

19/05/2025

Μάθημα: 18^ο

4.3.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΛΑΔΟΥ ΦΡΑΓΜΑΤΟΔ.

► Γενικές Ιδέες:

→ Έστω F : επιθυτή περιοχή ενός προβλήματος α.π.

$$z = \max c'x$$

$$\text{υπό: } Ax = b$$

$$x \geq 0 \quad (IP).$$

$$x \in \mathbb{Z}^n$$

δηλαδή, $F = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, οπότε:

$$z = \max \{c'x : x \in F\}.$$

Θεωρούμε μια διαμέριση $F = F_1 \cup F_2$ με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Για να λύσουμε το αρχικό π.α.π. (IP) μπορούμε να

$$\text{βρούμε: } z(F_1) = \max \{c'x : x \in F_1\}$$

$$z(F_2) = \max \{c'x : x \in F_2\}$$

και να πάρουμε την καλύτερη από τις λύσεις:

$$\text{δηλαδή: } z = \max \{z(F_1), z(F_2)\}.$$

→ Τα δύο νέα υποπροβλήματα είναι $z_{IP}(F_1)$ και $z_{IP}(F_2)$ π.α.π. και μπορούμε να εφαρμόσουμε π.α.π. και να πάρουμε 2 άνω φράγματα:

$$z(F_1) \leq z_{IP}(F_1)$$

$$z(F_2) \leq z_{IP}(F_2)$$

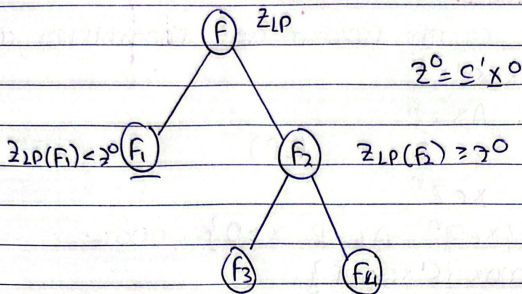
→ Αν υποθέσουμε ότι έχουμε βρει (με κάποιο τρόπο) μια επιθυτή λύση του π.α.π. (IP) με: $z^0 = c'x^0$,

$$\text{Τότε: } z^0 \leq z.$$

► Αν $z^0 > z_{IP}(F_1)$ τότε: $z(F_1) \leq z_{IP}(F_1) < z^0 \leq z$,

δεν έχει νόημα να λύσουμε το $z(F_1)$ αφού η βέλτεστη λύση δε θα είναι καλύτερη του z^0 .

Αν $z^0 \in Z_{LP}(F_1)$ τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε
μ' αριών του υποσύνολο και να διαυλαδύσουμε:



Ερωτήματα

- Ερωτήματα:
- ① Πως γίνεται η διαμέριση;
 - ② Πότε >> κλάδεμα;
 - ③ Πότε σταματά ο αλγόριθμος;

1. Πως γίνεται διαμέριση;

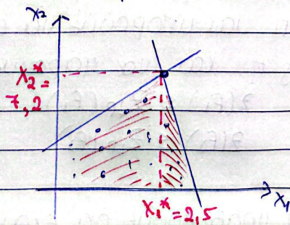
Εστω ότι έχουμε σύμβολο (υποπρόβλημα) F_a (εφ. κερ F_0)
η βέλτεση λύση της x_f, π είναι $x_{LP}^*(F_a) \notin \mathbb{Z}^n$.

Εστω, κ.β.β. ότι $x_i^* \notin \mathbb{Z}$.

Τότε, μπορούμε να διαμερίσουμε
την F_a , ως εξής:

$$F_{a1} = \{x \in F_a : x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor\}$$

$$F_{a2} = \{x \in F_a : x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1\}$$



Η $x_{LP}^*(F_a) \notin F_{a1}$, $x_{LP}^*(F_a) \notin F_{a2}$

→ Άρα F_{a1} , F_{a2} έχει προσοχή να μην περιέχει
αλλά σε σχέση με το F_a
άρα, πόσο είναι π.α.π

Ετσι μπορεί να συνεχιστεί η αναδρομική διαδικασία.

2. Πότε μνεται υλίσταμα;

Εστω υποπρόβλημα F_a με βέλτιστη λύση της χαράωσης χ, π .
 $\chi_{LP}^*(F_a) \in \mathbb{Z}^n$.

Τότε, έχουμε: $\chi^*(F_a) = \chi_{LP}^*(F_a)$

και $z(F_a) = z_{LP}(F_a)$ και δεν προχωράμε σε διακρίση.

Επιπλέον, η $\chi_{LP}^*(F_a) = \chi^*(F_a) \in F$ άρα, είναι επιλύσιμη λύση του αρχικού.

► Άρα, για κάθε νόμβο F_b (εφεξής) ελέγχουμε αν:

$$z_{LP}(F_b) \leq z_{LP}(F_a)$$

αν ισχύει τότε κλάδων και του νόμβο F_b .

3. Πότε σταματά ο αλγόριθμος;

Ο αλγόριθμος σταματά όταν όλα τα υποπροβλήματα έχουν κλαστεί.
Η υλοτέρη από τις αμέτρητες λύσεις που έχουν προκύψει μέχρι τότε είναι η βέλτιστη λύση.

