R.L. Finney · M.D. Weir · F.R. Giordano

THOMAS
Απειροστικός λογισμός

Απόδοση στα ελληνικά – Επιστημονική επιμέλεια
Μανώλης Αντωνογιαννάκης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Βασισμένο στο πρωτότυπο του

George B. Thomas, Jr.

Massachusetts Institute of Technology

Αναθεωρημένο από τους

Ross L. Finney

Maurice D. Weir

Naval Postgraduate School

και

Frank R. Giordano

Απόδοση στα ελληνικά – επιστημονική επιμέλεια

Μανώλης Αντωνογιαννάκης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Ιδρυτική δωρεά Παγκρητικής Ενώσεως Αμερικής

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑΣ
Ηράκλειο Κρήτης, Τ.Θ. 1527, 71110. Τηλ.: 2810 391097, Fax: 2810 391085
Αθήνα: Κλεισόβης 3, 10677. Τηλ.: 210 3849020-22, Fax: 210 3301583
e-mail: info@cup.gr
www.cup.gr

ΣΕΙΡΑ: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ: ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΤΡΑΧΑΝΑΣ

Τίτλος πρωτοτύπου: Thomas' *Calculus*, Tenth Edition

Πρώτη έκδοση σε δύο τόμους: Μάιος 2004
Πρώτη έκδοση σε ενιαίο τόμο: Μάιος 2012
Απόδοση στα ελληνικά & επιστημονική επιμέλεια: Μανώλης Αντωνογιαννάκης, Ph.D.
Τελικός έλεγχος μετάφρασης: Κανάρης Τσίγκανος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Στοιχειοθεσία – σελιδοποίηση: Παρασκευή Βλάχου (Π.Ε.Κ.)
Εκτύπωση: Α. Ανδρεου

ISBN: 978-960-524-182-7

Από τον Πρόλογο της 1ης ελληνικής έκδοσης

[...] Λέγεται ότι τα Μαθηματικά – το αποκορύφωμα αυτό του καθαρού λόγου – έχουν αποτελέσει όχι μόνο την κύρια οδό, την άγουσα σε όλους σχεδόν τους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας, αλλά και τη σαφέστερη γλώσσα της διεπιστημονικής επικοινωνίας. Γι' αυτό και η εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της σύγχρονης διδασκαλίας τους, και ίσως το αλφαβητάρι της ανώτερης εκπαίδευσης στις βασικές και τις εφαρμοσμένες επιστήμες. Όμως, ενώ η ελληνική βιβλιογραφία δεν υστερεί σε εισαγωγικά συγγράμματα Απειροστικού Λογισμού, με δυσκολία θα ανακάλυπτε κανείς κάποιο βοήθημα που να εκπληρώνει δύο βασικές προϋποθέσεις: να είναι προσιτό όχι μόνον στον φοιτητή των Μαθηματικών αλλά και στον φοιτητή άλλων επιστημών, και να έχει ευρύτητα παραδειγμάτων και εφαρμογών του Λογισμού από όλους τους κλάδους της σύγχρονης επιστήμης.

Το κλασικό σύγγραμμα των Thomas και Finney εκπληρώνει ακριβώς αυτές τις προϋποθέσεις. Με μια παρουσίαση του Απειροστικού Λογισμού προσεκτικά ζυγισμένη ανάμεσα στην απαραίτητη μαθηματική αυστηρότητα και την ανάγκη να γίνει κατανοητό από κάποιον αμύητο, καταφέρνει χωρίς σημαντικούς συμβιβασμούς να εστιάσει στη χρυσή τομή της βασικής μαθηματικής παιδείας φοιτητών των Μαθηματικών και της Φυσικής, της επιστήμης των Υπολογιστών και του Πολυτεχνείου, της Χημείας και της Βιολογίας, καθώς επίσης και σπουδαστών των Οικονομικών και Κοινωνικών επιστημών με ευρύτερα ενδιαφέροντα. Με έναν πραγματικά εντυπωσιακό αριθμό παραδειγμάτων και προβλημάτων, επιλεγμένων από κάθε εφαρμογή της επιστήμης – από την εξερεύνηση του μακρινού διαστήματος και τα περιβαλλοντικά προβλήματα των ηπερηχητικών πτήσεων έως τη δυναμική των χημικών αντιδράσεων, την απορρόφηση του σακχάρου από το αίμα και τους νόμους αύξησης πληθυσμών και βιολογικών μικροοργανισμών, καθώς και θέματα διαχείρισης επιχειρήσεων και ανατοκισμού κεφαλαίων – και εμπλουτισμένο με εκπαιδευτικά προγράμματα για προσωπικούς υπολογιστές που συνοδεύουν σχεδόν κάθε παράγραφο, το βιβλίο επιτυγχάνει να δώσει στον μελετητή του κλασικού αυτού θέματος των Μαθηματικών τον ενθουσιασμό που πηγάζει από τη συνειδητοποίηση της ενότητας της επιστήμης, που τελευταία ολοένα και περισσότερο αναδεικνύεται. Αυτά τα δύο βασικά προσόντα έχουν καθιερώσει τα τελευταία 40 χρόνια το βιβλίο των Thomas και Finney σαν το απαραίτητο βοήθημα που διδάσκεται στα καλύτερα Πανεπιστήμια και Πολυτεχνεία των Η.Π.Α. – όπως το Harvard και το MIT. [...]

Ηράκλειο, Ιανουάριος 1993 *Κανάρης Τσίγκανος*

Πρόλογος του μεταφραστή

Η επιτυχία που γνώρισε η πρώτη έκδοση του *Απειροστικού Λογισμού* των Thomas και Finney στην Ελλάδα από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης το 1992 (μετάφραση της 6ης αμερικανικής έκδοσης του 1986), μας έπεισε ότι η επανέκδοση αυτού του κλασικού πλέον συγγράμματος ήταν επιβεβλημένη. Στα δώδεκα χρόνια που μεσολάβησαν, το αμερικανικό πρωτότυπο σημείωσε άλλες τέσσερις εκδόσεις, κατά τις οποίες μεταμορφώθηκε και μετεξελίχθηκε σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μιλάμε σήμερα για ένα ριζικά διαφορετικό βιβλίο, με εντελώς διαφορετική διάρθρωση της ύλης, με προσθαφαιρέσεις ολόκληρων ενοτήτων και κεφαλαίων, και με μια γενναία πλέον εισαγωγή στην υπολογιστική τεχνολογία ως απαραίτητο εργαλείο για την κατανόηση του απειροστικού λογισμού.

Από την άλλη, κοινό και θεμελιακό γνώρισμα όλων των εκδόσεων που έχει γνωρίσει το πρωτότυπο είναι η αίσθηση ότι το βιβλίο αυτό αποτελεί βασικό εργαλείο κατανόησης του απειροστικού λογισμού *για φοιτητές από ολόκληρο το φάσμα των εφαρμοσμένων επιστημών*. Υπερβαίνει, δηλαδή, τα παραδοσιακά στεγανά που ήθελαν να διδάσκονται άλλο είδος λογισμού οι μαθηματικοί, άλλο οι φυσικοί, άλλο οι μηχανικοί, άλλο οι βιολόγοι, άλλο οι χημικοί, άλλο οι οικονομολόγοι κ.ο.κ. Οι συγγραφείς το επιτυγχάνουν αυτό αφ' ενός τηρώντας μια σχετική οικονομία στην παράθεση αποδείξεων θεωρημάτων (κάποιες παρατίθενται στο κυρίως κείμενο, άλλες στα παραρτήματα, και για πολλές άλλες ο αναγνώστης παραπέμπεται σε πιο προχωρημένα συγγράμματα)· αλλά κυρίως παραθέτοντας μια πολύ πλούσια επιλογή εφαρμογών, λυμένων παραδειγμάτων και ασκήσεων που αντλούν τη θεματολογία τους από τον πραγματικό κόσμο και από το σύνολο των εφαρμοσμένων επιστημών. Πρόκειται για την «υπογραφή» των Thomas και Finney και τη συνταγή επιτυχίας ενός βιβλίου που εξακολουθεί να μορφώνει γενεές επιστημόνων και μηχανικών σε δεκάδες χώρες εδώ και δεκαετίες.

Η παρούσα έκδοση εμβαθύνει στην κύρια κατεύθυνση της πρώτης ελληνικής έκδοσης —διακλαδικότητα του Λογισμού και πληθώρα εφαρμογών—, ενώ ταυτόχρονα περιλαμβάνει προσθήκες και βελτιώσεις επί της ουσίας, όπως:

- Η ύλη παρουσιάζεται τώρα σε 14 κεφάλαια, έναντι 18 κεφαλαίων της 1ης έκδοσης. Οι συγγραφείς έχουν προβεί σε τέτοιο βαθμό ανακατάταξης της ύλης, προσθήκης νέων ενοτήτων και αφαίρεσης άλλων, ώστε να είναι αδύνατη η αντιστοίχιση των δύο εκδόσεων για περισσότερες από μερικές, το πολύ, σελίδες: έχει αλλάξει ριζικά η ροή παρουσίασης των εννοιών.

- Ο ίδιος βαθμός «μεταμόρφωσης» εμφανίζεται στις λυμένες εφαρμογές, στα παραδείγματα και στις ασκήσεις στο τέλος κάθε ενότητας.

- Η παρούσα έκδοση περιέχει έναν μεγάλο αριθμό υπολογιστικών εφαρμογών που λύνονται με τη χρήση κάποιου συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας (π.χ. Mathematica ή Maple) οι οποίες απουσιάζουν από την προγενέστερη έκδοση. Με την έλευση της τεχνολογίας των υπολογιστών στην εκπαίδευση (τώρα πλέον σχεδόν κάθε φοιτητής διαθέτει πρόσβαση στο Διαδίκτυο και σε κάποιο σύ-

στημα τύπου Mathematica ή Maple, ή τουλάχιστον σε υπολογιστή γραφικών), οι εφαρμογές αυτές μπορούν να αποτελέσουν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών και την όξυνση της αντίληψης του αναγνώστη.
- Τέλος, στο ηλεκτρονικό συμπλήρωμα που είναι διαθέσιμο από την ιστοσελίδα του βιβλίου στο www.cup.gr περιέχονται βιογραφικά και ιστορικά στοιχεία για μεγάλες μορφές των Μαθηματικών.

Όλα τα παραπάνω σκιαγραφούν σε αδρές γραμμές τις διαφορές μεταξύ των δύο εκδόσεων του πρωτοτύπου –της 6ης από την 10η– οι οποίες επιβάλλουν μια νέα ελληνική του έκδοση και, βεβαίως, μια αντίστοιχη νέα μετάφραση από μηδενική βάση.

Ξεκινώντας, λοιπόν, τον Σεπτέμβριο του 2001 την απόδοση στα ελληνικά της 10ης αμερικανικής έκδοσης του *Απειροστικού Λογισμού*, θέσαμε ως στόχο να παραχθεί μια ελληνική έκδοση η οποία (α) δεν θα είχε πολλά να ζηλέψει από την πρωτότυπη έκδοση, και (β) θα στεκόταν στο ύψος των προτύπων ποιότητας που έχουν πλέον καθιερώσει οι Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης στον χώρο του πανεπιστημιακού συγγράμματος στην Ελλάδα.

Μετά από τρία χρόνια προσπάθειας (όχι αδιάλειπτης), και μέσα από μια προσωπική και επαγγελματική διαδρομή που μου δίδαξε πολλά, καταθέτω σήμερα το πόνημα που πόνεσα και με πόνεσε στα χέρια σας. Δεν ισχυρίζομαι ότι είναι άψογο από γλωσσικής πλευράς, απόδοσης της ορολογίας και τυπογραφικών λαθών. Αλλά αισθάνομαι ότι ανταποκρίνεται με αξιοπρέπεια στους στόχους που αρχικά είχαμε θέσει.

Οι άξονες στους οποίους κινήθηκα είναι οι εξής:

Ορολογία: Βασίστηκα κυρίως σε εξειδικευμένα λεξικά (μαθηματικών, φυσικής, οικονομικών, κ.λπ.). Όπου δεν υπήρχαν κοινώς αποδεκτοί από τους λεξικογράφους όροι (ή όπου για διάφορους λόγους δεν με έπειθαν οι όροι που είχαν προταθεί) προσπάθησα να μελετήσω βιβλία των Π.Ε.Κ. και άλλων αξιόλογων ελλήνων εκδοτών και συγγραφέων προκειμένου να βρω εναλλακτικές προτάσεις. Στην πορεία άρχισα να επεκτείνω τα αναγνώσματά μου σε συγγράμματα ολοένα και πιο απόμακρα από το αντικείμενο του λογισμού (πάντοτε όμως με την προϋπόθεση να ήταν καλογραμμένα). Η όλη διαδικασία με βοήθησε να διαμορφώσω ένα γλωσσικό περιβάλλον στο οποίο άρχισα σιγά-σιγά να κινούμαι με αυτοπεποίθηση και ελευθερία.

Στο σημείο αυτό, οφείλω να αναφερθώ στο γλωσσικό «εργαστήρι» που αθόρυβα και άτυπα, προς το παρόν, έχουν αρχίσει να «στήνουν» οι Π.Ε.Κ.: μια εμπειρία συσσωρευμένη από το δεκαπενταετές και πλέον δούλεμα της γλώσσας στα αμφιθέατρα και στα βιβλία η οποία, όταν θα αποκρυσταλλωθεί σε μια εύχρηστη βάση δεδομένων, θα αποτελεί σημείο αναφοράς για τον μελλοντικό μεταφραστή, πανεπιστημιακό δάσκαλο και ερευνητή, εντός και εκτός των συνόρων της χώρας μας. Έμαθα λοιπόν πολλά από συζητήσεις σε θέματα ορολογίας (και γλωσσικού ήθους γενικότερα) που είχα με τον Στέφανο Τραχανά, τον Γιάννη Παπαδόγγονα, τον Νίκο Κουμπιά και τον Πέτρο Δήτσα. Ένα παράδειγμα είναι η ιδέα των «γλωσσικών πειραμάτων» (στην οποία με μύησε ο Στέφανος) ως μέθοδος όξυνσης του γλωσσικού αισθητηρίου και απόρριψης άστοχων όρων. Η κύρια ιδέα είναι πολύ απλή και συνήθως πολύ αποτελεσματική: πειραματιζόμαστε πάνω σε έναν υποψήφιο όρο, ερευνώντας για παραπλήσιους (ηχητικά και γραμματικά) όρους στη γλώσσα μας (ή και στη γλώσσα του πρωτοτύπου), οι οποίοι μας είναι οικείοι (δηλαδή τους έχουμε αφομοιώσει), προκειμένου να διαπιστώσουμε αν ο υποψήφιος όρος δείχνει να εντάσσεται σε κάποιο γενικότερο πλαίσιο, αν δηλαδή δείχνει να ακολουθεί κάποιον κανόνα: στην περίπτωση αυτή, υπάρχει σοβαρή πιθανότητα να είναι ορθή η επιλογή του.

Έτσι, παραδείγματος χάριν, καταλήγουμε στην απόδοση «δικτυότοπος» αντί «δικτυοτόπος», «παραμετρικοποίηση» αντί «παραμετροποίηση», και κατανοούμε πότε πρέπει να πούμε «μετάλλινος» και όχι «μεταλλικός», πότε «γραμμωτός» και όχι «γραμμικός», κ.ο.κ.

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι με τη μέθοδο αυτή όχι μόνο οδηγούμαστε συχνότατα στον ορθό όρο, αλλά, πολύ σπουδαιότερο, αρχίζουμε να ψηλαφίζουμε εμπειρικά (και να εμπεδώνουμε στη συνέχεια ορθολογικά) τους κανόνες της γλώσσας μας που η ενστικτώδης καθημερινή χρήση έχει καλύψει με λήθη. Η μέθοδος εύρεσης της λύσης έχει πολύ μεγαλύτερη αξία από την ίδια τη λύση.

