28/09/2021 Μάθημα 1

Βιβλιογραφία: [1] Σημειώσεις κ. Μπουρνέτα

[2] Μπερτσίμας, Τσιτσικλής Introduction to Linear Optimization

[3] Hillier Lieberman Introduction of operation research

[4] Vanderbei Linear Programming foundation and extensions

Ενότητα 1: Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) + εφαρμογές
(Κεφ. 1 , 11-13, ch.3)

Ενότητα 2: Ιδιότητες π.γ.π. + Simplex
(Κεφ. 2, 2-3, 4-5)

Ενότητα 3: Θεωρία Δυϊκότητας
(Κεφ 3, 4, 6)

Ενότητα 4: Ακέραιος Προγραμματισμός
(Κεφ. 4, 10-11, 12, 23)

Ενότητα 5: Μη γραμμικός Προγραμματισμός
(−, −, 13)

$\boxed{\text{Ενότητα 1}}$: Γραμ. προγ. εισαγωγή και μοντελοποίηση

1.1 Ορισμοί

Π.γ.π: είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης του $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ κάτω από ορισμένους περιορισμούς που εκφράζονται σαν γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις του $\underline{x}$

Η γενική μορφή ενός π.γ.π. είναι:

$$\max\ (\min)\ \ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ → αντικειμενική συνάρτηση

⟶

υπό γραμμικοί περιορισμοί $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i=1,\dots,m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, & i=m_1+1,\dots,m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, & i=m_2+1,\dots,m \end{cases}$ και $x_j \ge 0,\ j=1,\dots,n_1,\ x_j \le 0,\ j=n_1+1,\dots,n_2,$

$x_j \in \mathbb{R},\ j=n_2+1,\dots,n$

όπου $0 \le m_1 \le m_2 \le m$ ακέραιες σταθερές, $\underline{c}=(c_1,\dots,c_n)' \in \mathbb{R}^n$

$0 \le n_1 \le n_2 \le n$ " " , $\underline{b}=(b_1,\dots,b_m) \in \mathbb{R}^m$, $a_{ij} \in \mathbb{R}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n.$

Ένα π.γ.π. είναι σε <u>κανονική μορφή</u> αν είναι max, $m_1=m_2=m, n_1=n_2=n$ δηλαδή είναι της μορφής:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \underline{\text{υπό}} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,\dots,m,\ x_j \ge 0,\ j=1,\dots,n \iff$$

$$\iff \max\ c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$$

$$\underline{\text{υπό}} \quad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}, \quad x_1,x_2,\dots,x_n \ge 0$$

$$\iff \max\ \underline{c}'\cdot\underline{x}$$

υπό $A\underline{x}=\underline{b}$, $\underline{x} \ge 0$, $\underline{c}=(c_1,\dots,c_n)' \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b}=(b_1,\dots,b_m)' \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A=(a_{ij})$ πίνακας $m\times n$

<u>Μετατροπή σε κανονική μορφή</u> (Παράδειγμα)

$$\begin{aligned} &\min\ 3x_1-2x_2+6x_3 \\ &\underline{\text{υπό}}\ 2x_1+x_2-6x_3 \le 5 \\ &\quad 3x_2+x_3 \ge 4 \\ &\quad x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \xLeftrightarrow[\substack{x_3', x_3'' \ge 0}]{\substack{x_2'=-x_2 \\ x_3'-x_3''=x_3}} \quad \begin{aligned} &\min\ 3x_1+2x_2'+6x_3'-6x_3'' \\ &\underline{\text{υπό}}\ 2x_1-x_2'-6x_3'+6x_3'' \le 5 \\ &\quad -3x_2'+x_3'-x_3'' \ge 4 \\ &\quad x_1,x_2',x_3',x_3'' \ge 0 \end{aligned} \iff$$

(πρώτα τα x_j φτιάχνω!)

$$\begin{aligned} \iff\ &-\max\ -3x_1-2x_2'-6x_3'+6x_3''+0x_4+0x_5 \\ &\underline{\text{υπό}}\ 2x_1-x_2'-6x_3'+6x_3''+x_4 = 5 \\ &\quad -3x_2'+x_3'-x_3'' - x_5 = 4 \\ &\quad x_1,x_2',x_3',x_3'',x_4,x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

1.2. Παραδείγματα

1.2.1 Πρόβλημα της παραγωγής μιας περιόδου

Εταιρεία παράγει n προϊόντα $(j=1,\dots,n)$

- Χρησιμοποιεί m πόρους (πρώτες ύλες, εργατοώρες κτλ) $(i=1,\dots,m)$
- c_j = κέρδος από πώληση μιας μονάδας προϊόντος j, $j=1,\dots,n$
- b_i = διαθέσιμη ποσότητα πόρου i, $i=1,\dots,m$.
- a_{ij} = ποσότητα από τον πόρο i που απαιτείται για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος j, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$
- d_j = ελάχιστη ποσότητα που απαιτείται από το προϊόν j, $j=1,\dots,n$.

