08/11/2021 Μάθημα 12

3.4. Συμπληρωματικότητα βέλτιστων λύσεων

Θα δώσαμε άλλη μία σχέση μεταξύ των βέλτιστων λύσεων πρωτεύοντος και δυϊκού π.γ.π.

Έστω

$$(P)\quad \begin{array}{l} z_p = \max\ \underline{c}'\underline{x} \\ \text{υπό}\ A\underline{x} \le \underline{b} \\ \underline{x} \ge \underline{0} \end{array} \iff \begin{array}{l} z_p = \max\ \underline{c}'\underline{x} \\ \text{υπό}\ \underline{a}_i'\underline{x} \le b_i,\ i=1,\dots,m \\ \underline{x} \ge \underline{0} \end{array} \iff$$

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1' \\ \underline{a}_2' \\ \vdots \\ \underline{a}_m' \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1'\underline{x} \\ \underline{a}_2'\underline{x} \\ \vdots \\ \underline{a}_m'\underline{x} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$

$z_P = \max \underline{c}'\underline{x}$

$\Longleftrightarrow$ υπό $b_i - \underline{a}_i'\underline{x} \geq 0$, $i=1,\dots,m$

$\underline{x} \geq \underline{0}$

Το δυϊκό είναι $z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$

(D) υπό $A'\underline{w} \geq \underline{c}$ $\Longleftrightarrow$

$\underline{w} \geq \underline{0}$

$$A'\underline{w} = \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_n' \end{bmatrix} \underline{w} = \begin{bmatrix} A_1'\underline{w} \\ A_2'\underline{w} \\ \vdots \\ A_n'\underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{w}'A_1 \\ \underline{w}'A_2 \\ \vdots \\ \underline{w}'A_n \end{bmatrix}$$

η j-οστή γραμμή του A' είναι η j-οστή στήλη του A

$\Longleftrightarrow$ $z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$ υπό $\underline{w}'A_j \geq c_j$, $j=1,\dots,n$, $\underline{w} \geq \underline{0}$ $\Longleftrightarrow$ $z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$ υπό $\underline{w}'A_j - c_j \geq 0$, $j=1,\dots,n$, $\underline{w} \geq \underline{0}$ ✓

Έχουμε ότι κάθε μεταβλητή απόφασης (x_j) του (P) αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό του (D) ($\underline{w}'A_j - c_j \geq 0$)

$x_j \longleftrightarrow \underline{w}'A_j - c_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,n$.

Επίσης, η i-οστή μετ. απόφασης του (D) (w_i) αντιστοιχεί στον i-οστό περιορισμό του (P) ($b_i - \underline{a}_i'\underline{x} \geq 0$)

$w_i \longleftrightarrow b_i - \underline{a}_i \underline{x} \geq 0$, $i=1,\dots,m$.

Ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$u_i = w_i(b_i - \underline{a}_i'\underline{x})$, $i=1,2,\dots,m$

$v_j = x_j(\underline{w}'A_j - c_j)$, $j=1,2,\dots,n$

Scanned with CamScanner

• Αν οι $\underline{x}, \underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των (P) και (D) αντίστοιχα, τότε

$u_i \geq 0 \ , \ i=1,\dots,m$ και

$v_j \geq 0 \ , \ j=1,\dots,n$.

• Επίσης, $\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m} w_i(b_i - \underline{a}_i'\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i b_i - \sum_{i=1}^{m} w_i \underline{a}_i \underline{x} = \underline{b}'\underline{w} - \underline{w}'A\underline{x}$

και $\sum_{j=1}^{n} v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j(\underline{w}'A_j - c_j) = \underline{w}'\sum_{j=1}^{n} A_j x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j c_j = \underline{w}'A\underline{x} - \underline{c}'\underline{x}$.

Οπότε $0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = \underline{b}'\underline{w} - \cancel{\underline{w}'A\underline{x}} + \cancel{\underline{w}'A\underline{x}} - \underline{c}'\underline{x} = \underline{b}'\underline{w} - \underline{c}'\underline{x}$.

• Η παραπάνω σχέση είναι το Ασθενές δυϊκό Θεώρημα.

