14/10/2021 Μάθημα 5

2.2.4. Θεωρήματα

$\max \underline{c}'\underline{x}$
υπό
$A\underline{x}=\underline{b}$
$\underline{x}\geq\underline{0}$

- Η εφικτή περιοχή F είναι πολύεδρο και κυρτό σύνολο.
- Αν η F είναι φραγμένο σύνολο, τότε το π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση.
- Η F έχει πεπερασμένο σύνολο κορυφών.
- Αν το π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση τότε υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή ~~κορυφή~~ της F που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση.
- Αν υπάρχουν 2 ή περισσότερες κορυφές στις οποίες πετυχαίνεται το μέγιστο, δηλαδή αποτελούν βέλτιστες λύσεις, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός τους αποτελεί βέλτιστη λύση.

Άρα για να βρούμε τη βέλτιστη λύση, αν το F είναι φραγμένο, αρκεί να βρούμε όλες τις κορυφές και να συγκρίνουμε τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτές.

2.3. Βασικές εφικτές λύσεις

2.3.1 Ορισμοί

- Για ένα $\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)'\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$I^+(\underline{x})=\{j: x_j>0\}$$
$$I^-(\underline{x})=\{j: x_j<0\}$$
$$I^0(\underline{x})=\{j: x_j=0\}$$

(π.χ. $\underline{x}=(1,-3,5,0,2,-4)'\in\mathbb{R}^6$

$I^+(\underline{x})=\{1,3,5\}$

$I^-(\underline{x})=\{2,6\}$ $\quad I^0=\{4\}$)

Scanned with CamScanner

δηλαδή τα σύνολα δεικτών που αντιστοιχούν στις θετικές, τις αρνητικές και τις μηδενικές συνιστώσες.

$I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x}) \cup I^0(\underline{x}) = \{1, 2, \ldots, n\}$

Ορισμός Βασικής Λύσης (1)

Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται βασική λύση (ΒΛ) αν

(i) $A\underline{x} = \underline{b}$

(ii) Οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές συνιστώσες της $\underline{x}$, δηλαδή στο σύνολο $I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(π.χ. του $\underline{x} = (5, 3, 0, 0, 7)' \in \mathbb{R}^5$ είναι λύση αν $A\underline{x} = \underline{b}$ και οι A_1, A_2, A_5 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.)

Ορισμός Βασικής Λύσης (2)

Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική λύση αν $A\underline{x} = \underline{b}$ και υπάρχουν δείκτες $B(1), B(2), \ldots, B(m)$ τέτοιοι ώστε

(i) οι στήλες $A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες

(ii) $I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x}) \subseteq \{B(1), B(2), \ldots, B(m)\}$.

Ορισμός Βασικής Εφικτής Λύσης

Ενα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται βασική εφικτή λύση αν είναι βασική λύση και $\underline{x} \geq \underline{0}$.

Μια βασική λύση $\underline{x}$ είναι <u>μη-εκφυλισμένη</u> (non-degenerate) αν $|I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})| = m$, δηλαδή έχει ακριβώς m μη μηδενικές συνιστώσες.

Μια βασική λύση $\underline{x}$ είναι <u>εκφυλισμένη</u> αν $|I^+(m) \cup I^-(m)| < m$.

Ορισμός (Βασικός Πίνακας, Βασικές & μη-βασικές μεταβλητές).

Ενας υποπίνακας $m \times m$ $B = (A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)})$ του A που αποτελείται από m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες ονομάζεται <u>βασικός πίνακας</u> ή <u>βάση</u>.

Οι μεταβλητές $x_{B(1)}, x_{B(2)}, \dots, x_{B(m)}$ ονομάζονται <u>βασικές</u> και οι υπόλοιπες <u>μη βασικές</u>.

