Εξώφυλλο: M. C. Escher (Λιθογραφία, 1955)

Γιατί Γεωμετρία των Fractals...

Τα σύννεφα δεν είναι σφαιρικά, τα βουνά δεν είναι κωνικά, οι ακτές δεν είναι κυκλικές, ο φλοιός των δέντρων δεν είναι λείος και η τροχιά του κεραυνού δεν είναι ευθεία. *B. Mandelbrot*

Σ' αυτούς που με βοήθησαν.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Fractal σύνολα, Fractal συναρτήσεις

1.1 Μετρικοί χώροι

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούν ορισμοί, ιδιότητες και θεωρήματα, σχετικά με μετρικούς χώρους. Τα ανωτέρω θα χρησιμοποιηθούν και θα εφαρμοσθούν για την κατασκευή και μελέτη του χώρου των Fractals.

Ορισμός 1.1.1.

Έστω X τυχαίο μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

i. $d(x, y) \geq 0, \quad x, y \in X$

$d(x, y) = 0$, *αν και μόνο αν*, $x = y$

ii. $d(x,y) = d(y,x), \quad x,y \in X$

iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad x,y,z \in X$

ονομάζεται **απόσταση** *ή* **μετρική** *στο σύνολο* X.

Το ζεύγος $\langle X, d \rangle$ *καλείται* **μετρικός χώρος** *(μ.χ).*

Αν $Y \subseteq X, \quad Y \neq \varnothing$, *το ζεύγος* $\langle Y, d_Y \rangle$ *με* $d_Y(y,z) = d(y,z), \quad y,z \in Y$ *καλείται* **υπόχωρος** *του* $\langle X, d \rangle$.

Παραδείγματα μ.χ.

1. $\langle \mathbb{R}, d \rangle, \quad d(x,y) = |x-y|$.

   Το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιάζεται με την δομή μ.χ., όπου ως απόσταση δύο αριθμών ορίζεται η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

2. $\langle \mathbb{R}^n, d_p \rangle$.

   Στο καρτεσιανό γινόμενο, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n - φορές), $n \geq 1$ ορίζονται οι μετρικές d_p, ώστε:

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= |x-y|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < +\infty \quad \text{και} \\ d_\infty(x,y) &= |x-y|_\infty = \max\{|x_i - y_i|, \quad i = 1,2,\ldots,n\} \end{aligned}$$

   όπου $\quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

   Για $p = 2$ η d_2 καλείται **Ευκλείδεια μετρική**. Θα συμβολίζουμε την ευκλείδεια απόσταση των $x, y \in I\!R^n$ ως $d(x,y) = |x-y|$, αν δεν θα υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης.

3. $\langle C(X), d_\infty \rangle$

   $C(X)$ είναι το σύνολο των συνεχών, φραγμένων συναρτήσεων ορισμένων στον μ.χ. $\langle X, d \rangle$ με τιμές στο $I\!R$.

   Ορίζουμε ως απόσταση των $f, g \in C(X)$ την

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$

4. $\langle X, d_\delta \rangle$

   Ένα τυχαίο σύνολο X εφοδιάζεται με την μετρική

$$d_\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

   και αποτελεί τον διακριτό μ.χ.

1.1.1 Ειδικά σύνολα στον $\langle X, d \rangle$

Έστω $x_o \in X$.

- Εάν $r > 0$ τότε το σύνολο

$$S(x_o, r) = \{x \in X : d(x, x_o) < r\}$$

  καλείται **ανοικτή σφαίρα** κέντρου x_o και ακτίνας r.

- Εάν $r \geq 0$, τότε το σύνολο

$$\hat{S}(x_o, r) = \{x \in X : d(x, x_o) \leq r\}$$

καλείται **κλειστή σφαίρα** κέντρου x_o και ακτίνας r.

- Το σύνολο $A \subseteq X$ καλείται **ανοικτό σύνολο**, αν για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $r > 0$, ώστε $S(\alpha, r) \subseteq A$

- Το σύνολο $K \subseteq X$ καλείται **κλειστό σύνολο**, αν το συμπλήρωμα του $X \backslash K = K^c$ είναι ανοικτό.

- Το σύνολο $B \subseteq X$ καλείται **συμπαγές σύνολο**, αν για κάθε τυχαία κάλυψη του, $\{A_i : i \in I\}$ από ανοικτά σύνολα, $B \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, υπάρχουν $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}, \quad i_j \in I, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad$ ώστε $B \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_{i_j}$.

- Το σύνολο $D \subseteq X$ καλείται **φραγμένο σύνολο**, αν υπάρχει $M > 0$ και $x_o \in X$ ώστε $D \subseteq S(x_o, M)$.

- Το σύνολο $C \subseteq X$ καλείται **ολικά φραγμένο σύνολο**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ώστε $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon)$.

Παραδείγματα και Ιδιότητες 1.1.1.

Έστω $\langle X, d \rangle$ τυχαίος μ.χ.

1. *Τα σύνολα $X, \varnothing$ είναι ανοικτά και κλειστά σύνολα.*

2. *Τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.*

3. *Ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

   Τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

4. *Τομή πεπερασμένου το πλήθος ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

   Ένωση πεπερασμένου το πλήθος κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

5. *Το σύνολο $S(x_o, r)$ είναι ανοικτό σύνολο.*

6. *Το σύνολο $\hat{S}(x_o, r)$ είναι κλειστό σύνολο.*

7. *Το καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών είναι συμπαγές σύνολο.*

8. *Εάν $\langle \mathbb{R}, d\rangle$ ο μ.χ. των πραγματικών αριθμών, τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $(\alpha < \beta)$ είναι συμπαγή σύνολα (Θεώρημα Heine - Borel).*

1.1.2 Ακολουθίες στον $\langle X, d\rangle$ - Πλήρης μ.χ.

1. **Η ακολουθία $(\mathbf{x_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ του $\mathbf{X}$ συγκλίνει στο $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$**, συμβολίζεται $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, αν η ακολουθία των αριθμών $(d(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, y) < \varepsilon$ για $n \geq n_o$.

   Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται **συγκλίνουσα ακολουθία**.

2. Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X είναι **βασική ακολουθία** (ή **ακολουθία Cauchy**) αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για

$n, m \geq n_o$.

Παρατηρούμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική. Το αντίστροφο **δεν** ισχύει γενικά.

3. Ο μ.χ. $\langle X, d\rangle$ καλείται **πλήρης**, αν κάθε βασική ακολουθία του συγκλίνει, σε κάποιο σημείο του.

1.1.3 Ειδικά σημεία συνόλου

Έστω $A \subseteq X$ και $x_o \in X$

1. Το x_o καλείται **σημείο επαφής** του A, αν και μόνον αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $S(x_o, \varepsilon) \bigcap A \neq \varnothing$.

   Ισοδύναμα : Υπάρχει ακολουθία $\alpha_n \in A, \quad n \in I\!N$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = x_o$.

2. Το x_o καλείται **σημείο συσσώρευσης** του A, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $(S(x_o, \varepsilon)\backslash\{x_o\}) \bigcap A \neq \varnothing$.

   Ισοδύναμα : Υπάρχει ακολουθία $\beta_n \in A, n \in I\!N$ με $\beta_n \neq x_o$, ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = x_o$.

   Τα σύνολα των σημείων επαφής, συσσώρευσης του A, συμβολίζονται με $\overline{\mathbf{A}}, \mathbf{A}'$, αντίστοιχα.

3. Ένα σύνολο είναι κλειστό, αν και μόνον αν, $\overline{A} = A$.

   Ισοδύναμα : Για τυχαία ακολουθία $\alpha_n \in A, n \in I\!N$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ έχουμε ότι $\alpha \in A$.

4. Το $x_o \in A$, καλείται **εσωτερικό σημείο** του A, αν και μόνον αν, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $S(x_o, \varepsilon) \subseteq A$.

   Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται με $\mathbf{A^o}$.

5. Το A είναι ανοικτό, αν και μόνον αν, $A = A^o$.

6. Το $x_o \in X$, καλείται **συνοριακό σημείο** του A, αν και μόνον αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $S(x_o, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ και $S(x_o, \varepsilon) \cap A^c \neq \varnothing$.

   Το σύνολο των συνοριακών σημείων συμβολίζεται με $\boldsymbol{\partial A}$. Ισχύει $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

1.1.4 Ιδιότητες Συμπαγών μ.χ

1. Εάν ο $\langle X, d \rangle$ είναι συμπαγής μ.χ. και $K \subseteq X$ είναι κλειστό σύνολο, τότε το K είναι συμπαγές.

2. Ο $\langle X, d \rangle$ είναι συμπαγής μ.χ., αν και μόνον αν, κάθε ακολουθία του περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

1.1.5 Ιδιότητες Πλήρους μ.χ.

Εάν ο $\langle X, d \rangle$ είναι πλήρης μ.χ. τότε το $K \subseteq X$ είναι κλειστό, αν και μόνον αν, ο $\langle K, d_K \rangle$ είναι πλήρης μ.χ.

1.1.6 Σχέση Συμπαγούς και Πλήρους μ.χ.

Ο μ.χ. $\langle X, d\rangle$ είναι συμπαγής, αν και μόνον αν, είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.

Ιδιαιτέρως: Στον $\langle I\!R^n, d_p\rangle$, $(1 \leq p \leq \infty)$ ένα σύνολο είναι συμπαγές, αν και μόνον αν, είναι κλειστό και φραγμένο.

1.1.7 Ισοδύναμες μετρικές

Ορισμός 1.1.2.

Εάν d, ρ είναι μετρικές στο σύνολο X τότε οι μετρικές καλούνται **ισοδύναμες μετρικές**, *$d \sim \rho$, αν και μόνον αν, οι μ.χ. $\langle X, d\rangle$, $\langle X, \rho\rangle$ έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα.*

Ισοδύναμα : *Αν στους μ.χ. $\langle X, d\rangle$, $\langle X, \rho\rangle$ έχουμε τα ίδια κλειστά σύνολα, τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες.*

Παραδείγματα 1.1.1.

1. *Οι μετρικές d_p, $1 \leq p \leq \infty$ στον $I\!R^n$ είναι όλες ισοδύναμες.*

2. *Η d_δ στον $I\!R^n$ δεν είναι ισοδύναμη με την d_p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων και των θεωρημάτων της παραγράφου αυτής, υπάρχουν σε βιβλία "Πραγματικής Ανάλυσης" και "Τοπολογίας". (βλ. [2]).

1.2 Σταθερά σύνολα συνάρτησης

1.2.1 Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

Έστω $\langle X, d\rangle$, $\langle Y, \sigma\rangle$ μ.χ. και $f : X \to Y$ συνάρτηση μεταξύ των συνόλων X, Y.

1. Η f είναι **συνεχής στο** $\mathbf{x_o} \in \mathbf{X}$, αν και μόνον αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x_o) > 0$ ώστε $f\left(S_X\left(x_o, \delta\right)\right) \subseteq S_Y\left(f\left(x_o\right), \varepsilon\right)$.

   Ισοδύναμα: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x_o)$, ώστε, αν $d(x, x_o) < \delta$, τότε, $\sigma\left(f\left(x\right), f\left(x_o\right)\right) < \varepsilon$.

   Ισοδύναμα: Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ του X με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ έχουμε και $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o)$.

   Η f είναι **συνεχής στον X** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X .

2. Η f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στον X, αν και μόνον αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε, για $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ έχουμε $\sigma\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < \varepsilon$.

   Ισοδύναμα: Για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$, $(y_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ του X με $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ έχουμε και $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma\left(f\left(x_n\right), f\left(y_n\right)\right) = 0$.

3. Η συνάρτηση f ικανοποιεί συνθήκη **Lipschitz**, αν υπάρχει $M > 0$, ώστε

$$\sigma\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq M \cdot d(x, y) \quad \text{για κάθε} \quad x, y \in X.$$

4. Η f είναι **συνάρτηση συστολής**, αν υπάρχει $0 < s < 1$, ώστε

$$\sigma\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq s \cdot d(x, y) \quad \text{για κάθε} \quad x, y \in X.$$

Παραδείγματα και Ιδιότητες 1.2.1.

1. *Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής.*

   Το αντίστροφο **δεν** *ισχύει γενικά. Για παράδειγμα* $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0, 1)$.

2. *Εάν η* $f : X \to Y$ *είναι συνεχής συνάρτηση και ο* $\langle X, d\rangle$ *είναι συμπαγής μ.χ., τότε η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Θεμελειώδες θεώρημα)*

3. *Εάν η* $f : X \to Y$, *είναι συνεχής συνάρτηση και ο* $< X, d >$ *είναι συμπαγής μ.χ., τότε το* $f(X) \subseteq Y$ *είναι συμπαγές σύνολο.*

4. *Εάν η* $f : X \to \mathbb{R}$, *είναι συνεχής συνάρτηση και ο* $< X, d >$ *είναι συμπαγής μ.χ., τότε υπάρχουν* $x_1, x_2 \in X$ *τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \max\{f(x) : x \in X\} \\ f(x_2) &= \min\{f(x) : x \in X\}. \end{aligned}$$

5. *Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

   Το αντίστροφο **δεν** *ισχύει γενικά. Για παράδειγμα* $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 1]$.

6. *Εάν $A \subseteq X$, η συνάρτηση $\varphi_A(x) = d(x, A) =: \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz,*

$$|\varphi_A(x) - \varphi_A(y)| \leq d(x, y), \quad x, y \in X.$$

7. *Εάν $A \subseteq X$, τότε το A είναι κλειστό σύνολο, αν και μόνον αν,*

$$A = \big\{x \in X : \varphi_A(x) = d(A, x) = 0\big\}.$$

1.2.2 Ελκυστής συνάρτησης

Το σύνολο $A \neq \emptyset, A \subseteq X$ καλείται **σταθερό σύνολο** ή **ελκυστής** για την $f : X \to X$, αν $f(A) = A$.

Εάν το A μονοσύνολο, $A = \{x_o\}$, τότε το x_o καλείται **σταθερό σημείο** της f.

Γενικά μια συνάρτηση f δεν έχει σταθερό σύνολο. Σε ειδικές περιπτώσεις εξασφαλίζεται η ύπαρξη.

Συμβολίζουμε με

$$\begin{aligned} f^1 &= f \quad \text{και} \\ f^n &= \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n φορές}}, \quad n \in I\!N, \end{aligned}$$

όπου " $\circ$ " είναι η σύνθεση συναρτήσεων. Η "συνεχής επανάληψη" της συνάρτησης, θα χρησιμοποιηθεί κατά κόρον στα επόμενα.

Πρόταση 1.2.1.

Έστω $f : X \to X$ συνεχής συνάρτηση, όπου $\langle X, d\rangle$ είναι συμπαγής μ.χ.. Τότε υπάρχει συμπαγές σύνολο $A \neq \emptyset$, ώστε $f(A) = A$.

(Το A δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό).

Απόδειξη.

Έστω $x_o \in X$ τυχαίο σημείο. Ορίζουμε την ακολουθία

$$\alpha_n = \begin{cases} x_o, \quad n = 0, \\ f(x_o), \quad n = 1 \\ f^n(x_o) = f\left(f^{n-1}\left(x_o\right)\right), \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Επειδή ο χώρος X είναι συμπαγής, το σύνολο

$$A = \{x \in X : \quad \text{υπάρχει υπακολουθία της } (\alpha_n)_{n\in \mathbb{N}}, \text{ ώστε } \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = x\}$$

είναι μη κενό. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το A είναι κλειστό. Οπότε το $A \neq \emptyset$, A συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς).

Έστω $x \in A$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = x$. Επειδή η f είναι συνεχής έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_{k_n}) = f(x)$$

με $f(\alpha_{k_n}) = \alpha_{k_n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$ υπακολουθία της $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα $f(x) \in A$.

Εξ' άλλου $\alpha_{k_n} = f(\alpha_{k_n-1}), n \in \mathbb{N}$ και η $(\alpha_{k_n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία συγκλίνουσα, έστω $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \alpha_{k_\lambda-1} = y \in A$. Τότε και $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\alpha_{k_\lambda-1}) = f(y)$, τελικά $x = f(y)$ με $y \in A$.

Από τα ανωτέρω έχουμε ότι $f(A) \subseteq A \subseteq f(A)$. $\square$

Από την ανωτέρω κατασκευή φαίνεται ότι ο ελκυστής της f δεν είναι μοναδικός.

1.2.3 Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

Θεώρημα 1.2.1.

Έστω $f : X \to X$, συνάρτηση συστολής, όπου $\langle X, d\rangle$ πλήρης μ.χ. Τότε

i. υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο x_o της f.

ii. $x_o = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(y)$, για κάθε $y \in X$.

Απόδειξη.