Η εταιρεία θέλει να βρει το σχέδιο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Μοντελοποίηση σαν π.γ.π.

Μεταβλητές απόφασης

x_j = ποσότητα που θα παραχθεί από το προϊόν j, $j=1,\dots,n$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ ← κέρδος από πώληση

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ , \quad i=1,\dots,m$$ ← περιορισμένη ποσότητα κάθε πόρου

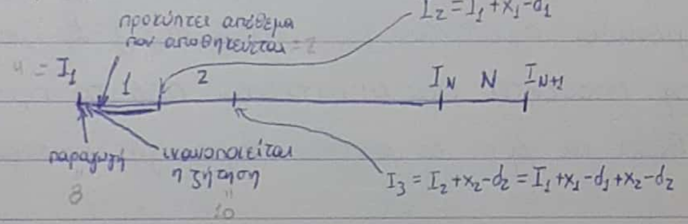
$$x_j \ge d_j \ , \quad j=1,\dots,n$$ ← απαιτούμενες ποσότητες

$$x_j \ge 0 \ , \quad j=1,\dots,n$$ ← ο περιορισμός μπορεί να παραληφθεί

λόγω αυτού

1.2.2. Παραγωγή ενός προϊόντος σε πολλές περιόδους

- Εταιρεία παράγει ένα προϊόν που μπορεί να διατηρηθεί σε απόθεμα
- N περίοδοι, $t=1,2,\dots,N$.
- d_t = ζήτηση την περίοδο t, $t=1,\dots,N$.
- c_t = κόστος παραγωγής μίας μονάδας προϊόντος την περίοδο t, $t=1,\dots,N$.
- h_t = κόστος αποθήκευσης μίας μονάδας προϊόντος την περίοδο t, $t=1,\dots,N$.
- h_N = κόστος ανά μονάδας προϊόντος που μένει στο τέλος της περιόδου N (μπορεί $h_N<0$).



I_1: διαθέσιμη ποσότητα στην αρχή της περιόδου 1.
Η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιηθεί.
Η εταιρεία θέλει να βρει πολιτική παραγωγής που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Μοντελοποίηση σαν π.γ.π.

Μεταβλητές Απόφασης

x_t = ποσότητα παραγωγής την περίοδο t, $t=1,\dots,N$.

I_t = απόθεμα που έχω στην αρχή της περιόδου t, $t=2,\dots,N+1$.

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{t=1}^{N} h_t I_{t+1}$$

υπό
$$I_t + x_t - d_t = I_{t+1}, \quad t=1,\dots,N$$

λέει ότι ικανοποιείται η ζήτηση $\longrightarrow$ $I_t \geq 0 \quad , t=2,\dots,N+1$

$$x_t \geq 0 \quad , t=1,\dots,N$$

30/09/2021 Μάθημα 2

1.2.3 Προβλήματα προγραμματισμού εργασίας

- Εταιρεία δουλεύει 7 μέρες την εβδομάδα για 8 ώρες κάθε μέρα.
- Κάθε εργαζόμενος δουλεύει 5 συνεχόμενες μέρες και μετά παίρνει 2 μέρες ρεπό. Έτσι προκύπτουν 7 κατηγορίες προσωπικού:

i ημέρα \ j βάρδια	1	2	3	4	5	6	7
Δ 1	X	–	–	X	X	X	X
Τ 2	X	X	–	–	X	X	X
Τ 3	X	X	X	–	–	X	X
Π 4	X	X	X	X	–	–	X
Π 5	X	X	X	X	X	–	–
Σ 6	–	X	X	X	X	X	–
Κ 7	–	–	X	X	X	X	X

- b_i = #υπαλλήλων που πρέπει να απασχοληθούν την ημέρα i, $i=1,2,\dots,7$
- c_j = μισθός υπαλλήλων που προσλαμβάνεται στη βάρδια j, $j=1,\dots,7$

Η εταιρεία θέλει να προσδιορίσει τον #υπαλλήλων ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος.

Μοντελοποίηση π.γ.π.

Μεταβλητές απόφασης: x_j = #υπαλλήλων στη βάρδια j, $j=1,\dots,7$.

$$\min \underbrace{\sum_{j=1}^{7} c_j x_j}_{\text{συνολικό κόστος}}$$

υπό

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_4+x_5+x_6+x_7 &\geq b_1 \\ x_2+x_3+x_5+x_6+x_7 &\geq b_2 \\ &\vdots \\ x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 &\geq b_7 \end{aligned}\right\} \text{κάθε μέρα πρέπει να υπάρχει ο απαιτούμενος \#υπαλλήλων}$$

$, x_j \geq 0$ (χαλάρωση του προβλ. ακέρ. προγρ.)

