

21/05/2025.

Μάθημα: 19^ο.

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα μ.α.π. με τον αλγόριθμο κλάδου-φράγματος, με στρατηγική υποά-ευρος-πρώτα.

$$Z = \max: 26x_1 + 28x_2 - 2000x_3$$

$$\text{υπό: } 9x_1 + 13x_2 - 10x_4 \leq 6.700$$

$$7x_1 + 6x_2 \leq 6.200$$

$$10x_1 + 4x_2 - 1540x_3 + x_4 \leq 7.200 \quad (\pi)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1.650$$

$$-154x_3 + x_4 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \quad x_3 \in \{0, 1\}.$$

1) Δεν είναι απαραίτητο να είναι σε κανονική μορφή. (κ.μ.)

2) Για ~~τη μεταβλητή~~ τη μεταβλητή x_4 που δεν είναι αμέραιο, δεν παίρνουμε διαυλαδώςεις.

3) Για τη μεταβλητή $x_3 \in \{0, 1\}$ μπορεί να γίνει διαυλαδώςει με περιορισμούς: $x_3 = 0$ και $x_3 = 1$.

→ Αρχικά θα λύσω τη λ.β.π. του (π) , που είναι:

$$Z = \max. \text{ α.δ.}$$

5.ορ. περιορ.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_3 \leq 1.$$

①	x_{LP}	Z_{LP}
	$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	20.118,5.
	$(768,5, 37,7, 0,46, 70,6)$	

①

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	20.118,5.
(768,5, 37,7, 0,46, 70,6)	

$$X^0 = \begin{pmatrix} 768 \\ 38 \\ 1 \\ 70,6 \end{pmatrix} \quad Z^0 = 19.032$$

$$x_1 \leq 768$$

$$x_1 \geq 769$$

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	20.115,1
(768, 38, 0,46, 70,6)	

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	20.117,2.
(769, 37,3, 0,46, 70,6)	

$$X^0 = \begin{pmatrix} 825 \\ 0 \\ 1 \\ 72,5 \end{pmatrix} \quad Z^0 = 19.450$$

$$x_3 = 0$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 \leq 37$$

$$x_2 \geq 38$$

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	19.131,9
(710, 23,4, 0,0)	

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	19.032
(768, 38, 1, 70,6)	

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	20.116,8
(769,5, 37,0,46,70,6)	

μη-επιυτό.

$$x_1 \leq 710$$

$$x_1 \geq 711$$

$$x_1 \leq 769$$

$$x_1 \geq 770$$

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	19.127
(710, 23,8, 0,0)	

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	19.116
(711, 22,5, 0,0)	

μη-επιυτό.

X_{LP}	Z_{LP}
$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	19.450
(825, 0,1, 72,5)	

$$x_2 \leq 23$$

$$x_2 \geq 24$$

Απάντηση:

Έστω το π.α.π:

$$\max: x_1 + 2x_2$$

$$\text{Υπό: } -3x_1 + 4x_2 \leq 4.$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$

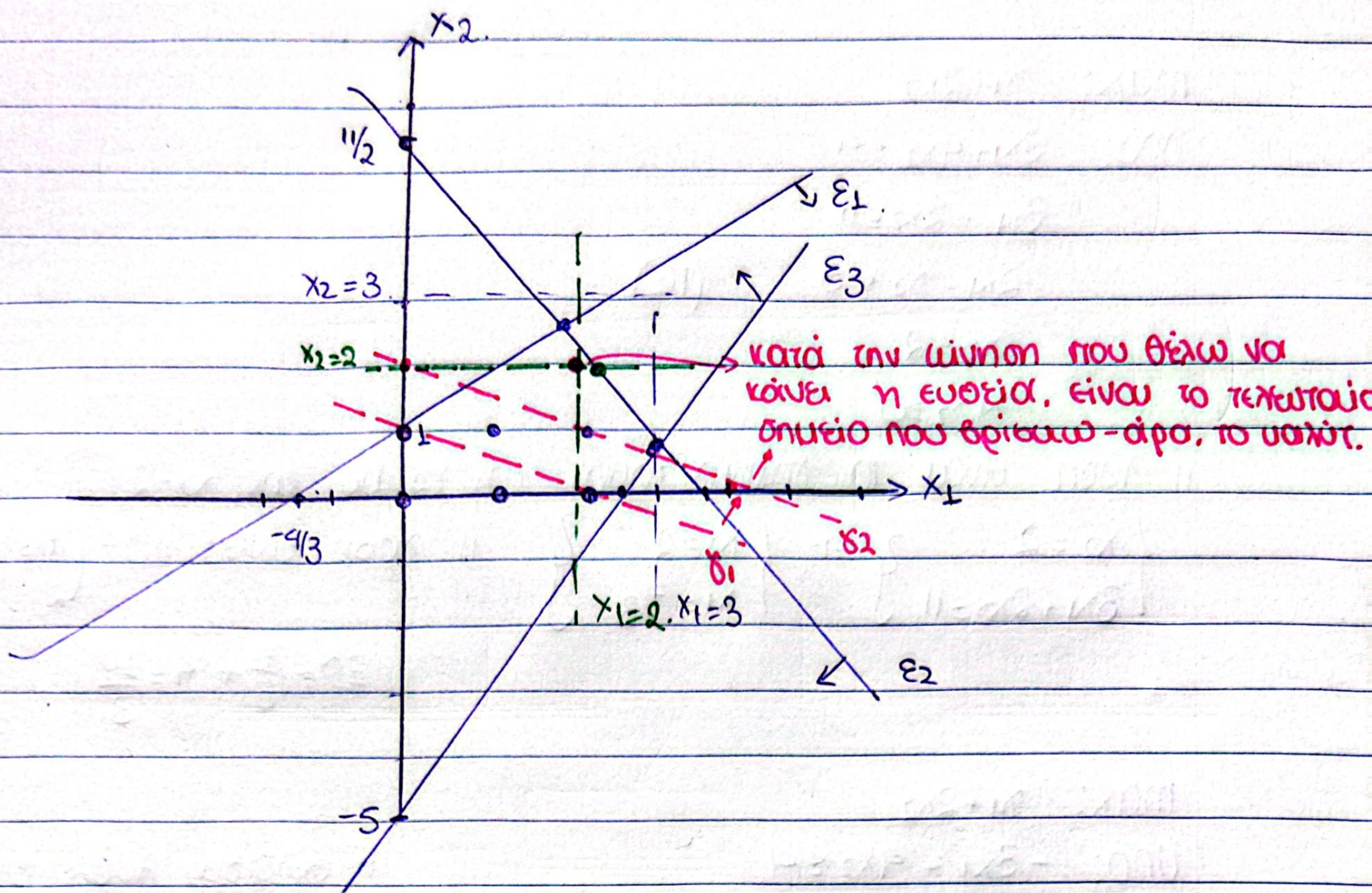
$$2x_1 - x_2 \leq 5.$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