Έστω $0 < s < 1$ ο συντελεστής συστολής της f.
Έστω $y \in X$ τυχαίο σημείο. Ορίζουμε επαγωγικά την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$, με

$$\begin{aligned} \alpha_o &= y, \\ \alpha_1 &= f(y), \\ &\vdots \\ \alpha_n &= f^n(y) = f\big(f^{n-1}(y)\big) = f(\alpha_{n-1}), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $d(\alpha_n, \alpha_m) \leq d(\alpha_o, \alpha_1) \cdot (s^n + s^{n+1} + \ldots s^{m-1})$ για $m > n$. Επειδή $0 < s < 1$ έχουμε $\sum\limits_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$ (γεωμετρική σειρά). Άρα $d(\alpha_n, \alpha_m) < \frac{s^n}{1-s} d(\alpha_o, \alpha_1)$ για $m > n$ με $\lim\limits_{n\to\infty} s^n = 0$.

Επομένως η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον πλήρη μ.χ. X.

Άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_o \in X$. Λόγω της συνέχειας της f έχουμε

$$f(x_o) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = x_o.$$

Επομένως το x_o είναι σταθερό σημείο για την f.

Έστω $x' \in X$ με $f(x') = x'$. Τότε

$$d(x_o, x') = d\left(f(x_o), f(x')\right) \leq s d(x_o, x'), \quad \text{όπου} \quad 0 < s < 1.$$

Άρα $d(x_o, x') = 0$ ή $x' = x_o$, δηλαδή το σταθερό σημείο της f είναι ένα και μόνον. $\square$

1.3 Ο χώρος των fractals

Οι χώροι μέσα στους οποίους κατασκευάζουμε τα σύνολα fractal και τις fractal συναρτήσεις είναι οι συνήθεις Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^d$ με την Ευκλείδεια μετρική

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορίζουμε $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, $(d \geq 1)$ το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του χώρου $\mathbb{R}^d$. Το σύνολο $\mathcal{H}$ εφοδιάζεται με την δομή πλήρους μετρικού χώρου με την μετρική Hausdorff και με την βοήθεια κατάλληλης συνάρτησης συστολής κατασκευάζουμε fractal, ως το σταθερό σημείο που προκύπτει από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach.

1.3.1 Μετρική Hausdorff

Ορισμός 1.3.1.

Έστω $A, B \in \mathcal{H}$. *Εάν* $d(x, B) = \min\{|x-\beta| : \beta \in B\}$ *είναι η απόσταση του σημείου* $x \in \mathbb{R}^d$ *από το* B, *ορίζεται*

$$\begin{aligned}\tilde{d}(A,B) &= \max\{d(\alpha,B) : \alpha \in A\} \quad \text{ως } \textbf{απόσταση του } A \textbf{ από το } B \\ \tilde{d}(B,A) &= \max\{d(\beta,A) : \beta \in B\} \quad \text{ως } \textbf{απόσταση του } B \textbf{ από το } A.\end{aligned}$$

Ως **Hausdorff απόσταση των A,B** *ορίζουμε*

$$\begin{aligned}h(A,B) &= \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\} \\ &= \max\{\max_{\alpha\in A}\min_{\beta\in B}|\alpha-\beta|, \max_{\beta\in B}\min_{\alpha\in A}|\alpha-\beta|\}.\end{aligned}$$

Εφ' όσον τα A,B είναι συμπαγή και οι συναρτήσεις $d(\cdot, A), d(\cdot, B)$ *είναι συνεχείς, υπάρχουν* $\alpha_o \in A, \quad \beta_o \in B$ *ώστε* $h(A,B) = |\alpha_o - \beta_o|$.
(βλ. Παραδείγματα και Ιδιότητες 1.2.1).

Ισοδύναμος Ορισμός

Εάν $A \in \mathcal{H}, \quad \varepsilon \geq 0$ *και* $B^d = \hat{S}(0,1)$ *είναι η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του* $\mathbb{R}^d$, *ορίζουμε*

$$\begin{aligned}A+\varepsilon := A+\varepsilon B^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : x = \alpha+\varepsilon y, \quad \alpha \in A, \quad y \in B^d\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,A) \leq \varepsilon\} = \bigcup_{\alpha\in A}\hat{S}(\alpha,\varepsilon).\end{aligned}$$

Για $\varepsilon = 0, \quad A = \{x \in I\!R^d : d(x, A) = 0\}$, *επειδή το* A *είναι κλειστό σύνολο. (βλ. Παραδείγματα και Ιδιότητες 1.2.1 (7)).*

Εάν $A, B \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$h(A, B) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B + \varepsilon \quad B \subseteq A + \varepsilon\}.$$

Πράγματι:

Κατά αρχάς παρατηρούμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0 : A \subseteq B + \varepsilon, \quad B \subseteq A + \varepsilon$, επειδή τα A, B είναι φραγμένα.

Άρα υπάρχει $\gamma = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B + \varepsilon, \quad B \subseteq A + \varepsilon\} \in I\!R$.

Εάν $\varepsilon \geq 0$ και $A \subseteq B + \varepsilon, \quad B \subseteq A + \varepsilon$, τότε $\tilde{d}(A, B), \quad \tilde{d}(B, A) \leq \varepsilon$, άρα $h(A, B) \leq \varepsilon$. Επομένως ισχύει $h(A, B) \leq \gamma$.

Έστω ότι $h(A, B) < \gamma$ και $\gamma > \varepsilon > h(A, B)$. Τότε $\varepsilon > \tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)$, άρα $d(\alpha, B), d(b, A) < \varepsilon$ για κάθε $\alpha \in A, b \in B$. Επομένως $A \subseteq B + \varepsilon, B \subseteq A + \varepsilon$.

Από τον ορισμό του γ έχουμε $\gamma \leq \varepsilon$. Άτοπο.

Τελικά $\gamma = h(A, B)$.

Εάν $\gamma_n \geq \gamma \geq 0$, με $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$ και $A \subseteq B + \gamma_n, \quad B \subseteq A + \gamma_n \quad n \in I\!N$, τότε $A \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(B + \gamma_n) = B + \gamma, \quad B \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A + \gamma_n) = A + \gamma$.
(λόγω της κλειστότητας των $A + \gamma, \quad B + \gamma$).

Άρα $h(A, B) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B + \varepsilon, \quad B \subseteq A + \varepsilon\}$.

Η h είναι μετρική.

i. $h(A,B) \geq 0$. Προφανώς $h(A,A) = 0, \quad A \in \mathcal{H}$.

Εάν $h(A,B) = 0 = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B + \varepsilon, B \subseteq A + \varepsilon\}$, τότε

$A \subseteq B, B \subseteq A$, δηλαδή $A = B$.

ii. $h(A,B) = h(B,A)$.

iii. $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B), \quad A,B,C \in \mathcal{H}$.

Έστω $h(A,C) = \gamma, h(C,B) = \delta$. Τότε

$A \subseteq C + \gamma, \quad C \subseteq A + \gamma$ και $B \subseteq C + \delta, \quad C \subseteq B + \delta$. Άρα

$$\begin{aligned} A &\subseteq C + \gamma \subseteq B + (\gamma + \delta), \\ B &\subseteq C + \delta \subseteq A + (\gamma + \delta), \end{aligned}$$

επομένως $h(A,B) \leq \gamma + \delta = h(A,C) + h(C,B)$.

Παρατηρούμε ότι $h(\{x\},\{y\}) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d$.

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η Hausdorff μετρική αποτελεί μια επέκταση της μετρικής του $\mathbb{R}^d$. Η μετρική στον $\mathbb{R}^d$ μετρά αποστάσεις μεταξύ σημείων του $\mathbb{R}^d$ και η h μετρά αποστάσεις μεταξύ συμπαγών συνόλων του $\mathbb{R}^d$. Εάν τα σύνολα είναι μονοσύνολα, τότε έχουμε ισότητα των αποστάσεων.

Η μετρική Hausdorff ορίζεται ανάλογα στον χώρο $\mathcal{H}(X)$ των μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων τυχαίου μετρικού χώρου $\langle X, d \rangle$, αντικαθιστώντας τα max, min με sup, inf. (βλ. [3], [2]).

1.3.2 Πληρότητα του χώρου των Fractals

Ο χώρος $\langle \mathcal{H}(I\!R^d), h \rangle$ είναι ο χώρος μέσα στον οποίο υπάρχουν τα fractals και θα ανελκυστούν με την βοήθεια του θεωρήματος σταθερού σημείου του Banach. Για να εφαρμόσουμε το εν λόγω θεώρημα χρειαζόμαστε μελέτη του μετρικού χώρου $\langle \mathcal{H}(I\!R^d), h \rangle$, ως προς τις ιδιότητες που επάγει η μετρική h.

Πρόταση 1.3.1.

Εάν $(K_n)_{n\in I\!N}$ φθίνουσα ακολουθία του $\langle \mathcal{H}, h \rangle$, $(K_{n+1} \subseteq K_n, n \in I\!N)$, τότε η $(K_n)_{n\in I\!N}$ συγκλίνει στο $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K \in \mathcal{H}$.

Απόδειξη.

Το σύνολο K είναι κλειστό (ως τομή κλειστών) και φραγμένο. Εάν $x_n \in K_n \subseteq K_1, n \in I\!N$, είναι τυχαία ακολουθία, τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in I\!N}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} \to x_o \in I\!R^d$. (θεώρημα Bolzano - Weierstrass).
Έστω $\nu \in I\!N$. Τότε $x_{k_n} \in K_\nu$, για $n \geq \lambda(\nu)$, άρα $x_o \in K_\nu, \quad (K_\nu$ κλειστό).
Επομένως $x_o \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$, δηλαδή $K \neq \varnothing$.
Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} K_n = K$ (ως προς την h μετρική).
Έστω $\varepsilon > 0$. Ισχύει $K \subseteq K_n \subseteq K_n + \varepsilon, \quad n \in I\!N$.
Θεωρούμε $V = \bigcup_{\alpha\in K} S(\alpha, \varepsilon)$. Το V ανοικτό, φραγμένο και $K \subseteq V$. Έστω X συμπαγές με $K_1 \subseteq X$ και $V \subseteq X$. Τότε

$$X = V \bigcup (X \bigcap V^c) \subseteq V \bigcup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \right)^c = V \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c \right)$$

με $V, K_n^c, n \in I\!N$ ανοικτά. Το X είναι συμπαγές και η $(K_n^c)_{n\in I\!N}$ είναι αύξουσα ακολουθία, άρα υπάρχει $n_o : X \subseteq V \bigcup K_{n_o}^c$.

Άρα $K_{n_o} \subseteq V$ και $K_n \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in K} S(\alpha, \varepsilon) \subseteq K + \varepsilon$, αν $n \geq n_o$.
Τελικά $h(K_n, K) \leq \varepsilon$ για $n \geq n_o$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$. □

Θεώρημα 1.3.1 (Πληρότητα του χώρου των Fractals).

Ο χώρος $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \rangle$ είναι πλήρης μ.χ.

Ιδιαιτέρως: *Εάν ο X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, τότε ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη.

Έστω $(K_n)_{n\in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία του $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \rangle$.

Τότε η $(K_n)_{n\in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ και $\mu > 0$, ώστε $h(K_n, A) \leq \mu, n \in \mathbb{N}$, άρα $K_n \subseteq A + \mu = B, n \in \mathbb{N}$, όπου $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$.
Θεωρούμε $A_m = \overline{\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} K_i}$. Τότε η $(A_m)_{m\in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων ($A_m \subseteq B$) συνόλων.
Άρα υπάρχει $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m = K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ (Πρόταση 1.3.1).
Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = K$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N} : A_n \subseteq K + \varepsilon$ για $n \geq n_1$, άρα

$$K_n \subseteq K + \varepsilon \quad \text{για} \quad n \geq n_1. \qquad (1).$$

Η $(K_n)_{n\in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_o \geq n_1$ ώστε $K_i \subseteq K_n + \varepsilon$ για $i, n \geq n_o$. Άρα

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=n_o}^{\infty} K_i \quad &\subseteq \quad K_n + \varepsilon \quad \text{για} \quad n \geq n_o \quad \text{και} \\ A_{n_o} \quad &\subseteq \quad \overline{K_n + \varepsilon} = K_n + \varepsilon \quad \text{για} \quad n \geq n_o \end{aligned}$$

Επομένως $K \subseteq K_n + \varepsilon$ για $n \geq n_o$. (2).

Τελικά, από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε

$$K_n \subseteq K + \varepsilon, \quad \text{για} \quad n \geq n_o,$$
$$K \subseteq K_n + \varepsilon, \quad \text{για} \quad n \geq n_o.$$

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$.

Έστω X πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$. Τότε ο $\big\langle \mathcal{H}(X), h \big\rangle$, είναι κλειστός υπόχωρος του $\big\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \big\rangle$.

Πράγματι, έστω $K_n \subseteq X, \quad n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$. Τότε

$$K \subseteq K_n + \varepsilon \subseteq X + \varepsilon \quad \text{για} \quad n \geq n_o,$$

άρα $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, X) \leq \varepsilon\}$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως

$$K \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, X) \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, X) = 0\} = X.$$

Άρα $K \in \mathcal{H}(X)$. Επομένως ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι πλήρης μ.χ. □

Το βασικό αυτό θεώρημα ισχύει για τον $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$, εάν ο $\langle X, d \rangle$ είναι πλήρης μ.χ. (βλ. [3], [2]). Η απόδειξη όμως είναι εκτενέστερη, γιατί πρέπει να παρακάμψουμε τη δυσκολία ότι ένα σύνολο κλειστό και φραγμένο, δεν είναι κατ' ανάγκη συμπαγές.

Από την απόδειξη του θεωρήματος έχουμε ότι :

Εάν $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του $\langle \mathcal{H}, h \rangle$, τότε το

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i \right)} = K.$$

Το σύνολο K είναι το λεγόμενο τοπολογικό όριο της $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Το K είναι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^d$ για τα οποία ισχύει ότι, για κάθε $S(x,\varepsilon)$ η τομή $S(x,\varepsilon)\cap K_n$ είναι μη κενή, για άπειρο το πλήθος n. Τα σύνολα fractals θα κατασκευαστούν ως όρια συγκλινουσών ακολουθιών. Η ανωτέρω περιγραφή του K δεν μας δίνει σαφή εικόνα των σημείων του K. Το επόμενο θεώρημα μας περιγράφει αναλυτικότερα το $K=\lim\limits_{n\to\infty} K_n$.

Θεώρημα 1.3.2.

Εάν η ακολουθία $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, συγκλίνει στο K, τότε

$$\begin{aligned} K &= \{x\in\mathbb{R}^d : \exists x_n\in K_n, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \textit{ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}^d : \exists x_{\nu_n}\in K_{\nu_n}, \quad (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{υπακολουθία, ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n} = x\}. \end{aligned}$$

Απόδειξη.

Έστω $x\in K$. Εκλέγουμε $x_n\in\{y\in K_n : d(x,K_n)=|x-y|\}$. Τότε

$$|x-x_n| = d(x,K_n)\le h(K,K_n).$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} h(K,K_n)=0$, έχουμε και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Άρα $K\subseteq\{x\in\mathbb{R}^d : \exists x_n\in K_n, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \text{ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$.

Έστω $x\in\mathbb{R}^d$ και $x_n\in K_n$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Έστω $m\in\mathbb{N}$. Τότε $x_n\in\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} K_i$ για $n\ge m$. Άρα $x\in\overline{\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} K_i}$ για τυχαίο $m\in\mathbb{N}$. Άρα

$$x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} K_n}\right) = K.$$

Επομένως $\{x \in \mathbb{R}^d : \exists x_n \in K_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \subseteq K$.

Εξ'άλλου

$$\begin{aligned} K &= \{x \in \mathbb{R}^d : \exists x_n \in K_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \exists x_{\nu_n} \in K_{\nu_n}, \quad (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{υπακολουθία, ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n} = x\}. \end{aligned}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^d$ και $x_{\nu_n} \in K_{\nu_n}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\nu_n} = x$.

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε $\nu_i \geq m$ για $i \geq m$ και $x_{\nu_i} \in K_{\nu_i} \subseteq \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} K_n$ για $i \geq m$.

Άρα $x \in \overline{\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} K_n}$ για τυχαίο $m \in \mathbb{N}$. Άρα $x \in K$. □

Παρατήρηση 1.3.1.

Εάν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία του $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}^d\right)$ και

$$\begin{aligned} K &= \{x \in \mathbb{R}^d : \exists x_n \in K_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : \exists x_{\nu_n} \in K_{\nu_n}, \quad (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{υπακολουθία, ώστε} \quad \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n} = x\} \\ &\in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}^d\right) \end{aligned}$$

δεν συνεπάγεται ότι η $(K_n)_n$ είναι συγκλίνουσα.

Παραδείγματος χάρη.

Εάν $K_n = [0,1] \cup \{n\}, \quad n \in \mathbb{N}$, τότε $K = [0,1]$, ενώ η $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Στην περίπτωση που τα $K_n, \quad n \in \mathbb{N}$ είναι κυρτά σύνολα (δηλαδή αν $x, y \in K_n$, έχουμε $(1-\lambda)x + \lambda y \in K_n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$) και ισχύει η ισό-

της, τότε $\lim_{n\to\infty} K_n = K$.

(βλ. [18]).