Ωστόσο, μερικές φορές καλούμαστε να παραβιάσουμε τον «κανόνα» που ανακαλύπτουμε, προκειμένου να μην διαπράξουμε μια γλωσσική βαρβαρότητα. Και στο σημείο αυτό ακριβώς είναι που λειαίνεται το γλωσσικό ένστικτο, εκλεπτυνόμενο με τη διαρκή άσκηση και τον καημό της γλώσσας.

Έξω από το περιβάλλον των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, ο άνθρωπος στον οποίο οφείλω το μεγαλύτερο ευχαριστώ, είναι ο Μανόλης Μαραγκάκης, καθηγητής μαθηματικών στο Τ.Ε.Ι. Κρήτης. Ένας παθιασμένος με την αυστηρή σκέψη και την ακριβή έκφραση μαθηματικός, τον οποίο ευτύχησα να έχω δάσκαλο και φίλο, 20 χρόνια τώρα. Περάσαμε μαζί ώρες και ώρες συζητώντας για τα μαθηματικά και την ορολογία, αναζητώντας όρους στη βιβλιογραφία και διερευνώντας πιθανές λύσεις σε προβλήματα γλώσσας και έκφρασης που προέκυπταν κατά τη μετάφραση.

Ευχαριστώ ακόμη τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Κανάρη Τσίγγανο –πρώτο «πατέρα» του βιβλίου– για την τελική ανάγνωση του χειρογράφου.

Όλοι οι παραπάνω με βοήθησαν να αποφύγω πολλές κακοτοπιές στην ορολογία και στην έκφραση. Τα όποια λάθη παραμένουν αποτελούν δική μου ευθύνη, όμως το βιβλίο θα ήταν κατά πολύ ατελέστερο χωρίς τη συνδρομή τους. Θα ήμουν ευγνώμων στον αναγνώστη για υποδείξεις λαθών και αβλεψιών, άστοχης ορολογίας και γλωσσικών ατοπημάτων, ώστε να διορθωθούν στην επόμενη έκδοση.

Μονάδες: Έχοντας κατά νου τον Έλληνα αναγνώστη, μετέτρεψα παντού τις μονάδες στο Διεθνές Σύστημα. Πρόκειται συνολικά για πάνω από 130 λυμένα παραδείγματα, εφαρμογές και ασκήσεις. Η μετατροπή δεν ήταν «τυφλή», δηλαδή απλή μετατροπή των ποδιών σε μέτρα, των μιλίων σε χιλιόμετρα, των λιβρών σε κιλά, των βαθμών Fahrenheit σε Κελσίου κ.λπ. Άλλαξα τους αριθμούς ώστε οι νέες ποσότητες να διατηρήσουν τη φυσική σημασία τους στο νέο πρόβλημα αλλά και για να βγαίνουν «στρωτές» οι απαντήσεις, οι οποίες παρατίθενται στο τέλος του βιβλίου.

Προτού κλείσω το σημείωμα αυτό, θέλω να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ στη Διονυσία Δασκάλου, γενική επιμελήτρια των Π.Ε.Κ. και κινητήριο δύναμη του βιβλίου ετούτου· η Διονυσία επέβλεψε τη διαδικασία «παραγωγής» του βιβλίου και τον συντονισμό όλων των επιμέρους παραγόντων που προσδιορίζουν το τελικό αποτέλεσμα. Την ευχαριστώ επίσης για την ιώβειο υπομονή της με τις καθυστερήσεις που προξένησα στην έκδοση, καθώς και για την όλη χαρά που μου έδωσε η συνεργασία μαζί της (και μαζί με όλα τα «παιδιά των Π.Ε.Κ.») κατά το διάστημα που δούλευα κοντά τους για το βιβλίο.

Τέλος, ας μου επιτραπεί να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Ιωάννη και Χρυσούλα, για όλη τους την υποστήριξη και πίστη σε μένα, τα δύσκολα αυτά χρόνια που ενώ δούλευα πάνω στον *Λογισμό*, προσπαθούσα ταυτόχρονα να στεριώσω στην Κρήτη τη ζωή μου και τα οράματά μου μετά από δεκαετή παραμονή στο εξωτερικό. Τελικά, από μια μαγική συγκυρία της τύχης (ή από μια βαθύτερη αναγκαιότητα) βρέθηκα ξανά μακριά από την Ελλάδα, αλλά πάλι σ' ένα εκδοτικό περιβάλλον: ως επιμελητής στο περιοδικό *Physical Review* στη Νέα Υόρκη. Όμως, «ο Έλληνας επιστρέφει στον τόπο του από τον πιο μακρύ δρόμο», όπως λέει κι ο ποιητής. Φαίνεται πως η ώρα της δικής μου επιστροφής δεν είχε σημάνει ακόμη…

Νέα Υόρκη, Ιούνιος 2004 *Μανώλης Αντωνογιαννάκης*

Περιεχόμενα

10 Διανύσματα και κίνηση στον χώρο

11 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και οι παράγωγοί τους

12 Πολλαπλά ολοκληρώματα

13 Ολοκλήρωση διανυσματικών πεδίων..

Παραρτήματα

Ασκήσεις με συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας

0 Προκαταρκτικά

0.7 Προσαρμογή καμπυλών σε πειραματικά δεδομένα, ανάλυση σφαλμάτων, προβλέψεις και βελτίωση του μοντέλου όπου αυτό είναι εφικτό.

1 Όρια και συνέχεια

1.1 Σύγκριση μεταξύ γραφικών εκτιμήσεων ορίων και συμβολικών υπολογισμών ορίων που εκτελούνται με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας. Διερεύνηση του αυστηρού ορισμού του ορίου με γραφική εύρεση του δ για δεδομένο ε.

1.3 Διερεύνηση των ασυμπτώτων και της συμπεριφοράς γραφικής παράστασης καθώς $x \to \pm\infty$.

1.5 Γραφική και αριθμητική διερεύνηση των μέσων ρυθμών μεταβολής και των εφαπτόμενων ευθειών.

2 Παράγωγοι

2.1 Γραφική διερεύνηση σύγκλισης των τεμνουσών ευθειών. Εύρεση παραγώγου συναρτήσεως με χρήση του ορισμού. Διερεύνηση της σχέσεως μεταξύ των γραφημάτων των f και f' και σχεδίαση εφαπτόμενων ευθειών.

2.2 Διερεύνηση των παραγώγων με κινούμενα γραφικά, για τις συναρτήσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης.

2.4 Διερεύνηση της αρμονικής ταλάντωσης και της φθίνουσας ταλάντωσης.

2.5 Διερεύνηση τριγωνομετρικών «πολυωνυμικών» προσεγγίσεων για πριονωτές και κλιμακωτές συναρτήσεις. Γραφική σχεδίαση καμπυλών που ορίζονται παραμετρικά, σε κοινό γράφημα με μια καθορισμένη εφαπτόμενη ευθεία.

2.6 Εύρεση παραγώγου για πεπλεγμένες συναρτήσεις. Σχεδίαση καμπυλών πεπλεγμένων συναρτήσεων σε κοινό γράφημα με μια καθορισμένη εφαπτόμενη ευθεία.

3 Εφαρμογές των παραγώγων

3.1 Εύρεση απόλυτων ακροτάτων από γραφική και αριθμητική ανάλυση των f και f'.

3.2 Γραφική σχεδίαση λύσεων διαφορικών εξισώσεων.

3.3 Διερεύνηση οικογενειών πολυωνύμων τρίτου και τέταρτου βαθμού και λογιστικών συναρτήσεων.

3.5 Μελέτη αντοχής και δυσκαμψίας δοκαριού και της σχέσης αυτών με σημεία καμπής. Διερεύνηση κωνικών όγκων που παράγονται από κυκλικό δίσκο. Διερεύνηση τριγώνου περιγεγραμμένου σε έλλειψη.

3.6 Εύρεση γραμμικοποιήσεων. Διερεύνηση του απόλυτου σφάλματος γραμμικοποίησης, συγκρίνοντας το γράφημα της γραμμικοποίησης με αυτό της συναρτήσεως.

3.7 Εύρεση σημείων μηδενισμού συναρτήσεων με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Προσεγγιστικός υπολογισμός των αριθμών $\sqrt{2}$, π, και e.

4 Ολοκλήρωση

4.1 Επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών.

4.3 Εύρεση μέσης τιμής της $f(x)$ και του σημείου (ή των σημείων) όπου προκύπτει η τιμή αυτή. Προσεγγιστικός υπολογισμός όγκων με πεπερασμένα αθροίσματα.

4.4 Διερεύνηση αθροισμάτων Riemann και των ορίων τους.

4.5 Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ και των $f(x)$ και $f'(x)$. Ανάλυση της $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$.

4.7 Αριθμητικός υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων.

5 Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

5.1 Εύρεση όγκων στερεών εκ περιστροφής (που προκύπτουν από περιστροφή ως προς τον άξονα x κυκλικών και δακτυλιοειδών διατομών).

5.3 Εκτίμηση μήκους καμπυλών οι οποίες ορίζονται ρητά ή παραμετρικά.

5.4 Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ έργου και κινητικής ενέργειας.

6 Υπερβατικές συναρτήσεις και διαφορικές εξισώσεις

6.1 Διερεύνηση της γραμμικοποίησης του $\ln(1 + x)$ στο $x = 0$.

6.2 Διερεύνηση των γραμμικοποιήσεων των e^x, 2^x, και $\log_3 x$. Διερεύνηση των αντίστροφων συναρτήσεων και των παραγώγων τους.

6.4 Μελέτη της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει τη χρονική μεταβολή μιας ποσότητας γλυκόζης που χορηγείται ενδοβλεβίως στο αίμα ασθενούς. Σχεδίαση πεδίων κλίσεως και καμπυλών λύσεως για διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις.

6.6 Σχεδίαση πεδίων κλίσεως και μελέτη λύσεων της τροποποιημένης λογιστικής εξίσωσης. Εύρεση αριθμητικών λύσεων με χρήση της μεθόδου Euler και της βελτιωμένης μεθόδου Euler. Γραφική, αναλυτική και αριθμητική διερεύνηση λύσεων σε προβλήματα αρχικών τιμών και σύγκριση των επιμέρους αποτελεσμάτων.

7 Τεχνικές ολοκλήρωσης, ο κανόνας του L'Hôpital και γενικευμένα ολοκληρώματα

7.5 Χρήση συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας για την εκτέλεση ολοκλήρωσης. Ένα παράδειγμα ολοκληρώματος που δεν μπορεί να υπολογιστεί με σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας. Ολοκλήρωση Monte Carlo.

7.7 Διερεύνηση σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων που περιέχουν τον όρο $x^P \ln x$.

Υπολογιστικές διερευνήσεις

Οι ασκήσεις αυτές αριθμούν περισσότερες από 200, και έχουν λυθεί στα εγχειρίδια λύσεων [της αμερικανικής έκδοσης] τόσο με τη *Mathematica* όσο και τη *Maple*. Επιπλέον, υπάρχουν κατάλληλες εφαρμογές *Mathematica* και *Maple* στον δικτυότοπο. Οι τελευταίες έχουν σχεδιαστεί αποσκοπώντας στην ανάπτυξη της γεωμετρικής διαίσθησης και στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, των μεθόδων και των εφαρμογών του απειροστικού λογισμού. Εικονίδια με την ένδειξη CD-ROM/Δικτυότοπος εμφανίζονται στα αντίστοιχα σημεία στο κείμενο.

Στο κείμενο παρατίθενται ακόμη σημειώσεις που ενθαρρύνουν τον φοιτητή να διερευνήσει τις έννοιες με υπολογιστή γραφικών, για να αρχίσει έτσι να αντιλαμβάνεται πότε η εφαρμογή της τεχνολογίας αποβαίνει μαθησιακά χρήσιμη και πότε αποπροσανατολιστική.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία

Ιστορικές αναφορές και βιογραφίες

Η παρουσίαση της ανθρώπινης πλευράς της μαθηματικής επιστήμης κατά την πορεία της εξέλιξής της μορφώνει και εκλεπτύνει την αίσθηση του φοιτητή. Στις προηγούμενες εκδόσεις είχαμε ενθέσει στο κείμενο αναφορές που περιέγραφαν την προέλευση των διάφορων ιδεών, τις συγκρούσεις σχετικά με την πατρότητά τους, καθώς και ενδιαφέρουσες προεκτάσεις σε σύγχρονα αντικείμενα όπως τα μορφοκλασματικά (φράκταλ) και το χάος. Στην παρούσα έκδοση έχουμε διευρύνει τις αναφορές αυτές, και τις έχουμε ενσωματώσει στο CD-ROM και στον δικτυότοπο, όπως δείχνουν τα αντίστοιχα εικονίδια στο κείμενο, αφήνοντας έτσι περισσότερο χώρο στο περιθώριο κάθε σελίδας για σημειώσεις του φοιτητή ή για δικά μας σχόλια.

Οι διαφορετικές όψεις του βιβλίου

Τα μαθηματικά είναι μια αυστηρή και όμορφη γλώσσα

Ο λογισμός αποτελεί μια από τις ισχυρότερες πνευματικές κατακτήσεις του ανθρώπου. Ένας από τους στόχους του βιβλίου τούτου είναι να εμπνεύσει στον φοιτητή την εκτίμηση της ομορφιάς του απειροστικού λογισμού. Όπως και στις προηγούμενες εκδόσεις, σταθήκαμε προσεκτικοί στο να πούμε μονάχα ό,τι είναι αληθές και μαθηματικά στηρίξιμο. Κάθε ορισμός, θεώρημα, πόρισμα και απόδειξη έχει αναθεωρηθεί με γνώμονα τη σαφήνεια και τη μαθηματική ορθότητα.

Ανεξάρτητα από το αν η διδασκαλία του αντικειμένου γίνεται με το παραδοσιακό ύφος των διαλέξεων ή στο υπολογιστικό εργαστήριο με μεθόδους αριθμητικών και γραφικών διερευνήσεων, οι έννοιες και οι τεχνικές του απειροστικού λογισμού πρέπει να μεταδοθούν με σαφήνεια και ακρίβεια.

Ο φοιτητής θα συνεχίσει να μαθαίνει από το βιβλίο για πολλά χρόνια ακόμη

Από πρόθεση έχουμε συμπεριλάβει πολύ περισσότερη ύλη στο βιβλίο απ' όση μπορεί να διδάξει οποιοσδήποτε διδάσκων. Έτσι, ο φοιτητής μπορεί να συνεχίσει να μαθαίνει λογισμό από το βιβλίο πολύ μετά το πέρας του συγκεκριμένου μαθήματος που παρακολουθεί, ενώ ο επαγγελματίας μηχανικός και ο επιστήμονας θα μπορεί να ανατρέχει στο βιβλίο όποτε οι περιστάσεις το απαιτήσουν.

Στην αγγλική γλώσσα διατίθενται από τον εκδότη της πρωτότυπης έκδοσης (Addison-Wesley) βοηθήματα για τον διδάσκοντα και τον φοιτητή. Αναλυτικές πληροφορίες για αυτά μπορεί να βρει ο αναγνώστης στη διεύθυνση http://www.awl.com/thomas αλλά και στον δικτυότοπο των ΠΕΚ (www.cup.gr).