(αν είχα $x_j \in \mathbb{N}$ → ακέραιος γρ. προγρ.)

(Δεν είναι ισοδύναμα αλλά αν δώσει ακέραια λύση, τότε είναι λύση και του αρχικού προβλήματος)

Scanned with CamScanner

Φτιάχνω πίνακα $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} 1&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0 \\ 0&1&1&1&1&1&0 \\ 0&0&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$

Άρα τώρα αν $\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_7)'$

$$\begin{aligned} &\min \ \underline{c}'\cdot\underline{x} \\ &\text{υπό} \quad A\cdot\underline{x}\geq\underline{b} \\ &\qquad\quad \underline{x}\geq 0 \end{aligned}$$

όπου $\underline{c}=(c_1,\dots,c_7)'$, $\underline{b}=(b_1,b_2,\dots,b_7)'$.

1.2.4 Πρόβλημα προγραμματισμού εργασίας 2

Ένα κατάστημα λειτουργεί 8:00 έως 20:00. Ο πίνακας μας δίνει τις διαφορετικές βάρδιες και τα ημερομίσθια ενός υπαλλήλου.

βάρδια (j)	Ώρες	ημερομίσθιο c_j
1	8:00-16:00	55
2	12:00-20:00	50
3	11:00-18:00	40
4	8:00-1300	40
5	15:00-20:00	35

Ο απαιτούμενος αριθμός υπαλλήλων που απαιτείται κάθε χρ. διάστημα.

τα σπάω
11-12
12-13
13-14
14-15
15-16
16-17
17-18
18-20

Ώρες	# υπαλ.
8-11	4
11-14	5
14-17	7
17-20	8

Το κατάστημα θέλει να βρει πόσοι υπάλληλοι θα προσληφθούν σε κάθε βάρδια

Μοντελοποίηση:

Μεταβλ. αποφ.: x_j = #υπαλλήλων στην βάρδια j, $j=1,2,3,4,5$

$$\min \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$$

<u>υπό</u>

$x_1 + x_4 \geq 4 \quad (8-11)$

$x_1 + x_3 + x_4 \geq 5 \quad (11-12)$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 5 \quad (12-13)$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \quad (13-14)$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \quad (14-15)$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 7 \quad (15-16)$

$x_2 + x_3 + x_5 \geq 7 \quad (16-17)$

$x_2 + x_3 + x_5 \geq 8 \quad (17-18)$ ← χαλάρωση των ακερ. περιορ.

$x_2 + x_5 \geq 8 \quad (18-20) \quad , \ x_j \geq 0$

Όμοια φτιάχνω πίνακα A (9×5), $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 1 & \cdots \\ 1 & \cdots \\ 1 & \cdots \\ 1 & \cdots \\ 1 & \cdots \\ 0 & \cdots \\ 0 & \cdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$

και μετά πινακική μορφή...

<u>1.2.5 Προβλήματα ροής σε δίκτυα</u>

Ένα προϊόν διανέμεται πάνω σε ένα δίκτυο.

Το δίκτυο έχει N κόμβους. $V = \{1, 2, \dots, N\}$ το σύνολο των κόμβων.

Οι κόμβοι επικοινωνούν με ακμές. Οι ακμές έχουν συγκεκριμένη φορά.

Μία ακμή χαρακτηρίζεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος $(i,j) \in V \times V$, $i \neq j$.

E σύνολο των ακμών, $E \subseteq V \times V$.

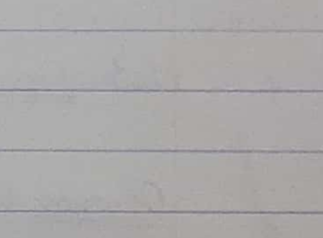
c_{ij} = κόστος μεταφοράς μίας μονάδας προϊόντος από τον i στον j κόμβο.

Αν $(i,j) \notin E$, $c_{ij} = \infty$.

v_{ij} = χωρητικότητα ακμής (i,j)

a_i = διαθέσιμη ποσότητα στον κόμβο i

b_i = απαιτούμενη ποσότητα στον κόμβο i



Να προσδιορισθούν οι ποσότητες που πρέπει να μεταφερθούν από κάθε ακμή ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς, οι ποσότητες που μεταφέρονται να μην ξεπερνούν τις επιτρεπόμενες και σε κάθε κόμβο να έχουμε τελικά την απαιτούμενη ποσότητα.