2.3.2 Σχέση βασικών λύσεων & βασικών πινάκων

- <u>Μη-εκφυλισμένη ΒΛ</u>

Έστω $\underline{x}$ μια μη-εκφυλισμένη ΒΛ. Έστω $B(1), B(2), \dots, B(m)$ οι δείκτες των μη-μηδενικών συνιστωσών της $\underline{x}$, δηλαδή

$I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x}) = \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$.

Ορίζουμε

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

το διάνυσμα των μη-μηδενικών συνιστωσών του $\underline{x}$.

Επίσης, $B = (A_{B(1)}, A_{B(2)}, \dots, A_{B(m)})$ τον βασικό πίνακα με τις γρ. ανεξάρτητες στήλες $A_{B(1)}, A_{B(2)}, \dots, A_{B(m)}$.

Τότε $A\underline{x} = \underline{b} \iff \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = \underline{b}$

$$\iff \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} + \sum_{j:\, j \notin \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}} A_j \cancelto{0}{x_j} = \underline{b}$$

$$\iff B \cdot \underline{x}_B = \underline{b}$$

$$\iff \underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$$

Άρα, το $\underline{x}$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τον πίνακα B και αντίστροφα.

- <u>Εκφυλισμένη Βασική Λύση</u>

Έστω $\underline{x}$ εκφυλισμένη βασική λύση. Έστω $B(1), B(2), \dots, B(k)$ οι δείκτες που αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές συνιστώσες του $\underline{x}$. Υπάρχουν άλλοι $m-k$ δείκτες $B(k+1), B(k+2), \dots, B(m)$ ώστε ο

$B = (A_{B(1)}, A_{B(2)}, \dots, A_{B(k)}, A_{B(k+1)}, \dots, A_{B(m)})$ να είναι βασικός.

Τότε

Scanned with CamScanner

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ x_{B(k+1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ το διάνυσμα των

βασικών μεταβλητών του $\underline{x}$.
Όπως πριν προκύπτει $\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b}$

<u>Άρα</u>

1| Ενας βασικός πίνακας B προσδιορίζει μονοσήμαντα μία βασική λύση $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ για την οποία ισχύει $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{0}_{n-m} \end{pmatrix}$ με $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} \in \mathbb{R}^m$. Η λύση αυτή μπορεί να είναι εκφυλισμένη ή μη εκφυλισμένη.

2| Μια μη εκφυλισμένη ΒΛ προσδιορίζει μονοσήμαντα έναν βασικό πίνακα.

3| Αν έχουμε μία εκφυλισμένη ΒΛ, τότε οποιαδήποτε συλλογή m γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A που περιλαμβάνει τις στήλες που αντιστοιχούν στα μη-μηδενικά στοιχεία του $\underline{x}$ αποτελεί μία βάση. Κάθε τέτοια βάση αντιστοιχεί στη λύση $\underline{x}$.

2.3.3. Γεωμετρική ερμηνεία βασικών εφικτών λύσεων

<u>Θεώρημα</u> Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική εφικτή λύση του π.γ.π. αν και μόνο αν είναι κορυφή του πολυέδρου της εφικτής περιοχής F.

2.3.4. Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 15$$
$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

δηλαδή $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\text{rank}(A) = m = 2 \leq 4 = n$.

Έχουμε δει ότι η εφικτή περιοχή F είναι πολύεδρο διάστασης $n-m=4-2=2$ στον $\mathbb{R}^4$ με κορυφές

$$\underline{x}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\10\\5\end{pmatrix},\ \underline{x}_2=\begin{pmatrix}5\\0\\0\\10\end{pmatrix},\ \underline{x}_3=\begin{pmatrix}5/3\\20/3\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{x}_4=\begin{pmatrix}0\\5\\5\\0\end{pmatrix}.$$

Θα βρούμε τις βασικές λύσεις και Θ.δ.ο οι βασικές εφικτές λύσεις αντιστοιχούν στις κορυφές.