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς εκφράζουν τις ευχαριστίες τους για την πολύτιμη συνεισφορά των παρακάτω συναδέλφων που έκαναν διάφορες χρήσιμες υποδείξεις:

Επιμέλεια κειμένου, τελική ανάγνωση χειρογράφου

Tuncay Aktosun, North Dakota State University
Andrew G. Bennett, Kansas State University
Terri A. Bourdon, Virginia Polytechnic Institute and State University
Mark Brittenham, University of Nebraska, Lincoln
Bob Brown, Essex Community College
David A. Edwards, University of Delaware
Mark Farris, Midwestern State University
Kim Jongerius, Northwestern College
Jeff Knisley, East Tennessee State University
Slawomir Kwasik, Tulane University
Jeuel LaTorre, Clemson University
Daniel G. Martinez, California State University, Long Beach
Sandra E. McLaurin, University of North Carolina, Wilmington
Stephen J. Merrill, Marquette University
Shai Neumann, Brevard Community College
Linda Powers, Virginia Polytechnic Institute and State University
William L. Siegmann, Rensselaer Polytechnic Institute
Rick L. Smith, University of Florida
James W. Thomas, Colorado State University
Abraham Ungar, North Dakota State University
Harvey E. Wolff, University of Toledo

Επιμέλεια υπολογιστικών εφαρμογών

Mark Brittenham, University of Nebraska, Lincoln
Warren J. Burch, Brevard Community College, Cocoa
Lyle Cochran, Whitworth College
Philip S. Crooke III, Vanderbilt University
Linda Powers, Virginia Polytechnic Institute and State University
David Ruch, Metropolitan State College of Denver
Paul Talaga, Weber State University
James W. Thomas, Colorado State University
Robert L. Wheeler, Virginia Polytechnic Institute and State University

Ἀλλου τύπου συνεισφορές

Ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν οι Colonel D. Chris Arney, John L. Scharf, και Marie M. Vanisko που μοιράστηκαν μαζί μας τις τεχνικές και υπολογιστικές τους γνώσεις προκειμένου να κάνουμε τον απειροστικό λογισμό ελκυστικότερο στον φοιτητή, καθώς και οι Colonel D. Chris Arney και Joe B. Albree για τη συνδρομή τους στις ιστορικές αναφορές του απειροστικού λογισμού. Είμαστε ευγνώμονες σε όλους τους παραπάνω για την αφοσίωσή τους, την ενθάρρυνσή τους, και τον συντονισμό τους ως ομάδα κατά τη σύλληψη και εν συνεχεία κατά τη δημιουργία των υπολογιστικών εφαρμογών και τη συγκέντρωση των βιογραφικών και των ιστορικών στοιχείων. Ευχαριστούμε επίσης τον John L. Scharf για τη συνδρομή του στα εγχειρίδια των λύσεων.

Προς τον φοιτητή

Τι είναι ο απειροστικός λογισμός;

Είναι τα μαθηματικά της κίνησης και της μεταβολής. Όπου υπάρχει κίνηση ή εξέλιξη, όπου υπάρχουν μεταβαλλόμενες δυνάμεις που δρουν σε σώμα και προκαλούν την επιτάχυνσή του, ο λογισμός είναι το κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο που πρέπει να εφαρμόσουμε. Έτσι είχαν τα πράγματα στην αρχή της εξέλιξης του λογισμού, έτσι έχουν και σήμερα.

Ο απειροστικός λογισμός αναπτύχθηκε καταρχάς προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι μαθηματικές ανάγκες των επιστημόνων του δεκάτου έκτου και δεκάτου εβδόμου αιώνα, ανάγκες που κατά κύριο λόγο αφορούσαν στη μηχανική. Ο διαφορικός λογισμός έδωσε λύση στο πρόβλημα υπολογισμού ρυθμών μεταβολής. Αυτό οδήγησε στον ορισμό της κλίσης καμπυλών, στον υπολογισμό ταχυτήτων και επιταχύνσεων κινούμενων σωμάτων, στην εύρεση γωνιών εκτόξευσης που θα έδιναν στα κανόνια τη μέγιστη ακτίνα δράσεως, και στην εύρεση των χρονικών στιγμών όπου οι πλανήτες θα απείχαν μια ελάχιστη ή μια μέγιστη απόσταση μεταξύ τους. Ο ολοκληρωτικός λογισμός έλυσε το πρόβλημα προσδιορισμού μιας συνάρτησης της οποίας ο ρυθμός μεταβολής είναι γνωστός. Αυτό επέτρεψε τον υπολογισμό της μελλοντικής θέσης ενός σώματος όταν ξέρουμε την τωρινή του θέση και τις δυνάμεις που δρουν πάνω του· ακόμη, τον υπολογισμό εμβαδού ακανόνιστων χωρίων στο επίπεδο, τη μέτρηση μήκους καμπύλης, και την εύρεση του όγκου και της μάζας τυχόντος στερεού σώματος.

Σήμερα, ο λογισμός και οι προεκτάσεις του στη μαθηματική ανάλυση βρίσκουν τεράστιο εύρος εφαρμογών, τόσο που θα θάμπωνε τους πρωτεργάτες φυσικούς, μαθηματικούς και αστρονόμους που τον ανέπτυξαν. Ελπίζουμε ότι κι εσείς με τη σειρά σας θα εκτιμήσετε τη μεγάλη ποικιλία προβλημάτων που λύνονται με τις μεθόδους του λογισμού, καθώς και την πληθώρα των επιστημονικών πεδίων που χρησιμοποιούν μοντέλα του απειροστικού λογισμού για να εξηγήσουν το σύμπαν και τον κόσμο που μας περιβάλλει. Σκοπός της παρούσας έκδοσης είναι να παρουσιάσει μια σύγχρονη όψη του Λογισμού, με την υποστήριξη της τεχνολογίας των υπολογιστών.

Πώς να μάθετε απειροστικό λογισμό

Η κατανόηση του απειροστικού λογισμού διαφέρει από την εκμάθηση της αριθμητικής, της άλγεβρας και της γεωμετρίας. Σε εκείνα τα αντικείμενα, μάθατε κυρίως πώς να κάνετε πράξεις με αριθμούς· πώς να απλοποιείτε αλγεβρικές εκφράσεις και να υπολογίζετε μεταβλητές· και πώς να επιχειρηματολογείτε περί σημείων, ευθειών και σχημάτων στο επίπεδο. Ο λογισμός περιλαμβάνει τις τεχνικές και τις δεξιότητες αυτές αλλά αναπτύσσει και νέες, μεγαλύτερης ακρίβειας και βάθους. Είναι τόσες πολλές αυτές οι νέες τεχνικές που καλείστε να κατακτήσετε, ώστε είναι αδύνατον να τις μάθετε μόνο στο μάθημα. Θα χρειαστεί αρκετός χρόνος μοναχικής μελέτης στο σπίτι και συνεργασία με συμφοιτητές σας. Τι πρέπει λοιπόν να κάνετε για να μάθετε;

1. *Μελετήστε το κείμενο.* Είναι αδύνατον να εμπεδώσετε τις έννοιες και τις μεταξύ τους σχέσεις πηγαίνοντας κατευθείαν στις προς επίλυση ασκήσεις. Πρέπει λοιπόν να διαβάσετε τα αντίστοιχα χωρία στο κείμενο και να ελέγξετε τα λυμένα παραδείγματα βήμα προς βήμα. Το «διαγώνιο» διάβασμα δεν ωφελεί εδώ! Αντιθέτως πρέπει να διαβάσετε και να κατακτήσετε με τη λογική σας κάθε λεπτομέρεια, βήμα προς βήμα. Αυτό το είδος της μελέτης, που είναι απαραίτητο για κάθε ανάγνωσμα βαθυστόχαστου ή τεχνικού περιεχομένου, απαιτεί συγκέντρωση, υπομονή και εξάσκηση.

2. *Λύστε τις ασκήσεις που έχετε για το σπίτι,* έχοντας κατά νου τα εξής:
   (α) *Κάντε διαγράμματα* όπου είναι δυνατόν.
   (β) *Γράψτε τις λύσεις σας αναπτύσσοντας τη λογική αλληλουχία των σκέψεών σας,* σαν να τις εξηγούσατε σε κάποιον τρίτο.
   (c) *Αναρωτηθείτε γιατί* υπάρχει κάθε άσκηση που συναντάτε. Γιατί σας ανατέθηκε να τη λύσετε; Ποια η σχέση της με άλλες ασκήσεις;

3. *Χρησιμοποιήστε τον υπολογιστή σας γραφικών* όπου είναι δυνατόν. Λύστε όσο το δυνατόν περισσότερες ασκήσεις γραφικής και υπολογιστικής διερεύνησης, ανεξαρτήτως αν σας έχουν ανατεθεί ή όχι. Οι γραφικές παραστάσεις προσδίδουν ενόραση και βοηθούν στην οπτική εποπτεία πολλών σημαντικών εννοιών και σχέσεων. Οι πίνακες αριθμητικών δεδομένων μπορεί να αποκαλύψουν κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά όταν παρασταθούν γραφικά. Ο υπολογιστής σας λοιπόν σας δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσετε ρεαλιστικά προβλήματα και παραδείγματα που εμπεριέχουν υπολογισμούς δύσκολους ή και κοπιώδεις αν τους κάνατε με το χέρι.

4. Προσπαθήστε να *περιγράψετε με λίγα λόγια τα κύρια σημεία* κάθε ενότητας που μελετήσατε. Αν είστε σε θέση να κάνετε τέτοιου είδους περιγραφές, σημαίνει ότι μάλλον κατέχετε την ύλη. Αν όχι, τότε γνωρίζετε ότι υπάρχουν κενά στην κατανόησή σας.

Η κατανόηση του απειροστικού λογισμού είναι μία διεργασία· δεν συντελείται αυτόματα. Πρέπει να έχετε υπομονή, επιμονή, να θέτετε στον εαυτό σας ερωτήματα, να συζητάτε τις έννοιες και τις ασκήσεις με τους συμφοιτητές σας, και μόλις νιώθετε ότι χρειάζεστε βοήθεια, να τη ζητάτε αμέσως. Η ανταμοιβή της κατάκτησης του απειροστικού λογισμού μπορεί να είναι μεγάλη, τόσο πνευματικά όσο και επαγγελματικά.

0 Προκαταρκτικά

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τις πλέον απαραίτητες εισαγωγικές γνώσεις για τη μελέτη του απειροστικού λογισμού. Επίσης, εισάγουμε τον αναγνώστη στη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών, τη συμπλήρωση και στήριξη της αναλυτικής δουλειάς, και την επίλυση προβλημάτων με αριθμητικές και γραφικές μεθόδους. Θα δώσουμε έμφαση στις συναρτήσεις και στις γραφικές παραστάσεις, δύο έννοιες που αποτελούν τους κύριους άξονες του απειροστικού λογισμού.

Οι συναρτήσεις και οι παραμετρικές εξισώσεις είναι τα σπουδαιότερα εργαλεία περιγραφής του πραγματικού κόσμου με μαθηματική γλώσσα, καλύπτοντας ένα εύρος φαινομένων τεράστιο, από τις θερμοκρασιακές μεταβολές ώς τις κινήσεις των πλανητών, από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα του εγκεφάλου ώς τους επιχειρησιακούς κύκλους, και από τους καρδιακούς ρυθμούς ώς την πληθυσμιακή αύξηση. Μερικές συναρτήσεις αποκτούν ιδιαίτερη σημασία λόγω του φαινομένου που περιγράφουν. Έτσι, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις περιγράφουν κυκλικές, επαναλαμβανόμενες διεργασίες· οι εκθετικές, οι λογαριθμικές και οι λογιστικές συναρτήσεις περιγράφουν αύξηση και ελάττωση· οι πολυωνυμικές μπορούν να προσεγγίσουν τις προαναφερθείσες συναρτήσεις καθώς και τις περισσότερες από τις υπόλοιπες.

1 Ευθείες

Μεταβολές • Κλίση ευθείας • Παράλληλες και κάθετες ευθείες • Εξισώσεις ευθειών • Εφαρμογές • Παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή

Ένας από τους λόγους που ο απειροστικός λογισμός έχει αποβεί τόσο χρήσιμος είναι ότι αποτελεί την κατάλληλη μαθηματική γλώσσα για να συσχετίσουμε τον ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας με τη γραφική της παράσταση. Η ερμηνεία της σχέσης αυτής είναι ένας από τους στόχους του παρόντος βιβλίου. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας τις κλίσεις ευθειών.

Τα σύμβολα Δx και Δy διαβάζονται «δέλτα x» και «δέλτα y». Το γράμμα Δ δηλώνει «διαφορά». Τα Δx και Δy δεν συμβολίζουν πολλαπλασιασμό· το Δx δεν σημαίνει «Δ επί x», ούτε το Δy «Δ επί y».

Μεταβολές

Όταν ένα σωματίδιο κινείται από ένα σημείο του επιπέδου προς ένα άλλο, οι συνολικές *μεταβολές* των συντεταγμένων του προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τις συντεταγμένες του σημείου εκκίνησης από τις συντεταγμένες του σημείου τερματισμού. Οι μεταβολές μπορεί να είναι θετικές, αρνητικές, ή μηδέν, όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 1.

Ορισμός **Μεταβολές**

Όταν ένα σώμα μεταβαίνει από το σημείο (x_1, y_1) στο σημείο (x_2, y_2), τότε οι **μεταβολές** των συντεταγμένων του είναι

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{και} \qquad \Delta y = y_2 - y_1.$$

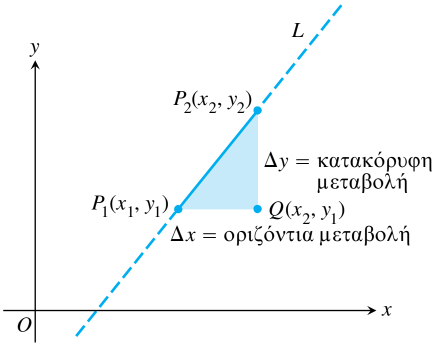
Παράδειγμα 1 Εύρεση μεταβολών

Οι μεταβολές από το σημείο $(4, -3)$ στο $(2, 5)$ είναι

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \qquad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

Από το σημείο $(5, 6)$ στο $(5, 1)$, οι μεταβολές είναι

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \qquad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$



Σχημα 1 Η κλίση της ευθείας L είναι $m = \dfrac{\text{κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{οριζόντια μεταβολή}} = \Delta y/\Delta x$.

Συνηθίζεται να συμβολίζουμε την κλίση με το γράμμα m.

Κλίση ευθείας

Κάθε μη κατακόρυφη ευθεία L έχει *κλίση*, που υπολογίζεται ως η κατακόρυφη μεταβολή ανά μονάδα οριζόντιας μεταβολής, ως ακολούθως: Έστω δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ της L (Σχήμα 1). Ονομάζουμε $\Delta y = y_2 - y_1$ την **κατακόρυφη μεταβολή** από το P_1 στο P_2, $\Delta x = x_2 - x_1$ την **οριζόντια μεταβολή** από το P_1 στο P_2, και ορίζουμε ως κλίση της L το πηλίκο $\Delta y/\Delta x$.

Ορισμός **Κλίση ευθείας**

Έστω $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία μιας μη κατακόρυφης ευθείας, L. Η κλίση της L είναι

$$m = \frac{\text{κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{οριζόντια μεταβολή}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1 1}{x_2 - x_1}$$

Μια ευθεία που ανέρχεται καθώς το x αυξάνεται έχει θετική κλίση. Μια ευθεία που κατέρχεται καθώς το x αυξάνεται έχει αρνητική κλίση. Μια οριζόντια γραμμή έχει μηδενική κλίση, εφόσον όλα της τα σημεία έχουν την ίδια συντεταγμένη y, οπότε $\Delta y = 0$. Για κατακόρυφες ευθείες, $\Delta x = 0$, οπότε ο λόγος $\Delta y/\Delta x$ δεν ορίζεται. Λέμε λοιπόν ότι *οι κατακόρυφες ευθείες δεν έχουν κλίση*.

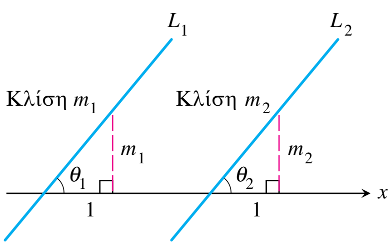
Παράλληλες και κάθετες ευθείες

Οι παράλληλες ευθείες σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα x (Σχήμα 2). Έτσι, οι μη κατακόρυφες παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση. Αντιστρόφως, ευθείες με ίσες κλίσεις σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα x και είναι, συνεπώς, παράλληλες.