• Αν οι $\underline{x}$ και $\underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις των (P) και (D) αντίστοιχα,
τότε $\underline{b}'\underline{w} = \underline{c}'\underline{x} \Rightarrow \underline{b}'\underline{w} - \underline{c}'\underline{x} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u_i = v_j = 0 \ , \ \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$

• Αντίστροφα, αν οι $\underline{x}$ και $\underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των (P) και (D) αντίστοιχα, και $u_i = v_j = 0 \ , \ i=1,\dots,m \ , \ j=1,\dots,n$, τότε $\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{b}'\underline{w} - \underline{c}'\underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{b}'\underline{w} = \underline{c}'\underline{x} \Rightarrow$ $\underline{w}$ βέλτιστη του (D)
$\underline{x}$ βέλτιστη του (P)

<u>Θεώρημα Συμπληρωματικότητας</u>

Έστω $\underline{x}$ και $\underline{w}$ εφικτές λύσεις των (P) και (D), αντίστοιχα.
Τότε, οι $\underline{x}$ και $\underline{w}$ βέλτιστες λύσεις των (P) και (D) αν και μόνο αν
$u_i = v_j = 0 \ \ \forall i=1,\dots,m, \ j=1,\dots,n$.
Δηλαδή, αν και μόνο αν $x_j(\underline{w}'A_j - c_j) = 0, \ \forall j=1,\dots,n$ (1)
$w_i(b_i - \underline{a}_i'\underline{x}) = 0, \ \forall i=1,\dots,m$. (2)

<u>Σημείωση:</u>

① Το Θ. Συμπληρωματικότητας χρησιμοποιείται για να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση ενός π.γ.π. όταν γνωρίζουμε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού →

του. Αυτό γίνεται πάντα όταν η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι μη-εκφυλισμένη.

Έστω το (P) έχει βέλτιστη λύση μη-εκφυλισμένη.

$$
(P)\quad
\begin{aligned}
z_p &= \max \underline{c}'\underline{x} \\
\text{υπό}\ & A\underline{x} + y = \underline{b} \quad (\Leftrightarrow \underline{a}_i'\underline{x} + y_i = b_i,\ i=1,\dots,m) \\
& \underline{x} \geq \underline{0}
\end{aligned}
$$

Αν $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ είναι η βέλτιστη λύση, τότε έχει m θετικά στοιχεία (αφού είναι μη-εκφυλισμένη).

Έστω $x_j^* > 0$ για m_1 στοιχεία και

$y_i^* > 0$ για m_2 στοιχεία $(m_1 + m_2 = m)$.

Τότε $x_j^* > 0 \xRightarrow{(1)} \underline{w}'A_j - c_j = 0$ (m_1 εξισώσεις)

και $y_i^* > 0 \Rightarrow \underline{a}_i' x < b_i \Rightarrow b_i - \underline{a}_i'\underline{x} > 0 \Rightarrow w_i = 0$ (m_2 εξισώσεις).

Άρα έχω $m_1 + m_2 = m$ εξισώσεις για να προσδιορίσω το $\underline{w}^*$.

Άσκηση

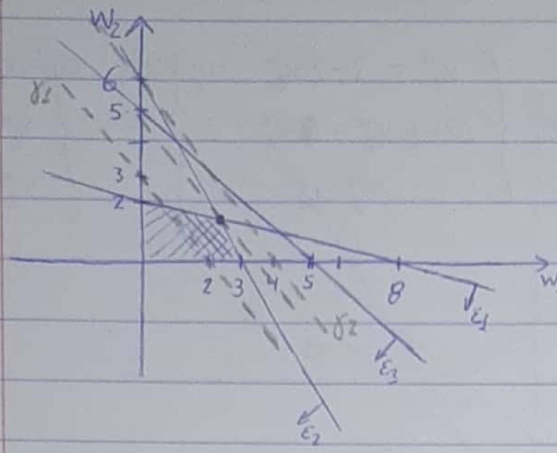
Να λυθεί το π.γ.π.

$$
\begin{aligned}
\min\ & 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\
\text{υπό}\ & 1x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\
& 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 .
\end{aligned}
$$

Είναι σε ΗΚ-min μορφή. Θα λύσουμε το δυϊκό του.