Θεώρημα 1.3.3 (Επιλογής του Blaschke).

Έστω $\langle \mathcal{H}(B), h \rangle$ *το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του συμπαγούς συνόλου* $B \subseteq I\!R^d$.

Τότε ο $\langle \mathcal{H}(B), h \rangle$ *είναι συμπαγής μ.χ.*

Ισοδύναμα: Κάθε φραγμένη ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $I\!R^d$ *περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη.

Το σύνολο B είναι συμπαγές, άρα είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $I\!R^d$. Επομένως ο $\big\langle \mathcal{H}(B), h \big\rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. (Θεώρημα 1.3.1). Για να αποδείξουμε ότι ο $\mathcal{H}(B)$ είναι συμπαγής αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι και ολικά φραγμένος.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το B είναι συμπαγές υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in B$, ώστε

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S\left(x_i, \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Έστω $C_i = \widehat{S}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{4}\right), \quad i = 1, \ldots, n$.

Θεωρούμε $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ενώσεων των $\{C_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Τότε το $\mathcal{F}$ έχει πεπερασμένο το πλήθος στοιχείων του $\mathcal{H}(I\!R^d)$.

Έστω $A \in \mathcal{H}(B)$. Θεωρούμε όλα τα $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, ώστε $A \cap C_{i_\nu} \neq \varnothing$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Έχουμε τότε $A \subseteq C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \ldots \cup C_{i_k} = F \in \mathcal{F}$.

Έστω $x \in F$. Τότε $x \in C_{i_\nu}$ για κάποιο $\nu \in \{1, 2, \dots, k\}$. Επειδή $A \cap C_{i_\nu} \neq \varnothing$, θεωρούμε τυχαίο $\alpha \in A \cap C_{i_\nu}$. Τότε

$$\begin{aligned} |\alpha - x| &\leq |\alpha - x_{i_\nu}| + |x_{i_\nu} - x| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

άρα $x \in A + \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως $F \subseteq A + \frac{\varepsilon}{2}$, και $A \subseteq F$, άρα $h(A, F) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και $A \in S_h(F, \varepsilon)$.

Άρα $\mathcal{H}(B) \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} S_h(F, \varepsilon), \quad F \in \mathcal{H}(I\!\!R^d), \quad \mathcal{F} =$ πεπερασμένο.

Επομένως ο $\mathcal{H}(B)$ είναι ολικά φραγμένος. □

Παρατηρήσεις 1.3.1.

1. *Η μετρική Hausdorff ορίστηκε με την βοήθεια της Ευκλείδειας μετρικής. Πολλές φορές όμως χρειάζεται να οριστεί με την βοήθεια ισοδύναμης μετρικής στον $I\!\!R^d$. Εάν στον $I\!\!R^d$ ορίζονται ρ, σ μετρικές, ώστε*

   $$\alpha \cdot \rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq b \cdot \rho(x, y), \quad \text{για κάποια} \quad \alpha, b > 0$$

   τότε οι Hausdorff μετρικές h_ρ, h_σ που ορίζονται μέσω των ρ, σ είναι ισοδύναμες.

   Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει

   $$\alpha \cdot h_\rho(A, B) \leq h_\sigma(A, B) \leq b \cdot h_\rho(A, B)$$

για A, B συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, οπότε οι h_ρ, h_σ είναι ισοδύναμες.

Ιδιαιτέρως: *Οι Hausdorff μετρικές που επάγονται από τις* d_p, $1 \leq p \leq \infty$ *είναι ισοδύναμες.*

2. Εάν ρ, σ είναι ισοδύναμες μετρικές (χωρίς να ισχύει η ανωτέρω σχέση) δεν συνεπάγεται ότι οι αντίστοιχες h_ρ, h_σ είναι ισοδύναμες.

   Για παράδειγμα, έστω ρ, σ μετρικές ορισμένες στο σύνολο $\mathbb{N}$, με

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 1, & n \neq m \\ 0, & n = m \end{cases}, \qquad \sigma(n,m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

   Τότε $\rho \sim \sigma$.

   Εάν $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε $h_\rho(K_n, \mathbb{N}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$, ενώ

$$h_\sigma(K_n, \mathbb{N}) = \sup\{\sigma(m, K_n) : m \in \mathbb{N}\} = \lim_{m \to \infty} \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

   Άρα $\lim_{n \to \infty} h_\sigma(K_n, \mathbb{N}) = 0$. Δηλαδή, οι h_ρ, h_σ δεν έχουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες και επομένως δεν είναι ισοδύναμες.

1.3.3 Συνάρτηση συστολής στον $\left\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \right\rangle$

Έχουμε κατασκευάσει τον χώρο $\left\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \right\rangle$ μέσα στον οποίο υπάρχουν τα fractals. Θα ανελκύσουμε αυτά με την βοήθεια συνάρτησης συστολής.

Πρόταση 1.3.2.

Εάν $w : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ είναι συνάρτηση συστολής με συντελεστή $0 < s < 1$. Τότε η

$$W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), \quad \mu\varepsilon \quad W(A) = w(A), \quad A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$$

είναι συνάρτηση συστολής με συντελεστή συστολής s.

Απόδειξη.

Εάν B είναι συμπαγές, τότε το $w(B)$ είναι συμπαγές, διότι η w είναι συνεχής. Άρα η Wείναι καλά ορισμένη.
Έστω $B, C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(w(B), w(C)) &= \max\{\min\{|w(x) - w(y)| : y \in C\} : x \in B\} \\
&\leq \max\{\min\{s \cdot |x - y| : y \in C\} : x \in B\} \\
&= s \cdot \widetilde{d}(B, C).
\end{aligned}$$

Όμοια $\widetilde{d}(w(C), w(B)) \leq s \cdot \tilde{d}(C, B)$.
Άρα $h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C)$. □

Λήμμα 1.3.1.

Εάν $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{H}(I\!R^d)$, *τότε*

$$h\left(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2\right) \leq \max\{h\left(A_1, B_1\right), h\left(A_2, B_2\right)\}.$$

Απόδειξη.

Έστω $\gamma = h\left(A_1, B_1\right), \quad \delta = h\left(A_2, B_2\right)$ και $\delta \leq \gamma$. Τότε

$$A_1 \subseteq B_1 + \gamma, \quad B_1 \subseteq A_1 + \gamma \quad \text{και}$$

$$A_2 \subseteq B_2 + \delta \subseteq B_2 + \gamma, \quad B_2 \subseteq A_2 + \delta \subseteq A_2 + \gamma.$$

Άρα $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2 + \gamma, \quad B_1 \cup B_2 \subseteq A_1 \cup A_2 + \gamma$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.3.3.

Εάν $\{W_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N\}$ *είναι συναρτήσεις συστολής στον* $\left\langle \mathcal{H}(I\!R^d), h \right\rangle$, *τότε η*

$$\begin{aligned} W &: \mathcal{H}(I\!R^d) \to \mathcal{H}(I\!R^d) \quad \mu\varepsilon \\ W(B) &= w_1(B) \cup w_2(B) \cup \ldots \cup w_N(B), \quad B \in \mathcal{H}(I\!R^d) \end{aligned}$$

είναι συνάρτηση συστολής.

Εάν $\{s_n : \quad n = 1, 2, \ldots, N\}$ *είναι οι συντελεστές συστολής των*

$$\{w_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N\}$$

τότε η W *έχει συντελεστή συστολής*

$$s = \max\{s_n : n = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Απόδειξη.

Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για $N = 2$.

Έστω $B, C \in \mathcal{H}(I\!R^d)$. Τότε έχουμε (Λήμμα 1.3.1)

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \max\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \\ &\leq \max\{s_1 \cdot h(B,C), s_2 \cdot h(B,C)\} \\ &= \max\{s_1, s_2\} \cdot h(B,C) \\ &= s \cdot h(B,C) \end{aligned}$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται για κάθε $N \in I\!N$. □

Θεώρημα 1.3.4.

Έστω X πλήρης μετρικός υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $I\!R^d$ και $\{w_n : n = 1, 2, \ldots, N\}$ συναρτήσεις συστολής του X. Τότε για την συνάρτηση συστολής

$$W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X), \quad W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \ldots \cup w_N(B)$$

i. υπάρχει ακριβώς ένα $A \in \mathcal{H}(X)$, σταθερό σημείο της W.

ii. $A = \lim_{n\to\infty} W^n(B)$, για κάθε $B \in \mathcal{H}(X)$.

Απόδειξη.

Επειδή ο χώρος $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι πλήρης μ.χ. (Θεώρημα 1.3.1) και η W είναι συνάρτηση συστολής, το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach. □

1.4 Κατασκευή fractal συνόλων με ΣΕΣ

Ο πλήρης μετρικός υπόχωρος X και οι συναρτήσεις συστολής $\{w_n : n = 1, 2, \ldots, N\}$ συμβολίζεται με $\{X; w_{1-N}\}$ και καλείται **Σύστημα Επαναλαμβανομένων Συναρτήσεων, ΣΕΣ** για συντομία.

Με την βοήθεια κατάλληλου ΣΕΣ κατασκευάζουμε fractal σύνολα στον $I\!R, I\!R^2$ και $I\!R^3$, ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής.

1.4.1 Τριαδικό σύνολο Cantor

Έστω $\langle I\!R, d\rangle$, όπου $d(x,y) = |x-y|, \quad x, y \in I\!R$. Ορίζουμε τις συστολές, $3^1 - 1$ το πλήθος,

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in I\!R.$$

Έστω $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B), B \in \mathcal{H}(I\!R)$. Για $B = [0,1]$,

$$\begin{aligned} W([0,1]) &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ W^2([0,1]) &= W\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

κ.ο.κ. Τότε το σταθερό σημείο της W είναι το $A = \lim_{n\to\infty} W^n([0,1])$ το οποίο είναι το τριαδικό σύνολο Cantor.

1.4.2 Τρίγωνο Sierpinski

Έστω $\langle I\!R^2, d\rangle$, όπου d είναι η Ευκλείδεια απόσταση. Ορίζουμε τις συστολές, 2^2-1 το πλήθος

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Έστω $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B), \quad B \in \mathcal{H}(I\!R^2)$. Το σταθερό σημείο της W είναι το τρίγωνο Sierpinski.

1.4.3 Σπόγγος του Menger ή Sierpinski

Ο σπόγγος κατασκευάζεται αν χωρίσουμε το μοναδιαίο κύβο $[0,1]^3$ σε 27 κύβους πλευράς $\frac{1}{3}$ και αφαιρέσουμε τους εφτά κεντρικούς κύβους. Οι συναρτήσεις συστολής είναι 3^3-7 το πλήθος.

1.4.4 Καμπύλη von Koch

Στον $\langle I\!R^2, d\rangle$, όπου d η Ευκλείδεια απόσταση, ορίζουμε

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$).

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(στροφή κατά $-\frac{\pi}{3}$).

$$w_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Το σταθερό σημείο της

$W(B) = w_1(B)\bigcup w_2(B)\bigcup w_3(B)\bigcup w_4(B), \quad B \in \mathcal{H}(I\!R^2)$ είναι η καμπύλη von Koch.

1.4.5 Πλατανόφυλλο

Στον $\langle I\!R^2, d\rangle$, όπου d η Ευκλείδεια απόσταση, ορίζουμε

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,01 \\ 0 & 0,62 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,52 \\ 0,40 & 0,36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$w_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 & -0,73 \\ 0,50 & 0,26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 88 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$w_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 & -0,01 \\ 0,50 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 52 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Το σταθερό σημείο της
$W(B) = w_1(B)\bigcup w_2(B)\bigcup w_3(B)\bigcup w_4(B), \quad B \in \mathcal{H}(I\!\!R^2)$ είναι ένα πλατανόφυλλο.

1.5 Κατασκευή fractal Συνάρτησης Παρεμβολής με ΣΕΣ

Εάν έχουμε $\{(x_i, F_i) : i = 0, 1, \ldots, N\}, \quad (x_o < x_1 < \ldots < x_N)$ δοθέντα σημεία στον $I\!\!R^2$, ζητάμε συνάρτηση

$$f : [x_o, x_N] \to I\!\!R, \quad \text{συνεχή, ώστε}$$

$$f(x_i) = F_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Μια τέτοια συνάρτηση καλείται **συνάρτηση παρεμβολής** . Αν το πρόβλημα που έχουμε είναι η προσέγγιση εικόνας τοπίου (σύννεφα, βουνά, ακτές, δάση κ.τ.λ), καμπύλης δεικτών του χρηματιστηρίου, καμπύλης σεισμογράφου, μας χρειάζεται συνάρτηση με πολλές ανωμαλίες στο γράφημα της. Για να την κατασκευάσουμε ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

Ορίζουμε ένα τελεστή στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C([x_o, x_N])$, ο οποίος έχει σταθερό σημείο συνάρτηση παρεμβολής. Επίσης ορίζουμε ειδικές συναρτήσεις συστολής στον $I\!R^2$, που έχουν ως σταθερό σημείο το γράφημα της συνάρτησης αυτής.

Η διαδικασία αυτή μας εξασφαλίζει αφ' ενός την ύπαρξη συνάρτησης παρεμβολής και αφ' ετέρου μας δίνει εύκολο τρόπο αναπαράστασης σε Ηλεκτρονικό Υπολογιστή, με ΣΕΣ.

Θεωρούμε $N \geq 2$,

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

όπου τα $a_n, c_n, d_n, e_n, f_n, \;\; n = 1, 2, \ldots, N$ δίδονται από τις σχέσεις:

$$w_n \begin{pmatrix} x_o \\ F_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad w_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

Αναλυτικά

$$
\left.
\begin{array}{rrcl}
 & a_n & = & \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_o} \\
 & c_n & = & \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_o} - d_n \frac{F_N - F_o}{x_N - x_o} \\
 & e_n & = & \frac{x_N x_{n-1} - x_o x_n}{x_N - x_o} \\
 & f_n & = & \frac{x_N F_{n-1} - x_o F_n}{x_N - x_o} - d_n \frac{x_N F_o - x_o F_N}{x_N - x_o} \\
\text{και} & d_n & \in & I\!R.
\end{array}
\right\} .
$$

Έστω $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \ldots \cup w_N(B),\ B \in \mathcal{H}(I\!R^2) \quad (\mathbf{I})$.

Η W δεν είναι πάντοτε συνάρτηση συστολής ακόμη και αν $0 < |d_n| < 1$. Η παρακάτω πρόταση μας δίνει μετρική στον $I\!R^2$ ισοδύναμη με την Ευκλείδεια, ώστε η W να γίνει συνάρτηση συστολής.

Πρόταση 1.5.1.

Έστω $0 < |d_n| < 1, \quad n = 1, 2, \ldots, N$. Τότε υπάρχει μετρική στον $I\!R^2$ ισοδύναμη της Ευκλείδειας, ώστε η W (από την (I)) να είναι συνάρτηση συστολής.

Απόδειξη.

Για να ευρεθεί η μετρική d, ώστε να ισχύει ο ισχυρισμός αρκεί να προσδιορίσουμε την d, ώστε οι

$$w_n : \left\langle I\!R^2, d \right\rangle \to \left\langle I\!R^2, d \right\rangle \quad \text{για} \quad n = 1, 2 \ldots, N$$

να είναι συναρτήσεις συστολής. Ορίζουμε

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + \theta|y_1-y_2|, \quad \text{όπου}$$

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\min\{1-|a_n|,\ n=1,2,\ldots,N\}}{\max\{2|c_n|,\ n=1,2,\ldots,N\}}, \quad \text{εάν} \quad c_i \neq 0 \quad \text{για κάποιο} \quad 1 \leq i \leq N \\
\theta &= 1, \quad \text{εάν} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0.
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η d είναι μετρική ισοδύναμη με την Ευκλείδεια μετρική.

Επί πλέον έχουμε:

$$\begin{aligned}
d(w_n(x_1,y_1),w_n(x_2,y_2)) &= |a_n||x_1-x_2| + \theta|c_n(x_1-x_2)+d_n(y_1-y_2)| \\
&\leq (|a_n|+\theta|c_n|)|x_1-x_2| + \theta|d_n||y_1-y_2| \\
&\leq (|a_n|+\frac{1-|a_n|}{2|c_n|}|c_n|)|x_1-x_2| + \theta|d_n||y_1-y_2| \\
&= \frac{1+|a_n|}{2}|x_1-x_2| + \theta|d_n||y_1-y_2|.
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned}
\alpha &= \max\left\{\frac{1+|a_n|}{2}, \quad n=1,2,\ldots,N\right\} < 1, \\
\delta &= \max\{|d_n|,\ n=1,2,\ldots,N\} < 1.
\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
d(w_n(x_1,y_1),w_n(x_2,y_2)) &\leq \alpha|x_1-x_2| + \theta\delta|y_1-y_2| \\
&\leq \max(\alpha,\delta)d((x_1,y_1),(x_2,y_2)),
\end{aligned}$$

με $\max\{\alpha,\delta\} < 1$. Άρα οι $w_n, \quad n=1,2,\ldots,N$ είναι συναρτήσεις συστολής. Επομένως και η W είναι συνάρτηση συστολής. □

Θεώρημα 1.5.1.