Αν δύο μη κατακόρυφες ευθείες L_1 και L_2 είναι κάθετες μεταξύ τους, οι κλίσεις τους m_1 και m_2 ικανοποιούν τη σχέση $m_1 m_2 = -1$, δηλαδή η μία κλίση είναι *αντιθέτως αντίστροφη* της άλλης:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

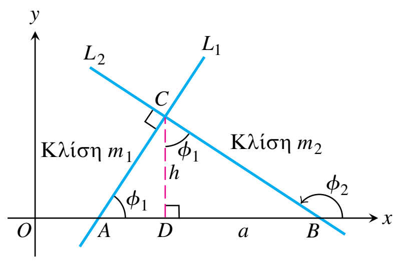
Η απόδειξη της πρότασης αυτής έχει ως εξής: Σύμφωνα με το Σχήμα 3, $m_1 = \tan \phi_1 = a/h$, ενώ $m_2 = \tan \phi_2 = -h/a$. Συνεπώς, θα έχουμε $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.



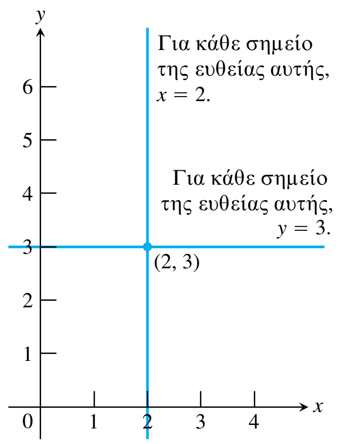
Σχημα 2 Αν $L_1 \| L_2$, τότε $\theta_1 = \theta_2$ και άρα $m_1 = m_2$. Αντίστροφα, αν $m_1 = m_2$, τότε $\theta_1 = \theta_2$ και $L_1 \| L_2$.

Παράδειγμα 2 Προσδιορισμός της καθέτου από την κλίση

Αν L είναι μια ευθεία με κλίση $3/4$, τότε κάθε άλλη ευθεία με κλίση $-4/3$ θα είναι κάθετη στην L.



Σχημα 3 Το τρίγωνο ΔADC είναι όμοιο με το ΔCDB. Συνεπώς, η άνω γωνία στο ΔCDB ισούται με ϕ_1, όπου $\tan \phi_1 = a/h$.



Σχημα 4 Οι εξισώσεις της κατακόρυφης και της οριζόντιας ευθείας που διέρχονται από το σημείο (2, 3) είναι $x = 2$ και $y = 3$, αντίστοιχα. (Παράδειγμα 3)

Εξισώσεις ευθειών

Η κατακόρυφος που διέρχεται από το σημείο (a, b) έχει ως εξίσωση την $x = a$, αφού η συντεταγμένη x οποιουδήποτε σημείου της ευθείας έχει τιμή a. Ομοίως, η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (a, b) έχει ως εξίσωση την $y = b$.

Παράδειγμα 3 Εύρεση εξισώσεων για κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες

Η κατακόρυφη και η οριζόντια ευθεία που διέρχονται από το σημείο (2, 3) έχουν ως εξισώσεις τις $x = 2$ και $y = 3$, αντίστοιχα (Σχήμα 4).

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση τυχούσας μη κατακόρυφης ευθείας αν γνωρίζουμε την κλίση της m και τις συντεταγμένες ενός σημείου της $P_1(x_1, y_1)$. Κι αυτό διότι, αν $P(x, y)$ είναι *οποιοδήποτε* άλλο σημείο της ευθείας, θα ισχύει

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

οπότε

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{δηλαδή} \qquad y = m(x - x_1) + y_1 .$$

Ορισμός Εξίσωση σημείου-κλίσεως

Η εξίσωση

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

περιγράφει την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_1, y_1) με κλίση m. Για λόγους συντομίας θα καλούμε την εξίσωση αυτή **εξίσωση σημείου-κλίσεως**.

Παράδειγμα 4 Χρησιμοποιώντας την εξίσωση σημείου-κλίσεως

Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (2, 3) με κλίση $-3/2$.

Λύση Αντικαθιστούμε $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, και $m = -3/2$ στην εξίσωση σημείου-κλίσεως, απ' όπου παίρνουμε

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2) + 3 \qquad \text{δηλαδή} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 6 .$$

Παράδειγμα 5 Χρησιμοποιώντας την εξίσωση σημείου-κλίσεως

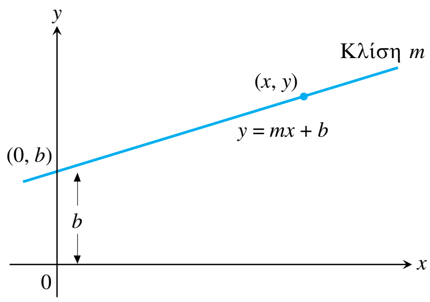
Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-2, -1)$ και $(3, 4)$.

Λύση Η κλίση της ευθείας είναι

$$m = \frac{4 - (-1)}{3 - (-2)} = \frac{5}{5} = 1 .$$

Απομένει να εισαγάγουμε την κλίση m και τις συντεταγμένες οποιουδήποτε από τα δύο σημεία στην εξίσωση σημείου-κλίσεως. Αν επιλέξουμε το σημείο $(x_1, y_1) = (-2, -1)$, παίρνουμε

$$y = 1 \cdot (x - (-2)) + (-1)$$
$$y = x + 2 + (-1)$$
$$y = x + 1 .$$



Σχημα 5 Μια ευθεία κλίσεως m και τεταγμένης b.

Η συντεταγμένη y του σημείου τομής μιας μη κατακόρυφης ευθείας με τον άξονα y είναι η **τεταγμένη** της ευθείας. Ομοίως, η συντεταγμένη x του σημείου τομής μιας μη οριζόντιας ευθείας με τον άξονα x είναι η **τετμημένη** της ευθείας. Μια ευθεία με κλίση m και τεταγμένη b διέρχεται από το $(0, b)$ (Σχήμα 5), οπότε

$$y = m(x - 0) + b, \qquad \text{ή, απλούστερα,} \qquad y = mx + b.$$

Ορισμός **Εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης**
Η εξίσωση

$$y = mx + b$$

περιγράφει την ευθεία που έχει κλίση m και τεταγμένη b. Για λόγους συντομίας θα καλούμε την εξίσωση αυτή **εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης**.

Παράδειγμα 6 Εξισώσεις ευθειών

Να γραφεί μια εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι **(α)** παράλληλη· **(β)** κάθετη στην ευθεία $L: y = 3x - 4$.

Λύση Η ευθεία L, $y = 3x - 4$, έχει κλίση 3.

(α) Η ευθεία $y = 3(x + 1) + 2$, ή $y = 3x + 5$, διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι παράλληλη στην L, αφού έχει κλίση 3.

(β) Η ευθεία $y = (-1/3)(x + 1) + 2$, ή $y = (-1/3)x + 5/3$, διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι κάθετη στην L αφού έχει κλίση $-1/3$.

Αν τα A και B δεν είναι ταυτοχρόνως μηδέν, τότε η γραφική παράσταση της εξίσωσης $Ax + By = C$ είναι μια ευθεία. Κάθε ευθεία μπορεί να παρασταθεί από μια εξίσωση τέτοιας μορφής, ακόμη και όταν δεν έχει κλίση.

Ορισμός **Γενική γραμμική εξίσωση**
Η εξίσωση

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ και } B \text{ όχι ταυτοχρόνως μηδέν})$$

είναι μια **γενική γραμμική εξίσωση** των x και y.

Η γενική γραμμική μορφή προσφέρεται για τον γρήγορο χαρακτηρισμό μιας γραμμής ως ευθείας. Ωστόσο, όταν σχεδιάζουμε μια ευθεία με τη βοήθεια υπολογιστικού προγράμματος, είναι ευκολότερο να εισάγουμε στον υπολογιστή την κλίση και την τεταγμένη της ευθείας, και να χρησιμοποιούμε την εξίσεωση κλίσεως-τεταγμένης.

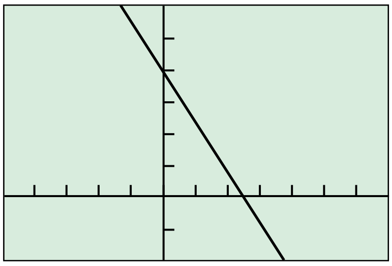
Παράδειγμα 7 Ανάλυση και γραφική παράσταση μιας γενικής γραμμικής εξισώσεως

Αφού βρείτε την κλίση και την τεταγμένη της ευθείας $8x + 5y = 20$, σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

Λύση Λύνουμε την εξίσωση ως προς y για να τη θέσουμε στη μορφή κλίσεως-τεταγμένης.

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \end{aligned}$$

$y = -\frac{8}{5}x + 4$



[–5, 7] επί [–2, 6]

Σχημα 6 Η ευθεία $8x + 5y = 20$.

$$y = -\frac{8}{5}x + 4.$$

Η τελευταία σχέση μάς δείχνει την κλίση ($m = -8/5$) και την τεταγμένη ($b = 4$) της ευθείας, και μπορεί τώρα να εισαχθεί άμεσα σε υπολογιστή για σχεδίαση (Σχήμα 6).

Εφαρμογές

Πολλές μεταβλητές ουσιώδους φυσικής σημασίας συνδέονται μέσω γραμμικών εξισώσεων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, εκμεταλλευόμαστε τη γραμμική σχέση μεταξύ των θερμοκρασιών Fahrenheit και Κελσίου για να κάνουμε μετατροπές από τη μία κλίμακα στην άλλη.

Παράδειγμα 8 Μετατροπή θερμοκρασίας

Βρείτε μια σχέση που να συνδέει τις κλίμακες θερμοκρασίας Fahrenheit και Κελσίου. Κατόπιν βρείτε τις ισοδύναμες θερμοκρασίες των 90°F (σε °C), και των −5°C (σε °F).

Λύση Επειδή η σχέση που συνδέει τις δύο κλίμακες είναι γραμμική, θα έχει τη μορφή $F = mC + b$. Το σημείο πήξεως του νερού είναι $F = 32°$ ή $C = 0°$, ενώ το σημείο βρασμού (ή σημείο ζέσεως) είναι $F = 212°$ ή $C = 100°$. Έτσι,

$$32 = m \cdot 0 + b \qquad \text{και} \qquad 212 = m \cdot 100 + b,$$

οπότε $b = 32$ και $m = (212 - 32)/100 = 9/5$. Συνεπώς,

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \qquad \text{ή} \qquad C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Με τις σχέσεις αυτές μπορούμε να βρίσκουμε ισοδύναμες θερμοκρασίες. Έτσι, οι 90°F ισοδυναμούν σε θερμοκρασία της κλίμακας Κελσίου ίση με

$$C = \frac{5}{9}(90 - 32) \approx 32{,}2.$$

Ομοίως, η ισοδύναμη θερμοκρασία (στην κλίμακα Fahrenheit) των −5°C είναι

$$F = \frac{9}{5}(-5) + 32 = 23°.$$

Παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή

Είναι μάλλον δύσκολο να διακρίνουμε τη σχέση που διαμορφώνεται μεταξύ δύο ποσοτήτων διαβάζοντας τις αντίστοιχες στήλες αριθμητικών δεδομένων. Γι' αυτό προτιμούμε συχνά να απεικονίζουμε σε διάγραμμα τα δεδομένα (κάνοντας το λεγόμενο **διάγραμμα διασποράς**), ώστε να δούμε αν τα αντίστοιχα σημεία εκδηλώνουν κάποια δυναμική ή διαμορφώνουν κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά. Αν ναι, κι αν επίσης μπορούμε να βρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ μίας καμπύλης που προσεγγίζει τη συμπεριφορά του διαγράμματος, τότε έχουμε έναν τύπο ο οποίος

1. συνοψίζει τα δεδομένα μέσω μιας απλής μαθηματικής έκφρασης, και

2. μας επιτρέπει να προβλέπουμε τιμές του y για τιμές του x πέραν αυτών που ήδη διαθέτουμε.

Η διαδικασία εύρεσης ενός συγκεκριμένου τύπου καμπύλης που να ταιριάζει στα αριθμητικά δεδομένα ονομάζεται **παλινδρομική ανάλυση,** η

Πίνακας 1 Κόστος ταχυδρομικού τέλους

Έτος x	Κόστος y (σε \$)
1885	0,02
1917	0,03
1919	0,02
1932	0,03
1958	0,04
1963	0,05
1968	0,06
1971	0,08
1974	0,10
1975	0,13
1977	0,15
1981	0,18
1981	0,20
1985	0,22
1987	0,25
1991	0,29
1995	0,32
1998	0,33

δε καμπύλη καλείται **καμπύλη παλινδρομήσεως** (ή **παλινδρομική καμπύλη**).

Υπάρχουν πολλοί χρήσιμοι τύποι παλινδρομικών καμπυλών, π.χ. οι καμπύλες δύναμης, οι πολυωνυμικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, και οι ημιτονοειδείς καμπύλες. Στο Παράδειγμα 9, εφαρμόζουμε παλινδρομική ανάλυση σε υπολογιστή προκειμένου να προσαρμόσουμε μια γραμμική εξίσωση στα δεδομένα του Πίνακα 1. Η διαδικασία αυτή είναι προφανώς ισοδύναμη με το αν προσαρμόζαμε μια ευθεία στα σημεία του διαγράμματος διασποράς.

Παράδειγμα 7 Παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή

Βάσει των δεδομένων του Πίνακα 1, κατασκευάστε ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει την αξία του συγκεκριμένου ταχυδρομικού τέλους συναρτήσει του χρόνου. Αφού βεβαιωθείτε για το εύλογον του μοντέλου σας, χρησιμοποιήστε το για να προβλέψετε το κόστος του ταχυδρομικού τέλους κατά το έτος 2010.

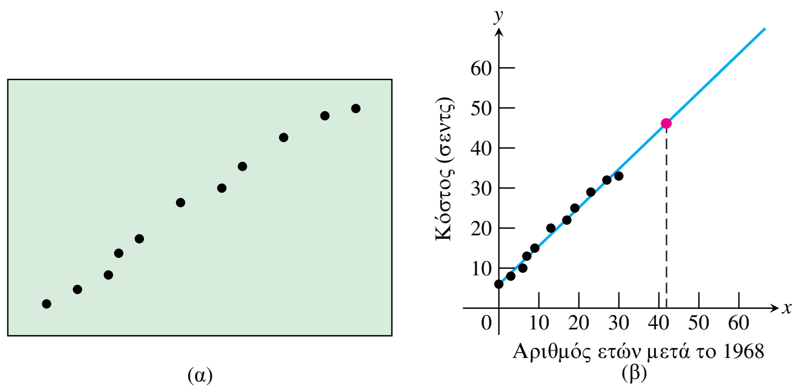
Λύση

Ερμηνεία των δεδομένων

Υπάρχει πολύ μικρή μεταβολή στην τιμή του ταχυδρομικού τέλους πριν από το 1968. Επειδή μας ενδιαφέρει κυρίως η τάση που διαμορφώνουν τα πιο πρόσφατα δεδομένα, παίρνουμε ως αφετηρία το έτος αυτό. Το 1981 σημειώθηκαν δύο αυξήσεις, των τριών και των δύο σεντς αντίστοιχα. Για να καταστήσουμε λοιπόν το 1981 συγκρίσιμο με τα άλλα έτη, συνενώνουμε τις δύο αυξήσεις σε μία, των πέντε σεντς, καθώς φαίνεται στον Πίνακα 2. Το Σχήμα 7α δείχνει το διάγραμμα διασποράς που αντιστοιχεί στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2 Κόστος ταχυδρομικού τέλους από το 1968 και εφεξής

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33



Σχημα 7 (α) Διάγραμμα διασποράς των δεδομένων (x, y) του Πίνακα 2. (β) Εκτίμηση του κόστους του συγκεκριμένου ταχυδρομικού τέλους το έτος 2010, βάσει της παλινδρομικής ευθείας.