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3w_1 + 2w_2 \\
\text{υπό}\ & 1w_1 + 4w_2 \leq 8 \\
& 2w_1 + 1w_2 \leq 6 \\
& 1w_1 + 1w_2 \leq 5 \\
& w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$



$\varepsilon_1: 1w_1 + 4w_2 = 8$

w_1	0	8
w_2	2	0

$\varepsilon_2: 2w_1 + 1w_2 = 6$

w_1	0	3
w_2	6	0

$\varepsilon_3: 1w_1 + 1w_2 = 5$

w_1	0	5
w_2	5	0

$\gamma_1: 3w_1 + 2w_2 = 6$

w_1	0	2
w_2	3	0

$\gamma_2: 3w_1 + 2w_2 = 12$

w_1	0	4
w_2	6	0

Το βέλτιστο είναι το σημείο τομής (ε_1) και (ε_2)

$$\begin{cases} 1w_1 + 4w_2 = 8 \\ 2w_1 + 1w_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 8 - 4w_2 \\ 16 - 8w_2 + w_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 16/7 \\ w_2 = 10/7 \end{cases}$$

$$\underline{w}^* = \begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}.$$

Θα βρω τη βέλτιστη λύση του (P) από Θ. Συμπληρωματικότητας.

- $w_1^* = \frac{16}{7} > 0 \xRightarrow{(2)} x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 3$ (A)

- $w_2^* = \frac{10}{7} > 0 \xRightarrow{(2)} 4x_1^* + x_2^* + x_3^* = 2$ (B)

- 1ος περιορ. του (D): $1w_1^* + 4w_2^* = 1 \cdot \frac{16}{7} + 4 \cdot \frac{10}{7} = \frac{56}{7} = 8$
  $\Rightarrow$ δε βγάζω συμπέρασμα για το x_1^*

- 2ος περιορ. του (D): $2w_1^* + 1w_2^* = 2 \cdot \frac{16}{7} + 1 \cdot \frac{10}{7} = \frac{42}{7} = 6$
  $\Rightarrow$ δε βγάζω συμπ. για το x_2^*

- 3ος περιορισμός του (D): $1w_1^* + 1w_2^* = 1 \cdot \frac{16}{7} + 1 \cdot \frac{10}{7} = \frac{26}{7} < 5 \xRightarrow{(1)} x_3^* = 0$ (Γ)

$\longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll}(A): & x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 3 \\ (B): & 4x_1^* + [redacted]x_2^* + x_3^* = 2 \\ (\Gamma): & x_3^* = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^* = 3 - 2x_2^* \\ 12 - 8x_2^* + [redacted]x_2^* = 2 \\ x_3^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^* = \frac{1}{7} \\ x_2^* = \frac{10}{7} \\ x_3^* = 0 \end{array}\right\}$$

$$\underline{x}^* = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 10/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10/11/2021 Μάθημα 13

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί το π.γ.π.:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} z_P = \max & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{υπό} & -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{array}$$

$$\xLeftrightarrow{x_3' = -x_3} \quad \begin{array}{ll} z_P = \max & 2x_1 + x_2 - 3x_3' \\ \text{υπό} & 2x_1 - x_2 + 2x_3' \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 + x_3' \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3' \geq 0 \end{array}$$

Το δυϊκό του είναι:

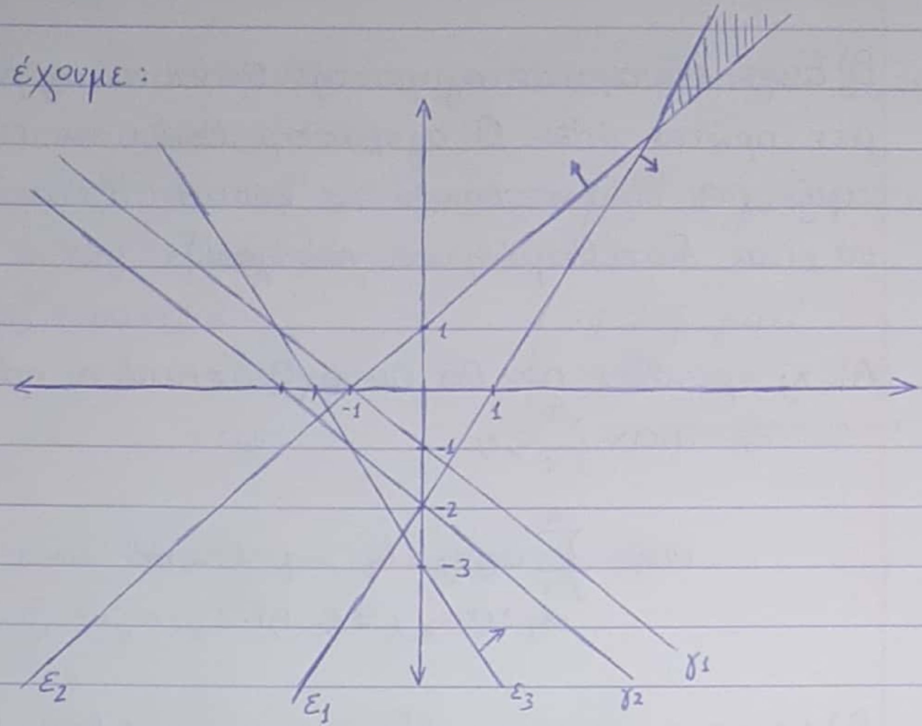
$$(D) \quad \begin{array}{ll} z_D = \min & -1w_1 - 1w_2 \\ \text{υπό} & 2w_1 - w_2 \geq 2 \\ & -w_1 + w_2 \geq 1 \\ & 2w_1 + w_2 \geq -3 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

