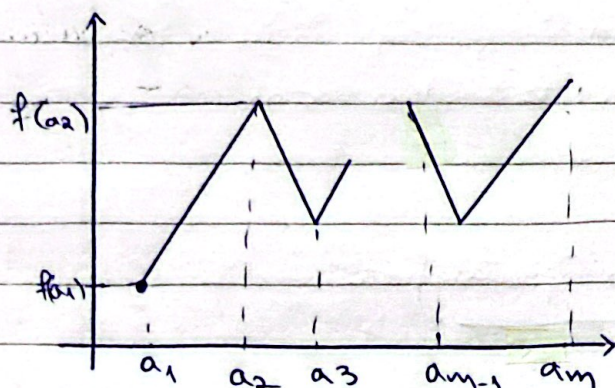


1415125

Μαθημα (17^ο):

4.2.5

Γενική τμηματικά γραμμική α.σ.

Έστω απεικόνιση ορισμένη στο $[a_1, a_m]$ που είναι κατά τμήματα γραμμική και συνεχής.

Υπάρχουν ενδιάμεσα σημεία $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$

τέτοια ώστε η f γραμμική στο $[a_i, a_{i+1}]$, $i=1, 2, \dots, m-1$ και συνεχής στο $[a_1, a_m]$.

Τότε, η f ορίζεται μονοσήμαντα από τα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_m$ και τις τιμές $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)$

$$f(x) = \begin{cases} f(a_1) + (f(a_2) - f(a_1)) \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & x \in [a_1, a_2] \\ f(a_2) + (f(a_3) - f(a_2)) \frac{x - a_2}{a_3 - a_2}, & x \in [a_2, a_3] \\ \vdots \\ f(a_{m-1}) + (f(a_m) - f(a_{m-1})) \frac{x - a_{m-1}}{a_m - a_{m-1}}, & x \in [a_{m-1}, a_m] \end{cases}$$

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$z = \min f(x)$$

$$\text{υπό } x \in [a_1, a_m]$$

Συμπεράσσετε ως εξής:

• Το $x \in [a_i, a_{i+1}]$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως κυρτός συνδυασμός των άκρων του $[a_i, a_{i+1}]$

Άρα, $x = \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1}$

$$\lambda_i, \lambda_{i+1} \geq 0$$

$$\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$$

τότε, $f(x) = \lambda_i f(a_i) + \lambda_{i+1} f(a_{i+1})$

δίνω τα άκρα,
πράσινο ενδείκνυται
για a_1, a_3 δεν θα
πράσινο ενδείκνυται
για a_2 δεν θα
πράσινο ενδείκνυται

- Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$$

Εδώ, αποφασίζω για τα

λ αντί για το x

#συντελ-αριθμούς

$$f(x) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \dots + \lambda_m f(a_m)$$

με τον περιορισμό ότι αν $x \in [a_i, a_{i+1}]$ τότε μόνο τα $\lambda_i, \lambda_{i+1} \geq 0$ και οι υπόλοιποι θα είναι 0.

- Για να ευφράσουμε τον τελευταίο περιορισμό, θεωρούμε τις δυαδικές μεταβλητές απόφασης:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a_i, a_{i+1}] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_{m-1} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a_{m-1}, a_m] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης το x ανήκει μόνο σε ένα διάστημα: $\sum_{i=1}^{m-1} y_i = 1$

Θέλω ένα από τα δύο

Τελικά, το πρόβλημα γράφεται ως

$$\min \sum_{i=1}^m \lambda_i f(a_i)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \leq y_i + y_{i-1}$$

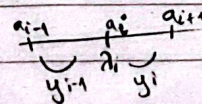
$$\lambda_1 \leq y_1$$

$$\lambda_m \leq y_{m-1}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} y_i = 1$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, m-1$$

$$\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$$



ευφράζω το x

ως κυρτό συνδυασμό των άκρων του διαστήματος.

Δίνω το διάστημα στο οποίο βρίσκεται το x

4.2.6

Πρόβλημα της ανάθεσης

- Υπάρχουν n εργασίες και n υπάλληλοι
- Κάθε εργασία θα ανατεθεί σε έναν υπάλληλο
- Αν η εργασία i ανατεθεί στον υπάλληλο j υπάρχει κέρδος c_{ij}

Να βρεθεί η ανάθεση των εργασιών σε υπαλλήλους που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος. Να γίνει μοντελοποίηση.