Έστω $\{(x_i, F_i)\ i = 0, 1, \dots, N\}$ σημεία του $I\!R^2$. Η συνάρτηση συστολής W οριζόμενη από τις $(\mathbf{I})$, με $0 < |d_n| < 1$, έχει ένα (ακριβώς) σταθερό σημείο $G \in \mathcal{H}(I\!R^2)$, το οποίο αποτελεί το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης f, η οποία είναι συνάρτηση παρεμβολής των $\{(x_i, F_i) :\ i = 0, 1, \dots, N\}$.

Απόδειξη.

Εκλέγουμε στην $(\mathbf{I})$ συντελεστές $d_n,\ \ n \in I\!N$, ώστε $0 < |d_n| < 1$. Θεωρούμε $\mathcal{F} = \{g \in C([x_o, x_N]) : g(x_o) = F_o,\ g(x_N) = F_N\}$. Τότε ο $\langle \mathcal{F}, d_\infty \rangle$ είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρους μ.χ. $\langle C([x_o, x_N]), d_\infty \rangle$, άρα ο $\langle \mathcal{F}, d_\infty \rangle$ είναι πλήρης μ.χ.

Θα κατασκευάσουμε μια συνάρτηση συστολής επί του $\langle \mathcal{F}, d_\infty \rangle$ της οποίας το σταθερό σημείο θα είναι το γράφημα της ζητούμενης συνάρτησης παρεμβολής.

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad \mathcal{F} \to \mathcal{F} \quad \text{με} \\ (Tg)(x) \quad &= \quad c_n \ell_n^{-1}(x) + d_n g(\ell_n^{-1}(x)) + f_n,\ x \in [x_{n-1}, x_n],\ n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

όπου $\ell_n(x) = a_n x + e_n$.

Από την κατασκευή των w_n, $(\mathbf{I})$, έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_n x_o + e_n &= x_{n-1}, \\ a_n x_N + e_n &= x_n \\ c_n x_o + d_n F_o + f_n &= F_{n-1} \quad \text{και} \\ c_n x_N + d_n F_N + f_n &= F_n. \end{aligned}$$

Βάσει αυτών είναι εύκολο να δούμε ότι η Tg είναι καλά ορισμένη και ισχύει $(Tg)(x_n) = F_n, \;\; n = 0, 1, \ldots, N$.

Άρα έχουμε ότι $Tg \in \mathcal{F}$.

Η T είναι συνάρτηση συστολής, διότι

$$\begin{aligned} |(Tg)(x) - (Th)(x)| &= |d_n||g(\ell_n^{-1}(x)) - h(\ell_n^{-1}(x))| \\ &\leq |d_n| d_\infty(g, h), \quad \text{άρα} \end{aligned}$$

$$d_\infty(Tg, Th) \leq \delta d_\infty(g, h) \quad \text{με} \quad \delta = \max\{|d_n|, \;\; n = 1, 2, \ldots, N\} < 1.$$

Από το θεώρημα σταθερού σημείου, υπάρχει μοναδική $f \in \mathcal{F}$ ώστε $Tf = f$. Επειδή $f \in \mathcal{F}$ θα έχουμε $f(x_n) = F_n, \;\; n = 0, 1, \ldots, N$. Άρα η f είναι συνεχής συνάρτηση παρεμβολής.

Θεωρούμε την $W : \langle \mathcal{H}(I\!\!R^2), h \rangle \to \langle \mathcal{H}(I\!\!R^2), h \rangle$ όπου h είναι η Hausdorff μετρική, που επάγεται από την μετρική d του $I\!\!R^2$ (όπως ορίστηκε στην πρόταση 1.5.1). Επειδή

$$\min(1, \theta) d_1(x, y) \leq d(x, y) \leq \max(1, \theta) d_1(x, y),$$

η h είναι ισοδύναμη με την Hausdorff μετρική που ορίζεται με την βοήθεια της Ευκλείδειας μετρικής (Παρατηρήσεις 1.3.1).

Έστω $\widetilde{G} = \{(x, f(x)) : x \in [x_o, x_N]\}$ το γράφημα της f.

Ισχύει $\widetilde{G} = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(\widetilde{G})$, διότι αν $(x, f(x)) \in \widetilde{G}$, και $x \in [x_{n-1}, x_n]$ για κάποιο n, τότε για $y = \frac{x - e_n}{a_n}$ έχουμε

$$w_n \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n y + e_n \\ Tf(a_n y + e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n y + e_n \\ f(a_n y + e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Άρα $(x, f(x)) \in w_n(\widetilde{G})$. Προφανώς ισχύει και $w_n(\widetilde{G}) \subseteq \widetilde{G}$. Έχουμε λοιπόν, ότι $\widetilde{G} = W(\widetilde{G})$, δηλαδή το $\widetilde{G}$ είναι το σταθερό σημείο της συναρτήσεως συστολής W. Επειδή η W έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, συμπεραίνουμε ότι αυτό είναι το γράφημα της f. $\square$

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται με ανάλογο τρόπο για την κατασκευή επιφανειών παρεμβολής στον $\mathbb{R}^3$.

1.6 Κατασκευή Καμπυλών που γεμίζουν το χώρο με ΣΕΣ

Μια συνεχής καμπύλη $\vec{r} : [0,1] \to A$, όπου $A = [0,1]^n, \quad n = 2, 3$, η οποία είναι **επί** του Α καλείται **Καμπύλη γεμίζουσα τον χώρο**.

Τέτοιες καμπύλες κατασκευάστηκαν από τους G. Peano, D. Hilbert, W. Sierpinski, H. L Lebesgue, I. J Schoenberg και άλλους.

Πλήρης ανάλυση των καμπυλών αυτών υπάρχει στο [16]. Εδώ θα περιγράψουμε τρόπο κατασκευής των με την βοήθεια ΣΕΣ (όπως εμφανίζονται στα [4], [3]) για $A = [0,1]^2$. Η μέθοδος που ακολουθείται, είναι γενίκευση του τρόπου κατασκευής fractal συναρτήσεων παρεμβολής. Στις συναρτήσεις παρεμβολής, τα δεδομένα σημεία του $\mathbb{R}^2$ είναι $\{(x_i, F_i), \quad i = 0, 1, \dots, N\}$ με $x_o < x_1 < \dots < x_N$. Για να δημιουργηθεί καμπύλη γεμίζουσα το χώρο τα δεδομένα είναι $\{(x_i, F_i), \quad i = 0, 1, \dots, N\}$, όπου τα $x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N$ δεν είναι κατ' ανάγκην διάφορα ανά δύο. Η δυσκολία αυτή παρακάμπτεται με την εισαγωγή μιας "κρυφής" μεταβλητής.

Η διαδικασία είναι η εξής:

Θεωρούμε ΣΕΣ $\{I\!R^2; M_{1-N}\}$, το οποίο έχει σταθερό σημείο το τετράγωνο $A = [0,1] \times [0,1]$, δηλαδή $M(A) = M_1(A) \cup M_2(A) \cup \cdots \cup M_N(A) = A$ όπου,

$$M_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Έστω $\{(x_i, F_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N\}$ σημεία του A, ώστε

$$M_n \begin{pmatrix} x_o \\ F_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, \ldots, N$$

(Στην πράξη οι $M_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N$ ορίζονται με την βοήθεια δοθέντων $(x_i, F_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N$).

Θεωρούμε τα σημεία της παρεμβολής

$$\big\{\big(t_i, (x_i, F_i)\big), \quad i = 0, 1, \ldots, N\big\} \subseteq [0,1] \times A$$

όπου $t_o = 0 < t_1 = \frac{1}{N} < t_2 = \frac{2}{N} < \cdots < t_N = 1$ και το ΣΕΣ $\{I\!R^2; w_{1-N}\}$, ώστε

$$w_n \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}t + \frac{n-1}{N} \\ M_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \qquad (t, x, y) \in I\!R^3.$$

(t η "κρυφή" μεταβλητή).

Ακολουθώντας βήματα ανάλογα της Πρότασης 1.5.1 και του Θεωρήματος 1.5.1

αποδεικνύεται ότι το σταθερό σημείο $\widetilde{G}$ του ΣΕΣ $\{I\!\!R^2; w_{1-N}\}$ είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $\vec{r}:[0,1]\to I\!\!R^2$ με $\vec{r}(t_i)=(x_i,F_i), \quad i=1,2,\ldots,N$, δηλαδή

$$\widetilde{G}=\{(t,\vec{r}(t)) : t\in[0,1]\}=w_1(\widetilde{G})\cup\cdots\cup w_N(\widetilde{G}).$$

Εάν $\varphi: I\!\!R^3\to I\!\!R^2$ είναι η ορθή προβολή $\varphi(t,x,y)=(x,y)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\vec{r}([0,1]) &= \varphi(\widetilde{G})=\bigcup_{n=1}^{N}\varphi\big(w_n(\widetilde{G})\big)\\
&= \bigcup_{n=1}^{N}\varphi\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{N}t+\frac{n-1}{N}\\ M_n(\vec{r}(t))\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1]\right\}\\
&= \bigcup_{n=1}^{N} M_n\big(\vec{r}([0,1])\big)\\
&= M\big(\vec{r}([0,1])\big).
\end{aligned}$$

Άρα το $\vec{r}([0,1])$ είναι το σταθερό σημείο του ΣΕΣ $\{I\!\!R^3; M_{1-N}\}$. Λόγω της μοναδικότητας του σταθερού σημείου θα έχουμε ότι $A=[0,1]^2=\vec{r}([0,1])$, δηλαδή η $\vec{r}:[0,1]\to A$ είναι καμπύλη γεμίζουσα το χώρο.

Παρατήρηση 1.6.1.

Στην πράξη δεν μας απασχολεί η απεικόνιση του τετραγώνου στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή, αλλά οι όροι της ακολουθίας, της οποίας το όριο είναι το τετράγωνο. Εκλέγοντας κατάλληλα σημεία $\{(x_i,F_i) : i=0,1,\ldots,N\}\subseteq[0,1]^2$ και κατάλληλο αρχικό σύνολο έχουμε ενδιαφέρουσες εικόνες.

Για πληρέστερη κατανόηση της μεθόδου, θα δώσουμε τρόπο κατασκευής με ΣΕΣ της καμπύλης Hilbert.

Έστω $(x_o, F_o) = (0, \frac{1}{4})$, $(x_1, F_1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(x_2, F_2) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$,
$(x_3, F_3) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $(x_4, F_4) = (\frac{3}{4}, 0)$ και

$$M_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \text{ώστε}$$

$$M_n \begin{pmatrix} x_o \\ F_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad M_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Αναλυτικά βρίσκουμε

$$M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(συστολή, στροφή κατα $-\frac{\pi}{2}$ και μεταφορά).

$$M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(συστολή, ανάκλαση ως προς τον άξονα των y και μεταφορά).

$$M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(συστολή και μεταφορά).

$$M_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(συστολή, ανάκλαση ως προς τον άξονα των y, στροφή κατα $\frac{\pi}{2}$ και μεταφορά). Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned} M_1(A) &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ M_2(A) &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ M_3(A) &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{και} \\ M_4(A) &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Άρα το τετράγωνο $A = M_1(A) \cup M_2(A) \cup M_3(A) \cup M_4(A)$ είναι το σταθερό σημείο του ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^2; M_{1-4}\}$ και $A = \vec{r}([0,1])$, όπου $\vec{r}$ είναι η καμπύλη Hilbert. Εάν θεωρήσουμε αρχικό σύνολο την πολυγωνική γραμμή

$$\begin{aligned} A_o &= [(x_o, F_o), (x_1, F_1)] \cup [(x_1, F_1), (x_2, F_2)] \cup \\ &\quad \cup [(x_2, F_2), (x_3, F_3)] \cup [(x_3, F_3), (x_4, F_4)] \\ &= \vec{r}_o([0,1]) \end{aligned}$$

τα σύνολα $M^n(A_o) = \vec{r}_n([0,1])$ είναι πολυγωνικές γραμμές με

$$\lim_{n\to\infty} M^n(A_o) = \lim_{n\to\infty} \vec{r}_n([0,1]) = \vec{r}([0,1]) = A.$$

Παρατήρηση 1.6.2.

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε για να βρούμε καμπύλη

$$\vec{r} : [0,1] \to [0,1]^3 \quad \textit{ώστε} \quad \vec{r}([0,1]) = [0,1]^3.$$

Κεφάλαιο 2

Fractal Διαστάσεις

2.1 Εισαγωγή

Εάν έχουμε γεωμετρικά σύνολα, (ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, τετράγωνα, τρίγωνα, κύκλους, παραλληλεπίπεδα, πυραμίδες, σφαίρες κ.ο.κ.) η μέτρηση τους γίνεται με μήκος, εμβαδόν, όγκο, δηλαδή με το μέτρο Lebesque στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Στην περίπτωση όμως των fractals που κατασκευάσαμε πιο πριν, η μέτρηση με το εν λόγω μέτρο δεν μας δίνει πληροφορίες για το πόσο χώρο καταλαμβάνουν τα σύνολα αυτά.

Για παράδειγμα το εμβαδόν του τρίγωνου Sierpinski είναι μηδέν, όσο και ενός ευθυγράμμου τμήματος, ο όγκος του κύβου του Menger είναι επίσης μηδέν, όσο και ενός τετραγώνου. Για αυτούς τους λόγους χρειαζόμαστε ένα ειδικότερο μέτρο, το μέτρο Hausdorff. Θα πρέπει, επί πλέον, οι μετρήσεις των γεωμετρικών συνόλων που θα γίνονται με το νέο μέτρο να "συμπίπτουν" με τις μετρήσεις που έχουμε ήδη για αυτά.

2.2 Μέτρο Lebesque, Μέτρο Hausdorff

Ορισμός 2.2.1.

Έστω X τυχαίο σύνολο και $\mathcal{P}(X)$,το δυναμοσύνολο του X.

Εξωτερικό μέτρο μ *είναι μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ώστε :*

i. $\mu(\varnothing) = 0$.

ii. $\mu(A) \leq \mu(B), \quad \alpha\nu \quad A \subseteq B \subseteq X$

iii. $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad \alpha\nu \quad A_i \subseteq X, \quad i = 1, 2, \ldots.$

Ορισμός 2.2.2.

Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X, καλείται **σ-άλγεβρα**, *εφόσον ισχύουν τα εξής:*

i. $\varnothing \in \mathcal{A}$.

ii. $A\nu\ E \in \mathcal{A} \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad X \backslash E = E^c \in \mathcal{A}$

iii. $A\nu\ E_i \in \mathcal{A}, \quad i \in I\!N, \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 2.2.3.

Εάν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, μια απεικόνιση $\mu^* : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ώστε:

i. $\mu^*(\varnothing) = 0$

ii. $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i), \quad \textit{αν} \quad E_i \in \mathcal{A} \quad \textit{και} \quad E_i \cap E_j = \varnothing, \quad i \neq j$

καλείται **μέτρο** .

Εάν μ είναι εξωτερικό μέτρο, λέμε ότι το $E \subseteq X$ είναι **μ - μετρήσιμο** αν

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \quad \text{για κάθε} \quad A \subseteq X.$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \quad \text{είναι } \mu\text{-μετρήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου μ στο $\mathcal{M}$, $\quad \mu|_{\mathcal{M}} = \mu^*$, είναι ένα μέτρο στο $\mathcal{M}$.

Ορισμός 2.2.4.

Στον χώρο $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε το **εξωτερικό μέτρο Lebesque**, *λ_d ως εξής: Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο*

$$B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$$

όπου $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, d \quad$ και ορίζουμε

$$V_d(B) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d)$$

τον **d- όγκο** *του B.*

Για τυχαίο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζουμε

$$\lambda_d(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad B_i \quad \textit{ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το λ_d είναι εξωτερικό μέτρο και $\lambda_d(B) = V_d(B)$, αν το B είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Επίσης ισχύουν:

$$\begin{aligned} \lambda_d(E+x) &= \lambda_d(E), \quad x \in I\!R^d, \quad \textit{και} \\ \lambda_d(\alpha E) &= \alpha^d \lambda_d(E), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Εάν περιορίσουμε το λ_d στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των λ_d-μετρησίμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι το **μέτρο Lebesque d − διάστασης**. Το μέτρο λ_d καλείται και $d-$ όγκος . Στην άλγεβρα $\mathcal{M}$ περιέχονται τα ανοικτά και τα κλειστά σύνολα του $I\!R^d$.
Οι αποδείξεις των ανωτέρω ιδιοτήτων και Θεωρημάτων, υπάρχουν σε βιβλία "Θεωρία Μέτρου". (βλ. [2]))

Τώρα θα ορίσουμε το μέτρο Hausdorff στον $I\!R^d$. Το μέτρο Hausdorff ορίζεται γενικά σε τυχαίο μετρικό χώρο. (βλ. [12], [15]).

Ορισμός 2.2.5.