$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&1&1&0\end{pmatrix}$

$B^1=(A_1\ A_2)$, $B^2=(A_1\ A_3)$, $B^3=(A_1\ A_4)$,
$B^4=(A_2\ A_3)$, $B^5=(A_2\ A_4)$, $B^6=(A_3\ A_4)$.

Θα βρούμε τη βασική λύση που αντιστοιχεί σε κάθε βασικό πίνακα $(B\underline{x}_B=\underline{b})$.

- $B^1=(A_1\ A_2)$

$\underline{x}^{B^1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$$B^1\cdot\underline{x}^{B^1}=\underline{b}\iff\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}\iff$$

$$\iff\begin{cases}1x_1+2x_2=15\\2x_1+x_2=10\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=15-2x_2\\30-4x_2+x_2=10\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}x_1=\frac{5}{3}\\x_2=\frac{20}{3}\end{cases}$$

$\underline{x}^1=\begin{pmatrix}5/3\\20/3\\0\\0\end{pmatrix}$ είναι και εφικτή. $(\underline{x}^1=\underline{x}_3)$

- $B^2=(A_1\ A_3)$

$\underline{x}^{B^2}=\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}$ $\quad B^2\cdot\underline{x}^{B^2}=\underline{b}\iff$

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}\iff\begin{cases}1x_1+1x_3=15\\2x_1+1x_3=10\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}x_1=15-x_3\\30-2x_3+x_3=10\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=-5\\x_3=20\end{cases}$$

Άρα, $\underline{x}^2=\begin{pmatrix}-5\\0\\20\\0\end{pmatrix}$ όχι εφικτή άρα δεν αντιστοιχεί σε κορυφή.

Scanned with CamScanner

$\cdot\, B^3 = (A_1 \;\; A_4)$

$\underline{x}^{B^3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$B^3 \cdot \underline{x}^{B^3} = \underline{b} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 1x_1 + 1x_4 = 15 \\ 2x_1 + 0x_4 = 10 \end{Bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{Bmatrix} 5 + x_4 = 15 \\ x_1 = 5 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x_1 = 5 \\ x_4 = 10 \end{Bmatrix}$$

Άρα, $\underline{x}^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ εφικτή και άρα αντιστ. σε κορυφή ($\underline{x}^3 = \underline{x}_2$).

Τα υπόλοιπα άσκηση.

18/10/2021 Μάθημα 6

2.4. Αλλαγή Βάσης-Μέθοδος Simplex

Έχουμε ότι: Αν το γ.π.π. έχει βέλτιστη λύση τότε αυτή πετυχαίνεται σε κορυφή της F.

- Οι κορυφές αντιστοιχούν σε ΒΕΛ.

- Από κάθε βασικό πίνακα παίρνω μια βασική λύση ($\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b}$) (μπορεί να είναι εφικτή ή όχι)

- Άρα μπορώ να βρω βελ. λύση, αν το γ.π.π. είναι φραγμένο, βρίσκοντας τις ΒΕΛ και συγκρίνοντας τη τιμή της α.σ.

Όμως, ο αριθμός των κορυφών αυξάνεται εκθετικά με την τάξη του πίνακα (n,m).

Πράγματι, αν $K(F) = \{ x \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0},\ \underline{x} \text{ ΒΕΛ} \}$, $N_k(F) = |K(F)|$,

πλήθος κορυφών

$N_k(F) = \#\text{ΒΕΛ}$

Τότε $N_k(F) = \#\text{ΒΕΛ} \leq$ πλήθος βασικών πινάκων $\leq \binom{n}{m}$ (αφού m το πολύ γρ. ανεξ. στήλες)

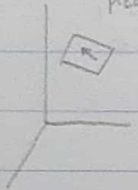
γε μη εκφυλ.

Άρα, χρειαζόμαστε έναν αλγόριθμο που να μη χρειάζεται να εξετάσει όλες τις ΒΕΛ για να βρει τη βέλτιστη. Τέτοιος είναι ο αλγόριθμος Simplex, ο οποίος διαθέτει 2 εργαλεία.

