

26/05/2025

Μάθημα: 20^ο

Ενότητα 5 : Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου (Interior-Point method)

5.1.: Κεντρικό Μονοπάτι (Central path).

Θα δούμε στην επόμενη ενότητα τη μέθοδο του υαβρατισμού, η οποία χρησιμοποιεί το κεντρικό μονοπάτι. (Path following method)

Συμβολισμοί:

Έστω $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, τότε $X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix}$

και αν $x_i \neq 0 \quad i=1,2,\dots,n$, τότε $X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$

Επίσης, $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ και $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Το πρόβλημα του φράγματος (Barrier Problem)

$$\begin{aligned} \text{Θέλουμε το π.φ.π. } \max c'x \quad \text{και } \min b'w \\ \text{υπό } Ax \leq b \quad (\pi) \quad \text{υπό: } A'w \geq c \quad (\Delta) \\ x \geq 0 \quad \quad \quad w \geq 0 \end{aligned}$$

όπου A : $m \times n$ πίνακας, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$

► Χρησιμοποιώντας περιορισμένες μεταβλητές, τα δύο προβλήματα γράφονται ως:

$$\begin{aligned} \max c'x \\ \text{υπό: } Ax + y = b \quad (m) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

και $\min b'w$

$$\text{υπό: } A'w - z = c \quad (D')$$

$$z \geq 0, w \geq 0.$$

• Οι συνθήκες συμπληρωματικότητας γράφονται ως:

$$\left. \begin{array}{l} x_j \cdot z_j = 0, j=1, 2, \dots, n. \\ w_i \cdot y_i = 0, i=1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_j \leftrightarrow j\text{-οστό περιορ. του } (D) \leftrightarrow z_j \\ w_i \leftrightarrow i\text{-οστό περιορ. του } (P) \leftrightarrow y_i \end{array}$$

• Ο περιορισμός $x_j \geq 0$, θα μπορούσε να αντικατασταθεί με ένα όρο τύπου α.σ., ο οποίος θα ήταν $-\infty$ όταν $x_j < 0$ και 0 όταν $x_j \geq 0$. Αυτό θα χάλαγε την συνέχεια της α.σ.

• Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση που να είναι $-\infty$, όταν $x_j \leq 0$, πεπερασμένη όταν $x_j > 0$ και το όριο της όταν $x_j \rightarrow 0^+$ είναι το $-\infty$ (π.χ. $\log x_j$).

Η α.σ. θα ήταν συνεχής, αλλά διαφορετική από το αρχικό πρόβλημα.

→ Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$\max c'x + \mu \cdot \sum_{j=1}^n \log x_j + \mu \cdot \sum_{i=1}^m \log y_i = f_\mu(x, y)$$

$$\text{υπό: } Ax + y = b$$

(Π_μ)

με $\mu > 0$ σταθερά.

• Δεν είναι πρόβλημα γραμμικά προγράμ.