$\varepsilon_1: 2w_1 - w_2 = 2$ $\quad\quad \gamma_1: -1w_1 - 1w_2 = 1$

$\varepsilon_2: -w_1 + w_2 = 1$ $\quad\quad \gamma_2: -1w_1 - 1w_2 = 2$

$\varepsilon_3: 2w_1 + w_2 = -3$

Άρα έχουμε:



Άρα, όσο ~~αυξάνεται~~ αυξάνουμε τιμές τις α.σ., κατεβαίνει η ευθεία (όπως με γ_1, γ_2).

Άρα, το π.γ.π. είναι μη φραγμένο και άρα το P είναι μη εφικτό.

αν το (P) μη εφικτό, τότε δεν θα ξέρουμε αν το άλλο είναι μη εφικτό ή μη φραγμένο

3.5. Οικονομική Ερμηνεία δυϊκού π.γ.π.

Προβλήματα παραγωγής και αποτίμησης

• Μια εταιρεία παράγει n προϊόντα ($j=1,\dots,n$) χρησιμοποιώντας m πρώτες ύλες ($i=1,\dots,m$). Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος j είναι c_j, $j=1,\dots,n$.

• Για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος j απαιτούνται a_{ij} μονάδες πρώτης ύλης i, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

• Η εταιρεία έχει b_i μονάδες διαθέσιμες από την πρώτη ύλη i, $i=1,\dots,m$.

A) Η εταιρεία θέλει να αποφασίσει πόσες μονάδες θα φτιάξει από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

B) Ένας εξωτερικός αγοραστής θέλει να αγοράσει τις διαθέσιμες πρώτες ύλες. Ο αγοραστής θέλει να προσδιορίσει τις τιμές που ελαχιστοποιούν το κόστος. (Η εταιρεία θα πρέπει να είναι διατεθειμένη να πουλήσει)

A) x_j = μονάδες που θα παραχθούν από το προϊόν j, $j=1,\dots,n$

$$z_p = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,, \quad i=1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \,, \quad j=1,\dots,n$$

B) w_i = τιμή ανά μονάδα για πρώτη ύλη i, $i=1,\dots,m$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

Θέλει η εταιρεία να προτιμήσει να πουλήσει σε αυτόν

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ge c_j \,, \quad j=1,\dots,n$$
$$w_i \ge 0 \,, \quad i=1,\dots,m$$

(ποσό που θα πάρει η εταιρεία αν πουλήσει τις πρώτες ύλες με τις οποίες θα έφτιαχνε 1 μονάδα προϊόντος j)

- Shadow Prices

Έχουμε ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή

$$z_p = \max \underline{c}' \cdot \underline{x}$$
$$(P) \quad z(A, \underline{b}, \underline{c}) \quad \text{υπό} \quad A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \ge \underline{0}$$

Έστω $\underline{x}$ βέλτιστη λύση του P, με βασικό πίνακα B και έστω ότι η $\underline{x}$ είναι μη-εκφυλισμένη με τους δείκτες των βασικών μεταβλητών να είναι $\{B(1),\dots,B(m)\}$. Τότε, το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών της $\underline{x}$ είναι $\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b} > \underline{0}$.

Έστω ότι το b μεταβάλλεται κατά ένα διάνυσμα $\underline{\Delta}$, δηλαδή γίνεται $\underline{b}+\underline{\Delta}$, τέτοιο ώστε $B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta})>0$.