1) Έναν έλεγχο βελτιστότητας, δηλαδή μια μέθοδο για να ελέγχει αν μια κορυφή είναι βέλτιστη χωρίς να πρέπει να τη συγκρίνει με τις άλλες.

2) Μία μέθοδο βελτίωσης, δηλαδή έναν τρόπο να πηγαίνει από μια μη βέλτιστη ΒΕΛ σε μια άλλη ΒΕΛ που δίνει καλύτερη τιμή στην α.σ..

$d \in W^0 \rightarrow$ μετατοπ. $d \in F^0$



Ορισμός: (Εφικτή Κατεύθυνση)

Έστω $\underline{x} \in F$, τότε ένα διάνυσμα $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται εφικτή κατεύθυνση για το $\underline{x}$ αν $\exists \theta_0 > 0$ τ.ω. $\underline{x} + \theta \cdot \underline{d} \in F$, $0 \le \theta \le \theta_0$.

Αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση

$\underline{x} \in F \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \ge \underline{0}$ (1)

$\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση του $\underline{x} \Rightarrow \exists \theta_0 > 0$ τ.ω. $\underline{x} + \theta \cdot \underline{d} \in F$, $0 \le \theta \le \theta_0$

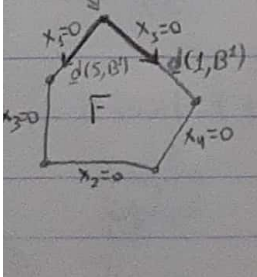
$\Rightarrow \exists \theta_0 > 0 : A(\underline{x} + \theta \cdot \underline{d}) = \underline{b}$, $\underline{x} + \theta \underline{d} \ge \underline{0}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow A\theta\underline{d} = \underline{0} \Rightarrow A\underline{d} = \underline{0} \Rightarrow \underline{d} \in W^0$ (δεν εξασφ. ότι μένει μέσα στο πολύεδρο όμως)

m=3
n=5 (άρα δύο μηδενικά)
$x_{B^1} = (0, \dots, 0)$ $B^1 = (A_2 A_3 A_4)$

Ενδιαφερόμαστε για εφικτές κατευθ. που με οδηγούν απο ΒΕΛ σε ΒΕΛ.

Τότε $d = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$ (τα ενδιάμεσα δεν τα ξέρουμε) $\longrightarrow$ για να αρχίσει να αυξάνεται



Έστω $\underline{x}$ μια μη ~~[illegible]~~ εκφυλισμένη ΒΕΛ που αντιστοιχεί στον βασικό πίνακα $B = (A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)})$.

Η $\underline{x}$ θα έχει $x_j > 0$, $j \in \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$.

Η $\underline{x}$ θα έχει $x_j = 0$, $j \notin \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$.

Έστω $j^o \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ και θεωρώ εφικτή κατεύθυνση $\underline{d}$ με $d_{j^o} = 1$ και $d_k = 0$, $k \notin \{j^o, B(1), \ldots, B(m)\}$.

① Η συνθήκη $d_{j^o} = 1$, $d_k = 0$, $k \notin \{j^o, B(1), \ldots, B(m)\}$ μαζί με την $A\underline{d} = \underline{0}$ προσδιορίζει μονοσήμαντα την εφικτή κατεύθυνση $\underline{d}$.

Πράγματι, $A\underline{d} = \underline{0} \iff \sum_{j=1}^{n} A_j d_j = \underline{0}$ με $\underline{d} = \begin{pmatrix} d_{B(1)} \\ \vdots \\ d_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\} d_B$, $1 \to j^o$, χ.β.γ.

$$\iff \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} d_{B(i)} + A_{j^o} = \underline{0}$$

$$\iff B \cdot \underline{d}_B = -A_{j^o}$$

$$\xLeftrightarrow[\text{άρα } \exists B^{-1}]{m \text{ γρ. ανεξ. στήλες}} \boxed{\underline{d}_B = -B^{-1} A_{j^o}}$$

Άρα, το $\underline{d}$ προσδιορίστηκε μονοσήμαντα.