Στον χώρο $\langle I\!R^d, d\rangle$ (d η Ευκλείδεια μετρική στον $I\!R^d$), ορίζουμε το **εξωτερικό μέτρο Hausdorff** H^s *για* $s \in I\!R, \quad s \geq 0$ *ως εξής:*
Θεωρούμε $\delta(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$ *την διάμετρο του συνόλου* $A \subseteq I\!R^d$ *και για* $\varepsilon > 0$

$$H^s_\varepsilon(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in I\!N\right\}$$

όπου $E \subseteq \mathbb{R}^d$. *Για* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *έχουμε*

$$H^s_{\varepsilon_2}(E) \leq H^s_{\varepsilon_1}(E).$$

Ορίζουμε ως **εξωτερικό μέτρο Hausdorff** H^s *του* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *το*

$$H^s(E) = \sup\{H^s_\varepsilon(E), \quad \varepsilon > 0\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} H^s_\varepsilon(E).$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι τα $H^s_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ *και το* H^s *είναι εξωτερικά μέτρα. Εάν περιορίσουμε το* H^s *στην σ-άλγεβρα των* $H^s -$ *μετρήσιμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι το* **μέτρο Hausdorff s- διάστασης**, $(s \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0)$. *Στην άλγεβρα αυτή περιέχονται τα ανοικτά και τα κλειστά σύνολα του* $\mathbb{R}^d$. *Επίσης ισχύει*

$$\begin{aligned} H^s(E + x) &= H^s(E), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \textit{και} \\ H^s(\alpha E) &= \alpha^s H^s(E), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Με τους ανωτέρω ορισμούς του λ_d μέτρου Lebesque διαστάσεως $d \in \mathbb{N}$ και του μέτρου Hausdorff διαστάσεως $s \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0$, γεννάται το ερώτημα αν αυτά "συμπίπτουν" στην περίπτωση που το $s \in \mathbb{N}$.

Για να αποδείξουμε την σχέση των λ_d και H^d, για $d \in \mathbb{N}$ χρειαζόμαστε τους εξής ορισμούς και αποτελέσματα:

1. Θεώρημα Κάλυψης Vitali.

Ορισμός 2.2.6.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. *Μια οικογένεια συνόλων* $\mathcal{V}$ *αποτελεί μια* **κάλυψη Vitali** *του* E *αν :*

για κάθε $x \in E$ *έχουμε* $\inf\{\delta(U) : x \in U \in \mathcal{V}\} = 0$.

Θεώρημα 2.2.1.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. *Εάν το* E *είναι* H^s*-μετρήσιμο σύνολο και* V *είναι μια κάλυψη Vitali του* E *αποτελούμενη από κλειστά σύνολα,*

τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ *της* V *ώστε:*

$U_i \cap U_j = \varnothing, \quad \text{για} \quad i \neq j \quad \text{και}$

$$H^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = 0 \quad \acute{\eta} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) = +\infty.$$

(Για την απόδειξη του θεωρήματος 2.2.1 βλ. [7], [12]).

2. Ισοδιαμετρικό πρόβλημα.

Ορισμός 2.2.7.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. *Το* E *καλείται* **κυρτό** *αν*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in E \quad \text{για} \quad x, y \in E, \quad \lambda \in [0,1].$$

Ορίζουμε ως **κυρτή θήκη του συνόλου** $\boldsymbol{A}$, **conA**, *το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το* A.

Θεώρημα 2.2.2.

Από όλα τα συμπαγή, κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^d$, τα οποία έχουνε διάμετρο το πολύ δ, η σφαίρα S του $\mathbb{R}^d$ διαμέτρου δ έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

Αναλυτικά: *Εάν K είναι συμπαγές, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\delta(K) \leq \delta$ τότε*

$$\lambda_d(K) \leq \lambda_d(S) = c_d \cdot \delta^d, \quad \text{όπου} \quad c_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^d}{\left(\frac{d}{2}\right)!}$$

ο όγκος της σφαίρας του $\mathbb{R}^d$ διαμέτρου 1. Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν το K είναι σφαίρα διαμέτρου δ.

(Για την απόδειξη του θεωρήματος 2.2.2 βλ. [18]).

Παρατήρηση 2.2.1.

Αν S είναι σφαίρα διαμέτρου $\delta(S) \leq \varepsilon$, τότε έχουμε από τον ορισμό,

$$H^d_\varepsilon(S) \leq \delta^d(S) = \frac{1}{c_d}\lambda_d(S).$$

Θεώρημα 2.2.3.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε για τα εξωτερικά μέτρα λ_d, H^d ισχύει:

$$\lambda_d(E) = c_d H^d(E)$$

(c_d όγκος της σφαίρας του $\mathbb{R}^d$ διαμέτρου 1).

Απόδειξη.

Εάν $H^d(E) = \lambda_d(E) = +\infty$, έχουμε το ζητούμενο.

Έστω

$$H^d(E) = \sup_{\varepsilon>0}\left\{\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^d(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N}\right\}\right\} < +\infty.$$

Έστω $\varepsilon_o > 0$.

Επειδή $\delta(U_i) = \delta(\overline{U_i})$ και $\delta(U_i) = \delta(\operatorname{con} U_i)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα U_i είναι κλειστά και κυρτά. Άρα υπάρχουν U_i, $i \in I\!N$ κλειστά, κυρτά, ώστε

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta^d(U_i) < H^d(E) + \varepsilon_o \qquad (1).$$

Τότε $\lambda_d(U_i) \leq c_d \delta^d(U_i)$, $i \in I\!N$. (Ισοδιαμετρικό πρόβλημα). Άρα

$$\begin{aligned} \lambda_d(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_d(U_i) \\ &\leq c_d \sum_{i=1}^{\infty} \delta^d(U_i) \\ &< c_d H^d(E) + c_d \varepsilon_o. \qquad (\text{από την (1) }). \end{aligned}$$

Επειδή το $\varepsilon_o > 0$ είναι τυχαίο, έχουμε $\lambda_d(E) \leq c_d H^d(E)$ και $\lambda_d(E) < +\infty$.

Έχουμε:

$$\lambda_d(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ B_i \text{ ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο } i \in I\!N \right\}.$$

Έστω $\varepsilon_o > 0$.

Τότε υπάρχουν B_i, $i \in I\!N$ ορθογώνια, ώστε $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ και

$$\sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) < \lambda_d(E) + \varepsilon_o \qquad (2).$$

Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι τα B_i είναι ανοικτά. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τις κλειστές σφαίρες ακτίνας το πολύ $\frac{\varepsilon}{2}$ που περιέχονται στο B_i, $i \in I\!N$. Το σύνολο των σφαιρών αυτών αποτελεί κάλυψη Vitali του B_i. Άρα υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών σφαιρών

$\{S_{ij} : j \in I\!\!N\}$ με $S_{ij} \cap S_{ik} = \emptyset, \quad j \neq k$ διαμέτρου το πολύ ε, ώστε

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta^d(S_{ij}) = +\infty \quad \acute{\eta} \quad H^d(B_i \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}) = 0 \qquad (3).$$

Επειδή η $\{S_{ij} : j \in I\!\!N\}$ είναι οικογένεια κλειστών, ξένων ανά δύο υποσυνόλων του B_i έχουμε για το μέτρο λ_d ,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(S_{ij}) = \lambda_d\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) \leq \lambda_d(B_i) = V_d(B_i) < +\infty. \qquad (4).$$

Άρα ισχύει και $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\delta^d(S_{ij}) < +\infty$, επειδή $\lambda_d(S_{ij}) = c_d\delta^d(S_{ij})$ (5).

Άρα (από την (3))

$$H^d\left(B_i \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) = 0 \quad \text{και} \quad H^d_\varepsilon\left(B_i \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) = 0.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
H^d_\varepsilon(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} H^d_\varepsilon(B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left\{H^d_\varepsilon\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) + H^d_\varepsilon\left(B_i \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} H^d_\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_{ij}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} H^d_\varepsilon(S_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \delta^d(S_{ij}) \\
&= \frac{1}{c_d}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(S_{ij}) \leq \frac{1}{c_d}\sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) \\
&\leq \frac{1}{c_d}\lambda_d(E) + \frac{1}{c_d}\varepsilon_o.
\end{aligned}$$

(Από τις (2) - (5) και την Παρατήρηση 2.2.1). Τελικά

$$c_d H^d_\varepsilon(E) \leq \lambda_d(E) + \varepsilon_o \quad \text{για τυχαία } \varepsilon_o \text{ και } \varepsilon.$$

Άρα $\quad c_d H^d(E) \leq \lambda_d(E).$ □

Παρατήρηση 2.2.2.

Βάσει του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε:
Για την σφαίρα $S_d = \widehat{S}(0, \frac{1}{2})$ *του* $\mathbb{R}^d$

- $\lambda_1(S_1) = H^1(S_1) = 1$

- $\lambda_2(S_2) = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad H^2(S_2) = 1$

- $\lambda_3(S_3) = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad H^3(S_3) = 1$

- *Για τον μοναδιαίο κύβο* $[0,1]^n$ *έχουμε*
  $\lambda_n\left([0,1]^n\right) = 1, \qquad H^n\left([0,1]^n\right) = \frac{1}{c_n}.$

- *Εάν* Γ *είναι τυχαία συνεχής καμπύλη του* $\mathbb{R}^d$ *με μήκος* $\ell(\Gamma)$, *τότε*

$$\ell(\Gamma) = H^1(\Gamma).$$

(βλ. [7]).

2.3 Fractal διαστάσεις

2.3.1 Διάσταση Hausdorff-Besicovitch

Σε κάθε γεωμετρικό σχήμα δίνουμε μια διάσταση.

Επί παραδείγματι : Ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα είναι διάστασης 1. Τρίγωνα, πολύγωνα, κύκλοι είναι διάστασης 2. Πυραμίδες, πολύεδρα, σφαίρες είναι διάστασης 3.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος πεπερασμένο, εμβαδόν και όγκο μηδέν. Ένα τρίγωνο έχει "μήκος" άπειρο, εμβαδόν πεπερασμένο και όγκο μηδέν. Ένας κύβος έχει "μήκος" και "εμβαδόν" άπειρο και όγκο πεπερασμένο.

Παρατηρούμε ότι η διάσταση ενός γεωμετρικού σχήματος είναι εκείνος ο αριθμός n που αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ έχει μέτρο άπειρο ενώ αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$ έχει μέτρο μηδέν. Την έννοια "διάσταση" συνόλου θα την γενικεύσουμε με την βοήθεια του μέτρου Hausdorff του συνόλου.

Έστω $E \subseteq I\!R^d$ και $H^s(E)$ το $s-$ Hausdorff μέτρο του, για $s \geq 0$. Εάν $0 \leq s < t$ τότε

$$\begin{aligned} H^s_\varepsilon(E) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\delta^s(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in I\!N\right\} \\ &\geq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\delta^t(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in I\!N\right\} = H^t_\varepsilon(E) \end{aligned}$$

για $0 < \varepsilon < 1$.

Από τον ορισμό του μέτρου Hausdorff έχουμε ότι

$$H^t(E) \leq H^s(E) \quad \text{για} \quad 0 \leq s < t.$$

Άρα, εάν $H^s(E) = 0$ για κάποιο $s \geq 0$, θα έχουμε και $H^t(E) = 0$ για κάθε $t \geq s$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} H^s_\varepsilon(E) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) \cdot \delta^{s-t}(U_i), \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N} \right\} \\ &\geq \varepsilon^{s-t} H^t_\varepsilon(E). \end{aligned}$$

Εάν $0 < H^t(E) \leq +\infty$, τότε

$$H^s(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^s_\varepsilon(E) \geq \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{s-t} \right) H^t(E) = +\infty$$

για κάθε $0 \leq s < t$.

Ιδιαιτέρως, για το σύνολο $\mathbb{R}^d$ έχουμε ότι $H^d(\mathbb{R}^d) = +\infty$ και $H^s(\mathbb{R}^d) = 0$ για $s > d$, και για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι $H^s(E) = 0$ για $s > d$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός s_o, $\quad 0 \leq s_o \leq d, \quad$ ώστε

$$H^t(E) = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad t > s_o \\ +\infty, & \text{για} \quad t < s_o \end{cases}$$

Τότε

$$s_o = \sup\{t \geq 0 : H^t(E) = +\infty\} = \inf\{t \geq 0 : H^t(E) = 0\}.$$

Τον αριθμό αυτό ονομάζουμε **Hausdorff-Besicovitch διάσταση** του E και συμβολίζουμε $\dim_H E$.

Το μέτρο $H^{s_o}(E)$ είναι δυνατό να είναι 0, $+\infty$ ή θετικός αριθμός.

2.3.2 Διάσταση Box

Η διάσταση Box είναι η απλούστερη διάσταση που χρησιμοποιούμε και φέρει επίσης τα ονόματα εντροπία Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα, διάσταση Minkowski και άλλα.

Η κατανόηση του ορισμού γίνεται εφικτή μέσω παραδειγμάτων στον $\mathbb{R}^3$. Εάν έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς α και $\delta > 0$, χρειαζόμαστε τουλάχιστον

$$N_\delta = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 = \alpha^2\left(\frac{1}{\delta}\right)^2$$

κύβους πλευράς δ για να καλύψουμε το αρχικό τετράγωνο. Ανάλογα για τον κύβο πλευράς α χρειαζόμαστε τουλάχιστον

$$N_\delta = \alpha^3\left(\frac{1}{\delta}\right)^3$$

κύβους πλευράς δ για να τον καλύψουμε.

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που εμφανίζεται στο $\frac{1}{\delta}$, είναι η διάσταση του αντικειμένου.

Για το τυχαίο αντικείμενο θα χρειαζόμαστε $N_\delta \cong c\left(\frac{1}{\delta}\right)^s$ κύβους πλευράς δ για να το καλύψουμε, για κάποιο $s \geq 0$. (όπου c σταθερά, εξαρτώμενη από το αντικείμενο). (με $f(\delta) \cong g(\delta)$, αν $\lim\limits_{\delta\to 0}\big(f(\delta) - g(\delta)\big) = 0$). Λογαριθμόντας έχουμε

$$\log N_\delta \cong \log c - s \log \delta$$

Άρα

$$s = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}.$$

Ορισμός 2.3.1.

Εάν $F \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο σύνολο, ορίζουμε ως **box-διάσταση** *του, τον αριθμό*

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(εφόσον υπάρχει το όριο), όπου $N_\delta(F)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός κύβων του $\mathbb{R}^d$, πλευράς δ που καλύπτουν το F.

Ισοδύναμα: $N_\delta(F)$ είναι ένα από τα ακόλουθα

i. Ο ελάχιστος αριθμός κλειστών σφαιρών ακτίνας δ, που καλύπτει το F.

ii. Ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου το πολύ δ, που καλύπτει το F.

iii. Ο αριθμός κύβων της μορφής

$$\big[m_1\delta, (m_1+1)\delta\big] \times \cdots \times \big[m_d\delta, (m_d+1)\delta\big]$$

όπου $m_1, \ldots, m_d$ ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι τέμνουν το F.

iv. Ο μεγαλύτερος αριθμός σφαιρών $S(x,\delta)$, ξένων ανά δύο με κέντρο $x \in F$.

(βλ. [8]).

2.3.3 Διάσταση ομοιότητας

Η διάσταση αυτή ορίζεται σε σύνολα που έχουν κατασκευαστεί με ειδικής μορφής ΣΕΣ.

Ορισμός 2.3.2.

Έστω $w_1, w_2, \dots, w_N : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *είναι ομοιότητες με κοινό συντελεστή συστολής* $0 < c < 1$, $\quad \big|w_i(x) - w_i(y)\big| = c|x-y|, \quad i = 1, 2, \dots, N$ *και* F *το σταθερό σημείο*

$$F = w_1(F) \cup w_2(F) \cup \cdots \cup w_N(F).$$

Ορίζουμε **διάσταση ομοιότητας**

$$\dim_s F = \frac{\log N}{-\log c}.$$

2.4 Ιδιότητες και σχέσεις διαστάσεων

Οι διαστάσεις Hausdorff και Box, έχουν κοινές ιδιότητες, όπως οι εξής:

i. **Μονοτονία :** Εάν $E \subseteq F$, τότε $\dim E \leq \dim F$.

ii. **Πεπερασμένα σύνολα :** Εάν $E = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $\dim E = 0$.

iii. **Συνθήκη Lipschitz :** Εάν $f : E \to \mathbb{R}^d$ είναι συνάρτηση Lipschitz, τότε $\dim f(E) \leq \dim E$.

όπου dim, είναι η Hausdorff ή η Box διάσταση.

Έχουν διαφορετική συμπεριφορά στην διάσταση της ένωσης συνόλων. Για την ακρίβεια έχουμε:

iv. Εάν $\{E_n \subseteq \mathbb{R}^d : n \in \mathbb{N}\}$, τότε

$$\dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sup\{\dim_H E_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ιδιαιτέρως: Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, έχει Hausdorff διάσταση 0.

iv'. Εάν $\{E_n \subseteq \mathbb{R}^d : n = 1, \ldots, k\}$, τότε

$$\dim_B \left(\bigcup_{n=1}^{k} E_n \right) = \max\{\dim_B E_n : n = 1, \ldots, k\}.$$

Η μεταξύ τους σχέση είναι η εξής:

Πρόταση 2.4.1.

