

Θεωρούμε ότι υπάρχουν αποφάσεις τις οποίες παίρνουμε ή όχι και μοντελοποιούνται από δυαδικές μεταβλητές απόφασης

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{επιλέγω την απόφαση } j. \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad j=1,2,\dots,n$$

→ Το πολύ k αποφάσεις μπορούν να ενεργοποιηθούν $\iff$

$$\sum_{j=1}^k x_j \leq k$$

→ Αν μπορώ να παράγω την απόφαση i μόνο αν έχω πάρει την j

$$\iff x_i \leq x_j$$

→ Αν θέλουμε να ορίσουμε μία μεταβλητή που δείχνει αν έχουμε πάρει την απόφαση i και την απόφαση j :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_i=1 \text{ και } x_j=1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = x_i \cdot x_j \leftarrow \text{δεν είναι π.φ.π.}$$

$$\text{Αλλιώς: } x_{ij} \leq x_i$$

$$x_{ij} \leq x_j$$

$$x_{ij} \geq x_i + x_j - 1$$

$$x_i, x_j, x_{ij} \in \{0,1\}$$

4.2.1 Πρόβλημα τοποθέτησης σταθμών εξυπηρέτησης.

- Υπάρχουν n δυνατές τοποθεσίες στις οποίες μπορούν να τοποθετηθούν σταθμοί εξυπηρέτησης μιας εταιρείας.
- Υπάρχουν m πελάτες που πρέπει να εξυπηρετηθούν.
- Υπάρχει κόστος c_j , αν ανοίξει σταθμός εξυπηρέτησης στην τοποθεσία j , $j=1, 2, \dots, n$.
- Υπάρχει κόστος h_{ij} , αν ο πελάτης i εξυπηρετηθεί από τον σταθμό j , $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$.
- Κάθε πελάτης πρέπει να εξυπηρετηθεί από έναν σταθμό. Η εταιρεία θέλει να βρει σε ποιες τοποθεσίες θα ανοίξει σταθμούς εξυπηρέτησης και σε ποιο σταθμό θα ανατεθεί κάθε πελάτη, ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος.

Μοντελοποίηση

Μεταβλητές απόφασης: $x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν τοποθετηθεί σταθμός στην τοποθεσία } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n$

$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ο πελάτης } i \text{ ανατεθεί στην τοποθεσία } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n, \quad i=1, 2, \dots, m.$

$$\min: \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m h_{ij} y_{ij}$$

$$\text{υπό: } \sum_{j=1}^n y_{ij} = 1 \quad \forall i=1, 2, \dots, m$$

• κάθε πελάτης θα ανατεθεί
εξ ακριβώς 1 σταθμό

$$y_{ij} \leq x_j \quad i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, n$$

• Αν είναι σταθμός j

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j=1, 2, \dots, n$$

ανοίγει, δε θα ανατεθεί
εκεί πελάτης

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad j=1, 2, \dots, n \quad i=1, 2, \dots, m$$

• Αν η τοποθεσία j , μπορεί να εξυπηρετήσει μέχρι M_j πελάτες, $j=1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} \leq M_j \quad \forall j=1, 2, \dots, n.$$

Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m y_{ij} \leq M_i, j=1,2,\dots,n \\ y_{ij} \leq x_j, i=1,\dots,m, j=1,2,\dots,n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^m y_{ij} \leq M_j x_j, j=1,2,\dots,n$$

4.2.2. Πρόβλημα τοποθέτησης σταθμών παραγωγής.

- Υπάρχουν n δυνατές τοποθεσίες στις οποίες μπορούν να τοποθετηθούν σταθμοί παραγωγής μιας εταιρείας.
- Η εταιρεία παράγει ένα προϊόν. Απαιτείται να παραχθεί ποσότητα d σε ετήσια βάση.
- Αν ανοίξει ο σταθμός στην τοποθεσία j , το ετήσιο κόστος λειτουργίας είναι $k_j, j=1,2,\dots,n$ ετήσιως
- Δυναμότητα του σταθμού j είναι M_j , ενώ το μοναδιαίο κόστος παραγωγής είναι $h_j, j=1,2,\dots,n$.
- Η εταιρεία θέλει να δει που θα ανοίξουν οι σταθμοί ~~και να~~ και οι ετήσιες ποσότητες παραγωγής, ~~για να~~ ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος.