Μαθηματικό μοντέλο

Εφόσον στο διάγραμμα διαφαίνεται μια γραμμική εξάρτηση της αξίας του ταχυδρομικού τέλους με τον χρόνο, αναζητούμε ένα γραμμικό μοντέλο. Εισάγοντας τα δεδομένα σε υπολογιστή γραφικών και εφ-

*Σ.τ.Μ.: Οι όροι «γραφική παράσταση» και «γράφημα» δεν είναι ταυτόσημοι, παρόλο που στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται συχνά ως τέτοιοι. Γράφημα είναι το σύνολο των *διατεταγμένων ζευγών* $(x, f(x))$, ενώ γραφική παράσταση το σύνολο των *σημείων στον χώρο* με συντεταγμένες $(x, f(x))$. Η διακριτότητα των δύο όρων γίνεται εμφανής όταν το πεδίο ορισμού ή τιμών της f δεν περιέχει αριθμούς ή περιέχει άρρητους, οπότε η γραφική παράσταση δεν μπορεί (αυστηρά μιλώντας) να παραχθεί. Ωστόσο, στη συντριπτική πλειοψηφία των εφαρμογών που ενδιαφέρουν τους φυσικούς και τους μηχανικούς, τα πεδία ορισμού και τιμών είναι αριθμοσύνολα, και εξάλλου μας αρκεί να μπορεί να παραχθεί μια προσεγγιστική, έστω, γραφική παράσταση. Για τον λόγο αυτόν, θα θεωρούμε εφεξής τους δύο όρους συνώνυμους, και θα τους χρησιμοποιούμε εκ περιτροπής, για να αποφεύγονται έτσι και οι κουραστικές και κακόηχες επαναλήψεις. Δείτε και τη σελ. 13.

αρμόζοντας τη γραμμική παλινδρόμηση, προκύπτει η εξίσωση της παλινδρομικής ευθείας,

$$y = 0{,}96185x + 5{,}8978\,. \tag{1}$$

Το Σχήμα 7β δείχνει τη γραφική παράσταση της ευθείας μαζί με το διάγραμμα διασποράς. Τα δύο γραφήματα* σχεδόν συμπίπτουν, και έτσι το μοντέλο κρίνεται ικανοποιητικό.

Γραφική επίλυση

Ο σκοπός μας είναι να προβλέψουμε την τιμή του ταχυδρομικού τέλους το έτος 2010. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 7β, το 2010 (οπότε $x = 42$), η τιμή του y είναι περίπου 46.

Ερμηνεία

Κατά το έτος 2010, το συγκεκριμένο ταχυδρομικό τέλος θα κοστίζει περίπου 46 σεντς.

Αλγεβρική επαλήθευση

Από την Εξίσωση (1) για $x = 42$ παίρνουμε

$$y = 0{,}96185(42) + 5{,}8978 \approx 46{,}3\,.$$

Παλινδρομική ανάλυση

Η παλινδρομική ανάλυση περιλαμβάνει τέσσερα βήματα:

Βήμα 1. Τοποθετούμε σε διάγραμμα τα σημεία που αντιστοιχούν στα αριθμητικά δεδομένα (διάγραμμα διασποράς).

Βήμα 2. Βρίσκουμε μια εξίσωση παλινδρομήσεως. Προκειμένου για ευθείες, η εξίσωση αυτή θα έχει τη μορφή $y = mx + b$.

Βήμα 3. Τοποθετούμε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της εξίσωσης παλινδρομήσεως και το διάγραμμα διασποράς, ώστε να ελέγξουμε κατά πόσο τα δύο γραφήματα ταιριάζουν.

Βήμα 4. Αν τα δύο γραφήματα «εφαρμόζουν» ικανοποιητικά, χρησιμοποιούμε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψουμε τιμές των y για x πέραν αυτών του πίνακα που διαθέτουμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

Στις Ασκήσεις 1 και 2, βρείτε τις μεταβολές των συντεταγμένων από το σημείο A στο B.

1. **(α)** $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ **(β)** $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$

2. **(α)** $A(-3, 1)$, $B(-8, 1)$ **(β)** $A(0, 4)$, $B(0, -2)$

Στις Ασκήσεις 3 και 4, L είναι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία A και B.

(i) Σχεδιάστε τα A και B. **(ii)** Βρείτε την κλίση της L.

(iii) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της L.

3. **(α)** $A(1, -2)$, $B(2, 1)$ **(β)** $A(-2, -1)$, $B(1, -2)$

4. **(α)** $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$ **(β)** $A(1, 2)$, $B(1, -3)$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, γράψτε μια εξίσωση για **(i)** την κατακόρυφη και **(ii)** την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο P.

5. **(α)** $P(2, 3)$ **(β)** $P(-1, 4/3)$

6. **(α)** $P(0, -\sqrt{2})$ **(β)** $P(-\pi, 0)$

Στις Ασκήσεις 7 και 8, γράψτε την εξίσωση σημείου-κλίσεως για την ευθεία που διέρχεται από το σημείο P με κλίση m.

7. **(α)** $P(1, 1)$, $m = 1$ **(β)** $P(-1, 1)$, $m = -1$

8. **(α)** $P(0, 3)$, $m = 2$ **(β)** $P(-4, 0)$, $m = -2$

Στις Ασκήσεις 9 και 10, γράψτε μια γενική γραμμική εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από τα δύο σημεία.

9. **(α)** $(0, 0)$, $(2, 3)$ **(β)** $(1, 1)$, $(2, 1)$

10. **(α)** $(-2, 0)$, $(-2, -2)$ **(β)** $(-2, 1)$, $(2, -2)$

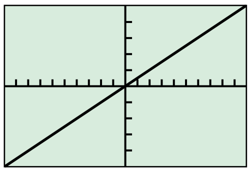
Στις Ασκήσεις 11 και 12, γράψτε την εξίσωση κλίσης-τεταγμένης για την ευθεία με κλίση m και τεταγμένη b.

11. **(α)** $m = 3, \quad b = -2$ **(β)** $m = -1, \quad b = 2$

12. **(α)** $m = -1/2, \quad b = -3$ **(β)** $m = 1/3, \quad b = -1$

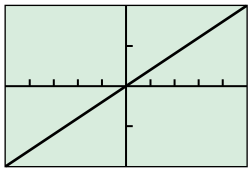
Στις Ασκήσεις 13 και 14, η ευθεία διέρχεται από την αρχή και από την άνω δεξιά κορυφή της περιοχής σχεδίασης. Γράψτε την εξίσωση της ευθείας. Στην Άσκηση 13, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμώσεων στον άξονα x αντιστοιχεί σε 1 μονάδα, ενώ στον άξονα y αντιστοιχεί σε 5 μονάδες. Στην Άσκηση 14, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμώσεων σε κάθε άξονα αντιστοιχεί σε 1 μονάδα.

13.



[–10, 10] επί [–25, 25]

14.



[–5, 5] επί [–2, 2]

Στις Ασκήσεις 15 και 16, βρείτε **(i)** την κλίση και **(ii)** την τεταγμένη και **(iii)** σχεδιάστε την ευθεία.

15. **(α)** $3x + 4y = 12$ **(β)** $x + y = 2$

16. **(α)** $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$ **(β)** $y = 2x + 4$

Στις Ασκήσεις 17 και 18, γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το P και είναι **(i)** παράλληλη στην L και **(ii)** κάθετη στην L.

17. **(α)** $P(0, 0), \quad L: y = -x + 2$

(β) $P(-2, 2), \quad L: 2x + y = 4$

18. **(α)** $P(-2, 4), \quad L: x = 5$

(β) $P(-1, 1/2), \quad L: y = 3$

Στις Ασκήσεις 19 και 20, δίδεται ένας πίνακας τιμών για τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = mx + b$. Προσδιορίστε τα m και b.

19.

x	$f(x)$
1	2
3	9
5	16

20.

x	$f(x)$
2	−1
4	−4
6	−7

Στις Ασκήσεις 21 και 22, βρείτε την τιμή του x ή του y για την οποία η ευθεία διαμέσου των A και B έχει τη δοθείσα κλίση m.

21. $A(-2, 3), \quad B(4, y), \quad m = -2/3$

22. $A(-8, -2), \quad B(x, 2), \quad m = 2$

23. *Επανερχόμενοι στο Παράδειγμα 5* Δείξτε ότι, αν χρησιμοποιήσουμε το σημείο (3, 4) στην εξίσωση σημείου-κλίσεως του Παραδείγματος 5, θα προκύψει η ίδια εξίσωση για την ευθεία.

24. *Μάθετε γράφοντας: τετμημένες και τεταγμένες μιας ευθείας*

(α) Εξηγήστε γιατί τα c και d είναι η τετμημένη και η τεταγμένη, αντίστοιχα, της ευθείας

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1 .$$

(β) Πώς σχετίζονται η τετμημένη και η τεταγμένη με τους αριθμούς c και d, για την ευθεία

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 2\,;$$

25. *Παράλληλες και κάθετες ευθείες* Για ποια τιμή του k είναι οι ευθείες $2x + ky = 3$ και $x + y = 1$ **(α)** παράλληλες; **(β)** κάθετες;

Στις Ασκήσεις 26-28, *εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων*.

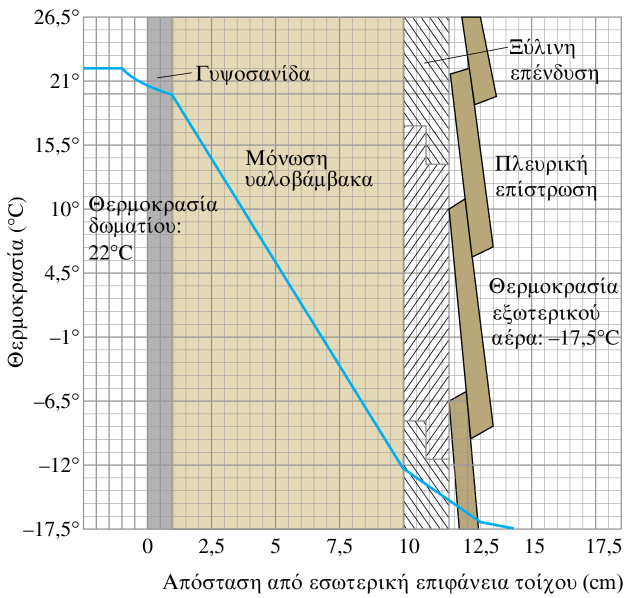
26. *Μόνωση* Μετρώντας κλίσεις στο σχήμα, βρείτε τη μεταβολή της θερμοκρασίας σε βαθμούς ανά cm για τα παρακάτω υλικά.

(α) γυψοσανίδα

(β) μόνωση υαλοβάμβακα

(γ) ξύλινη επένδυση

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Ποιο από τα υλικά **(α)** έως **(γ)** είναι ο καλύτερος μονωτής; Ποιο ο χειρότερος; Εξηγήστε.



27. *Υποβρύχια πίεση* Η πίεση p που αισθάνεται ένας δύτης στη θάλασσα σχετίζεται με το βάθος κατάδυσης, d, μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $p = kd + 1$ (k είναι μια σταθερά). Όταν $d = 0$ m, η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα. Η πίεση σε βάθος 100 m είναι 10,94 ατμόφαιρες. Βρείτε την πίεση στα 50 m.

28. *Μοντέλο της διανυθείσας απόστασης* Ένα αυτοκίνητο A ξεκινά από το σημείο P τη χρονική στιγμή $t = 0$ και κινείται με ταχύτητα 45 km/h.

(α) Γράψτε μια έκφραση για την απόσταση $d(t)$ από το σημείο P που διένυσε το αυτοκίνητο σε t ώρες.

(β) Σχεδιάστε την $y = d(t)$.

(γ) Ποια η κλίση της γραφικής παράστασης στο ερώτημα (β) και τι πληροφορία μας παρέχει αυτή;

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Περιγράψτε υπό ποιες προϋποθέσεις θα μπορούσε ο χρόνος t να παίρνει αρνητικές τιμές.

(ε) *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η τεταγμένη της ευθείας $y = d(t)$ ισούται με 30. Τι σημαίνει αυτό;

Προεκτείνοντας τις έννοιες

29. *Fahrenheit έναντι Κελσίου* Στο Παράδειγμα 8 βρήκαμε μια σχέση μεταξύ των κλιμάκων θερμοκρασίας Fahrenheit και Κελσίου.

(α) Υπάρχει κάποια θερμοκρασία στην οποία ένα θερμόμετρο Fahrenheit παρουσιάζει την ίδια ένδειξη με ένα θερμόμετρο Κελσίου; Αν ναι, ποια είναι αυτή η θερμοκρασία;

T **(β)** *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε σε κοινό διάγραμμα τις ευθείες $y_1 = (9/5)x + 32$, $y_2 = (5/9)(x - 32)$, και $y_3 = x$. Εξηγήστε τη σημασία του διαγράμματος αυτού για το ερώτημα (α).

30. *Παραλληλόγραμμο* Τρία διαφορετικά παραλληλόγραμμα έχουν κορυφές στα σημεία $(-1, 1)$, $(2, 0)$, και $(2, 3)$. Σχεδιάστε τα και δώστε τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών.

31. *Παραλληλόγραμμο* Δείξτε ότι τα μέσα γειτονικών πλευρών τυχαίου τετραπλεύρου ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο.

32. *Εφαπτόμενη ευθεία* Θεωρήστε κύκλο ακτίνας 5 και κέντρου $(0, 0)$. Βρείτε μια εξίσωση για την ευθεία που εφάπτεται του κύκλου στο σημείο $(3, 4)$.

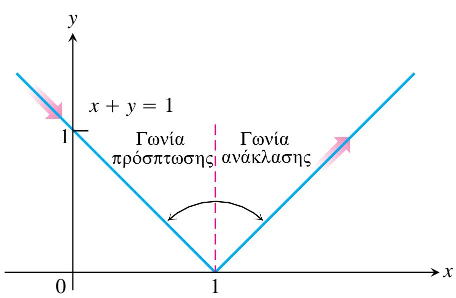
33. *Απόσταση σημείου από ευθεία* Εδώ θα δούμε πώς υπολογίζεται η απόσταση ενός σημείου $P(a, b)$ από μια ευθεία $L: Ax + By = C$. Προτείνουμε στους σπουδαστές *να εργαστούν σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

(α) Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία M που διέρχεται από το P και είναι κάθετη στην L.

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Q των M και L.

(γ) Βρείτε την απόσταση του P από το Q.

34. *Ανακλώμενο φως* Μια φωτεινή ακτίνα ταξιδεύει κατά μήκος της ευθείας $x + y = 1$ προερχόμενη από το δεύτερο τεταρτημόριο και ανακλάται από τον άξονα x, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία προσπτώσεως ισούται με τη γωνία ανακλάσεως (οι γωνίες μετρώνται από την κάθετο στον άξονα x). Γράψτε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.



35. *Ο οδοντωτός σιδηρόδρομος του όρους Washington* Οι πολιτικοί μηχανικοί υπολογίζουν την κλίση του οδοστρώματος ως τον λόγο της κατακόρυφης απόστασης προς την οριζόντια απόσταση που διανύει όχημα κινούμενο επί του οδοστρώματος στο σημείο που τους ενδιαφέρει. Την κλίση αυτή του οδοστρώματος την εκφράζουν συνήθως ως ποσοστό επί τοις 100. Οι κλίσεις των σιδηροδρομικών τροχιών σε παράκτιες περιοχές είναι συνήθως μικρότερες του 2%. Στα ορεινά, μπορεί να φθάσουν μέχρι και 4%. Οι κλίσεις των αυτοκινητοδρόμων δεν υπερβαίνουν συνήθως το 5%.