Μοντελοποίηση σαν π.γ.π.

Μεταβλητές απόφασης: x_{ij}: ποσότητα που θα μεταφερθεί από τον κόμβο i στον j, $(i,j)\in E$

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

υπό $\quad x_{ij} \le v_{ij} \quad , (i,j)\in E$

$$a_i + \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = b_i + \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} \quad , i\in V \Rightarrow \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} = b_i - a_i$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad , (i,j)\in E$$

1.3 Προβλήματα που ανάγονται σε π.γ.π.

Ορισμός (Αφφινική Συνάρτηση)

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(\underline{x}) = d + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = d + \underline{c}'\underline{x}$, όπου $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)' \in \mathbb{R}^n$ και $d\in\mathbb{R}$ σταθερές, ονομάζεται αφφινική συνάρτηση.

Ορισμός (Κυρτή-Κοίλη)

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f ονομάζεται

(i) κυρτή αν $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda\in[0,1]$
έχουμε $f(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) \le \lambda f(\underline{x}) + (1-\lambda) f(\underline{y})$.

(ii) κοίλη αν $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda\in[0,1]$
έχουμε $f(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) \ge \lambda f(\underline{x}) + (1-\lambda) f(\underline{y})$.

■ Η αφφινική συνάρτηση είναι κυρτή και κοίλη.

<u>Θεώρημα</u> Έστω $f_1, f_2, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτές και $f(\underline{x}) = \max_{i=1,\ldots,k} f_i(\underline{x})$. Τότε f κυρτή.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$, τότε

$$f(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) = \max_{i=1,\ldots,k} f_i(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) \leq \max_{i=1,\ldots,k} [\lambda f_i(\underline{x}) + (1-\lambda) f_i(\underline{y})] \leq$$

$$\leq \max_{i=1,\ldots,k} \lambda f_i(\underline{x}) + \max_{i=1,\ldots,k} (1-\lambda) f_i(\underline{y}) = \lambda f(\underline{x}) + (1-\lambda) f(\underline{y}) \quad \blacksquare$$

- Ομοίως, το min κοίλων είναι κοίλη.

- Η συνάρτηση $\max_{i=1,\ldots,k} (\underline{c}_i' \underline{x} + d_i)$ [αντ. $\min_{i=1,\ldots,k} [\underline{c}_i' \underline{x} + d_i)$]
  - είναι κυρτή [αντ. κοίλη]
  - ονομάζεται κατά τμήματα γραμμική
  - μπορεί να προκύψει σαν προσέγγιση κυρτής [αντ. κοίλης]

Συναρτήσεις της μορφής $\max_{i=1,\ldots,k} (\underline{c}_i' \underline{x} + d_i)$ ή $\min_{i=1,\ldots,k} (\underline{c}_i' \underline{x} + d_i)$ εμφανίζονται σε π.μ.π (μαθηματικού) είτε στην αντικ. συνάρτηση είτε σε περιορισμούς με φυσικό τρόπο ή ως προσέγγιση άλλων συναρτήσεων.

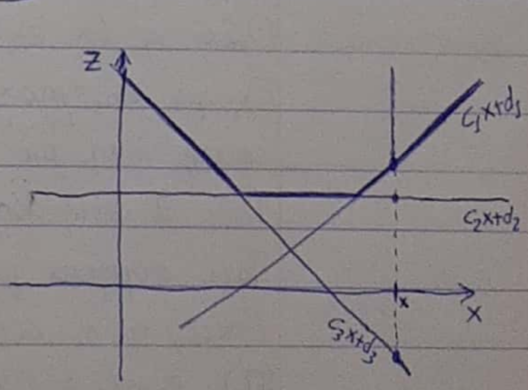
04/10/2021 Μάθημα 3

<u>1) Τι γίνεται αν έχω πρόβλημα ελαχιστοποίησης με αντικειμενική συνάρτηση (α.σ.) $\max_{i=1,2,\ldots,k} (\underline{c}_i' \underline{x} + d_i)$; Μπορεί να αναχθεί σε π.γ.π.;</u>

Έστω $\min \max_{i=1,2,\ldots,k} (\underline{c}_i' \underline{x} + d_i)$

υπό $A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} \geq \underline{0}$ (Π_1)



Παρατήρηση: Το $\max_{i=1,2,\ldots,k} (\underline{c}_i' \underline{x} + d_i)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός z για τον οποίο ισχύει ότι $z \geq \underline{c}_i'\underline{x} + d_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$.

Άρα, το (Π_1) φαίνεται να είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} &\min z \\ &\text{υπό } z \geq \underline{c}_i'\underline{x} + d_i,\ i = 1, \ldots, k \qquad (\Pi_2) \\ &A\underline{x} = b \\ &\underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

<u>Λήμμα</u> Αν $(\underline{x}_0, z_0)$ είναι βέλτιστη λύση του (Π_2) τότε $z_0 = \max\limits_{i=1,\ldots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_0 + d_i)$.