Περιγραφή Αλγορίθμου: Κλάδων-φράγματος

• Σε κάθε βήμα υπάρχει ένα σύνολο ενεργών νόμβων που δεν έχουν ερευνηθεί (ενεργό κόμβος).

Μπορεί να υπάρχει μία επιλύσιμη λύση του αρχικού προβλήματος

$$\chi^0 \text{ με: } z^0 \leq \chi^0 \text{ (τρέχουσα λύση)}$$

Βήματα:

1] Επιλέγουμε έναν ενεργό νόμβο (F_i)

2] Για το υποπρόβλημα του νόμβου F_i λύνουμε τη χαράωση χ, π . και βρίσκουμε το $z_{LP}(F_i)$

3] α) Αν $z_{LP}(F_i) \leq z^0$, ο νόμβος κλαίνεται

και παύει να είναι ενεργός

δ) Αν $Z_{LP}(F_i) > 2^0$, τότε:

i) Αν $X_{LP}^*(F_i) \in \mathbb{Z}^n$ ο κόμβος έχει ~~επι~~ επιλυστεί.
Επόμενο, αν: $Z_{LP}(F_i) = S' X_{LP}^*(F_i) > 2^0$, τότε:

η $X_{LP}^*(F_i)$ γίνεται η νέα τρέχουσα λύση

$$X^0 \leftarrow X_{LP}^*(F_i)$$

$$Z^0 = S' X_{LP}^*(F_i)$$

ii) Αν $X_{LP}^*(F_i) \notin \mathbb{Z}^n$ επιλέγουμε μια μη-αυτάριστη συνιστώσα της λύσης $X_{LP}^*(F_i)$, έστω x_i^* , και δημιουργούμε 2 νέους ενεργούς κόμβους, F_i , F_{i+1} που προωθούνται προσθέτοντας στο F_i τους περιορισμούς:

$$x_i \leq (x_i^*)$$

και

$$x_i \geq 2 x_i^* H_i^L, \text{ αυξιστάρα.}$$

Ο κόμβος F_i παύει να είναι ενεργός.

Παρατηρήσεις:

1] Αν δ' ένα υποπρόβλημα η κατάλυση X_{LP} είναι μη-επιλυτή, ο κόμβος σταματάει.

2] Ο αλγόριθμος σταματά όταν δεν υπάρχει κανένας ενεργός κόμβος. Αν μέχρι τότε δεν έχει δημιουργηθεί τρέχουσα λύση, το

αρχικό πρόβλημα είναι μη-επιλυτό. Διαφορετικά, η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη του αρχικού προβλήματος.

3] Αν σε κάποιο βήμα υπάρχουν περισσότεροι από ένας ενεργοί κόμβοι, τότε υπάρχουν διαφορετικές επιλογές για την επιλογή αυτού που θα ερευνηθεί πρώτος.

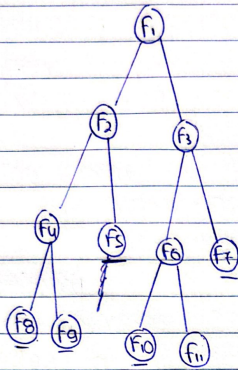
α) κατά-βάθος-πρώτα (depth-first):

Όταν δημιουργούνται 2 νέοι κόμβοι πρώτα ερευνάται ένας από τους νέους κόμβους.

β) κατά-επίπεδο-πρώτα (breadth-first):

Όταν ξεκινάει η εξέταση ενός κόμβου συνεκρίνεται εφευρέτως

Κόμβο από το ίδιο επίπεδο



κατά-βάθος-πρώτα:

$F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_4 \rightarrow F_8 \rightarrow$
 $F_9 \rightarrow F_5 \rightarrow F_6 \rightarrow F_{10} \rightarrow$
 $F_{11} \rightarrow F_7 \rightarrow F_3$

κατά-ευρος-πρώτα:

$F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow F_4 \rightarrow$
 $F_5 \rightarrow F_6 \rightarrow \dots \rightarrow F_{10} \rightarrow F_{11}$

Π.Α.Π.

$x \in \mathbb{Z}^n$

$x \geq 0$

Χ.β.Π.

$x \geq 0$

$x_i \in [0, 1] \rightarrow x_i \geq 0$

$x_i \leq 1$

4] Αν έχουμε πρόβλημα δυο-αριθμίου προγραμματισμού ο αριθμός είναι ίδιος. Η μόνη διαφορά είναι ότι δεν Χ.β.Π. έχουμε: $x_i \leq 1$ και $x_i \geq 0$. Επίσης, δεν διαχωρίζεται δια τη μεταβλητή x_i τα νέα προβλήματα έχουν περιορισμούς $x_i = 0$ ή $x_i = 1$.

5] Για προβλήματα κλειστού αμέτρου προγραμματισμού ο αριθμός είναι ίδιος. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι διαχωριστικές κινούνται με διατ. τις αμέτρες μεταβλητές.