ΕΚΠΑ Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Διερεύνηση Σφαλμάτων

Δεκέμβριος 2021

Ιορδάνης Ιωάννης

Καθηγήτρια: Μαριλένα Μητρούλη

Εφαρμογές σε julia

Επιλέχθηκαν κώδικες σε γλώσσα προγραμματισμού julia από το βιβλίο των Boyd – Vandenberghe
“ Εισαγωγή στην Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα “

Σκοπός
Η διερεύνηση σφαλμάτων, με χρήση ταυτοτήτων

Η διερεύνηση έγινε σε 2 κατηγορίες αριθμών κινητής υποδιαστολής, τους
- Float64 και
- BigFloat.

Διαμόρφωση κωδίκων

Οι κώδικες τροποποιήθηκαν σε ενιαία προγράμματα με παραμετροποίηση:

- διαστάσεων διανυσμάτων
- κατηγοριών αριθμών κινητής υποδιαστολής

και με δυνατότητα εκτέλεσης πολλών δοκιμών.

Στα ενιαία προγράμματα διατηρήθηκε ο τρόπος επιλογής των τυχαίων αριθμών που υπήρχε στους κώδικες του βιβλίου.

Διερεύνηση σφαλμάτων

Για τη μελέτη των σφαλμάτων χρησιμοποιήθηκαν

- Η ταυτότητα $α^2 - b^2 = (α+b)(α-b)$ και
- Η επιμεριστική ιδιότητα $β(α+b) = βα + βb$

Ερωτήματα:

1. Ο υπολογιστής κάνει σφάλμα;
2. Αν κάνει σφάλμα ποια είναι η ακριβής τιμή;
3. Πόσο είναι το σχετικό σφάλμα;
4. Ποιο μέλος της ταυτότητας δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα;

Διερεύνηση σφαλμάτων

Α. Διερεύνηση σφάλματος στην ταυτότητα $\alpha^2 - b^2 = (\alpha+b)(\alpha-b)$ λόγω στρογγύλευσης

Η μη μηδενική διαφορά των 2 μελών σίγουρα δηλώνει σφάλμα.

Η διερεύνηση έγινε σε 100,000 δοκιμές.

<u>Αλγόριθμος ελέγχου σφάλματος με καταμέτρηση μη μηδενικών διαφορών</u>
(υπολογισμός σχετικού σφάλματος, θεωρώντας σωστό το ένα μέλος)

1. Επιλογή τυχαίων αριθμών α και β,
2. Υπολογισμός του σχετικού σφάλματος των μελών της ταυτότητας και καταμέτρηση,
3. Υπολογισμός των μέσων τιμών των σφαλμάτων.

Διερεύνηση σφαλμάτων

Α. Διερεύνηση σφάλματος στην ταυτότητα $α^2 - b^2 = (α+b)(α-b)$ λόγω στρογγύλευσης

Α Π Ο Τ Ε Λ Ε Σ Μ Α Τ Α

ty = Float64
100000 έλεγχοι
με σίγουρο σφάλμα στην ταυτότητα: 44173
mean(relleft) = 4.2946866839318396e-16
mean(relright) = 4.294686683922106e-16
eps(ty) = 2.220446049250313e-16

Α Π Ο Τ Ε Λ Ε Σ Μ Α Τ Α

ty = BigFloat
100000 έλεγχοι
με σίγουρο σφάλμα στη ταυτότητα :48070
mean(relleft) = 3.411011247358638754619738635429857534441212506281792993710356916616604575043352e-77
mean(relright) = 3.411011247358638754619738635429857534441212506281792993710356916616604574024 93e-77
eps(ty) = 1.727233711018888925077270372560079914223200072887256277004740694033718360632485e-77

Διερεύνηση σφαλμάτων

Α. Διερεύνηση σφάλματος στην ταυτότητα $\alpha^2 - b^2 = (\alpha+b)(\alpha-b)$ λόγω στρογγύλευσης

1. Στις δοκιμές με **Float64** το σφάλμα εμφανίζεται σε ποσοστό **44%**. Αντίστοιχη εκτέλεση του προγράμματος με **BigFloat** δίνει σφάλμα **48%**.

2. Η διατήρηση του τρόπου επιλογής των α και b στον κώδικα – με τιμή μεταξύ 0 και 1 - επιφέρει μικρές διαφορές στα 2 μέλη της ταυτότητας, που εντοπίζονται με μεγαλύτερη ακρίβεια από τους BigFloat αριθμούς.

3. Το μέσο σχετικό σφάλμα είναι ίδιας τάξης με το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης σε κάθε κατηγορία αριθμών.