<u>Απόδειξη:</u> $(\underline{x}_0, z_0)$ βέλτιστη λύση του $(\Pi_2) \Rightarrow (\underline{x}_0, z_0)$ είναι εφικτή για το (Π_2) $\Rightarrow z_0 \geq \underline{c}_i'\underline{x}_0 + d_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow z_0 \geq \max\limits_{i=1,\ldots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_0 + d_i)$.
Έστω $z_0 > \max\limits_{i=1,\ldots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_0 + d_i) = z_1$. Τότε το $(\underline{x}_0, z_1)$ είναι εφικτή λύση του (Π_2) και δίνει καλύτερη τιμή στην α.σ.. Άτοπο. Άρα $z_0 = \max\limits_{i=1,\ldots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_0 + d_i)$.

<u>Θεώρημα:</u> Αν ένα από τα (Π_1) και (Π_2) έχει βέλτιστη λύση, τότε έχει και το άλλο και αυτές οι λύσεις ταυτίζονται στο $\underline{x}$ και στην βελ. τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

<u>Απόδειξη:</u>
$(\Longrightarrow)$ Έστω ότι το (Π_1) έχει βέλτιστη λύση $\underline{x}_0$ που δίνει τιμή z_{Π_1} στην α.σ..
Θ.δ.ο. η $(\underline{x}_0, z_{\Pi_1})$ είναι βέλτιστη λύση του (Π_2) με τιμή $z_{\Pi_2} = z_{\Pi_1}$ α.σ..
Έχουμε $z_{\Pi_1} = \max\limits_{i=1,\ldots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_0 + d_i) \geq \underline{c}_i'\underline{x}_0 + d_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, άρα το $(\underline{x}_0, z_{\Pi_1})$ είναι εφικτή λύση του (Π_2). Οπότε $z_{\Pi_2} \leq z_{\Pi_1}$. Έστω $z_{\Pi_2} < z_{\Pi_1}$.
Τότε $\exists$ άλλη λύση του (Π_2), έστω $(\underline{x}_1, z_{\Pi_2})$ που είναι βέλτιστη.
Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα $z_{\Pi_2} = \max\limits_{i=1,\ldots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_1 + d_i) < z_{\Pi_1}$.
Οπότε, η $\underline{x}_1$ που είναι εφικτή και για το (Π_1), δίνει τιμή στην α.σ. του (Π_2) $z_{\Pi_2} < \underbrace{z_{\Pi_1}}_{\text{βέλτιστη του } (\Pi_1)}$. Άτοπο. Άρα $z_{\Pi_2} = z_{\Pi_1}$ και $(\underline{x}_0, z_{\Pi_1})$ βελ. λύση του (Π_2).

(⇐) Έστω $(\underline{x}_1, z_1)$ βέλτιστη λύση του (Π_2) που δίνει τιμή $z_{\Pi_2} = z_1$ στην α.σ. του (Π_2).

Θ.δ.ο. η $\underline{x}_1$ είναι βέλτιστη λύση του (Π_1) και δίνει τιμή $z_{\Pi_1} = z_{\Pi_2} = z_1$ στην α.σ. του (Π_1).

Εφόσον $(\underline{x}_1, z_1)$ βέλτιστη λύση του $(\Pi_2) \xrightarrow{\text{Λήμμα}} z_1 = \max\limits_{i=1,\dots,k} (\underline{c}_i' \underline{x}_1 + d_i)$.

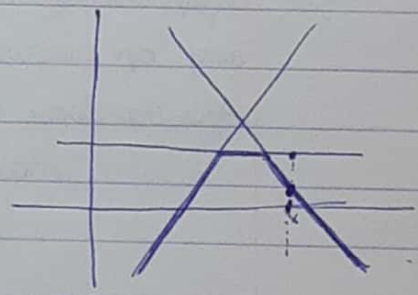
$(\underline{x}_1, z_1)$ εφικτή του $(\Pi_2) \Longrightarrow \underline{x}_1$ εφικτή του (Π_1). Άρα $\underbrace{\max\limits_{i=1,\dots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_1+d_i)}_{z_1 = z_{\Pi_2}} \geq z_{\Pi_1}$.

Έστω ότι $z_{\Pi_1} < z_{\Pi_2} = \max\limits_{i=1,2,\dots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_1+d_i)$. Τότε $\exists\, \underline{x}_2$ που να είναι βέλτιστη λύση για το (Π_1), δηλ.