Το διάνυσμα $\underline{d}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες ονομάζεται βασική κατεύθυνση j^o του βασικού πίνακα B και συμβολίζεται ως $\underline{d}(j^o, B)$.

② Πού μπορεί να οδηγήσει η κίνηση πάνω σε μια βασική κατεύθυνση

<u>Περίπτωση 1:</u> $\exists i' \in \{1, 2, \ldots, m\}$ τ.ω. $d_{B(i')} < 0$.

Τότε οι λύσεις πάνω σε αυτή την κατεύθυνση είναι:

$$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \cdot \underline{d} = \begin{pmatrix} x_{B(1)} + \theta d_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} + \theta d_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 + \theta \cdot 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^o$$

Για να είναι εφικτή πρέπει $\underline{x}(\theta) \geq \underline{0}$.
Για τα i με $d_{B(i)} > 0$ έχουμε
$x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0 \quad \forall \theta \geq 0$.

$\longrightarrow$

Αλλά για τα i με $d_{B(i)}<0$ έχουμε $x_{B(i)}+\theta d_{B(i)}\geq 0 \Rightarrow \theta \leq -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}$.

Οπότε πρέπει: $0\leq\theta\leq\theta_{min}=\min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \text{ για } i: d_{B(i)}<0,\ i\in\{1,\dots,m\}\right\}$.

Έστω i' στο οποίο πετυχαίνεται το θ_{min}, δηλ. $\theta_{min}=-\frac{x_{B(i')}}{d_{B(i')}}$.

Τότε $\underline{x}(\theta_{min})=\underline{x}+\theta_{min}\underline{d}$ και η συνιστώσα με δείκτη $B(i')$ θα είναι $x_{B(i')}(\theta_{min})=x_{B(i')}+\left(-\frac{x_{B(i')}}{d_{B(i')}}\right)\cdot d_{B(i')}=0$.

Οπότε η $\underline{x}(\theta_{min})$ είναι μία ΒΕΛ για την οποία η $x_{B(i')}$ έγινε μη βασική και η x_{j_0} έγινε βασική.
Τέτοιες κορυφές ονομάζονται γειτονικές.

<u>Περίπτωση 2</u>: Αν $\forall i\in\{1,\dots,m\}$ $d_{B(i)}\geq 0$. Τότε:

$$\underline{x}(\theta)=\underline{x}+\theta\cdot\underline{d}=\begin{pmatrix} x_{B(1)}+\theta d_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)}+\theta d_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\geq \underline{0}.$$

Οπότε όλα τα σημεία στην ημιευθεία που ξεκινά από την $\underline{x}$ και έχει κατεύθυνση $\underline{d}$ βρίσκονται στην εφικτή περιοχή. Άρα, F μη φραγμένη.

20/10/2021 Μάθημα 7

1. Πώς ελέγχουμε αν μια ΒΕΛ είναι βέλτιστη;

Έστω $\underline{x}$ μια ΒΕΛ με βασικό πίνακα B, σύνολο βασικών δεικτών $I_B=\{B(1),\dots,B(m)\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ και σύνολο μη βασικών δεικτών $I_N=\{1,2,\dots,n\}\setminus I_B$.
Θέλω να δω πώς μεταβάλλεται η τιμή της α.σ. $f(\underline{x})=\underline{c}'\cdot\underline{x}$ όταν κινούμαι από το $\underline{x}$ προς μία βασική κατεύθυνση $-j$ ($\underline{d}(j,B)$).
Όταν κινούμαι πάνω στην $\underline{d}(j,B)$, περνάω από τα σημεία $\underline{x}(\theta)=\underline{x}+\theta\cdot\underline{d}(j,B)$ με $\underline{d}(j,B)=\begin{pmatrix} d_B(j,B) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ← j-θέση.

