

28/08/05

Μάθημα 21

$$\max c'x$$

$$\text{υπό } Ax + y = b \quad (\Pi')$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$\min b'w$$

$$\text{υπό } A'w - z = c \quad (\Delta')$$

$$w \geq 0, z \geq 0$$

$$\max c'x + \mu \sum_{j=1}^n \log x_j + \mu \sum_{i=1}^m \log y_i$$

$$(\Pi_\mu)$$

$$\text{υπό } Ax + y = b$$

Συνθήκες βελτιστοποίησης για το (Π_μ)

αυξάνει...

$$A'w - \mu x^{-1} e = c$$

$$w = \mu y^{-1} e$$

$$Ax + y = b$$

$$z = \mu x^{-1} e$$

n συνθήκες.

$$Ax + y = b \leftarrow \text{jp. προϋποθέτοι του } (\Pi)$$

$$A'w - z = c \leftarrow \text{jp. προϋποθέτοι του } (\Delta')$$

$$ywe = \mu e \Leftrightarrow y_i w_i = \mu, i=1,2,\dots,m$$

$$xze = \mu e \Leftrightarrow x_j z_j = \mu, j=1,2,\dots,n$$

$\hookrightarrow$ n συνθήκες.

• Οι συνθήκες βελτιστοποίησης είναι: $2m+2n$ με $2m+2n$ αμετάβλητες.

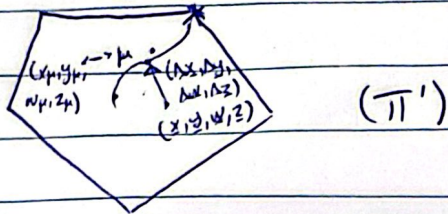
• Αυτοχώρα, δεν είναι γραμμικές και είναι δύσκολο να λυθούν.

$\hookrightarrow$ (από ερώτη διαφορά $y_i w_i = \mu, x_j z_j = \mu$)

• Οι συνθήκες $y_i w_i = \mu$ και $x_j z_j = \mu$ ονομάζονται συνθήκες μ -επιπληρωματικότητας.

• Αν κάναμε την ίδια διαδικασία για το πρόβλημα φαλλτατος του (Δ') θα καταλήγαμε στις ίδιες συνθήκες.

Θέση: Το πρόβλημα γραμμικού έχει βέλτεση λύση $(x_\mu, y_\mu, w_\mu, z_\mu)$ αν οι F_1 και F_2 έχουν μη-κενό εσωτερικό κοινό. Αν έχει λύση είναι μοναδική.



5.2 Μέθοδος μονοπάτιού (Path-Following Method)

Γενική Περιγραφή μεθόδου μονοπάτιού:

Έκκινηση: Ξεκινάμε από ένα αρχικό σημείο:

(x, y, w, z) με όλες τις γνωστές σχέσεις.

Το (x, y) μπορεί να μην είναι λύση του (Π') .

Το (w, z) " " " " " του (Δ') .

Βήμα 1
Εκκίνηση

ΒΕ1: Προσδιορίζουμε κατεύθυνση την τιμή του μ .

Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στο σημείο $(x_\mu, y_\mu, w_\mu, z_\mu)$ του κεντρικού μονοπάτιου.

ΒΕ2: Υπολογίζουμε κατά προσέγγιση τις μεταβολές

$(\Delta x, \Delta y, \Delta w, \Delta z)$ που ~~πρέπει να είναι~~ τέτοιες ώστε:

$$(x + \Delta x, y + \Delta y, w + \Delta w, z + \Delta z) = (x_\mu, y_\mu, w_\mu, z_\mu)$$

ΒΕ3: Υπολογίζουμε το μήκος βήματος $\theta \leq 1$ έτσι ώστε:

$$\tilde{x} = x + \theta \Delta x > 0$$

$$\tilde{y} = y + \theta \Delta y > 0$$

$$\tilde{w} = w + \theta \Delta w > 0$$

$$\tilde{z} = z + \theta \Delta z > 0$$

ΒΕ4: $(x, y, w, z) \leftarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{w}, \tilde{z})$

Τέλος: Όταν μπορούμε να αποδείξουμε ότι το (Π) είναι

μη-γραμμένο ή ότι το (Δ) είναι μη-γραμμένο ή όταν είμαστε κοντά σε βέλτιστη λύση.