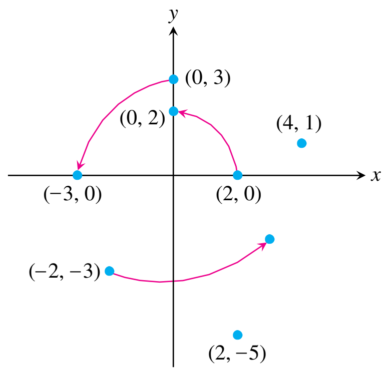
Στο πλέον απότομο σημείο της διαδρομής του οδοντωτού σιδηροδρόμου του όρους Washington στο New Hampshire, η κλίση παίρνει την ασυνήθιστη τιμή 37,1%. Τα μπροστινά καθίσματα του κάθε βαγονιού βρίσκονται τότε 4 m ψηλότερα απ' ό,τι τα πίσω καθίσματα. Πόσο περίπου απέχει η πρώτη από την τελευταία σειρά καθισμάτων στο βαγόνι;

36. Μια περιστροφή κατά 90° περί την αρχή μεταφέρει το σημείο $(2, 0)$ στο $(0, 2)$, και το $(0, 3)$ στο $(-3, 0)$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πού μεταφέρεται καθένα από τα παρακάτω σημεία;

(α) $(4, 1)$ **(β)** $(-2, -3)$ **(γ)** $(2, -5)$

(δ) $(x, 0)$ **(ε)** $(0, y)$ **(στ)** (x, y)

(ζ) Ποιο σημείο μεταφέρεται στο $(10, 3)$;



Στις Ασκήσεις 37 και 38, εφαρμόστε γραμμική παλινδρομική ανάλυση.

T **37.** Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται στατιστικά στοιχεία για το μέσο βάρος εννέα κοριτσιών συναρτήσει της ηλικίας τους.

Πίνακας 3 Ηλικία και βάρος μικρών κοριτσιών

Ηλικία (μήνες)	Βάρος (kg)
19	9,98
21	10,43
24	11,34
27	12,70
29	14,06
31	12,70
34	14,52
38	15,42
43	17,69

(α) Από τα δεδομένα αυτά βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως.

(β) Βρείτε την κλίση της παλινδρομικής ευθείας. Τι αντιπροσωπεύει η κλίση αυτή;

(γ) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(δ) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψετε το κατά προσέγγιση βάρος ενός κοριτσιού ηλικίας 30 μηνών.

T **38.** Ο Πίνακας 4 δείχνει το μέσο ετήσιο εισόδημα των αμερικανών οικοδόμων.

Πίνακας 4 Μέσο ετήσιο εισόδημα οικοδόμων

Έτος	Ετήσιο εισόδημα (σε δολάρια)
1980	22.033
1985	27.581
1988	30.466
1989	31.465
1990	32.836

Πηγή: U.S. Bureau of Economic Analysis.

(α) Από τα δεδομένα αυτά βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως.

(β) Βρείτε την κλίση της παλινδρομικής ευθείας. Τι αντιπροσωπεύει η κλίση αυτή;

(γ) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(δ) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψετε το μέσο ετήσιο εισόδημα των οικοδόμων κατά το έτος 2000.

T **39.** Η μέση τιμή μονοκατοικιών στις Η.Π.Α. αυξάνεται διαρκώς από το 1970. Στον Πίνακα 5, ωστόσο, παρατηρούμε ότι σημειώνονται διαφοροποιήσεις από περιοχή σε περιοχή.

(α) Βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως για το κόστος μιας μονοκατοικίας στις βορειοανατολικές Πολιτείες.

(β) Τι αντιπροσωπεύει η κλίση της παλινδρομικής ευθείας;

(γ) Βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως για το κόστος μιας μονοκατοικίας στις κεντροδυτικές Πολιτείες.

(δ) Πού αυξάνεται πιο γρήγορα η μέση αξία, στις βορειοανατολικές ή στις κεντροδυτικές Πολιτείες;

Πίνακας 5 Μέση τιμή μονοκατοικίας

Έτος	Βορειοανατολικά (σε δολάρια)	Κεντροδυτικά (σε δολάρια)
1970	25.200	20.100
1975	39.300	30.100
1980	60.800	51.900
1985	88.900	58.900
1990	141.200	74.000

Πηγή: National Association of Realtors®, *Home Sales Yearbook* (Washington DC, 1990).

2 Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

Συναρτήσεις • Πεδία ορισμού και τιμών • Επισκόπηση και ερμηνεία γραφικών παραστάσεων • Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις • Άρτιες και περιττές συναρτήσεις: συμμετρία • Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα • Η συνάρτηση απόλυτης τιμής • Πώς μετατοπίζουμε μια γραφική παράσταση • Σύνθετες συναρτήσεις

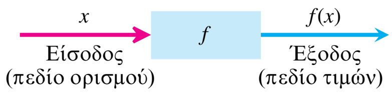
Οι συναρτήσεις αποτελούν τα κυριότερα εργαλεία περιγραφής του πραγματικού κόσμου με μαθηματική γλώσσα. Στην ενότητα αυτή πραγματευόμαστε τις βασικές έννοιες των συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων. Θα δούμε με ποιους τρόπους μπορούμε να μετατοπίζουμε και να συνδυάζουμε διαφορετικές γραφικές παραστάσεις σε ένα διάγραμμα. Τέλος, θα παρουσιάσουμε μερικούς σημαντικούς τύπους συναρτήσεων του απειροστικού λογισμού.

Συναρτήσεις

Συχνά οι τιμές μιας μεταβλητής εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης:

- Η θερμοκρασία στην οποία το νερό βράζει εξαρτάται από το υψόμετρο (το σημείο βρασμού «ταπεινώνεται» καθώς ανεβαίνουμε ψηλότερα).
- Το ποσό κατά το οποίο θα αυξηθούν οι καταθέσεις σας σε ένα έτος (ο τόκος) εξαρτάται από το επιτόκιο της τράπεζάς σας.

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές, η τιμή μιας μεταβλητής ποσό-



Σχήμα 8 Ένα «μηχανιστικό» διάγραμμα για τη συνάρτηση.

τητας εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης. Το σημείο βρασμού του νερού, b, εξαρτάται από το υψόμετρο, e· ο τόκος, I, εξαρτάται από το επιτόκιο, r. Ονομάζουμε τις μεταβλητές b και I **εξαρτημένες μεταβλητές**, αφού καθορίζονται από τις τιμές των μεταβλητών e και r, από τις οποίες εξαρτώνται. Τις μεταβλητές e και r τις καλούμε **ανεξάρτητες μεταβλητές.**

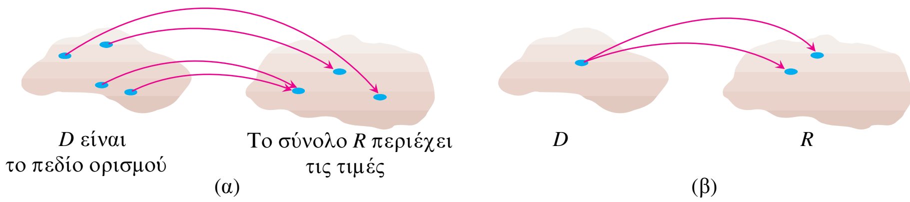
Ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο ενός συνόλου ένα και μόνο στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου ονομάζεται *συνάρτηση*. Τα στοιχεία του ενός συνόλου δεν οφείλουν να είναι ομοειδή με τα στοιχεία του άλλου. Μια συνάρτηση είναι σαν μια μηχανή που αντιστοιχίζει μια μοναδική έξοδο σε κάθε επιτρεπτή είσοδο. Οι είσοδοι αποτελούν το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης· οι έξοδοι αποτελούν το **πεδίο τιμών** της (Σχήμα 8).

Ορισμός Συνάρτηση

Συνάρτηση από ένα σύνολο D σε ένα σύνολο R είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο του R σε κάθε στοιχείο του D.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Leonhard Euler
(1707-1783)

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, D είναι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως και R είναι ένα σύνολο *που περιέχει* τις τιμές (Σχήμα 9).



Σχήμα 9 (α) Μια συνάρτηση από το σύνολο D στο σύνολο R. (β) Μια *μη* συνάρτηση. Η αντιστοίχιση σε στοιχεία του R δεν είναι μοναδική.

Εδώ και δυόμισυ αιώνες, ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler συνέλαβε έναν συμβολικό τρόπο δήλωσης ότι «η y είναι μια συνάρτηση του x»:

$$y = f(x),$$

που θα πρέπει να διαβάζεται ως «y ίσον f του x». Ο συμβολισμός αυτός μας επιτρέπει να αναφερόμαστε σε διαφορετικές συναρτήσεις αλλάζοντας απλώς τα γράμματα με τα οποία τις αναπαριστούμε. Για να δηλώσουμε ότι το σημείο βρασμού b του νερού είναι συνάρτηση του υψομέτρου e, μπορούμε να γράψουμε $b = f(e)$. Για να δηλώσουμε ότι το εμβαδόν A ενός κύκλου είναι συνάρτηση της ακτίνας r, μπορούμε να γράψουμε $A = A(r)$, συμβολίζοντας τη συνάρτηση και την εξαρτημένη μεταβλητή με το ίδιο γράμμα.

Με τον συμβολισμό $y = f(x)$ μπορούμε επίσης να δηλώσουμε συγκεκριμένες τιμές μιας συνάρτησης. Έτσι, για την τιμή της f στο a μπορούμε να γράψουμε $f(a)$, το οποίο διαβάζεται ως «f του a».

Παράδειγμα 1 Η συνάρτηση εμβαδού του κύκλου

Η συνάρτηση του εμβαδού κύκλου $A(r) = \pi r^2$ έχει ως πεδίο ορισμού της το σύνολο όλων των δυνατών ακτίνων, δηλαδή το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών. Το πεδίο τιμών είναι επίσης το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών.

Η τιμή της συναρτήσεως A στο $r = 2$ είναι

$$A(2) = \pi(2)^2 = 4\pi.$$

Το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας 2 ισούται με 4π.

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών

Στο Παράδειγμα 1, το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως υπόκειται σε κάποιον εύλογο περιορισμό: η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η ακτίνα του κύκλου η οποία πρέπει να είναι θετική. Όταν ορίζουμε μία συνάρτηση $y = f(x)$ μέσω κάποιου τύπου και το πεδίο ορισμού δεν αναφέρεται ρητά ή δεν περιορίζεται εκ των πραγμάτων, θα υποθέτουμε ότι αποτελείται από το μεγαλύτερο σύνολο τιμών του x για τις οποίες ο τύπος δίνει πραγματικές τιμές για το y· πρόκειται για το λεγόμενο **φυσικό πεδίο ορισμού.** Εάν επιθυμούμε να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού με κάποιον τρόπο, θα πρέπει να το δηλώσουμε. Για παράδειγμα, το πεδίο τιμών της συνάρτησης $y = x^2$ είναι το πλήρες σύνολο των πραγματικών αριθμών. Προκειμένου να περιορίσουμε τη συνάρτηση στις θετικές τιμές του x, θα γράψουμε «$y = x^2, x > 0$».

Πολλές πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής έχουν για πεδία ορισμού και τιμών διαστήματα, ή συνδυασμούς διαστημάτων. Τα διαστήματα αυτά μπορεί να είναι ανοιχτά, κλειστά, ή ημιανοιχτά (δηλ. ανοιχτά από το ένα άκρο) (Σχήματα 10 και 11) καθώς και πεπερασμένα ή άπειρα (Σχήμα 12).

Τα ακραία σημεία ενός διαστήματος καλούνται **συνοριακά σημεία.** Αποτελούν τα **σύνορα** του διαστήματος. Τα υπόλοιπα σημεία είναι **εσωτερικά σημεία,** και απαρτίζουν το **εσωτερικό** του διαστήματος. Διαστήματα που περιέχουν όλα τα συνοριακά τους σημεία είναι **κλειστά.** Διαστήματα που δεν περιέχουν κανένα συνοριακό σημείο είναι **ανοιχτά.** Κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος είναι σημείο εσωτερικό του διαστήματος.

Όνομα: Ανοικτό διάστημα ab
Συμβολισμός: $a < x < b$ ή (a, b)

Όνομα: Κλειστό διάστημα ab
Συμβολισμός: $a \le x \le b$ ή $[a, b]$

ΣΧΗΜΑ 10 Ανοιχτά και κλειστά πεπερασμένα διαστήματα.

Κλειστό στο a και ανοικτό στο b
Συμβολισμός: $a \le x < b$ ή $[a, b)$

Ανοικτό στο a και κλειστό στο b
Συμβολισμός: $a < x \le b$ ή $(a, b]$

ΣΧΗΜΑ 11 Ημιανοιχτά πεπερασμένα διαστήματα.

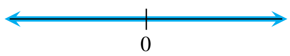
Παράδειγμα 2 Προσδιορισμός πεδίων ορισμού και τιμών

Επαληθεύσατε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

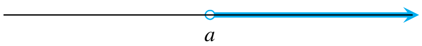
Συνάρτηση	**Π. ορισμού (x)**	**Π. τιμών (y)**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Λύση Ο τύπος $y = x^2$ δίνει πραγματικές τιμές y για κάθε πραγματικό αριθμό x, κι έτσι το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, \infty)$.

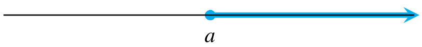
Ο τύπος $y = 1/x$ δίνει πραγματικές τιμές y για κάθε πραγματικό x εκτός του $x = 0$. *Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε κανέναν αριθμό με το* 0.



Όνομα: Το πλήρες σύνολο των πραγματικών αριθμών
Συμβολισμός: $-\infty < x < \infty$ ή $(-\infty, \infty)$



Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του a
Συμβολισμός: $a < x$ ή (a, ∞)



Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του a
Συμβολισμός: $a \le x$ ή $[a, \infty)$

Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μικρότεροι του b
Συμβολισμός: $x < b$ ή $(-\infty, b)$

Όνομα: Το σύνολο των αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του b
Συμβολισμός: $x \le b$ ή $(-\infty, b]$

ΣΧΗΜΑ 12 Άπειρα διαστήματα: παριστάνονται ως «ακτίνες» που εκτείνονται στο άπειρο πάνω στον άξονα των αριθμών. Ο ίδιος ο άξονας αποτελεί επίσης ένα άπειρο διάστημα. Το σύμβολο ∞ (άπειρο) χρησιμοποιείται μόνο για ευκολία· δεν σημαίνει ότι υπάρχει αριθμός ∞.

Ο τύπος $y = \sqrt{x}$ δίνει πραγματικές τιμές για το y μόνον όταν το x είναι θετικό ή μηδέν.

Ο τύπος $y = \sqrt{4 - x}$ δίνει πραγματικές τιμές για το y μόνον όταν το $4 - x$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Έτσι, $0 \leq 4 - x$, ή $x \leq 4$.

Ο τύπος $y = \sqrt{1 - x^2}$ δίνει πραγματικές τιμές για το y για κάθε τιμή του x στο κλειστό διάστημα από -1 ώς 1. Έξω από το διάστημα αυτό, το $1 - x^2$ είναι αρνητικό και η τετραγωνική του ρίζα δεν είναι πραγματικός αριθμός. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[-1, 1]$.

Επισκόπηση και ερμηνεία γραφικών παραστάσεων

Τα σημεία (x, y) στο επίπεδο που έχουν ως συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών εισόδου-εξόδου μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ απαρτίζουν τη **γραφική παράσταση** (ή **γράφημα**) της συνάρτησης. Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = x + 2$, για παράδειγμα, είναι το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (x, y) για τα οποία $y = x + 2$.

Όταν κατασκευάζετε γραφικές παραστάσεις με μολύβι και χαρτί, χρειάζεται να αναπτύξετε δεξιότητα στη *σχεδίαση*. Όταν πάλι παράγετε το γράφημα σε υπολογιστή, τότε χρειαζόσαστε δεξιότητα στην *επισκόπηση*.

Δεξιότητες θέασης γραφικών παραστάσεων

Βήμα 1. Ελέγχουμε αν η γραφική παράσταση είναι λογικοφανής.

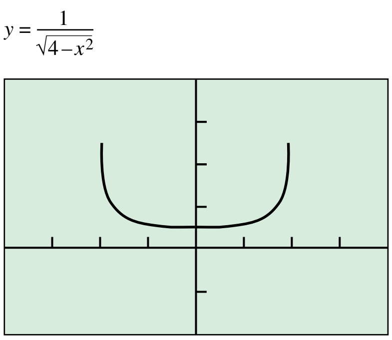
Βήμα 2. Εντοπίζουμε όλα τα κύρια χαρακτηριστικά της.