με $\underline{d}_B(j,B) = -B^{-1} \cdot A_j$ και $\theta \geq 0$.

Συνεπώς, $f(\underline{x}(\theta)) = \underline{c}' \cdot \underline{x}(\theta) = \underline{c}' \cdot (\underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)) = \underline{c}' \cdot \underline{x} + \theta \cdot \underline{c}' \cdot \underline{d}(j;B)$.

Άρα, $f(\underline{x}(\theta)) - f(\underline{x}) = \theta \cdot \underline{c}' \cdot \underline{d}(j;B)$ $\qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} \underline{c}_B \\ \underline{c}_N \end{pmatrix}$

$$= \theta \cdot \underline{c}_B \, d_B(j;B) + \theta \cdot c_j$$
$$= -\theta \underline{c}_B B^{-1} A_j + \theta \cdot c_j$$
$$= \theta \underbrace{(c_j - \underline{c}_B B^{-1} A_j)}_{\bar{c}_j}$$

$$\underline{d}(j;B) = \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{θέση } j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} d_B(j;B) \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d_B(j;B) = -B^{-1}A_j$$

Όταν κινούμαι πάνω στην $\underline{d}(j;B)$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται με ρυθμό $\bar{c}_j$.

<u>Ορισμός</u> Η ποσότητα $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B B^{-1} A_j = \underline{c}' \underline{d}(j;B)$ ονομάζεται <u>ελαττωμένο κόστος</u> της μεταβλητής x_j στη ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B.

<u>Παρατήρηση:</u> Η ποσότητα $\bar{c}_j$ μπορεί να οριστεί για $j \in I_B$ και τότε μπορούμε ν.δ.ο. $\bar{c}_j = 0 \ \forall j \in I_B$.

- Αν $\bar{c}_j > 0$ για κάποιο $j \in I_N$, τότε αν κινηθώ προς την $\underline{d}(j;B)$ παίρνω καλύτερες τιμές στην α.σ.. Άρα η $\underline{x}$ όχι βέλτιστη.

- Αν $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j \in I_N$ τότε ξέρω ότι η $\underline{x}$ είναι καλύτερη ή εξίσου καλή από τις γειτονικές κορυφές.

<u>Λήμμα:</u> Έστω $\underline{x}$ ΒΕΛ με βασικό πίνακα B, σύνολο δεικτών $I_B = \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$ και σύνολο μη βασικών δεικτών $I_N = \{1,2,\dots,n\} \setminus I_B$.

Έστω $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)'$ μια εφικτή κατεύθυνση της $\underline{x}$. Τότε

(i) $d_j \geq 0, \ \forall j \in I_N$

(ii) $\underline{d} = \sum_{j \in I_N} d_j \underline{d}(j;B)$

$\longrightarrow$

Απόδειξη:

(i) $x_j = 0$, $\forall j \in I_N$

$\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση της $\underline{x} \Rightarrow \exists \theta_0 > 0 : \underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \cdot \underline{d} \geq \underline{0}$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$.

Τότε $x_j(\theta) \geq 0 \Rightarrow x_j + \theta d_j \geq 0$.

Αν $j \in I_N$, τότε $\overset{=0}{x_j} + \theta d_j \geq 0 \Rightarrow d_j \geq 0$

(ii) $\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση $\Rightarrow A\underline{d} = \underline{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j A_j = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j \in I_B} d_j A_j + \sum_{j \in I_N} d_j A_j = \underline{0} \Rightarrow B\underline{d}_B = -\sum_{j \in I_N} d_j A_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{d}_B = -\sum_{j \in I_N} d_j B^{-1} A_j$

Άρα, $\underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{d}_B \\ \underline{d}_N \end{pmatrix} = \sum_{j \in I_N} d_j \underline{d}(j;B)$.