Εάν $\dim_H E, \dim_B E$ είναι οι διαστάσεις Hausdorff και Box του $E \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε ισχύει:

$$\dim_H E \leq \dim_B E.$$

Γενικά δεν ισχύει η ισότης.

Απόδειξη.

Έστω $s = \dim_H E = \sup\{t \geq 0 : H^t(E) = +\infty\}$.
Εάν $s = 0$, έχουμε $\dim_H E \leq \dim_B E$.

Έστω $s > 0$ και $t < s$. Τότε $H^t(E) = +\infty = \lim_{\delta \to 0^+} H^t_\delta(E)$ και $H^t_\delta(E) > 1$, για $0 < \delta < \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$.

Εάν $N_\delta(E)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου δ που καλύπτουν το E, θα έχουμε

$$H^t_\delta(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(U_i) \leq \delta \right\} \leq N_\delta(E)\delta^t.$$

Άρα $N_\delta(E)\delta^t > 1$, και $\log N_\delta(E) + t \log \delta > 0$, για $0 < \delta < \varepsilon$. Επομένως

$$t \leq \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \dim_B(E),$$

από το οποίο έχουμε $\dim_H E \leq \dim_B E$.

Θα δώσουμε παράδειγμα $E \subseteq \mathbb{R}^d$, συμπαγούς συνόλου, ώστε

$$\dim_H E < \dim_B E.$$

Έστω $E = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Τότε $\dim_H E = 0$ και $\dim_B E = \frac{1}{2}$.

Πράγματι

Ισχύει $\dim_H(E) = 0$, επειδή το E είναι αριθμήσιμο.

Θεωρούμε $0 < \delta < \frac{1}{2}$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}.$$

Το $\{0, 1, \dots, \frac{1}{k}\}$ καλύπτεται από $(k+1)$ διαστήματα μήκους δ και χρειαζόμαστε $(k-1)$ διαστήματα για να καλύψουμε το $\{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-2}, \dots, 1\}$. Άρα $N_\delta(E) \leq 2k$. Καθένα από τα διαστήματα μήκους δ μπορεί να καλύψει το πολύ ένα από τα σημεία $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}\}$, άρα $N_\delta(E) \geq k$. Επομένως

$$\frac{\log k}{\log k(k+1)} \leq \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}.$$

Άρα

$$\dim_B(E) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \frac{1}{2}.$$

□

Παρατήρηση 2.4.1.

Εάν $E \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\dim_B(E) = \dim_B(\overline{E})$$

ενώ δεν ισχύει το ίδιο για τις διαστάσεις $\dim_H(E), \dim_H(\overline{E})$. Παραδείγματος χάρη, εάν E είναι το σύνολο των ρητών στο $[0,1]$, τότε $\dim_H(E) = 0$, ενώ $\dim_H(\overline{E}) = \dim_H\big([0,1]\big) = 1$.

2.5 Υπολογισμός fractal διαστάσεων

2.5.1 Διάσταση συνόλων κατασκευασμένων με ΣΕΣ

Η εύρεση των διαστάσεων Hausdorff και Box, συνόλων fractal χρειάζεται μελέτη της μεθόδου κατασκευής καθενός από αυτά και εν συνεχεία να γίνει προσπάθεια υπολογισμού των διαστάσεων.

Οι διαστάσεις των fractal συνόλων και συναρτήσεων που κατασκευάσαμε με την βοήθεια ΣΕΣ, υπολογίζονται βάσει γενικών Θεωρημάτων.

Για να πεισθούμε για την χρησιμότητα των Θεωρημάτων αυτών, θα βρούμε την Hausdorff και την Box διάσταση του απλούστερου συνόλου fractal, του τριαδικού συνόλου Cantor E.

Θα αποδείξουμε ότι

$$s = \dim_H(E) = \dim_B(E) = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\ldots \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} \leq H^s(E) \leq 1.$$

- Το $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, όπου κάθε E_n αποτελείται από 2^n διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα. Άρα

$$H^t_{\frac{1}{3^n}}(E) \leq 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^t = \left(\frac{2}{3^t}\right)^n.$$

Για να είναι $H^t(E) < +\infty$ θα πρέπει $\frac{2}{3^t} \leq 1$, δηλαδή $t \geq \frac{\log 2}{\log 3}$.

Για $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ έχουμε $H^s(E) \leq 1$.

Θα αποδείξουμε ότι $H^s(E) \geq \frac{1}{2}$.

Έστω $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{2} = \frac{1}{3^s} \qquad (1).$$

Επειδή $\delta\big(\operatorname{con} U_n\big) = \delta\big(U_n\big) = \delta\big(\overline{U_n}\big), \quad n \in I\!N$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $U_n, \quad n \in I\!N$, είναι κλειστά διαστήματα,

$U_n = [\alpha_n, \beta_n], \quad n \in I\!N$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon_n > 0$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\beta_n - \alpha_n + 2\varepsilon_n\big)^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} \big(\beta_n - \alpha_n\big)^s + \varepsilon$$

Τότε $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \varepsilon_n, \beta_n + \varepsilon_n)$, με E συμπαγές, άρα

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} [\alpha_{n_i} - \varepsilon_{n_i}, \beta_{n_i} + \varepsilon_{n_i}].$$

Εάν αποδείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} (\beta_{n_i} - \alpha_{n_i} + 2\varepsilon_{n_i})^s \geq \frac{1}{2}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n)^s + \varepsilon \geq \frac{1}{2}, \quad \text{για τυχαίο} \quad \varepsilon > 0,$$

δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{2}$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε το εξής:

Εάν $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\nu} U_n$, $\quad U_n = [\gamma_n, \delta_n]$, $\quad$ τότε $\quad \sum_{n=1}^{\nu} \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{2}$.

Έστω $\delta(U_1) \leq \delta(U_2) \leq \cdots \leq \delta(U_\nu)$, και $k_n \in I\!N$, ώστε

$$\frac{1}{3^{k_n+1}} \leq \delta(U_n) < \frac{1}{3^{k_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Τότε $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$.

Το U_n τέμνει το πολύ ένα από τα διαστήματα που αποτελούν το E_{k_n}. Εάν $j \geq k_n$, τότε το U_n τέμνει το πολύ 2^{j-k_n} από τα διαστήματα που αποτελούν το E_j. Άρα

$$2^{j-k_n} = 2^j \cdot \frac{1}{2^{k_n}} = 2^j \cdot \frac{1}{3^{k_n s}} = 2^j 3^s \left(\frac{1}{3^{(k_n+1)}}\right)^s \leq 2^j 3^s \delta^s(U_n). \qquad (2).$$

Το U_1 τέμνει το πολύ ένα από τα 2^{k_1} διαστήματα του E_{k_1}.

Το U_2 τέμνει το πολύ $2^{k_1-k_2}$ από τα 2^{k_1} διαστήματα του E_{k_1}.

$\vdots$

Το U_ν τέμνει το πολύ $2^{k_1-k_\nu}$ από τα 2^{k_1} διαστήματα του E_{k_1}.

Επειδή τα $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$ τέμνουν όλα από τα διαστήματα του E_{k_1}, θα πρέπει

$$1 + 2^{k_1-k_2} + \cdots + 2^{k_1-k_\nu} \geq 2^{k_1}. \tag{3}$$

Από τις $(2),(3)$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\nu} 2^{k_1} \cdot 3^s \delta^s(U_n) \geq 2^{k_1}, \quad \sum_{n=1}^{\nu} \delta^s(U_n) \geq \frac{1}{3^s} = \frac{1}{2}$$

Από την (1) έχουμε ότι $H^s(E) \geq \frac{1}{2}$.

Άρα για $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, $\quad \frac{1}{2} \leq H^s(E) \leq 1$, επομένως $\dim_H E = \frac{\log 2}{\log 3}$.

- Θα υπολογίσουμε την $\dim_B E$.

Εάν $\frac{1}{3^k} < \delta \leq \frac{1}{3^{k-1}}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε ο ελάχιστος αριθμός για να καλύψουμε τον E με διαστήματα μήκους δ, είναι $N_\delta(E) \leq 2^k$. Άρα

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{k}{k-1} \tag{4}$$

Εάν $\frac{1}{3^{k+1}} \leq \delta < \frac{1}{3^k}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε $N_\delta(E) \geq 2^k$. Άρα

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \geq \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{k}{k+1} \tag{5}$$

Από τις $(4),(5)$ έχουμε ότι

$$\dim_B E = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Το Θεώρημα 2.5.1 θα μας δώσει την διάσταση του σταθερού συνόλου κατάλληλου ΣΕΣ (βλ. Θεώρημα 1.3.4).

Θεώρημα 2.5.1.

Έστω $w_1, w_2, \ldots, w_N : I\!R^d \to I\!R^d$*, ομοιότητες, (με την Ευκλείδεια μετρική) με συντελεστές* $s_1, s_2, \ldots, s_N \in (0,1)$*, ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη ανοικτού συνόλου:*

Υπάρχει $V \subseteq I\!R^d, \quad V \neq \varnothing, \quad V$ *ανοικτό, ώστε*

i. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} w_i(V) \subseteq V$ *και*

ii. $w_i(V) \cap w_j(V) = \varnothing, \quad i \neq j.$

Εάν K *είναι το σταθερό σημείο της* $W : \mathcal{H}(I\!R^d) \to \mathcal{H}(I\!R^d)$*, τότε:*

i. $\dim_H(K) = \dim_B(K) = D$*, όπου* D *δίδεται από τη σχέση:*

$$\sum_{i=1}^{N} s_i^D = 1.$$

ii. $0 < H^D(K) < +\infty.$

Για την απόδειξη του θεωρήματος 2.5.1 βλ. [10].

Το Θεώρημα 2.5.2 θα μας δώσει την διάσταση του γραφήματος συνάρτησης παρεμβολής όπως κατασκευάστηκε στην 1.5 .

Θεώρημα 2.5.2.

Έστω $\{(x_i, F_i) : i = 1, 2, \ldots, N\}$*, σημεία του* $I\!R^2$*, μη κείμενα όλα στην ίδια ευθεία και* G *το γράφημα της συνάρτησης παρεμβολής.*

Εάν $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}|d_i| > 1,$ *τότε* $\dim_B(G) = D$, *όπου το* D *δίδεται από τη σχέση*

$$\sum_{i=1}^{N}|d_i|\alpha_i^{D-1} = 1.$$

Εάν $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}|d_i| \leq 1,$ *τότε* $\dim_B(G) = 1.$

Για την απόδειξη του θεωρήματος 2.5.2 βλ. [4].

Παραδείγματα 2.5.1.

1. - *Τα ευθύγραμμα τμήματα, οι ευθείες έχουν διάσταση 1.*
   - *Τρίγωνα, πολύγωνα, κύκλοι έχουν διάσταση 2.*
   - *Πολύεδρα, σφαίρες, κύλινδροι έχουν διάσταση 3.*
   - *Ανοικτά σύνολα στον* $\mathbb{R}^d$, *έχουν διάσταση* d.

   Τα ανωτέρω προκύπτουν από την σχέση $H^d(E) = c\lambda_d(E), \quad E \subseteq \mathbb{R}^d$.

2. - *Το τριαδικό σύνολο Cantor είναι διάστασης* $\frac{\log 2}{\log 3} \in (0,1)$.
   - *Το Τρίγωνο Sierpinski είναι διάστασης* $\frac{\log 3}{\log 2} \in (1,2)$.
   - *Ο σπόγγος του Menger είναι διάστασης* $\frac{\log 20}{\log 3} \in (2,3)$.
   - *Η καμπύλη von Koch είναι διάστασης* $\frac{\log 4}{\log 3} \in (1,2)$.

   Τα ανωτέρω προκύπτουν από το Θεώρημα 2.5.1.

3. *Υπάρχει υπεραριθμήσιμο σύνολο του* E, *με* $\dim_H(E) = 0$.

   (βλ. [8]).

4. *Εάν* $0 < s < d$, *μπορούμε να κατασκευάσουμε* $E \subseteq \mathbb{R}^d$, *ώστε*

$$\dim_H E = s.$$

Θα δώσουμε δύο κατασκευές.

Έστω $0 < s < 1$.

(i) Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2$ *και* $0 < \lambda < \frac{1}{m}$ *ώστε*

$$s = \frac{\log m}{-\log \lambda}.$$

Έστω $E_o = [0,1]$. *Ορίζουμε*

$$E_1 = [\alpha_1 = 0, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2] \cup \cdots \cup [\alpha_m, \beta_m = 1] \qquad \text{με}$$

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_m < \beta_m, \quad \text{ώστε}$$

$$\left| \frac{\beta_i + \alpha_i}{2} - \frac{\beta_{i+1} + \alpha_{i+1}}{2} \right| = c_1, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$\text{και} \qquad |\beta_i - \alpha_i| = \lambda, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία σε καθένα από τα $[\alpha_i, \beta_i], \quad i = 1, 2, \ldots, m$ *στη θέση του* E_o *και λαμβάνουμε το* E_2 *κ.ο.κ.*
Τότε το $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ *είναι το* **ομοιόμορφο σύνολο Cantor**, *με*

$$\dim_H E = \dim_B E = s \quad \text{και} \quad 0 < H^s(E) < +\infty.$$

(βλ. [8]).

(ii) Θεωρούμε $n_k \in I\!N$ *ώστε* $n_{k+1} \geq \max\left\{n_k^k, \quad 3n_k^{\frac{1}{s}}\right\}$. *Για κάθε* $k \in I\!N$, A_k *είναι η ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων που το κάθε ένα έχει μήκος* $\frac{1}{n_k^{\frac{1}{s}}}$ *και η απόσταση των μέσων δύο διαδοχικών διαστημάτων είναι* $\frac{1}{n_k}$. *Τότε το σύνολο* $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ *έχει διάσταση* s. *(βλ. [8]).*

Για τυχαίο $1 < s < 2$ *κατασκευάζουμε υποσύνολο* E *του* $I\!R$ *διαστάσεως* $s-1$. *Τότε το σύνολο* $E \times [0,1] \subseteq I\!R^2$ *έχει διάσταση* s. *(βλ. [8]) .*

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για τυχαίο $0 < s < d$.

2.6 Διάσταση γραφήματος συνάρτησης Weierstrass

Οι συναρτήσεις τύπου Weierstrass, είναι συνεχείς παντού και πουθενά διαφορίσιμες. Εδώ θα δώσουμε παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης και θα υπολογίσουμε την Box διάσταση του γραφήματος της.

Θα δώσουμε πρώτα αποτελέσματα που ισχύουν για γενικότερες συναρτήσεις.

Έστω $f : [0,1] \to I\!R$ συνεχής συνάρτηση και

$$F = \big\{(t, f(t)) : t \in [0,1]\big\}$$

το γράφημα της. Ορίζουμε:

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta>0} \frac{\log N_\delta}{-\log\delta} \qquad \text{και}\\ \underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta>0} \frac{\log N_\delta}{-\log\delta}\end{aligned}$$

όπου N_δ κάποιος από τους αριθμούς του Ορισμού 2.3.1.

Ως **μέγιστο βεληνεκές** της f στο $[u,v] \subseteq [0,1]$ ορίζουμε

$$R_f\big([u,v]\big) = \sup\big\{|f(x)-f(y)| : u < x, y < v\big\}.$$

Εάν θεωρήσουμε $0<\delta<1$ και $m = \left[\frac{1}{\delta}\right]+1$, δηλαδή $m-1 < \frac{1}{\delta} \le m$ έχουμε τη σχέση

$$\delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} R_f\big([i\delta,(i+1)\delta]\big) \le N_\delta \le 2m + \delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} R_f\big([i\delta,(i+1)\delta]\big) \qquad (1).$$

Η σχέση αυτή προκύπτει ως εξής:

Θεωρούμε το διάστημα $[i\delta,(i+1)\delta], \quad i=0,1,\ldots,m-1$. Επειδή η f είναι συνεχής χρειαζόμαστε το λιγότερο

$$\frac{R_f\big([i\delta,(i+1)\delta]\big)}{\delta}$$

και το πολύ

$$\frac{R_f\big([i\delta,(i+1)\delta]\big)}{\delta}+2$$

τετράγωνα πλευράς δ για να καλύψουμε το γράφημα της $f|_{[i\delta,(i+1)\delta]\cap[0,1]}$. Αθροίζοντας έχουμε την σχέση (1).

Λήμμα 2.6.1.

Έστω $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^{2-s}$, *για κάποιο* $c > 0$ *και* $1 < s < 2$, $x, y \in [0,1]$. *Τότε:* $\overline{\dim}_B F \leq s$.

Απόδειξη.