$z_{\Pi_1} = \max\limits_{i=1,\dots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}_2+d_i)$ Άτοπο. Άρα $z_{\Pi_1} = z_{\Pi_2}$. ■

Ομοίως, το $\max \min\limits_{i=1,\dots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}+d_i)$

$$\begin{aligned} \text{υπό } & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned} \qquad (\Pi_3)$$



είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} \max\ & z \\ \text{υπό } & z \leq \underline{c}_i'\underline{x} + d_i,\ i=1,2,\dots,k \qquad (\Pi_4) \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

2| Τι γίνεται όταν οι $\max\limits_{i=1,\dots,k} (\min) (\underline{c}_i'\underline{x}+d_i)$ εμφανίζονται σε περιορισμούς;

Απάντηση: Έστω ότι έχω περιορισμό

$$\max_{i=1,\dots,k}(\underline{c}_i'\underline{x}+d_i) \leq h$$

ισοδύναμα γράφω $\underline{c}_i'\underline{x}+d_i \leq h$, $i=1,\dots,k$

Ομοίως, αν έχω τον περιορισμό $\min\limits_{i=1,\dots,k}(\underline{c}_i'x+d_i) \geq h$ ισοδύναμα γράφω $\underline{c}_i'\underline{x}+d_i \geq h$, $i=1,2,\dots,k$.

3| Πώς μπορεί το πρόβλημα (Π_1) ή (Π_3) να προκύψει φυσικά;

Απάντηση - Έστω πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους με μεταβλητές απόφασης $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ και εφικτή περιοχή F.

- Για οποιαδήποτε απόφαση πάρει ο διαχειριστής υπάρχουν k ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν. Αν συμβεί το ενδεχόμενο i, το κέρδος θα είναι $\underline{c}_i'\underline{x} + d_i$.
- Ο διαχειριστής δεν έχει τη δυνατότητα να προβλέψει ποιο ενδεχόμενο θα πραγματοποιηθεί.
- Ο διαχειριστής είναι συντηρητικός, υποθέτει ότι θα συμβεί το χειρότερο ενδεχόμενο και θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος κάτω από ~~το χειρότερο~~ αυτή την υπόθεση.

Άρα, θα λύσει το

$$\max \min_{i=1,\ldots,k} (\underline{c}_i'\underline{x} + d_i)$$
$$\text{υπό } \underline{x} \in F$$

Ομοίως, το $\min \max_{i=1,\ldots,k} (\underline{c}_i'\underline{x} + d_i)$ υπό $\underline{x} \in F$ μπορεί να προκύψει σαν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους με συντηρητικό διαχειριστή.

1.3.1 Προβλήματα προσέγγισης στόχων

- Έστω πρόβλημα με μεταβλητές απόφασης ~~και μία~~ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και εφικτή περιοχή F.
- Θεωρούμε ότι εκτός των περιορισμών που ορίζουν την εφικτή περιοχή υπάρχουν k πρόσθετοι ~~περιορισμοί~~ "στόχοι" της μορφής $\underline{a}_i'\underline{x} = b_i$, $i = 1, \ldots, k$ με $\underline{a}_i \in \mathbb{R}^n$ και $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$.
- Αν ενσωματώσουμε τους περιορισμούς που εκφράζουν οι στόχοι στην εφικτή περιοχή, μπορεί το πρόβλημα να γίνει μη εφικτό.
- Θεωρούμε ότι η F αποτελείται από τους "ανελαστικούς στόχους", δηλαδή αυτούς που πρέπει να πραγματοποιηθούν και οι υπόλοιποι είναι οι "ελαστικοί στόχοι" που μπορεί να μην ικανοποιηθούν.

- Αν το $\underline{a}_i'\underline{x}$ υπερβαίνει το b_i, υπάρχει ποινή $p_i \geq 0$ ανά μονάδα.
- Αν το $\underline{a}_i'\underline{x}$ υπολείπεται του b_i, υπάρχει ποινή $q_i \geq 0$ » ».

Η συνολική ποινή θα είναι $\varepsilon_i(\underline{x}) = p_i(\underline{a}_i'\underline{x} - b_i)^+ + q_i(\underline{a}_i'\underline{x} - b_i)^-$,

όπου $w^+ = \max(w,0)$, και $w^- = -\min(w,0) = \max(-w,0)$

$w^+ \cdot w^- = 0$, $w^+ + w^- = |w|$, $w^+ - w^- = w$.

- Στο πρόβλημα προσέγγισης στόχων θέλουμε να βρούμε το $\underline{x}$ που ελαχιστοποιεί τη συνολική ποινή

$$\min \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(\underline{x}) \longleftarrow \text{μπορεί να γραφεί σαν max αφφινικών}$$
$$\text{υπό } \underline{x} \in F$$

Εναλλακτικά, οι ελαστικοί στόχοι μπορούν να γραφούν στη μορφή

$\underline{a}_i'\underline{x} - u_i + v_i = b_i$, $i = 1,2,\dots,k$ με $u_i, v_i \geq 0$.