► Μοντελοποίηση:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν ανοίξει σταθμός στην τοποθεσία } j. \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$y_j = \# \text{ μονάδων που παράγει ο σταθμός στην τοποθεσία } j, j=1,2,\dots,n.$$

$$\min: \sum_{j=1}^m k_j \cdot x_j + \sum_{j=1}^n h_j \cdot y_j$$

$$\text{υπό: } \begin{cases} y_j \leq M_j x_j, j=1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^n y_j \geq d. \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j=1,2,\dots,n.$$

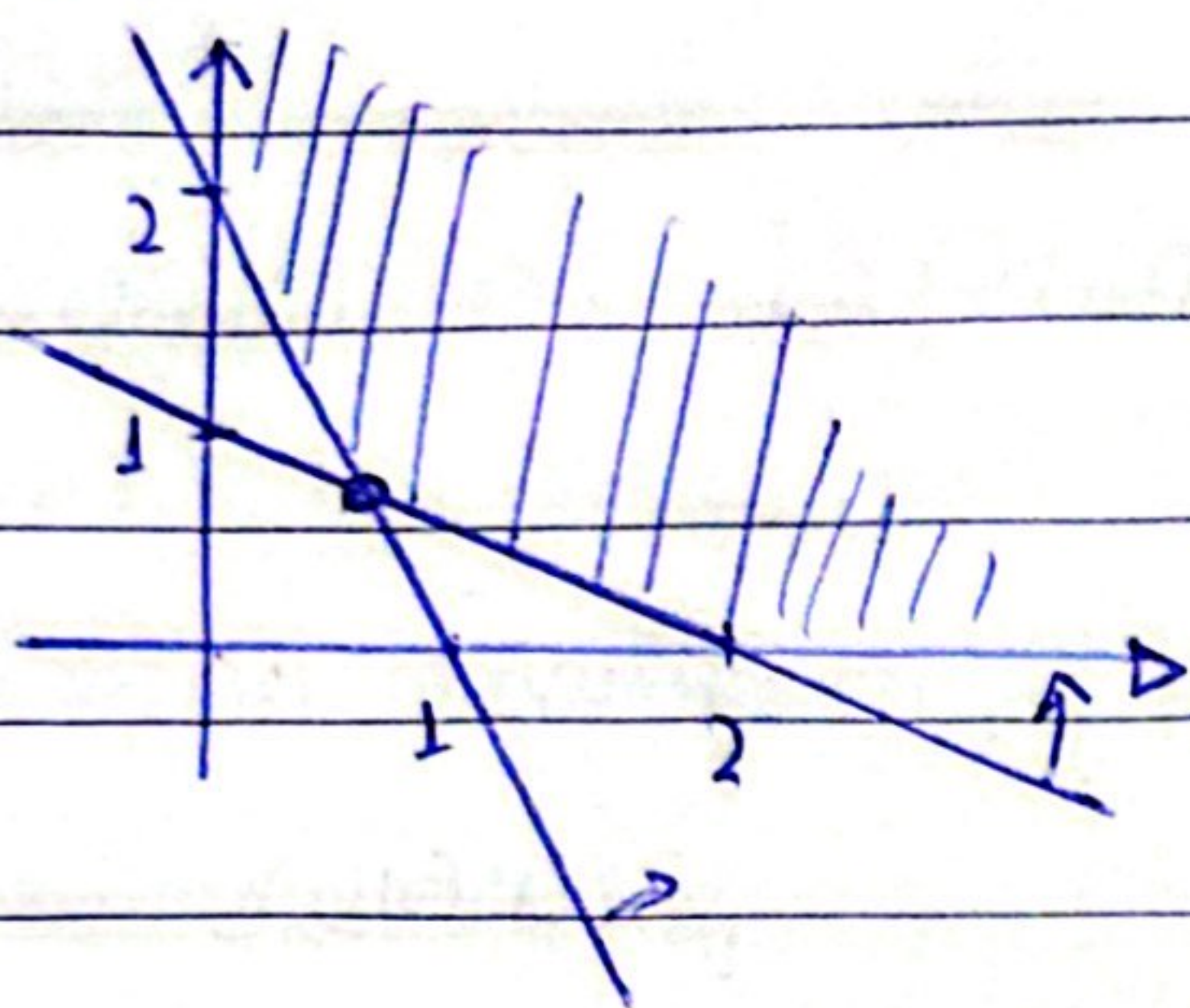
$$x_j \in \{0,1\}, j=1,2,\dots,n$$

$$y_j \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,n.$$

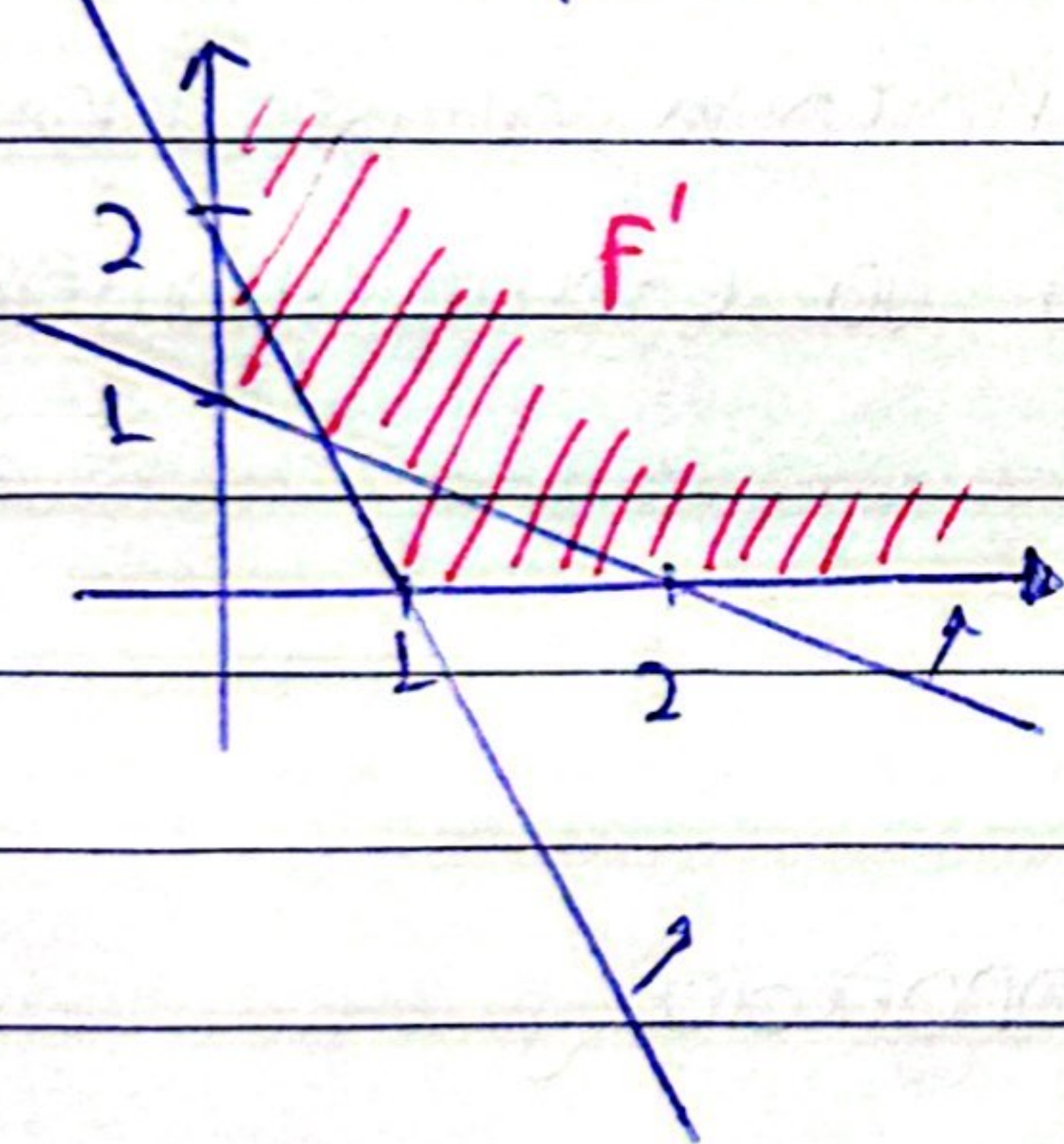
4.2.3. προβλήματα με διατεταμένους περιορισμούς.