Θεώρημα Έστω ότι όλες οι ΒΕΛ είναι μη εκφυλισμένες και $\underline{x}$ ΒΕΛ με βασικό πίνακα B. Τότε η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη αν και μόνο αν $\bar{c}_j \leq 0$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Έστω ότι $\bar{c}_j \leq 0$ $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Έστω $\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση της $\underline{x}$ τότε $\exists \theta_0 > 0 : \underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d} \in F$ $\forall 0 \leq \theta \leq \theta_0$

και $f(\underline{x}(\theta)) = \underline{c}'(\underline{x} + \theta \underline{d}) = \underline{c}' \cdot \underline{x} + \theta \underline{c}' \cdot \underline{d} = f(\underline{x}) + \theta \underline{c}' \underline{d} = f(\underline{x}) + \theta \underline{c}' \sum_{j \in I_N} d_j \underline{d}(j;B) =$

$= f(\underline{x}) + \theta \sum_{j \in I_N} d_j \underbrace{\underline{c}' \underline{d}(j;B)}_{\bar{c}_j} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\underline{x}(\theta)) - f(\underline{x}) = \theta \sum_{j \in I_N} d_j \bar{c}_j \leq 0 \Rightarrow f(\underline{x}(\theta)) \leq f(\underline{x})$.

Άρα, αν κινηθώ πάνω σε οποιαδήποτε εφικτή κατεύθυνση φεύγοντας από το $\underline{x}$, δεν πετυχαίνω κάτι καλύτερο $\Rightarrow$

$\underline{x}$ τοπικό μέγιστο $\Rightarrow \underline{x}$ ολικό μέγιστο διότι η α.σ. είναι γραμμική.

($\Rightarrow$) Έστω $j' \in I_N$ με $\bar{c}_{j'} > 0$. Θ.δ.ο. αν κινηθούμε πάνω στην $\underline{d}(j';B)$ πετυχαίνουμε καλύτερες τιμές στην α.σ..

Θα κινηθούμε πάνω στα $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j';B)$ για $0 \leq \theta \leq \theta_{min}$

με $\theta_{min} = \min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}, i \in \{1,\dots,m\}, d_{B(i)} < 0\right\}$ και

$f(\underline{x}(\theta)) = \underbrace{\underline{c}' \cdot \underline{x}}_{f(\underline{x})} + \underline{c}'\theta \underline{d}(j'; B) \Longrightarrow f(\underline{x}(\theta)) - f(\underline{x}) = \theta \bar{c}_j > 0.$

Άρα, όταν κινούμαι προς αυτή την κατεύθυνση παίρνω καλύτερες τιμές $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\underline{x}$ όχι βέλτιστο.

<u>Όταν η ΒΕΛ $\underline{x}$ δεν είναι βέλτιστη, πώς πάω σε καλύτερη;</u>

$\underline{x}$ όχι βέλτιστη $\Rightarrow \exists j \in I_N$ με $\bar{c}_j > 0$. Θα κινηθώ προς τη βασική κατεύθυνση j ($\underline{d}(j;B)$). Υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1:</u>
Αν $\exists i \in \{1,2,\dots,m\}$ με $d_{B(i)} < 0$ τότε $\theta_{min} = \min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}, i \in \{1,\dots,m\}, d_{B(i)} < 0\right\}$ είναι πεπερασμένο. Έστω $i' \in \{1,2,\dots,m\}$ ο δείκτης στον οποίο πετυχαίνεται το min. Τότε $\underline{x}(\theta_{min}) = \underline{x} + \theta_{min}\underline{d}(j;B)$ είναι ΒΕΛ.

<u>Περίπτωση 2:</u>
Αν $d_{B(i)} \geq 0 \ \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$ τότε $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B) \in F \ \forall \theta \geq 0$
και $f(\underline{x}(\theta)) = \underline{c}' \cdot (\underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)) = f(\underline{x}) + \theta \bar{c}_j$
άρα $\max f(\underline{x}(\theta)) = \infty$.