Επειδή $R_f\big([u,v]\big) \leq c|u-v|^{2-s}$, $u, v \in [0,1]$, $(s<2)$, θα έχουμε από την (1)

$$\begin{aligned}
N_\delta &\leq 2m + \delta^{-1}\sum_{i=0}^{m-1} R_f\big([i\delta,(i+1)\delta]\big) \\
&\leq 2m + \delta^{-1} m c \delta^{s-2} \\
&= m\big[2 + c\delta^{1-s}\big] \\
&< \big(1+\delta^{-1}\big)\big(2 + c\delta^{1-s}\big) \\
&= \delta^{-s}\Big[\big(1+\delta^{-1}\big)\cdot\big(2\delta^{s} + c\delta^{1}\big)\Big] \\
&= \delta^{-s}\big(2\delta^{s} + 2\delta^{s-1} + c\delta + c\big) \\
&< \delta^{-s}\big(4 + 2c\big) = c_1\delta^{-s} \qquad (0<\delta<1, \quad 1<s).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\log N_\delta \leq \log c_1 + s(-\log\delta) \quad \text{και}$$

$$\overline{\dim}_B F = \lim_{\delta>0}\sup \frac{\log N_\delta}{-\log\delta} \leq s.$$

□

Λήμμα 2.6.2.

Έστω ότι για την συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to I\!R$, *υπάρχουν* $c > 0, \quad 0 < \delta_o < 1$ *και* $s > 0$ *τέτοια ώστε:*

για κάθε $x \in [0,1)$ *και* $0 < \delta < \delta_o$, *υπάρχει* $0 < h < \delta$ *με* $x + h \in [0,1]$ *και*

$$\big|f(x+h) - f(x)\big| \geq c\delta^{2-s}.$$

Τότε $\quad \underline{\dim}_B F \geq s$.

Απόδειξη.

Έστω $0 < \delta < \delta_o$. Από την υπόθεση για το σημείο $i\delta \in [0,1)$, $(i = 0, \ldots, m-1)$ υπάρχει $y_i \in \big(i\delta, (i+1)\delta\big) \cap [0,1]$ ώστε

$$\big|f(i\delta) - f(y_i)\big| \geq c\delta^{2-s}.$$

Άρα $R_f\big([i\delta, (i+1)\delta]\big) \geq c\delta^{2-s}$. Από την σχέση (1) έχουμε

$$\begin{aligned} N_\delta &\geq \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f\big([i\delta, (i+1)\delta]\big) \\ &\geq \delta^{-1} m c \delta^{2-s} \\ &\geq \delta^{-1}\delta^{-1} c\delta^{2-s} = c\delta^{-s}. \end{aligned}$$

Άρα $\underline{\dim}_B F \geq s$. □

Θεώρημα 2.6.1 (Συνάρτηση Weierstrass).

Εάν $1 < s < 2$ *και* $\lambda > 1$ *ορίζουμε:*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \sin(\lambda^n t), \quad t \in [0,1].$$

Τότε το γράφημα F *της* f *έχει διάσταση* $\dim_B F = s$, *για* $\lambda \geq \lambda_o(s)$.

Απόδειξη.

Για να αποδείξουμε ότι $\dim_B F = s$, αρκεί να βρούμε σταθερές, ώστε να ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις των Λημμάτων 2.6.1, 2.6.2.

Ισχυρισμός 1

Υπάρχει $c > 0$ με $\big|f(x) - f(y)\big| \le c|x-y|^{2-s}, \quad x, y \in [0,1]$.

Έστω $x, y \in (0,1)$ με $y = x + h, \quad 0 < h < 1$. Θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$, ώστε $\lambda^{-(N+1)} \le h < \lambda^{-N}$.

Τότε

$$\begin{aligned}
\big|f(x+h) - f(x)\big| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \Big|\sin\big(\lambda^n(x+h)\big) - \sin\big(\lambda^n x\big)\Big| \\
&= \sum_{n=1}^{N} \lambda^{(s-2)n} \Big|\sin\big(\lambda^n(x+h)\big) - \sin\big(\lambda^n x\big)\Big| \\
&\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \Big|\sin\big(\lambda^n(x+h)\big) - \sin\big(\lambda^n x\big)\Big|
\end{aligned}$$

Επειδή $\big|\sin z - \sin w\big| \le |z - w|$, και $\big|\sin z - \sin w\big| \le 2$, για $z, w \in \mathbb{R}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\big|f(x+h) - f(x)\big| &\le \sum_{n=1}^{N} \lambda^{(s-2)n} \cdot \lambda^n h + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \\
&\le h \cdot \frac{\lambda^{(s-1)N}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \qquad (\lambda > 1, s < 2) \\
&= h^{2-s}\left[\frac{h^{s-1} \cdot \lambda^{(s-1)N}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2h^{s-2}\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}}\right]
\end{aligned}$$

όπου $h\lambda^N < 1, \quad s - 1 > 0$ και $h \cdot \lambda^{(N+1)} \ge 1, \quad s - 2 < 0$. Άρα

$$\big|f(x+h) - f(x)\big| \le h^{2-s}\left[\frac{1}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2}{1 - \lambda^{s-2}}\right] = ch^{2-s}.$$

Ισχυρισμός 2

Για την συνάρτηση Weierstrass ισχύουν οι προϋποθέσεις του Λήμματος 2.6.2.

Θεωρούμε $\lambda_o(s) > 1$ ώστε

$$\frac{\lambda^{1-s}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{s-2}}{1-\lambda^{s-2}} \leq \frac{1}{20} \quad \text{για} \quad \lambda \geq \lambda_o(s).$$

(Υπάρχει πάντοτε $\lambda_o(s) > 1$, ώστε να ισχύει η σχέση αυτή για $\lambda \geq \lambda_o(s)$, επειδή $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^{1-s}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{s-2}}{1-\lambda^{s-2}}\right) = 0$).
Έστω $\delta_o = \frac{1}{\lambda} < 1$ και $0 < \delta \leq \delta_o$. Θεωρούμε τυχαίο $x \in [0,1)$ και $N \in I\!N$, ώστε $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$. Θεωρούμε h με $0 < h\lambda^N < 1$, ώστε να έχουμε

$$\left|\sin\lambda^N(x+h) - \sin\lambda^N x\right| > \frac{1}{10}.$$

(Υπάρχει $0 < h\lambda^N < 1$, ώστε να ισχύει η σχέση αυτή, επειδή

$$\sup\left\{|\sin(\gamma+\varepsilon) - \sin\gamma| : 0 < \varepsilon < 1\right\} \geq |\sin\frac{\pi}{2} - \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2})| \cong 0,17 > \frac{1}{10}$$

για κάθε $\gamma \in I\!R$).

Εργαζόμενοι ανάλογα με τον Ισχυρισμό 1, έχουμε

$$\left|f(x+h) - f(x) - \lambda^{(s-2)N}\left[\sin\lambda^N(t+h) - \sin\lambda^N t\right]\right|$$

$$\leq h\cdot\frac{\lambda^{(s-1)(N-1)}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1-\lambda^{s-2}} \qquad (0 < h < \lambda^{-N})$$

$$< \frac{\lambda^{(s-2)N-(s-1)}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1-\lambda^{s-2}}$$

$$= \lambda^{(s-2)N}\left[\frac{\lambda^{(1-s)}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)}}{1-\lambda^{s-2}}\right] \leq \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \big|f(x+h)-f(x)\big| &\geq \frac{1}{10}\lambda^{(s-2)N}-\frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N} \\ &= \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N} \\ &= \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)}\cdot\lambda^{(s-2)(N-1)} \\ &\geq \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)}\delta^{2-s}. \qquad (\delta<\lambda^{-(N-1)}). \end{aligned}$$

Από τα ανωτέρω και τα Λήμματα 2.6.1, 2.6.2 συμπεραίνουμε ότι $\dim_B F = s$. □

Πρόταση 2.6.1.

Η συνάρτηση Weierstrass είναι συνεχής και πουθενά διαφορίσιμη.

Απόδειξη.

- Οι $f_n(t)=\lambda^{(s-2)n}\sin(\lambda^n t), \quad n\in I\!N$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big|f_n(t)\big| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\big(\lambda^{(s-2)}\big)^k < +\infty \quad (\text{γεωμετρική σειρά με } 0<\lambda^{s-2}<1)$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, επομένως η f είναι συνεχής.

Διαφορετικά:

- Από τον Ισχυρισμό 1, έχουμε

$$\big|f(x)-f(y)\big| \leq c|x-y|^{2-s}, \quad x,y\in[0,1], \quad (2-s>0)$$

οπότε η f είναι συνεχής.

Για να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in [0,1]$ θα χρησιμοποιήσουμε τον Ισχυρισμό 2.

Έστω $x \in [0,1)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\lambda} = \delta_o$, υπάρχει $0 < h_n < \frac{1}{n}$ ώστε

$$\left|f(x+h_n) - f(x)\right| \geq c \cdot \frac{1}{n^{2-s}} \quad (c = \frac{1}{20}\lambda^{s-2})$$

Άρα $\quad \frac{\left|f(x+h_n)-f(x)\right|}{h_n} \geq c \cdot \frac{n}{n^{2-s}} = cn^{s-1}$,

άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|f(x+h_n) - f(x)\right|}{h_n} = +\infty.$$

Επομένως δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ η δεξιά παράγωγος της f, για κάθε $x \in [0,1)$.

Ανάλογα εργαζόμενοι (τροποποιώντας το Λήμμα 2.6.2 και τον Ισχυρισμό 2) μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ η αριστερή παράγωγος της f, για κάθε $x \in [0,1)$.

$\square$

Παρατήρηση 2.6.1.

Για την Hausdorff - Besicovitch διάσταση του γραφήματος F της συνάρτησης Weierstrass, γνωρίζουμε ότι

$$s \geq \dim_H F \geq s - \frac{c}{\log \lambda} \qquad (c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha})$$

Εικάζεται ότι $\dim_H F = s$.

(βλ. [8]).

Κεφάλαιο 3

Σύνολα Julia, Σύνολο Mandelbrot

3.1 Εισαγωγή

Για να ορίσουμε και να μελετήσουμε τα σύνολα Julia και Mandelbrot, χρειαζόμαστε ορισμένα αποτελέσματα από τη Μιγαδική Ανάλυση.

Ορισμός 3.1.1.

Θεωρούμε $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

- *Εάν $f : V \to \mathbb{C}$ και $\alpha \in V$,* **η (μιγαδική) παράγωγος της f στο** *α είναι το όριο (αν υπάρχει)*

$$f'(\alpha) = \lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}.$$

- *Εάν η f έχει παράγωγο για κάθε $\alpha \in V$, τότε η f λεγεται* **ολόμορφη** *ή* **αναλυτική** *στο V.*

Ορισμός 3.1.2.

- *Έστω $f_n : V \to \mathbb{C}, \quad n \in I\!N$ ακολουθία συναρτήσεων, $f : V \to \mathbb{C}$ και $U \subseteq V$.* **Η $\{\mathbf{f_n}\}_{\mathbf{n} \in I\!N}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο U, στην f**, *αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o = n_o(\varepsilon, U) \in I\!N$, ώστε για $n \geq n_o$ έχουμε*

$$\big|f_n(z) - f(z)\big| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε} \quad z \in U.$$

  Συμβολίζουμε $f_n \rightrightarrows f$ στο U.

- **Η $\{\mathbf{f_n}\}_{\mathbf{n} \in I\!N}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο U, στο ∞**, *αν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $n_o = n_o(M, U) \in I\!N$, ώστε για $n \geq n_o$ έχουμε*

$$|f_n(z)| > M, \quad \text{για κάθε} \quad z \in U.$$

Ορισμός 3.1.3.

- *Εάν $z_o \in U, \quad U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, τότε το U καλείται* **περιοχή του $\mathbf{z_o}$**.

- *Το $A \subseteq \mathbb{C}$ καλείται* **συνεκτικό σύνολο**, *αν και μόνον αν δεν υπάρχουν $U, V \neq \varnothing$, ανοικτά, ξένα σύνολα ώστε $A \cap U \neq \varnothing, A \cap V \neq \varnothing$ και $A \subseteq U \cup V$.*

- *Το $A \subseteq \mathbb{C}$ καλείται* **τόπος** *αν το A είναι ανοικτό και συνεκτικό.*

  Ισοδύναμα: Αν το A είναι ανοικτό και για κάθε $z_o, z_o' \in A$ υπάρχει *πολυγωνική γραμμή*

$$\Pi = [z_o, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_n, z_o'] \subseteq A.$$

- *Το* $A \subseteq \mathbb{C}$ *καλείται* **ολικά μη συνεκτικό σύνολο**, *αν και μόνον αν, για κάθε* $\alpha \in A$ *το μοναδικό συνεκτικό υποσύνολο του* A *που περιέχει το* α *είναι το* $\{\alpha\}$.

Θεώρημα 3.1.1 (Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης).

Εάν $f, g : V \to \mathbb{C}$ *είναι αναλυτικές συναρτήσεις στον τόπο* V *και το σύνολο* $\big\{z \in V : f(z) = g(z)\big\}$ *έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο* V, *τότε* $f(z) = g(z)$, *για κάθε* $z \in V$.

Θεώρημα 3.1.2 (Αντίστροφης Απεικόνισης).

Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ *αναλυτική συνάρτηση και* $z_o \in U$ *με* $f(z_o) \neq 0$. *Τότε υπάρχει περιοχή του* z_o, *ώστε η* $f|_V$ *να είναι "1 − 1" και η* $\big(f|_V\big)^{-1}$ *είναι αναλυτική συνάρτηση.*

Θεώρημα 3.1.3 (Ανοικτής Απεικόνισης).

Εάν $f : V \to \mathbb{C}$ *είναι αναλυτική, μη σταθερή συνάρτηση στον τόπο* V *τότε η* f *είναι ανοικτή συνάρτηση (δηλαδή, για κάθε ανοικτό* $U \subseteq V$, *το* $f(U)$ *είναι ανοικτό).*

Θεώρημα 3.1.4 (Σύγκλισης του Weierstrass).

Έστω $f_n : V \to \mathbb{C}$, ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων και $f : V \to \mathbb{C}$. Εάν $f_n \rightrightarrows f$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V τότε

i. Η f είναι αναλυτική στο V

ii. $f_n' \rightrightarrows f'$, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V.

Οι αποδείξεις των ανωτέρω Θεωρημάτων, υπάρχουν σε βιβλία "Μιγαδικής Ανάλυσης".
(βλ. [1]).

Ορισμός 3.1.4.

Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων που ορίζονται στο ανοικτό σύνολο $V \subseteq \mathbb{C}$.

- *Η $\mathcal{F}$ καλείται* **κανονική οικογένεια στο V**, *αν για κάθε ακολουθία $\{f_n\}_{n\in N}$ της $\mathcal{F}$ υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}_{n\in N}$, ώστε να ισχύει ακριβώς ένα από τα κάτωθι:*

  (i) $f_{k_n} \rightrightarrows f$, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V, όπου $f : V \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση.

  (ii) $f_{k_n} \rightrightarrows \infty$, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V.

- *Η $\mathcal{F}$ καλείται* **κανονική οικογένεια στο $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$**, *αν υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq V$ με $w \in U$, ώστε η $\mathcal{A} = \{f|_U : f \in \mathcal{F}\}$ να είναι κανονική* *οικογένεια στο U.*

Παρατήρηση 3.1.1.

Εάν η $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ είναι κανονική οικογένεια στο V και $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι πολυώνυμο, τότε η $\{g \circ f_i : i \in I\}$ είναι κανονική οικογένεια στο V.
Πράγματι:
Έστω $g(z) = z^k, \quad k \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \rightrightarrows f$ στα συμπαγή υποσύνολα του V, τότε και $f_n^k \rightrightarrows f^k$ στα συμπαγή υποσύνολα. Αν $f_n \rightrightarrows \infty$ στα συμπαγή υποσύνολα του V, τότε $f_n^k \rightrightarrows \infty$.
Για g τυχαίο πολυώνυμο, ισχύει από την προηγούμενη περίπτωση.

Ορισμός 3.1.5.

Έστω $\mathcal{F} = \{f_i :< X, \rho > \to < Y, \sigma >, \quad i \in I\}$ οικογένεια συναρτήσεων μεταξύ των μ.χ $< X, \rho >, < Y, \sigma >$.

- *Η $\mathcal{F}$ καλείται* **ισοσυνεχής στο $\mathbf{x_o} \in \mathbf{X}$**, *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x_o)$ ώστε*
  Για κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_o) < \delta$, ισχύει $\sigma(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$.

- *Η $\mathcal{F}$ καλείται* **ισοσυνεχής στο $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$**, *αν είναι ισοσυνεχής σε κάθε $x_o \in X$.*

Για να δούμε τη σχέση μεταξύ κανονικών και ισοσυνεχών οικογενειών χρειαζόμαστε τη χορδική μετρική στον $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Έστω η σφαίρα Riemann,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad \text{και} \quad B = (0, 0, 1).$$

Η απεικόνιση

$$P : S \backslash \{B\} \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad P(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

καλείται **στερεογραφική προβολή**. Η P είναι συνάρτηση "1−1", επί, συνεχής και η

$$P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|)^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + z^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

είναι συνεχής.