Μοντελοποίηση:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η εργασία } i \text{ ανατεθεί στον υπάλληλο } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{υπό: } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i=1, 2, \dots, n$$

αθροίζοντας
προς τους
υπάλληλους

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j=1, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, n$$

(ώστε μόνο ένας
να κάνει μια εργασία)

← αθροισμα εργασιών = 1
για να έχω όλοι από
μία εργασία

• Πρόβλημα:

Μια εταιρεία πρέπει να κάνει παράδοση παραγγελιών σε 10 πελάτες. Η ποσότητα που έχει παραγγείλει κάθε πελάτης είναι d_j , $j=1,2,\dots,10$. Η εταιρεία διαθέτει 4 φορτηγά. Το φορτηγό k μπορεί να μεταφέρει μέχρι ποσότητα L_k και το κόστος αν χρησιμοποιηθεί το φορτηγό αυτό είναι c_k , $k=1,2,3,4$. Οποιαδήποτε παραγγελία ενός πελάτη πρέπει να παραδοθεί από ένα μόνο φορτηγό. (→ 5 πελάτες ανέχει κίτρο) Κάθε φορτηγό μπορεί να κάνει το πολύ 5 παραδόσεις παραγγελιών. Τα ζεύγη πελατών $\{1,7\}$, $\{2,6\}$, & $\{2,9\}$ δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν από το ίδιο φορτηγό. Δημογραφίστε ένα μοντέλο μ.α.π. για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους.

Μεταβλητές απόφασης:

$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν το φορτηγό } k \text{ μεταφέρει την παραγγ. του πελάτη } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$y_k = \begin{cases} 1, & \text{αν το φορτηγό } k \text{ κάνει δρομολόγιο} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\min \sum_{k=1}^4 c_k y_k$$

υπό $\sum_{k=1}^4 x_{jk} = 1, j=1,2,\dots,10$ κάθε παραγγ. σε 1 φορτηγό

$$\sum_{j=1}^{10} x_{jk} d_j \leq L_k \cdot y_k, k=1,\dots,4 \text{ αθροίσματος πελάτες}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{jk} \leq 5, k=1,\dots,4 \text{ σταθερά, σαν να ξέρω όταν είναι 0, και το άλλο 0, συμπεριλαμβανώ τις περιπτώσεις που κάνει δρομολόγιο}$$

$$x_{1k} + x_{7k} \leq 1, k=1,\dots,4$$

$$x_{2k} + x_{6k} \leq 1, k=1,\dots,4$$

$$x_{2k} + x_{9k} \leq 1, k=1,\dots,4$$

$$x_{jk} \in \{0,1\}, j=1,\dots,10, k=1,\dots,4$$

$$y_k \in \{0,1\}, k=1,\dots,4$$

} Το πολύ ένας από αυτούς εξυπηρετείται!

4.3 Μέθοδος κλάδου-φράχματος

4.3.1. • Χαλαρώσεις και φράγματα

Θεωρούμε το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού

$$Z = \max \underline{c}' \underline{x}$$

$$\text{υπό } A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$$

→ καθαρά ακέραιου προγραμματισμού
(IP)

- Ορισμός (Χαλάρωση): Ονομάζουμε χαλάρωση ενός προβλήματος βελτιστοποιώντας ένα πρόβλημα που προκύπτει από το αρχικό με αφαίρεση ή χαλάρωση κάποιων περιορισμών.

- Η επικτή περιοχή της χαλάρωσης είναι υπερίκνη της επικτώς περιοχής του αρχικού προβλήματος.

- Η βέλτιστη τιμή της χαλάρωσης είναι εξίσου κατώ ή καλύτερη από τη βέλτιστη τιμή του αρχικού.

Για τον ακέραιο προγραμματισμό είναι χρήσιμη η χαλάρωση γραμμικού προγραμματισμού, που προκύπτει αν στο αρχικό πρόβλημα αφαίρεσουμε τους περιορισμούς ακεραιότητας των τιμών.

Για το παραπάνω πρόβλημα η χαλάρωση είναι:

$$Z_{IP} = \max \underline{c}' \underline{x}$$

$$\text{υπό } A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Ισχύει: $Z \leq Z_{IP}$, με την ισότητα να προκύπτει όταν η λύση της χαλάρωσης είναι ακεραία.

- Η Z_{IP} δίνει ένα άνω φράγμα για το Z .

Έστω $\underline{x}^0$ μια επικτή λύση του (IP) και $Z^0 = \underline{c}' \underline{x}^0$

Εφόσον, δεν γνωρίζουμε αν είναι βέλτιστη, $Z^0 \leq Z$, δηλ. το Z^0 είναι κάτω φράγμα για το Z .

$$Z^0 \leq Z \leq Z_{IP} \quad (1)$$

→ άνω φράγμα για κάθε βέλτιστη τιμή της Z^0

$0 \leq Z - Z^0 \leq Z_{IP} - Z^0$

→ κατω φράγμα για το $Z - Z^0$