(Λόγος των μοναδιαίων σφαλμάτων στρογγύλευσης $\frac{eps(\text{Float64})}{eps(\text{BigFloat})} = 1.28 \times 10^{61}$)

Διερεύνηση σφαλμάτων

Α. Διερεύνηση σφάλματος στην ταυτότητα $α^2 - b^2 = (α+b)(α-b)$ λόγω στρογγύλευσης

Αλγόριθμος εκτίμησης σχετικού σφάλματος με χρήση των BigFloat αριθμών:

1. Επιλογή τυχαίων αριθμών α και b σε μορφή BigFloat.
2. Υπολογισμός των τιμών στα μέλη lhs και rhs με την ακρίβεια των BigFloat και μετατροπή τους σε τιμές Float64. Η τιμή που προκύπτει είναι ίδια και για τα 2 μέλη, θεωρείται ακριβέστερη, και την συμβολίζουμε ως V.
3. Μετατροπή των α και b από BigFloat σε αριθμούς Float64.
4. Νέος υπολογισμός στα 2 μέλη της ταυτότητας, που συμβολίζουμε με VL και VR
5. Υπολογισμός σχετικών σφαλμάτων για κάθε μέλος $\text{relleft} = \frac{|V - VL|}{|V|}$ και $\text{relright} = \frac{|V - VR|}{|V|}$
6. Υπολογισμός μέσων σχετικών σφαλμάτων του βήματος 5 και εγγραφών με μικρότερο σφάλμα μεταξύ των δύο μελών.

Διερεύνηση σφαλμάτων

Α. Διερεύνηση σφάλματος στην ταυτότητα $α^2 - b^2 = (α+b)(α-b)$ λόγω στρογγύλευσης

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

- -

100000 έλεγχοι
με σίγουρο σφάλμα στη ταυτότητα :0
mean(relleft) = 8.021103634221128e-16
mean(relright) = 6.406258351238179e-16
εγγραφές με ίσα σχετικά σφάλματα και στα 2 μέλη: 51345
εγγραφές με μικρότερο σχετικό σφάλμα στο δεξιό μέλος: 26523
εγγραφές με μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα στο δεξιό μέλος: 22132

Η σύγκριση των 2 σχετικών σφαλμάτων δείχνει ότι οι υπολογισμοί με τον τύπο (α+b)(α−b) είναι ακριβέστεροι.

Διερεύνηση σφαλμάτων

Β. Διερεύνηση σφάλματος στην επιμεριστική ιδιότητα στη σχέση $β(α+b) = βα+βb$

Ακολουθήθηκε παρόμοια διαδικασία με το παράδειγμα της ταυτότητας

1. Εκτελέστηκαν 10,000 δοκιμές.
2. Υποθέτοντας σωστή την τιμή του ενός μέλους και προσεγγιστική την άλλη, έγινε εκτίμηση του σχετικού σφάλματος με χρήση νόρμας Φρομπένιους.
3. Υπολογίσθηκαν οι μέσες τιμές των σχετικών σφαλμάτων στρογγύλευσης που είναι πολύ ικανοποιητικές (μικρότερες από την μονάδα σφάλματος στρογγύλευσης).

Διερεύνηση σφαλμάτων

B. Διερεύνηση σφάλματος στην επιμεριστική ιδιότητα στη σχέση β(α+b) = βα+βb

Α Π Ο Τ Ε Λ Ε Σ Μ Α Τ Α
(ty, m) = (Float64, 3) 10000 έλεγχοι με σίγουρο σφάλμα: 5500
νόρμα διαφοράς mean(relnr) = 5.25397987175995e-17 maximum(relnr) = 2.181431566609098e-16 eps(ty) = 2.220446049250313e-16

***Σίγουρο σφάλμα σε ποσοστό 55% με Float64*.**

Διερεύνηση σφαλμάτων

Β. Διερεύνηση σφάλματος στην επιμεριστική ιδιότητα στη σχέση β(α+b) = βα+βb

Α Π Ο Τ Ε Λ Ε Σ Μ Α Τ Α

(ty, m) = (BigFloat, 3)
10000 έλεγχοι
με σίγουρο σφάλμα :6738

νόρμα διαφοράς
mean(nr)=5.658373606741561354960284438965671136126081186937140118752051778851626589194469e-78
maximum(nr)=1.831124201373353097106717314167241385208932363228524573505710349305804699531122e-77
eps(ty)=1.727233711018888925077270372560079914223200072887256277004740694033718360632485e-77

Σίγουρο σφάλμα σε ποσοστό 67% με BigFloat

Διερεύνηση σφαλμάτων

B. Διερεύνηση σφάλματος στην επιμεριστική ιδιότητα στη σχέση β(α+b) = βα+βb

Παρατήρηση

Τα διανύσματα α και b έχουν ομόσημες συνιστώσες (από κώδικα βιβλίου), άρα δεν εμφανίζουν σφάλμα καταστροφικής διαγραφής. Επομένως και οι 2 πράξεις β(α+ b) και αβ+ bβ θεωρούνται ασφαλείς.

Διερεύνηση σφαλμάτων

B. Διερεύνηση σφάλματος στην επιμεριστική ιδιότητα στη σχέση β(α+b) = βα+βb

Η β(α-b) = βα-βb δίνει:

```
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Float64, m) = (Float64, 3)
10000 έλεγχοι
με σίγουρο σφάλμα :0
------------------------------------------------------------------------------------------
νόρμα διαφοράς
mean(leftnr) =   1.2359008464964664e-16
mean(rightnr) = 1.6256475980026382e-16
eps(Float64) =    2.220446049250313e-16
εγγραφές με ίσα σχετικά σφάλματα και στα 2 μέλη:                1057
εγγραφές με μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα στο αριστερό μέλος: 2924
εγγραφές με μικρότερο    σχετικό σφάλμα στο αριστερό μέλος: 6019
```

Αλλάζοντας το πρόσημο του b στον κώδικα, σε 10000 ελέγχους εμφανίζεται μικρότερο σφάλμα στο β(α-b) από ότι στο αβ – bβ.