$\forall \underline{x}$ η παραπάνω εξίσωση έχει άπειρες λύσεις ως προς u_i, v_i.

Συγκεκριμένα $u_i = (\underline{a}_i'\underline{x} - b_i)^+ + d_i$ και $v_i = (\underline{a}_i'\underline{x} - b_i)^- + d_i$ $\forall d_i \geq 0$.

Θεωρούμε το π.γ.π.
$$\min \sum_{i=1}^{k} (p_i u_i + q_i v_i)$$
$$\text{υπό } \underline{a}_i'\underline{x} - u_i + v_i = b_i, \ i = 1,2,\dots,k$$
$$\underline{x} \in F$$
$$u_i, v_i \geq 0 \ \forall i = 1,\dots,k.$$

06/10/2021 Μάθημα 4

Ενότητα 2 Ιδιότητες π.γ.π & μέθοδος Simplex

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το πγπ σε κανονική μορφή:

$$\max \underline{c}' \cdot \underline{x}$$
$$\text{υπό } A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}, \text{ όπου } \underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \ \underline{b} \in \mathbb{R}^m, \ A \text{ πίνακας } m \times n, \ \text{rank}A = m \leq n$$

(m γρ. ανεξ. γραμμές)

Έστω $\underline{a}'_i$ η i-οστή γραμμή του A $(a_i \in \mathbb{R}^n)_{i=1,2,\dots,m}$
και $A_j \in \mathbb{R}^m$ η j-οστή στήλη του A, $j=1,2,\dots,n$
τότε

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}'_1 \\ \underline{a}'_2 \\ \vdots \\ \underline{a}'_m \end{bmatrix} = [A_1 \ A_2 \cdots A_n]$$

και $A\underline{x}=\underline{b} \iff$

$$\begin{bmatrix} \underline{a}'_1 \\ \underline{a}'_2 \\ \vdots \\ \underline{a}'_m \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff \underline{a}'_i \cdot \underline{x} = b_i \ , \ i=1,\dots,m \iff$$

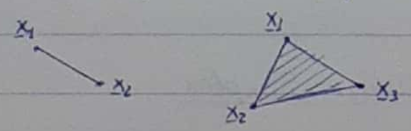
$$[A_1 \ A_2 \cdots A_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{b} \iff \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = \underline{b} \leftarrow$$

κάθε λύση του συστήματος εκφράζει το $\underline{b}$ σαν γρ. συνδυασμό των στηλών του A

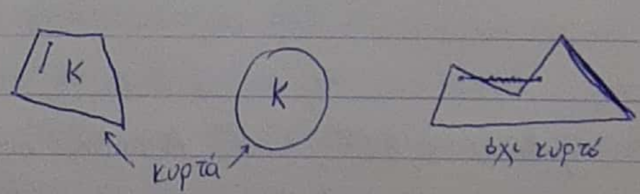
2.2. Γεωμετρικές Ιδιότητες

Ορισμοί

- Κυρτός συνδυασμός των $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται κάθε σημείο $\underline{x}$ το οποίο γράφεται στη μορφή $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} d_i x_i$ με $d_i \geq 0$, $i=1,\dots,k$ και $\sum_{i=1}^{k} d_i = 1$



- Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται κυρτό αν κάθε κυρτός συνδυασμός δύο στοιχείων του K ανήκει στο K. Δηλαδή, αν για κάθε $\underline{x}, \underline{y} \in K$ και $0 \leq d \leq 1$, ισχύει $d\underline{x} + (1-d)\underline{y} \in K$



Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου K ονομάζεται ένα σημείο του K που δεν μπορεί να εκφραστεί σαν κυρτός συνδυασμός δύο άλλων σημείων του K

Το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n : A\underline{x}\le \underline{b}\}$ όπου $\underline{b}\in\mathbb{R}^m$ και A πίνακας $m\times n$ ονομάζεται **πολύεδρο**.

Συνεπώς, το $\{x\in\mathbb{R}^n : A\underline{x}=\underline{b},\ \underline{x}\ge 0\}$ είναι πολύεδρο.

Οπότε η εφικτή περιοχή ενός π.γ.π. σε κανονική μορφή είναι πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$.

Αν $a' = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$ και $b\in\mathbb{R}$ σταθερά τότε το $\{x\in\mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\}$ ονομάζεται **υπερεπίπεδο** ενώ το $\{x\in\mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \ge b\}$ λέγεται **ημίχωρος**.