Υπάρχουν προβλήματα με περιορισμούς διατεταμένους όπου δηλαδή, απαιτείται να ικανοποιείται τουλάχιστον ένας ~~από τους~~ (ή τουλάχιστον k , αριθμός k , το πολύ k).

Ποιράδειγμα: Έστω π.δ.π. με εφιατή περιοχή
 $F = \{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 \geq 2, 2x_1 + x_2 \geq 2, x_1, x_2 \geq 0\}$.



Αν είχα $F' = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 \geq 2 \text{ ή } x_1 + 2x_2 \geq 2, x_1, x_2 \geq 0\}$



Το F' δεν είναι κοινό σύνολο.

Δε μπορεί να γραφεί ως εφιατή περιοχή π.δ.π.

→ Εισάγοντας κάποια δυαδικές μεταβλητές, μπορούμε να εκφράσουμε το ~~πρόβλημα~~ πρόβλημα ως π.μ.α.π.:

Ορίζουμε: $y_i = \begin{cases} 1 & \text{, ικανοποιείται ο } i^{\text{ος}} \text{ περιορισμός} \\ 0 & \end{cases}$

$2x_1 + x_2 \geq 2y_1$ ← αν $y_1 = 1 \rightarrow$ Απχ. περιορ. $2x_1 + x_2 \geq 2$
 $y_1 = 0 \rightarrow$ Ισχύει πάντα: $2x_1 + x_2 \geq 0$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2y_2$$

$$y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

• Το τεχνικό αυτό απαιτεί την συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά δεν θα απαιτούσε εάν:

i) Είχαμε και αρνητικούς συντελεστές

ii) Η αίσθηση είχε φορά $\leq$

Κενύωση: Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο περιορισμών $a_i'x \leq b_i, i=1, \dots, m$ από τους οποίους θα απαιτούμε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα k , με $k \leq m$.

Εισάγουμε δυαδικές μεταβλητές απόφασης y_i

Ορίζουμε: $y_i = \begin{cases} 1, & \text{ικανοποιείται ο } i^{\text{ος}} \text{ περιορισμός} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$

$$a_i'x \leq b_i + M(1-y_i), \quad i=1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^m y_i \geq k$$

$y_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, m$, όπου M : πολύ μεγάλη θετική σταθερά (αντ. εάν $\epsilon \geq$, αφαιρούμε $M(1-y_i)$).

4.2.4. Μεταβλητές με πεπερασμένο σύνολο τιμών.

Έστω δε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με μεταβλητή απόφασης παίρουν τιμές σε πεπερασμένο σύνολο, $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$.

Παράδειγμα: • $x \in \{2, 3, 4, 5\}$

$$x \geq 2$$

$$x \leq 5$$

$$x \in \mathbb{Z}_+$$

$$\bullet \quad x \in \{1/2, 2, 5\}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{αν } x=1/2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, & \text{αν } x=2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1, & \text{αν } x=5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}y_1 + 2y_2 + 5y_3$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i = 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$