots, n$

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{υπό } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i=1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j=1, \dots, n$$

(B) y_i = τιμή ανά μονάδα πρώτης ύλης i , $i=1, \dots, m$

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{υπό } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j=1, \dots, n$$

→ κέρδος από πώληση μιας μονάδας προϊόντος j

κέρδος από πώληση πρώτων υλών με τις οποίες
φτιάχνει μια μονάδα προϊόντος j

$$y_i \geq 0, i=1, \dots, m$$