• Δεν είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

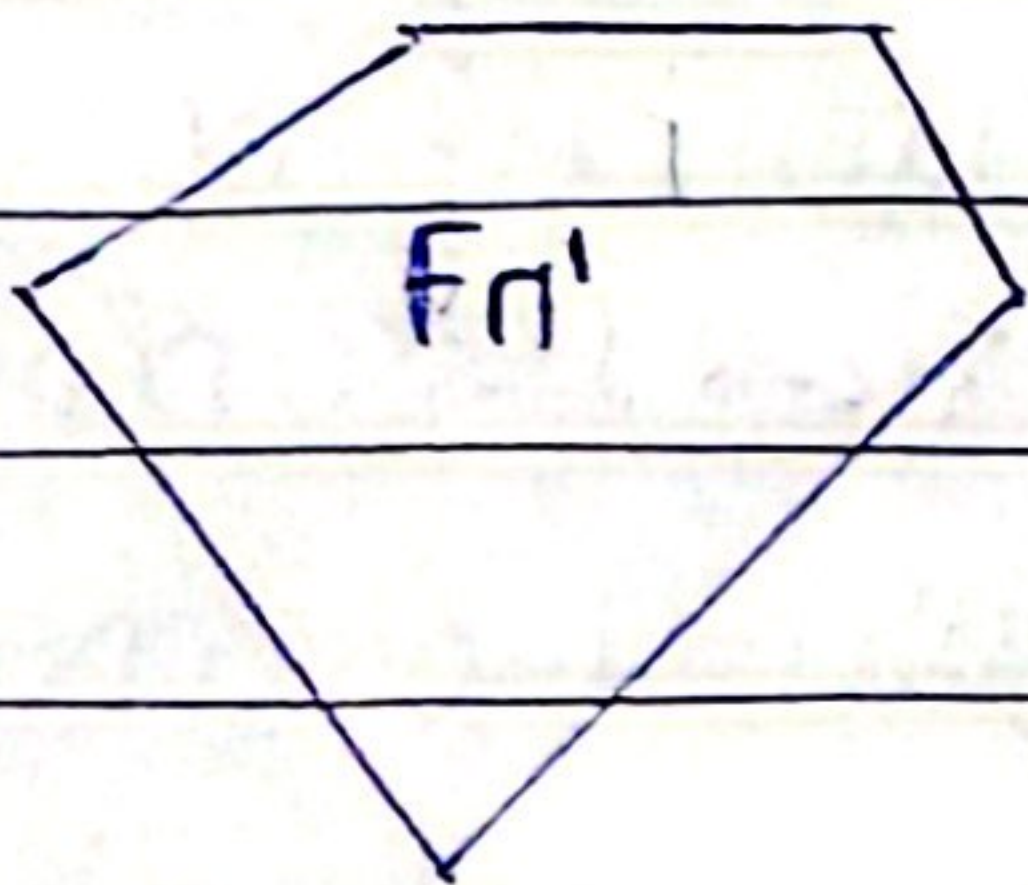
• Καθώς το μ μικραίνει γίνεται καλύτερη προσέγγιση του (Π')

Το (Π_μ) ονομάζεται **πρόβλημα του φράγματος (barrier problem)**

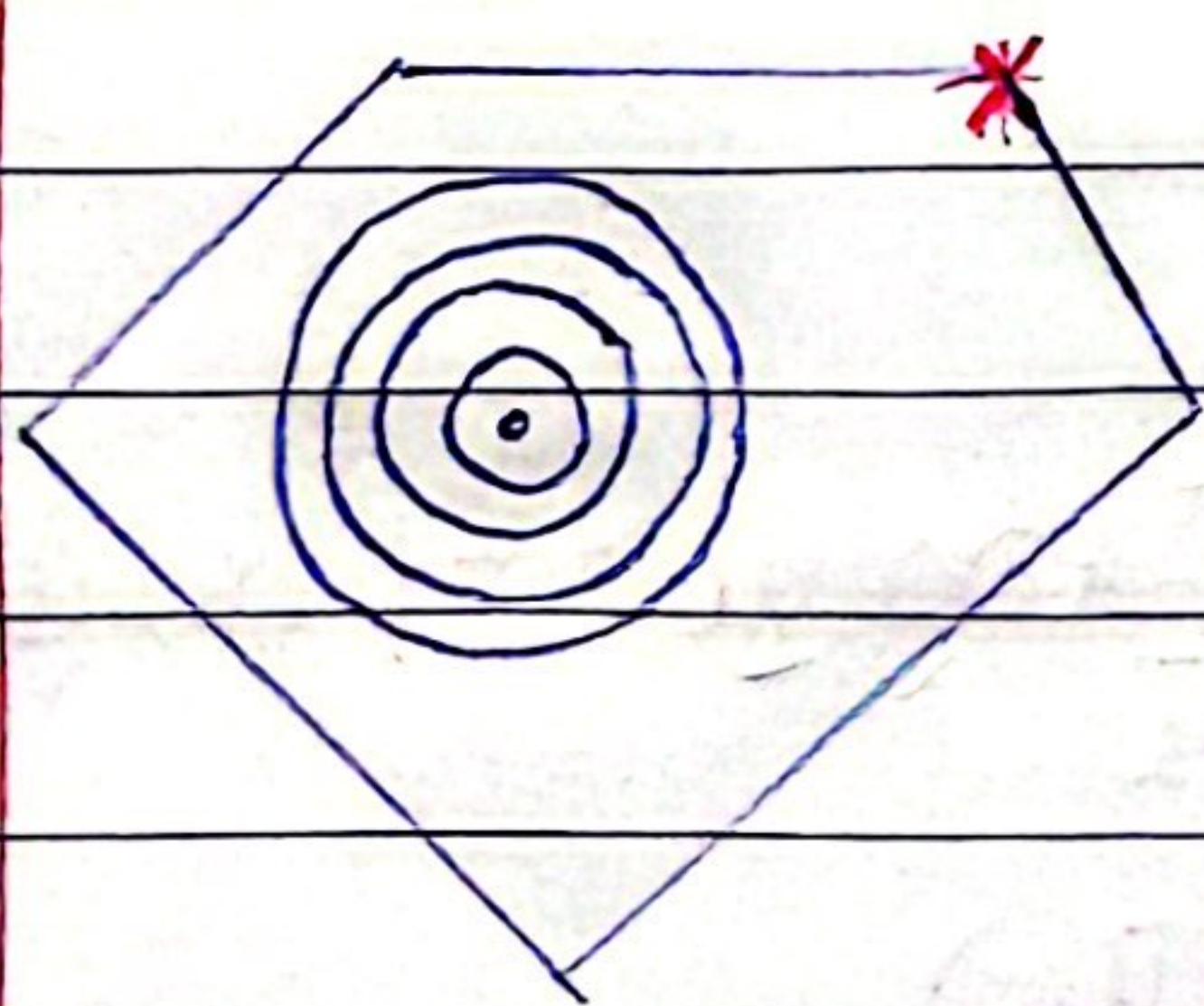
και το (Π') και η α.σ. του (Π_μ) ονομάζεται **συνάρτηση φράγματος (barrier function)** (απαριθμική)