Βήμα 3. Ερμηνεύουμε τα χαρακτηριστικά αυτά.

Βήμα 4. Αποφαινόμαστε για το αν και σε ποιο σημείο αποτυγχάνει η σχεδίαση με υπολογιστή.

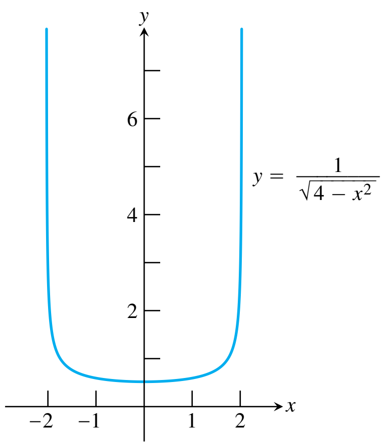
Καθώς θα αποκτάτε εμπειρία θα γίνεστε ικανότεροι στο να διακρίνετε πότε μια γραφική παράσταση είναι καλώς σχεδιασμένη. Θα πρέπει να γνωρίζετε τις βασικές συναρτήσεις, τις γραφικές τους παραστάσεις, και το πώς οι τελευταίες επηρεάζονται αν αλλάξουν οι εξισώσεις των συναρτήσεων.

Η σχεδίαση με υπολογιστή *αποτυγχάνει* όταν η προκύπτουσα γραφική συνάρτηση δεν είναι ακριβής ή είναι λανθασμένη. Συνήθως κάτι τέτοιο οφείλεται σε περιορισμούς στην ανάλυση εικόνας της οθόνης του υπολογιστικού μας συστήματος.



[−4, 4] επί [−2, 4]

(α)



(β)

Σχημα 13 (α) Αποτυχημένη σχεδίαση με υπολογιστή. (β) Μια ακριβέστερη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$. (Παράδειγμα 3)

Παράδειγμα 3 Πότε αποτυγχάνει η σχεδίαση με υπολογιστή

Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης $y = f(x) = 1/\sqrt{4 - x^2}$.

Λύση Η γραφική παράσταση της f στο Σχήμα 13α δείχνει ως πεδίο ορισμού της f το διάστημα μεταξύ του -2 και του 2, ενώ το πεδίο τιμών μοιάζει να είναι κάποιο πεπερασμένο διάστημα. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι αποτέλεσμα κακής σχεδίασης με υπολογιστή, γεγονός που επαληθεύουμε αλγεβρικά.

Αλγεβρική επίλυση

Η ποσότητα $4 - x^2$ πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

$$4 - x^2 > 0$$
$$x^2 < 4$$

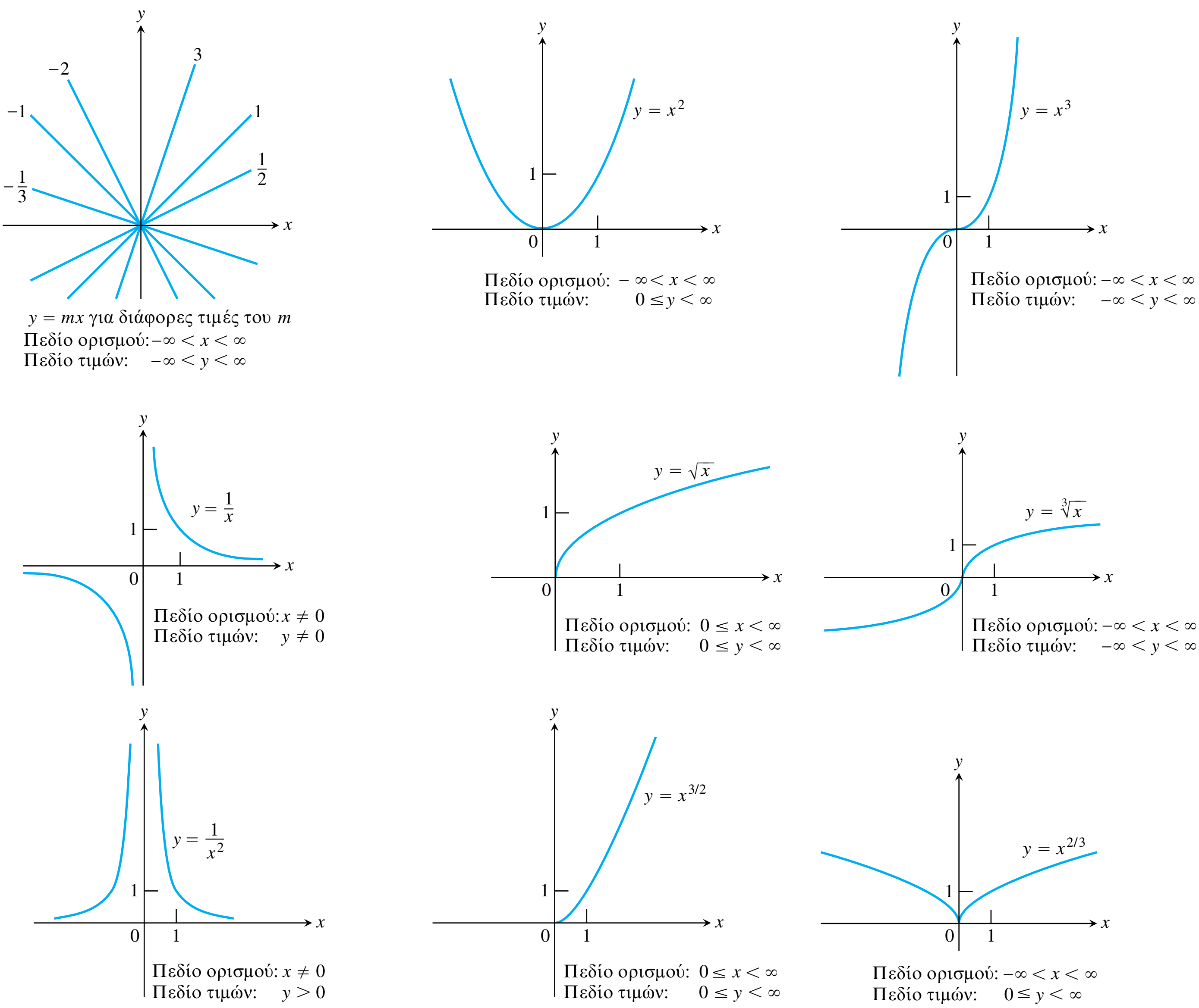
Έτσι, θα ισχύει $-2 < x < 2$, και το πεδίο ορισμού είναι το $(-2, 2)$.

Η ελάχιστη τιμή της f είναι $1/2$ και προκύπτει όταν $x = 0$. Οι τιμές της f αυξάνονται κατακόρυφα καθώς το x προσεγγίζει την τιμή 2 από αριστερά, ή την τιμή -2 από δεξιά, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (όπου τα νούμερα έχουν στρογγυλοποιηθεί σε τρία δεκαδικά ψηφία).

x	$\pm 1{,}99$	$\pm 1{,}999$	$\pm 1{,}9999$	$\pm 1{,}99999$
$f(x)$	5,006	15,813	50,001	158,114

Το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα $[0{,}5\,,\,\infty)$.

Στο Σχήμα 14 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών *συναρτήσεων δυνάμεων του x* που απαντούν συχνά στη μελέτη του απειροστικού λογισμού. Η επίγνωση του γενικού σχήματος των γραφημάτων αυτών θα σας βοηθήσει να διακρίνετε πότε αποτυγχάνει η υπολογιστική σχεδίαση. Στα παρακάτω θα δούμε τις γραφικές παραστάσεις και άλλων τύπων συναρτήσεων.



Σχημα 14 Γραφικές παραστάσεις μερικών χρήσιμων συναρτήσεων δυνάμεων του x.

Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Αν η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως *ανέρχεται* ή *ανυψώνεται* καθώς την παρατηρούμε από αριστερά προς τα δεξιά, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι *αύξουσα.* Αν, πάλι, η γραφική παράσταση *κατέρχεται* ή *χαμηλώνει* από αριστερά προς τα δεξιά, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι *φθίνουσα.* Στην Ενότητα 3.3 θα δώσουμε αυστηρούς ορισμούς της αύξουσας και της φθίνουσας συναρτήσεως. Εκεί θα μάθουμε πώς να βρίουμε τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Εδώ παραθέτουμε μερικά παραδείγματα από το Σχήμα 14.

Συνάρτηση	**Αύξουσα στο**	**Φθίνουσα στο**
$y = x^2$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Πουθενά
$y = 1/x$	Πουθενά	$-\infty < x < 0,\ 0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \le x < \infty$	Πουθενά
$y = x^{2/3}$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις: συμμετρία

Οι γραφικές παραστάσεις *άρτιων* και *περιττών* συναρτήσεων παρουσιάζουν χαρακτηριστικές συμμετρίες.

Ορισμός **Άρτια συνάρτηση, περιττή συνάρτηση**

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι

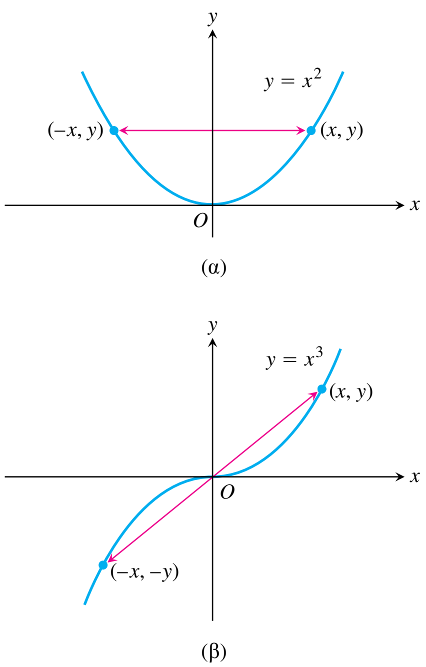
άρτια συνάρτηση του x αν $f(-x) = f(x)$,
περιττή συνάρτηση του x αν $f(-x) = -f(x)$,

για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.

Οι όροι «άρτια» και «περιττή» προέρχονται από δυνάμεις του x. Αν το y είναι μια άρτια δύναμη του x, π.χ. αν $y = x^2$ ή $y = x^4$, τότε θα είναι και άρτια συνάρτηση του x (αφού $(-x)^2 = x^2$ και $(-x)^4 = x^4$). Αν το y είναι μια περιττή δύναμη του x, π.χ. αν $y = x$ ή $y = x^3$, τότε είναι και περιττή συνάρτηση του x (αφού $(-x)^1 = -x$ και $(-x)^3 = -x^3$).

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συναρτήσεως είναι **συμμετρική ως προς τον άξονα y.** Εφόσον $f(-x) = f(x)$, ένα σημείο (x, y) θα ανήκει στη γραφική παράσταση αν και μόνο αν και το σημείο $(-x, y)$ ανήκει σε αυτήν (Σχήμα 15α).

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συναρτήσεως είναι **συμμετρική ως προς την αρχή.** Εφόσον $f(-x) = -f(x)$, ένα σημείο (x, y) ανήκει στη γραφική παράσταση αν και μόνο αν και το σημείο $(-x, -y)$ ανήκει σε αυτήν (Σχήμα 15β). Ισοδύναμα, μια γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή εάν περιστρεφόμενη περί την αρχή κατά 180° συμπίπτει με τον εαυτό της.

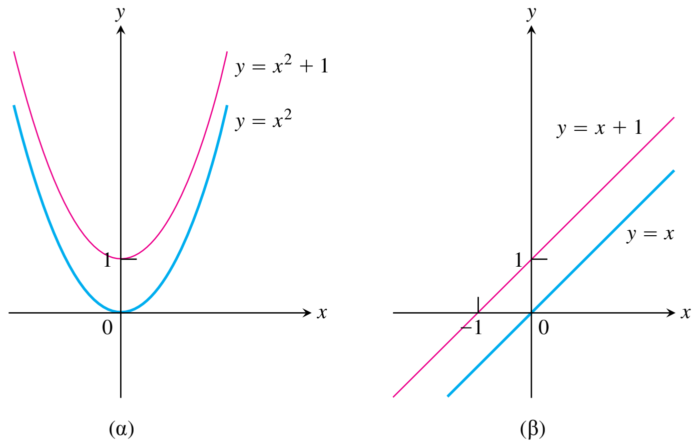


Σχημα 15 (α) Η γραφική παράσταση της $y = x^2$ (άρτια συνάρτηση) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y. (β) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = x^3$ (περιττή) είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 4 Αναγνώριση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$f(x) = x^2$	Άρτια συνάρτηση: $(-x)^2 = x^2$ για κάθε x· συμμετρία ως προς τον άξονα y.
$f(x) = x^2 + 1$	Άρτια συνάρτηση: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ για κάθε x· συμμετρία ως προς τον άξονα y (Σχήμα 16α).
$f(x) = x$	Περιττή συνάρτηση: $(-x) = -x$ για κάθε x· συμμετρία ως προς την αρχή.

$f(x) = x + 1$	Μη περιττή: $f(-x) = -x + 1$, αλλά $-f(x) = -x - 1$. Η ισότητα δεν ισχύει πλέον. Μη άρτια: $(-x) + 1 \neq x + 1$ για κάθε $x \neq 0$ (Σχήμα 16β).



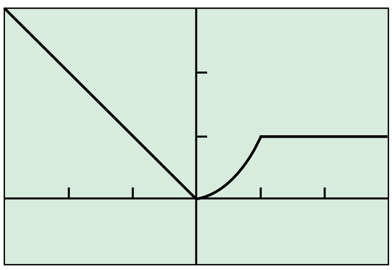
Σχημα 16 (α) Προσθέτοντας τον σταθερό όρο 1 στη συνάρτηση $y = x^2$, η καινούρια συνάρτηση $y = x^2 + 1$ παραμένει άρτια, με γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα y. (β) Προσθέτοντας τον σταθερό όρο 1 στη συνάρτηση $y = x$, η προκύπτουσα συνάρτηση $y = x + 1$ δεν είναι πλέον περιττή. Η συμμετρία ως προς την αρχή έχει απωλεσθεί. (Παράδειγμα 4)

Είναι χρήσιμο να μπορούμε να αναγνωρίζουμε άρτιες και περιττές συναρτήσεις. Έτσι, αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης στη μία πλευρά του άξονα y, αυτομάτως τη γνωρίζουμε και στην άλλη πλευρά του άξονα.

Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα (ή τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις)

Μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις εφαρμόζοντας διαφορετικούς τύπους σε διαφορετικά τμήματα του πεδίου ορισμού.

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



[–3, 3] επί [–1, 3]

Σχημα 17 Η γραφική παράσταση μιας τμηματικά οριζόμενης συναρτήσεως. (Παράδειγμα 5)

Παράδειγμα 5 Σχεδιάζοντας συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα

Σχεδιάστε την

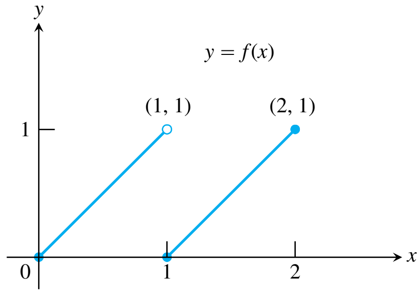
$$y = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Λύση Οι τιμές της f δίδονται από τρεις διαφορετικούς τύπους: $y = -x$ όταν $x < 0$, $y = x^2$ όταν $0 \leq x \leq 1$, και $y = 1$ όταν $x > 1$. Πρόκειται, ωστόσο, *για μία και μόνη συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το πλήρες σύνολο των πραγματικών αριθμών (Σχήμα 17).

Παράδειγμα 6 Πώς γράφεται μια συνάρτηση που ορίζεται κατά τμήματα

Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης $y = f(x)$ που αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα του Σχήματος 18.

Λύση Η μέθοδος που ακολουθούμε είναι να βρούμε χωριστούς τύπους για τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία (0, 0), (1, 1) και (1, 0), (2, 1), και να τους συνδυάσουμε όπως στο Παράδειγμα 5.