Γεωμετρικές Ιδιότητες

Έστω $W^\circ = \{x\in\mathbb{R} : A\underline{x}=\underline{0}\}$ το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\underline{x}=0$,

$$F^\circ = \{x\in\mathbb{R}^n : A\underline{x}=\underline{b}\}$$

και $F = \{x\in\mathbb{R}^n : A\underline{x}=\underline{b} \text{ και } \underline{x}\ge\underline{0}\} = F^\circ \cap \mathbb{R}^n_+$.

τα σημεία που έχουν όλες τις συνιστώσες τους μη αρνητικές

Κάθε πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο.

Άρα, η F είναι κυρτό σύνολο.

Ο W° ως σύνολο λύσεων του $A\underline{x}=0$ με A πίνακα $m\times n$ και $\text{rank}(A)=m<n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης **n-m**.

Ο W° είναι πολύεδρο, διάστασης n-m που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Για τον F°

Έστω $\underline{x}^\circ$ μια λύση του $A\underline{x}=b$.

Τότε το $F^o = \underline{x}^o + W^o = \{\underline{x}^o + \underline{w} : \underline{w} \in W^o\}$.

Άρα ο F^o προκύπτει από παράλληλη μετατόπιση του W^o κατά το διάνυσμα $\underline{x}^o$.

Ο F^o είναι πολύεδρο του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-m$.

Αν $\underline{b} \neq \underline{0}$ δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- $F = F^o \cap \mathbb{R}^n_+ \subseteq F^o$

Η εφικτή περιοχή F είναι πολύεδρο πάνω στον F^o.

Παράδειγμα

Θεωρούμε ότι η εφικτή περιοχή ενός π.γ.π. εκφράζεται από τους περιορισμούς

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Άρα, $m = 2$, $n = 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $rank(A) = 2 = m$.

- Βρίσκουμε τον W^o

Ο W^o είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2

$$A\underline{x} = \underline{0} \iff \begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x_4 = x_1 - x_2 \\ x_3 = -2x_1 - x_2 \end{Bmatrix}.$$

$$\text{Άρα, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -2t_1 - t_2 \\ t_1 - t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t_2 \quad , t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα, ο W^o είναι γρ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, διάστασης 2 με βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

- Βρίσκουμε τον F^o

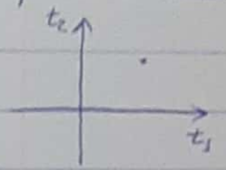
$A\underline{x}^o = \underline{b} \iff$

$$x_1^o + 2x_2^o + x_3^o + x_4^o = 15$$
$$2x_1^o + x_2^o + x_3^o = 10$$

Μία λύση είναι $\underline{x}^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

Τότε $F^\circ = x^\circ + W^\circ = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\10\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} t_2 \ ,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Ο F° έχει διάσταση 2 και έχει προκύψει από μετατόπιση του W° κατά x°.
Ο F° μπορεί να αναπαρασταθεί από το επίπεδο (t_1, t_2).



■ Βρίσκουμε το F

$F = F^\circ \cap \mathbb{R}^4_+$.

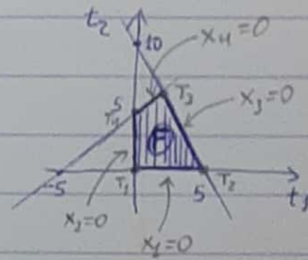
Το F προσδιορίζεται από τους περιορισμούς:

$x_1 \geq 0 \Rightarrow t_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow 10 - 2t_1 - 1t_2 \geq 0 \Rightarrow 2t_1 + t_2 \leq 10$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow 5 + 1t_1 - 1t_2 \geq 0 \Rightarrow t_1 - t_2 \geq -5$



Το F είναι πολύεδρο, κυρτό, διάστασης 2 πάνω στο F°.
Έχει 4 κορυφές.

$T_1 : \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\10\\5\end{pmatrix}$ δηλ. $x_1 = x_2 = 0$

$T_2 : \begin{cases} t_2 = 0 \\ 2t_1 + t_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 0 \\ t_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}5\\0\\0\\10\end{pmatrix}$ δηλ. $x_2 = x_3 = 0$

Άσκηση: Να βρω άλλο $\underline{x}^\circ$ και να εκφράσω το W° ως προς $x_3, x_4, \ldots$.

$T_3 : \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 10 \\ -t_1 + t_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{5}{3} \\ t_2 = \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}5/3\\20/3\\0\\0\end{pmatrix}$ δηλ. $x_3 = x_4 = 0$

$T_4 : \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_1 - t_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\5\\5\\0\end{pmatrix}$ δηλ. $x_1 = x_4 = 0$