Κεντρικό Μονοπάτι - (central path)

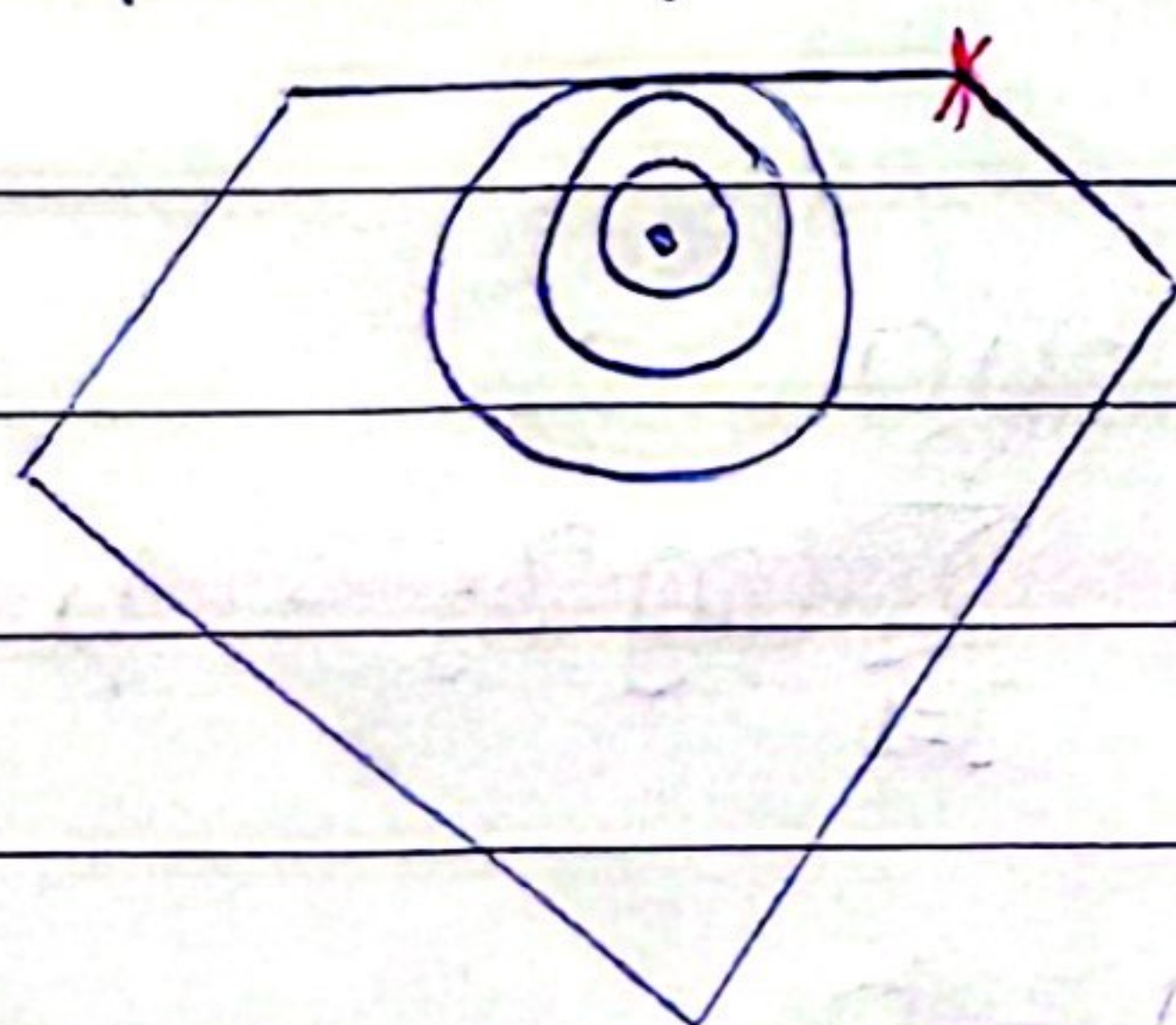
Πως είναι γεωμετρικά η συνάρτηση φράγματος;