i) Να λυθεί γραφικά το πρόβλημα.

ii) Να λυθεί με μέθοδο κλάδου φράγματος και στρατηγική κατά-βάθος-πρώτα, όπου υάθε π.β.π θα λύνεται γραφικά.



$$\delta_1: x_1 + 2x_2 = 2$$

$$\begin{matrix} x_1 & 0 & 2 \\ x_2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\delta_2: x_1 + 2x_2 = 4$$

$$\begin{matrix} x_1 & 0 & 4 \\ x_2 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Βέλτιστη λύση:

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ με } z^* = 6$$

ii) Θα λύσω τη γ.β.π. πρώτα:

$$\text{max } x_1 + 2x_2$$

$$\text{υπό: } -3x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 11 \quad (\pi_1)$$

$$2x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Η λύση είναι στην τομή των E_1 & E_2

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_2 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\underline{x}_{LP} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad z_{LP} = 2 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 7$$

$$\max: x_1 + 2x_2$$

$$\text{unò: } 3x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$2x_1 - x_2 \leq 5 \quad (\pi_2)$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Η λύση είναι το σημείο τομής της π_2 με την $x_2 = 2$.

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 7/3 \end{cases} \quad \text{Η λύση είναι } x^* = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z^* = \frac{7}{3} + 4 = \frac{19}{3}$$

$$\max: x_1 + 2x_2$$

$$\text{unò: } -3x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$2x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Η βέλτιστη λύση είναι

$$(\pi_3) \quad \text{η } x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$z^* = 6.$$

$$\max: x_1 + 2x_2$$

$$\text{unò: } -3x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$2x_1 - x_2 \leq 5 \quad (\pi_3)$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\pi_4 = \{(3,1)\}$ Άρα, η βέλτιστη

$$\text{λύση είναι } x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{και } z^* = 5$$

(Π₁)

x_{LP}	z_{LP}
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$	∞

$$\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z^0 = 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

(Π₂)

x_{LP}	z_{LP}
$\begin{pmatrix} 7/3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$19/3$

(Π₅)
μη-εφικτό.

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 \geq 3$$

(Π₃)

x_{LP}	z_{LP}
$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	6

(Π₄)

x_{LP}	z_{LP}
$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	5

$$\max: x_1 + 2x_2$$

$$\text{υπό: } -3x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$2x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(π5)

$F_{\pi 5} = \emptyset$, Άρα, το π5 μη-εφικτό.

Άσκηση: Έστω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\max: 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{υπό: } (3x_1 + 2x_2 \leq 7 \quad \text{ή} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 7)$$

και

$$(2x_1 + x_2 \geq 1 \quad \text{ή} \quad x_1 + 2x_2 \geq 1)$$

$$x_i \in \{1, 5/2, 8/3\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

→ Να γραφεί ως πρόβλημα: Π.Μ.Α.Π.

$$\max: 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{υπό: } 3x_1 + 2x_2 \leq 7 + M(1-y_1)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 7 + M(1-y_2)$$

$$2x_1 + x_1 \geq 1 \cdot y_3$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 1 \cdot y_4$$

$$x_1 = 1 \cdot y_5 + \frac{5}{2} y_6 + \frac{8}{3} y_7$$

$$y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_3, y_4 \in \{0, 1\}$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}.$$

$$y_3 + y_4 \geq 1$$

$$M \in M > 0$$

$$y_5, y_6, y_7 \in \{0, 1\}$$

$$y_5 + y_6 + y_7 = 1.$$