Η λύση $\underline{x}^{(\Delta)}$ με $x_B^{(\Delta)} = B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta})$ και $x_j^{(\Delta)}=0$ για $j\in\{B(1),\dots,B(m)\}$ είναι βασική εφικτή λύση του:

$$(z(A,\underline{b}+\underline{\Delta},\underline{c})) \quad z_P^{(\Delta)} = \max \underline{c}'\cdot\underline{x}$$
$$\text{υπό} \quad A\underline{x} = \underline{b}+\underline{\Delta}$$
$$\underline{x}\geq \underline{0}$$

(εφικτή γιατί $A\underline{x}^{(\Delta)} \underset{\uparrow}{=} B x_B^{(\Delta)} = \underline{b}+\underline{\Delta}$ ✓
οι άλλες συντεταγμένες 0)

Η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη για το αρχικό πρόβλημα.
Άρα, $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} A_j \leq 0$, $j=1,\dots,n$.

Παρατηρούμε ότι τα ελαττωμένα κόστη δεν εξαρτώνται από το $\underline{b}$.
Στο νέο πρόβλημα, η $\underline{x}^{(\Delta)}$ έχει ελαττωμένα κόστη, $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1}A_j \leq 0$, $j=1,\dots,n$. Οπότε η $\underline{x}^{(\Delta)}$ είναι βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος.
Οι βέλτιστες τιμές των α.σ. είναι:

$z_P = \underline{c}'\cdot\underline{x} = \underline{c}_B'\cdot x_B = \underline{c}_B' B^{-1}\underline{b}$

$z_P^{(\Delta)} = \underline{c}'\cdot\underline{x}^{(\Delta)} = \underline{c}_B'\cdot x_B^{(\Delta)} = \underline{c}_B' B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta}) = \underline{c}_B' B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B' B^{-1}\underline{\Delta} = z_P + \underline{w}'\underline{\Delta}$, όπου $\underline{w}$ η βέλτιστη λύση του δυϊκού του (P).

Άρα, $z(A,\underline{b}+\underline{\Delta},\underline{c}) = z(A,\underline{b},\underline{c}) + \underline{w}'\cdot\underline{\Delta}$.

Επομένως, μια μικρή διαταραχή του $\underline{b}$ κατά $\underline{\Delta}$ μεταβάλει τη βέλτιστη τιμή της α.σ. κατά $\underline{w}'\cdot\underline{\Delta}$.

Αν $\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ i-οστή θέση, τότε η βέλτιστη τιμή της α.σ. μεταβάλλεται κατά $\underline{w}'\underline{\Delta} = w_i\,\delta_i$.

Αν $\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Το w_1 δίνει ρυθμό μεταβολής της βέλτιστης τιμής της α.σ. για μικρές μεταβολές του σταθερού όρου του πρώτου περιορισμού.)

Αν $\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

Αν $\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$ δεν αλλάζει τίποτα, αυτό γιατί:

$\underline{a}_2' \underline{x} \leq b_2 \iff \underline{a}_2' \underline{x} + y_2 = b_2$

το $y_2 > 0 \Rightarrow \underline{a}_2' \underline{x} < b_2$

$\xrightarrow[\text{Συμπληρωμ.}]{\Theta.} w_2 = 0$ (άρα, ο δεύτερος περιορισμός του πρωτεύοντος δεν ήταν ενεργός, γι'αυτό δεν αλλάζει τίποτα)

(Αντίθετα, $1^{ος}$, $3^{ος}$ περιορισμός είναι ενεργοί, γι'αυτό έχουμε αλλαγές).

<u>Πρόταση</u>: Έστω ότι το πρόβλημα (P): $z_P(A, \underline{b}, \underline{c})$ σε κανονική μορφή έχει μη-εκφυλισμένη βέλτιστη ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B και βέλτιστο διάνυσμα δυϊκούν μεταβλητών $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$, τότε ισχύει ότι

$$\boxed{\frac{\partial z_P}{\partial b_i} = w_i \ , \ i = 1, 2, \dots, m}$$

Άρα, η δυϊκή μεταβλητή w_i στη βέλτιστη λύση εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της βέλτιστης τιμής της α.σ. για μικρές μεταβολές του b_i.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω (P) είναι το πρόβλημα παραγωγής. Τότε

w_i = ρυθμός μεταβολής του μέγιστου κέρδους όταν αλλάζει το απόθεμα της πρώτης ύλης i για μια μικρή ποσότητα.

w_i = μοναδιαία τιμή στην οποία είναι διατεθημένη η εταιρεία να αγοράσει επιπλέον μικρές ποσότητες πρώτης ύλης i.

Για τον παραπάνω λόγο, οι βέλτιστες τιμές του δυϊκού ονομάζονται shadow prices (σκιώδης τιμή).