Έχω  η εφιστή περιοχή του π.β.π. (μ^*)

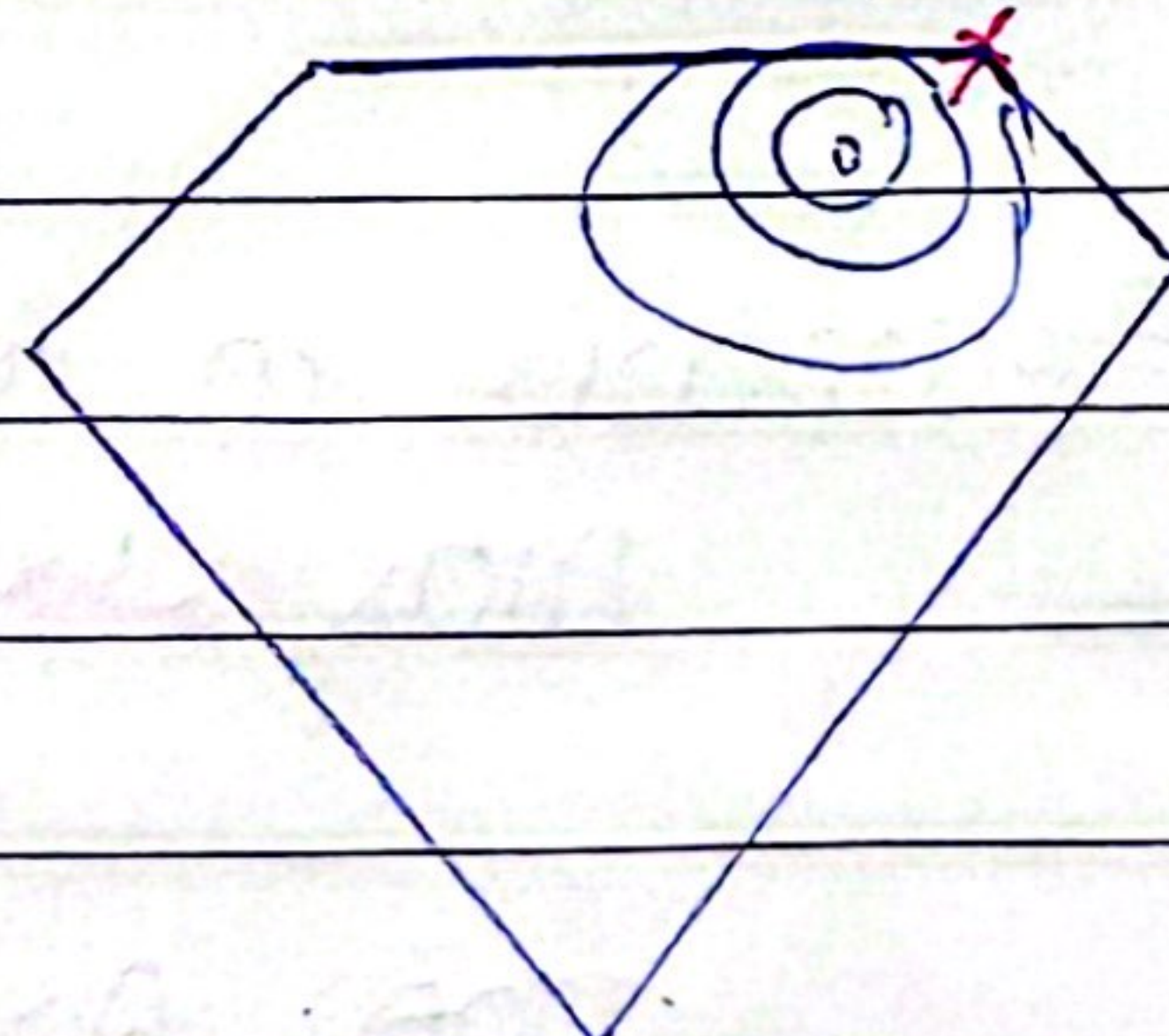
- Σε κάθε ακμή έχουμε κάποιο $x_j=0$ ή $y_i=0$, άρα η τιμή της $f_{\mu}(x,y)$ θα είναι $-\infty$
- Σε όλα τα εσωτερικά σημεία της F_{μ^*} η τιμή της $f_{\mu}(x,y)$ θα είναι πεπερασμένη. και θα τείνει στο $-\infty$ καθώς πλησιάζουμε το σύνορο.
- Η $f_{\mu}(x,y)$ είναι κοίτη
- Το μέγιστο πευκνύεται σε εσωτερικό σημείο της F_{μ^*} και πλησιάζει τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος (μ^*) καθώς $\mu \rightarrow 0$.