Προβλεπτός του μ .

Είναι πολύ πιθανό το (x, y, w, z) να είναι εκτός κεντρικού μονοπατιού.

Αν ήταν στο κεντρικό μονοπάτι, θα βρίσκαμε εύκολα το αντίστοιχο μ ως:

$$\begin{aligned} \mu &= x_j z_j, \text{ για κάποιο } j \\ \mu &= w_i y_i, \text{ για κάποιο } i \\ \mu &= \sum_{j=1}^n x_j z_j + \sum_{i=1}^m w_i y_i \end{aligned}$$

$n \mu \quad \quad \quad m \mu$

$\xrightarrow{\quad \quad \quad} n+m$

Όταν το (x, y, w, z) δεν είναι στο κεντρικό μονοπάτι θα εκτιμήσουμε το μ στο οποίο είναι "κοντά" χρησιμοποιώντας τον τελευταίο τύπο, δηλαδή υποθέτοντας ότι βρίσκεται πάνω στο κεντρικό μονοπάτι.

$$\text{Δηλαδή, } \mu = \underbrace{\sum_{j=1}^n x_j z_j}_{n+m} + \underbrace{\sum_{i=1}^m w_i y_i}_{n+m} = \frac{x'z + y'w}{n+m}$$

Έπειτα θα ζητάμε το μ να μικρύνει ώστε να πάει πιο κοντά στο βέλτερο. Άρα ζητάμε: $\mu = \delta \cdot \frac{x'z + y'w}{n+m}$, με $\delta \in (0, 1)$

Ο αλγόριθμος τρέχει καλά όταν $\delta = \frac{1}{10}$

Υπολογισμός κατευθύνσεων $(\Delta x, \Delta y, \Delta w, \Delta z)$

Είμαστε στο (x, w, y, z)

Θέλουμε να βρούμε το $(\Delta x, \Delta y, \Delta w, \Delta z)$ ώστε:

$$(x + \Delta x, y + \Delta y, w + \Delta w, z + \Delta z) = (x_\mu, y_\mu, w_\mu, z_\mu)$$

Το $(x + \Delta x, y + \Delta y, w + \Delta w, z + \Delta z)$ ^{πρέπει να} ικανοποιεί ~~αυτές~~ τις

συνθήκες του κεντρικού μονοπαιγνίου.

$$A(x + \Delta x) + y + \Delta y = b$$

$$A'(w + \Delta w) - (z + \Delta z) = c$$

$$(x + \Delta x)(z + \Delta z)e = \mu e$$

$$(y + \Delta y)(w + \Delta w)e = \mu e$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow A\Delta x + \Delta y = b - Ax - y = \underbrace{(\rho)}_{\text{Primal infeasibility}} \rightarrow \text{Primal infeasibility}$$

$$A'\Delta w - \Delta z = c - A'w - z = \underbrace{(\sigma)}_{\text{dual infeasibility}}$$

dual infeasibility

$$2\underbrace{\Delta x}_e + x\underbrace{\Delta z}_e + \Delta x\Delta z e = \mu e - xze$$

$$z\underbrace{\Delta x}_e + x\underbrace{\Delta z}_e + \Delta x\Delta z e = \mu e - xze$$

$$y\underbrace{\Delta w}_e + w\underbrace{\Delta y}_e + \Delta y\Delta w e = \mu e - ywe$$

$\rightarrow$ κάνουν το σύστημα

μη-γραμμικό. Οι τρεις

διευφάνισαν. Θα έχουμε γραμμικό σύστημα,

αλλά θα πύραυλο προσεγγιστική λύση.

Η προσέγγιση της λύσης που βρίσκουμε είναι αυτή που προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton.

Τελικά θα λύσαμε το σύστημα:

$$A\Delta x + \Delta y = \rho$$

$$A'\Delta w - \Delta z = \sigma$$

$$2\Delta x + x\Delta z = \mu e - xze$$

$$y\Delta w + w\Delta y = \mu e - ywe$$

Που είναι σύστημα $2m + 2n$ αρ. εξισώσεων με $2m + 2n$ αγνώστους για να βρούμε προσεγγιστική λύση.