Σχημα 18 Το αριστερό ευθύγραμμο τμήμα περιέχει το σημείο (0, 0) αλλά όχι το (1, 1). Το δεξιό ευθύγραμμο τμήμα περιέχει και τα δύο ακραία του σημεία. (Παράδειγμα 6)

Το ευθύγραμμο τμήμα από το (0, 0) έως το (1, 1) Η ευθεία που διέρχεται από τα (0, 0) και (1, 1) έχει κλίση $m = (1 - 0)/(1 - 0) = 1$ και τεταγμένη $b = 0$. Η ευθεία αυτή περιγράφεται από την εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης, $y = x$. Το ευθύγραμμο τμήμα από το (0, 0) έως το (1, 1) που περιέχει το σημείο (0, 0) αλλά όχι το (1, 1), είναι το γράφημα της συναρτήσεως $y = x$, όπου το x περιορίζεται στο ημιανοιχτό διάστημα $0 \le x < 1$. Δηλαδή,

$$y = x, \qquad 0 \le x < 1.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα από το (1, 0) έως το (2, 1) Η ευθεία που διέρχεται από τα (1, 0) και (2, 1) έχει κλίση $m = (1 - 0)/(2 - 1) = 1$ και διέρχεται από το (1, 0). Η αντίστοιχη εξίσωση σημείου-κλίσεως θα είναι

$$y = 1(x - 1) + 0, \qquad \text{ή} \qquad y = x - 1.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα από το (1, 0) έως το (2, 1) που περιέχει αμφότερα τα ακραία σημεία είναι το γράφημα της συνάρτησης $y = x - 1$, όπου το x περιορίζεται στο κλειστό διάστημα $1 \le x \le 2$. Δηλαδή,

$$y = x - 1, \qquad 1 \le x \le 2.$$

Τμηματικός τύπος Συνδυάζοντας τους τύπους για τα δυο τμήματα του γραφήματος, λαμβάνουμε

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Θυμηθείτε ότι $\sqrt{a^2} = |a|$. Μην γράφετε λοιπόν $\sqrt{a^2} = a$ παρά μόνο αν γνωρίζετε ήδη ότι $a \ge 0$.

Η συνάρτηση απόλυτης τιμής

Η συνάρτηση απόλυτης τιμής $y = |x|$ ορίζεται κατά τμήματα μέσω του τύπου

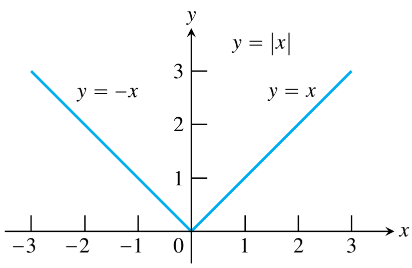
$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0. \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι άρτια, και η γραφική της παράσταση (Σχήμα 19) συμμετρική ως προς τον άξονα y. Δεδομένου ότι το σύμβολο $\sqrt{a}$ δηλώνει τη *μη αρνητική* τετραγωνική ρίζα του a, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον εναλλακτικό ορισμό

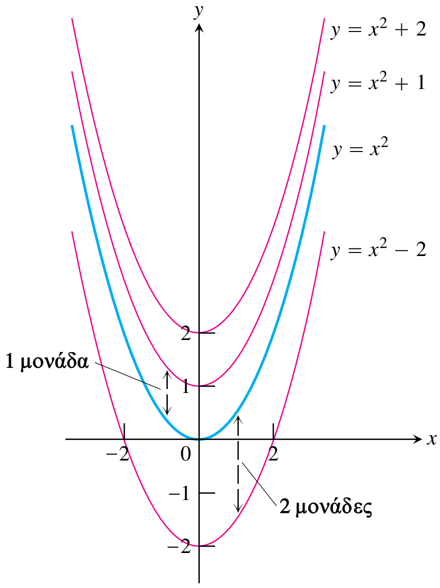
$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Ιδιότητες απόλυτων τιμών

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
4. $|a + b| \le |a| + |b|$



Σχημα 19 Η συνάρτηση απόλυτης τιμής έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $[0, \infty)$.



Σχημα 20 Για να μετατοπίσουμε το γράφημα της $f(x) = x^2$ προς τα πάνω (ή προς τα κάτω), προσθέτουμε θετικές (ή αρνητικές) σταθερές στον τύπο της f.

Πώς μετατοπίζουμε μια γραφική παράσταση

Προκειμένου να μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ προς τα πάνω, προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο δεξιό μέλος του τύπου $y = f(x)$.

Για μετατόπιση προς τα κάτω, προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο δεξιό μέλος του τύπου $y = f(x)$.

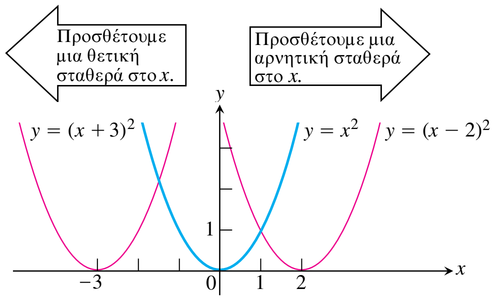
Παράδειγμα 7 Κατακόρυφη μετατόπιση γραφήματος

Προσθέτοντας τη μονάδα στο δεξιό μέλος του τύπου $y = x^2$ παίρνουμε $y = x^2 + 1$, οπότε το γράφημα μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά μία μονάδα (Σχήμα 20). Προσθέτοντας το -2 στο δεξιό μέλος του τύπου $y = x^2$ παίρνουμε $y = x^2 - 2$, οπότε το γράφημα μετατοπίζεται προς τα κάτω κατά δύο μονάδες (Σχήμα 20).

Για να μετατοπίσουμε το γράφημα της $y = f(x)$ προς τα αριστερά, προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο x. Για μετατόπιση προς τα δεξιά, προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο x.

Παράδειγμα 8 Οριζόντια μετατόπιση γραφήματος

Προσθέτοντας το 3 στο x, όπου $y = x^2$, παίρνουμε $y = (x + 3)^2$, και το γράφημα μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά τρεις μονάδες (Σχήμα 21). Προσθέτοντας το -2 στο x, όπου $y = x^2$, παίρνουμε $y = (x - 2)^2$, και το γράφημα μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά δύο μονάδες (Σχήμα 21).



Σχημα 21 Για να μετατοπίσουμε το γράφημα της $y = x^2$ προς τα αριστερά, προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο x. Για μετατόπιση προς τα δεξιά, προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο x.

Τύποι μετατόπισης

Κατακορυφες μετατοπισεις

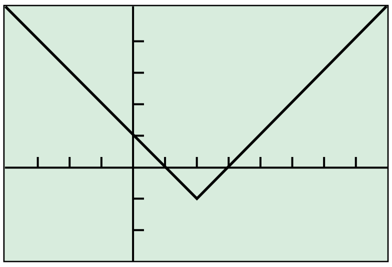
$y = f(x) + k$	Μετατοπίζει το γράφημα k μονάδες *πάνω* αν $k > 0$
	Μετατοπίζει το γράφημα $\lvert k \rvert$ μονάδες *κάτω* αν $k < 0$

Οριζοντιες μετατοπισεις

$y = f(x + h)$	Μετατοπίζει το γράφημα h μονάδες *αριστερά* αν $h > 0$
	Μετατοπίζει το γράφημα $\lvert h \rvert$ μονάδες *δεξιά*

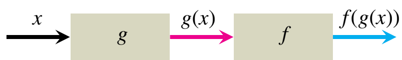
αν $h < 0$

$y = |x-2| - 1$



$[-4, 8]$ επί $[-3, 5]$

Σχημα 22 Το κατώτερο σημείο του γραφήματος της $f(x) = |x-2| - 1$ είναι το $(2, -1)$. (Παράδειγμα 9)



Σχημα 23 Δυο συναρτήσεις μπορούν να συντεθούν στο x, εφόσον η τιμή της πρώτης συναρτήσεως στο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της δεύτερης. Η σύνθετη συνάρτηση συμβολίζεται ως $f \circ g$.

Παράδειγμα 9 Συνδυασμός μετατοπίσεων

Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών, και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x-2| - 1$.

Λύση Το γράφημα της f είναι αυτό της συνάρτησης απόλυτης τιμής μετατοπισμένο κατά 2 μονάδες οριζόντια, και συγκεκριμένα προς τα δεξιά, και κατά 1 μονάδα κατακόρυφα προς τα κάτω (Σχήμα 22). Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, \infty)$, ενώ το πεδίο τιμών της είναι το $[-1, \infty)$.

Σύνθετες συναρτήσεις

Ας υποθέσουμε ότι μερικές από τις εξόδους (τιμές) μιας συναρτήσεως g μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι μιας άλλης συναρτήσεως f. Μπορούμε τότε να συνδέσουμε τις g και f και να κατασκευάσουμε μια νέα συνάρτηση της οποίας οι είσοδοι x είναι οι είσοδοι της g, ενώ οι έξοδοί της είναι οι αριθμοί $f(g(x))$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 23. Λέμε τότε ότι η συνάρτηση $f(g(x))$ (διαβάζεται «f του g του x») είναι η **σύνθετη συνάρτηση των g και f.** Η συνάρτηση αυτή κατασκευάστηκε *συνθέτοντας* τις g και f με πρώτη κατά σειρά εφαρμογής την g και δεύτερη την f. Ο συνήθης συμβολισμός για τη σύνθετη αυτή συνάρτηση είναι $f \circ g$, και διαβάζεται «f του g». Η τιμή της $f \circ g$ στο x είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Σημειώστε ότι ο συμβολισμός $f \circ g$ δηλώνει ότι πρώτα εφαρμόζουμε την g στη μεταβλητή εισόδου x, και κατόπιν την f.

Παράδειγμα 10 Θεωρώντας μια συνάρτηση σύνθετη

Η συνάρτηση $y = \sqrt{1-x^2}$ στο Παράδειγμα 2 μπορεί να ειδωθεί ως μια αλληλουχία δύο βημάτων, όπου στο πρώτο υπολογίζεται το $1 - x^2$ και στο δεύτερο εξάγεται η τετραγωνική ρίζα του πρώτου αποτελέσματος. Η συνάρτηση y είναι η σύνθεση της $g(x) = 1 - x^2$ και της $f(x) = \sqrt{x}$. Σημειώστε ότι η ποσότητα $1 - x^2$ δεν μπορεί να είναι αρνητική. Το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης είναι λοιπόν το διάστημα $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 11 Τύπος και τιμή σύνθετης συναρτήσεως

Βρείτε έναν τύπο για την $f(g(x))$ αν $g(x) = x^2$ και $f(x) = x - 7$. Κατόπιν υπολογίστε την τιμή $f(g(2))$.

Λύση Για να βρούμε την $f(g(x))$, αντικαθιστούμε το x στον τύπο $f(x) = x - 7$ με την έκφραση που δίδεται για την $g(x)$.

$$f(x) = x - 7$$
$$f(g(x)) = g(x) - 7 = x^2 - 7$$

Έπειτα υπολογίζουμε την τιμή $f(g(2))$ θέτοντας όπου x το 2.

$$f(g(2)) = (2)^2 - 7 = -3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

Εύρεση τύπων συναρτήσεων

1. Εκφράστε το εμβαδόν και την περίμετρο ισόπλευρου τριγώνου συναρτήσει του μήκους πλευράς x.

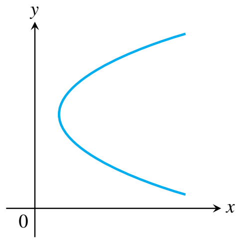
2. Εκφράστε το μήκος πλευράς τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του d. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν του τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου.

3. Εκφράστε το μήκος της ακμής κύβου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του κύβου d. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν και τον όγκο του κύβου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου.

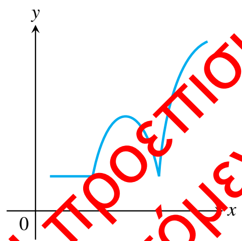
4. Ένα σημείο P στο πρώτο τεταρτημόριο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Εκφράστε τις συντεταγμένες του P συναρτήσει της κλίσεως της ευθείας που συνδέει το P με την αρχή των αξόνων.

Ποια από τα διαγράμματα των Ασκήσεων 5 και 6 αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x, και ποια όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

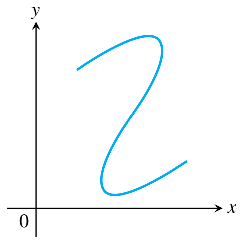
5. **(α)**



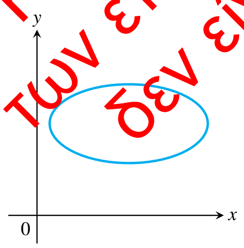
(β)



6. **(α)**



(β)



Πεδία ορισμού και τιμών

Στις Ασκήσεις 7-10, βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών για κάθε συνάρτηση.

7. **(α)** $f(x) = 1 + x^2$ **(β)** $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

8. **(α)** $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ **(β)** $F(t) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{t}}$

9. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$ **10.** $g(z) = \sqrt[3]{z - 3}$

Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των Ασκήσεων 11 και 12. Ποιες συμμετρίες (αν υπάρχουν) διαθέτουν τα γραφήματα;

11. **(α)** $y = -x^3$ **(β)** $y = -\dfrac{1}{x^2}$

12. **(α)** $y = \sqrt{|x|}$ **(β)** $y = -\dfrac{1}{x}$

13. Σχεδιάστε τις παρακάτω εξισώσεις και εξηγήστε γιατί δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x.

(α) $|y| = x$ **(β)** $y^2 = x^2$

14. Σχεδιάστε τις παρακάτω εξισώσεις και εξηγήστε γιατί δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x.

(α) $|x| + |y| = 1$ **(β)** $|x + y| = 1$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Στις Ασκήσεις 15-20, αποφανθείτε για το αν η κάθε συνάρτηση είναι άρτια, περιττή, ή τίποτα από τα δύο.

15. **(α)** $f(x) = 3$ **(β)** $f(x) = x^{-5}$

16. **(α)** $f(x) = x^2 + 1$ **(β)** $f(x) = x^2 + x$

17. **(α)** $g(x) = x^3 + x$ **(β)** $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

18. **(α)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **(β)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

19. **(α)** $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$ **(β)** $h(t) = |t^3|$

20. **(α)** $h(t) = \sqrt{t^2 + 3}$ **(β)** $h(t) = 2|t| + 1$

Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα

Στις Ασκήσεις 21-24, **(α)** σχεδιάστε τη γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως. Κατόπιν βρείτε **(β)** το πεδίο ορισμού και **(γ)** το πεδίο τιμών της.

21. **(α)** $f(x) = -|3 - x| + 2$ **(β)** $f(x) = 2|x + 4| - 3$

22. **(α)** $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 1 \\ 2x, & 1 < x \end{cases}$ **(β)** $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1 \\ (3/2)x + 3/2, & 1 \le x \le 3 \\ x + 3, & x > 3 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$

25. *Μάθετε γράφοντας* Το *κριτήριο της κατακορύφου* μάς επιτρέπει να προσδιορίζουμε αν μία καμπύλη είναι η γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, κι έχει ως εξής: Αν κάθε κατακόρυφη ευθεία που ανήκει στο επίπεδο xy τέμνει μια δεδομένη καμπύλη σε ένα το πολύ σημείο, τότε η καμπύλη αποτελεί τη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης. Εξηγήστε γιατί αληθεύει η δήλωση αυτή.

26. *Μάθετε γράφοντας* Ένα σημείο (x, y) θα ανήκει σε μια καμπύλη που είναι *συμμετρική ως προς τον άξονα x*, αν και μόνο αν και το $(x, -y)$ ανήκει σε αυτήν. Εξηγήστε γιατί μια συμμετρική ως προς τον άξονα x καμπύλη δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση συναρτήσεως άλλης από την $y = 0$.

Στις Ασκήσεις 27 και 28, δώστε έναν τύπο που να ορίζει κατά τμήματα τη συνάρτηση.