$\mu_1 : f_{\mu_1}(x,y)$



$\mu_2 : f_{\mu_2}(x,y)$



μ_3

$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$

Το μονόπτι που αντιστοιχεί η βέλτιστη λύση του (μ) καθώς $\mu \rightarrow 0$, ονομάζεται κεντρικό μονοπάτι.

Συνθήκες βελτιστοποίησης π.β.π με εξισωτικούς περιορισμούς

Ορίζουμε το π.β.π: $\max f(x)$

με: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίτη

υπό: $g_1(x) = 0$

$g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική

$g_2(x) = 0$

$i=1,2,\dots,m$

$g_m(x) = 0$

Η συνάρτηση Lagrange: $L(x, y) = f(x) - \sum_{i=1}^m y_i g_i(x)$

Το x^* είναι βέλτιστη λύση του π.κ.π.

$$\frac{\partial L(x^*, y^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n \Leftrightarrow \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m y_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^m y_i^* \nabla g_i(x^*)$$

$$\frac{\partial L(x^*, y^*)}{\partial y_i} = 0, \quad i=1, \dots, m \Leftrightarrow g_i(x^*) = 0 \quad \forall i=1, \dots, m$$

Συνθήκες βελτιστοποίησης για το πρόβλημα του φράγματος:

Πρόβλημα του φράγματος:

$$\max c'x + \mu \sum_{j=1}^n \log x_j + \mu \sum_{i=1}^m \log y_i$$

$$\text{υπό: } Ax + y = b, \quad \mu \in \mu > 0.$$

• Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L(x, y, \omega) = c'x + \mu \sum_{j=1}^n \log x_j + \mu \sum_{i=1}^m \log y_i + \omega'(Ax + y - b)$$

• Οι συνθήκες βελτιστοποίησης είναι:

$$\frac{\partial L(x, y, \omega)}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow c_j + \mu \cdot \frac{1}{x_j} - \sum_{i=1}^m \omega_i a_{ij} = 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial L(x, y, \omega)}{\partial y_i} = 0 \Leftrightarrow \mu \cdot \frac{1}{y_i} + \omega_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

$$\frac{\partial L(x, y, \omega)}{\partial \omega_i} = 0 \Leftrightarrow b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i = 0, \quad i=1, \dots, m.$$

Σε πυναμική μορφή, γράφονται ως:

$$\underline{c} + \mu \cdot X^{-1} \underline{e} - A' \cdot \underline{\omega} = \underline{0} \Leftrightarrow A' \underline{\omega} - \mu \cdot X^{-1} \underline{e} = \underline{c}$$

$$\mu \cdot Y^{-1} \underline{e} + \underline{\omega} = \underline{0} \Leftrightarrow \mu \cdot Y^{-1} \underline{e} = -\underline{\omega}$$

$$\underline{b} - Ax - y = \underline{0} \Leftrightarrow Ax + y = \underline{b}$$