Εάν $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ επεκτείνουμε την P ως εξης:

$$\widetilde{P} : S \to \widetilde{\mathbb{C}} \quad \text{με} \quad \widetilde{P}|_{S \backslash B} = P \quad \text{και} \quad \widetilde{P}(B) = \infty.$$

Εάν $z_1, z_2 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ ορίζουμε τη **χορδική απόσταση** αυτών

$$\chi(z_1, z_2) =: \left\|\widetilde{P}^{-1}(z_1) - \widetilde{P}^{-1}(z_2)\right\| = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, & \text{για } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \text{για } z_1 \in \mathbb{C}, \quad z_2 = \infty \\ 0, & \text{για } z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

($\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^3$).

Η χορδική μετρική είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 3.1.5.

Έστω $\mathcal{F} = \{f_i : V \to \mathbb{C}, \quad i \in I\}$ *οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στον τόπο* V. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Η* $\mathcal{F}$ *είναι κανονική οικογένεια στο* V.

2. *Η* $\mathcal{F} = \{f_i :< V, \chi > \to < \mathbb{C}, \chi >, \quad i \in I\}$ *είναι ισοσυνεχής οικογένεια στο* V.

Παρατήρηση 3.1.2.

- *Εάν η* $\mathcal{F}$ *είναι κανονική οικογένεια, δεν συνεπάγεται ότι είναι ισοσυνεχής με την Ευκλείδεια μετρική.*

  Επί παραδείγματι:

  $\mathcal{F} = \{f_n(z) = ne^z, \quad n \in \mathbb{N}\}$. *Τότε* $f_n \rightrightarrows \infty$ *στα συμπαγή υποσύνολα του* $\mathbb{C}$, *άρα η* $\mathcal{F}$ *είναι κανονική οικογένεια στο* $\mathbb{C}$.

  Για $z \neq z'$, $\quad \left|f_n(z) - f_n(z')\right| = n|e^z - e^{z'}| \to +\infty$ *άρα δεν υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $|z - z'| < \delta$ *να έχουμε* $\left|f_n(z) - f_n(z')\right| < 1$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Επομένως η* $\mathcal{F}$ *δεν είναι ισοσυνεχής.*

- *Εάν* $\mathcal{F}$ *είναι ισοσυνεχής οικογένεια με την Ευκλείδεια μετρική, επειδή* $\chi(z, z') \leq |z - z'|, \quad z, z' \in \mathbb{C}$ *θα είναι ισοσυνεχής με τη χορδική μετρική, οπότε θα είναι κανονική οικογένεια.*

Θεώρημα 3.1.6 (Montel).

Έστω $\{g_n\}_{n\in N}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων ορισμένων στον τόπο $V \subseteq \mathbb{C}$.

Εάν η $\{g_n\}_{n\in N}$ δεν είναι κανονική στο V τότε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(V) = \mathbb{C}, \quad \text{ή} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(V) = \mathbb{C}\backslash\{z_o\} \quad \text{για κάποιο } z_o \in \mathbb{C}.$$

Ισοδύναμα : Εάν $\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(V) \subseteq \mathbb{C}\backslash\{\alpha, \beta\}$ με $\alpha \neq \beta$, τότε η οικογένεια $\{g_n\}_{n\in N}$ είναι κανονική στο V.

Το Θεώρημα αυτό αποδείχθηκε από τον Montel (1912) και αναφέρεται ως **Θεμελειώδες Κριτήριο Κανονικότητας**. Είναι από τα βασικότερα αποτελέσματα που χρησιμοποιούνται στη θεωρία των συνόλων Julia.

Οι αποδείξεις τω ανωτέρω Θεωρημάτων και εκτενής θεωρία για τις Κανονικές Οικογένειες υπάρχουν στα [17], [5].

3.2 Σύνολα Julia

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε ισοδύναμους ορισμούς και ιδιότητες του συνόλου Julia πολυωνυμικής συνάρτησης

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad f(z) = \alpha_o + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n,$$

με συντελεστές $\alpha_i \in \mathbb{C}$, βαθμού τουλάχιστο 2.

Ορισμός 3.2.1.

- *Το σημείο* $w \in \mathbb{C}$ *καλείται* **περιοδικό σημείο** *της* f, *αν* $f^p(w) = w$ *για κάποιο* $p \in I\!N, \quad p \geq 1$.
- *Ο ελάχιστος αριθμός* p, *ώστε* $f^p(w) = w$, *καλείται* **περίοδος του w**.
- *Το σύνολο* $\{w, f(w), f^2(w), \ldots, f^p(w)\}$ *καλείται* **τροχιά του w**, *περιόδου* p.
- *Για* $p = 1$ *το* w *καλείται ιδιαιτέρως* **σταθερό σημείο** *της* f. *Το περιοδικό σημείο της* f *είναι σταθερό σημείο για την* $g = f^p$.
- *Εάν* w *είναι περιοδικό σημείο της* f, *περιόδου* p, *με* $(f^p)'(w) = \lambda$, *τότε το* w *καλείται:*

$$\begin{array}{rll} \textbf{υπέρ-ελκυστικό} & αν & \lambda = 0 \\ \textbf{ελκυστικό} & αν & 0 \leq |\lambda| < 1 \\ \textbf{αδιάφορο} & αν & |\lambda| = 1 \\ \textbf{απωθητικό} & αν & |\lambda| > 1 \end{array} .$$

Παραδείγματα και Παρατηρήσεις 3.2.1.

1. *Για να γίνει κατανοητός ο ορισμός των ελκυστικών και απωθητικών σημείων θα προσπαθήσουμε να τον δούμε προσεγγιστικά.*

   Έστω $f(w) = w$, *και* $\lambda = f'(w)$. *Τότε* $(f^k)'(w) = \big(f'(w)\big)^k = \lambda^k$ *και*

$$|f(z) - f(w)| \cong |\lambda||z - w|.$$

$$\left|f^k(z) - w\right| = \left|f^k(z) - f^k(w)\right| \cong |\lambda|^k \, |z - w| \quad \text{για} \quad z \cong w.$$

Εάν $|\lambda| < 1$, *τότε οι επαναλήψεις* $f^k(z)$ *προσεγγίζουν το* w *(ελκύονται από το* w *), ενώ αν* $|\lambda| > 1$ *απομακρύνονται από το* w *(απωθούνται από το* w*).*

2. *Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των ελκυστικών περιοδικών σημείων και το πλήθος των αδιάφορων περιοδικών σημείων είναι πεπερασμένα, (βλ. [17], [5]) οπότε το ενδιαφέρον παρουσιάζεται στα απωθητικά περιοδικά σημεία της* f.

Ορισμός 3.2.2.

- *Ορίζουμε* $\mathcal{J}(f)$ *το* **σύνολο Julia** *της* f *το σύνολο*

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\{w \in \mathbb{C} : w \text{ απωθητικό περιοδικό σημείο της } f\}}.$$

- *Το σύνολο* $F(f) = \mathbb{C} \backslash \mathcal{J}(f)$ *καλείται* **σύνολο Fatou ή σύνολο ευστάθειας της** f.

Παράδειγμα 3.2.1.

Εάν $f(z) = z^2$, *τότε* $f^k(z) = z^{2^k}$, $\quad k \in I\!N$. *Περιοδικά σημεία περιόδου* $p \geq 1$, *είναι (το 0 και) οι* $(2^p - 1)$ *− τάξης ρίζες της μονάδας,*

$$z_q = \cos\frac{2\pi q}{2^p - 1} + i\,\sin\frac{2\pi q}{2^p - 1}, \quad q = 0, 1, \ldots, 2^p - 2.$$

Τότε $\left|(f^p)'(z_q)\right| = 2^p > 1$. *Άρα τα σημεία αυτά είναι απωθητικά. Το σύνολο Julia είναι ο μοναδιαίος κύκλος* $|z| = 1$.

Η εύρεση του $\mathcal{J}(f)$ είναι πρακτικά αδύνατη, εκτός τετριμμένων περιπτώσεων. Ακόμη και η τοπολογική μελέτη του είναι δύσκολη. Γι' αυτό θα δώσουμε άλλους ισοδύναμους ορισμούς, οι οποίοι μας βοηθούν να το μελετήσουμε και να το 'απεικονίσουμε' στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. Για την ακρίβεια θα ορίσουμε το σύνολο $\mathcal{J}_0(f)$ το οποίο μελετάται με την θεωρία των Κανονικών οικογενειών και κυρίως του θεωρήματος Montel, θα βρούμε ιδιότητες του και στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{J}_0(f) = \mathcal{J}(f)$. Στην συνέχεια θα δώσουμε μέθοδο κατασκευής Julia συνόλου στον Η/Υ με την βοήθεια ενός τρίτου ορισμού, που βασίζεται στη λεκάνη έλξης σημείου.
Υπενθυμίζουμε ότι $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k φορές).

Ορισμός 3.2.3.

Ορίζουμε $\mathcal{J}_0(f) = \left\{z \in \mathbb{C} : \quad \textit{η} \quad \left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty} \text{ δεν είναι κανονική στο } z\right\}$ *και* $F_o(f) = \mathbb{C} \backslash \mathcal{J}_0(f)$

Παραδείγματα και Παρατηρήσεις 3.2.2.

1. *Εάν* $f(z) = z_o + (z - z_o)^n$, *τότε το* $z_o \notin \mathcal{J}_0(f)$.

   Πράγματι:

   Για $|z - z_o| < \frac{1}{2}$ *η ακολουθία* $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\quad f^k(z) = z_o + (z - z_o)^{n^k}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση* $g(z) = z_o$, *άρα είναι κανονική οικογένεια στο* z_o.

   Γενικότερα : Εάν $f(z) = z_o + c(z - z_o)^n$, *τότε* $z_o \notin \mathcal{J}_0(f)$.

2. *Εάν* $w \in \mathcal{J}_0(f)$*, τότε υπάρχει πάντοτε* $z \neq w$ *ώστε* $f(z) = w$*. Εάν δεν υπήρχε* $z \neq w$ *ώστε* $f(z) - w = 0$*, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής θα ήταν το* w*, άρα* $f(z) - w = c(z-w)^n$*, οπότε το* $w \notin \mathcal{J}_0(f)$ *(από το 1).*

Πρόταση 3.2.1.

Το $\mathcal{J}_0(f)$ *είναι συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε ότι το

$$\begin{aligned} F_o(f) &= \mathbb{C} \backslash \mathcal{J}_0(f) \\ &= \Big\{ z \in \mathbb{C} : \exists \quad \text{ανοικτή περιοχή } V \text{ του } z, \quad \text{ώστε η} \\ &\qquad \{f^k\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{είναι κανονική στο } V \Big\} \end{aligned}$$

είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι:

Εάν $z \in F_o(f)$, τότε $V \subseteq F_o(f)$, όπου V η αντίστοιχη περιοχή του z.

Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι φραγμένο σύνολο. Πράγματι:

Επειδή το f είναι πολυώνυμο, βαθμού τουλάχιστο 2, υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \geq 2 \quad \text{για} \quad |z| \geq r.$$

Άρα $|f(z)| \geq 2|z| \quad$ για $\quad |z| \geq r$. Επομένως

$$|f^k(z)| \geq 2^k r \quad \text{για} \quad |z| \geq r,$$

δηλαδή η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο ∞ στο $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, άρα είναι κανονική στο V. Άρα $V \subseteq F_o(f)$,

$$\mathcal{J}_0(f) \subseteq \mathbb{C} \backslash V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}.$$

Από τα ανωτέρω έχουμε ότι το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, άρα είναι συμπαγές. □

Πρόταση 3.2.2.

Το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι μη κενό σύνολο.

Απόδειξη.

Έστω ότι $\mathcal{J}_0(f) = \varnothing$. Τότε η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι κανονική σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$. Έστω $w \in \mathbb{C}$ ώστε $f(w) = w$ (Θεμ. Θεώρημα Άλγεβρας) και $z \in \mathbb{C}$ ώστε $\lim_{k\to\infty} f^k(z) = \infty$ (βλ. απόδειξη Πρόταση 3.2.1).
Για κάθε σημείο $x \in [z, w]$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ να είναι κανονική στην $S(x, \varepsilon_x)$. Τότε

$$[z, w] \subseteq \bigcup_{x\in[z,w]} S(x, \varepsilon_x).$$

Το $[z, w]$ είναι συμπαγές, άρα

$$[z, w] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\nu} S(x_i, \varepsilon_{x_i}) \quad \text{με} \quad x_1 = z, \quad x_\nu = w \quad \text{και}$$

$$y_i \in S\left(x_i, \varepsilon_{x_i}\right) \bigcap S\left(x_{i+1}, \varepsilon_{x_{i+1}}\right) \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

($[x_i, x_{i+1}]$ συνεκτικό).

Έστω $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ υπακολουθία της $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$. Επειδή $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z) = \infty$ με διαδοχικά βήματα για τα $[x_1, y_1], [y_1, x_2], \ldots, [y_{\nu-1}, x_\nu]$ βρίσκουμε υπακολουθία της $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $\lim\limits_{j\to\infty} f^{k_j}(w) = \infty$, το οποίο είναι άτοπο. ($f^k(w) = w \in \mathbb{C}, \quad k \in I\!N$).

Άρα $\mathcal{J}_o(f) \neq \emptyset$. $\square$

Πρόταση 3.2.3.

Ισχύει $\mathcal{J}_o = f(\mathcal{J}_o) = f^{-1}(\mathcal{J}_o)$.

Ισοδύναμα : $\quad F_o = f(F_o) = f^{-1}(F_o)$.

Απόδειξη.

Ισχύει $f(F_o) \subseteq F_o$.

Πράγματι: αν $z_o \in F_o$ τότε η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι κανονική στο z_o οπότε είναι χορδικά ισοσυνεχής στο z_o. (Θεώρ. 3.1.5). Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\chi\left(f^{k+1}(z), f^{k+1}(z_o)\right) < \varepsilon \quad \text{για} \quad z \in S(z_o, \delta) \quad \text{και} \quad k \in I\!N.$$

Άρα $\chi\left(f^k(w), f^k(f(z_o))\right) < \varepsilon$ για $w \in f\left(S(z_o, \delta)\right), \quad k \in I\!N$ και το σύνολο $V = f\left(S(z_o, \delta)\right)$ είναι ανοικτή περιοχή του $f(z_o)$. (Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης). Άρα η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι χορδικά ισοσυνεχής στο $f(z_o)$, άρα είναι κανονική στο $f(z_o)$, δηλαδή $f(z_o) \in F_o$. Άρα

$$f(F_o) \subseteq F_o.$$

Ανάλογα, έχουμε και $f^{-1}(F_o) \subseteq F_o$.

Από τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 3.2.4.

$$\mathcal{J}_o(f^p) = \mathcal{J}_0(f), \quad p \in I\!N.$$

Ισοδύναμα : $\quad F_o(f^p) = F_o(f), \quad p \in I\!N.$

Απόδειξη.

Έστω $p \in I\!N$. Εάν η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι κανονική στο z_o, τότε και η υπακολουθία $\{f^{pk}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι κανονική στο z_o, δηλαδή $F_o(f) \subseteq F_o(f^p)$.

Έστω $z_o \in F_o(f^p)$. Τότε η $\{f^{pk} \circ f^r\}_{k=1}^{\infty}$ θα είναι κανονική στο $V = S(z_o, \delta)$ για $0 \leq r \leq p-1$ (βλ. Παρατήρηση 3.1.1). Έστω $\{f^{k_i}\}_{k=1}^{\infty}$ υπακολουθία της $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$. Τότε αυτή περιέχει $\{f^{pk_i'+r_o}\}_{i=1}^{\infty}$ υπακολουθία της κανονικής $\{f^{pk} \circ f^{r_o}\}_{k=1}^{\infty}$ για κάποιο r_o. Άρα η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι κανονική στο z_o. $\square$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μέθοδο εύρεσης του Julia συνόλου εφ' όσον γνωρίζουμε ένα και μόνο σημείο του.

Θεώρημα 3.2.1.

$$\mathcal{J}_0(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{J}_0(f).$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει με την βοήθεια του θ.Montel και των ήδη γνωστών ιδιοτήτων του $\mathcal{J}_0(f)$.

Ισχυρισμός 1: Εάν $U \cap \mathcal{J}_0(f) \neq \varnothing$, τότε

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \quad ή \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \setminus \{w_o\}$$

για κάποιο $w_o \in \mathbb{C}$.

Εάν $w \in \mathcal{J}_0(f)$, τότε η $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι κανονική στο w, άρα η $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι κανονική στο U. Από το θεώρημα του Montel έχουμε το ζητούμενο.

Ισχυρισμός 2: Το $w_o \notin \mathcal{J}_0(f)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\mathbb{C}\backslash\{w_o\}) &= f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)\right) \\ &\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{k+1}(U) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \\ &= \mathbb{C}\backslash\{w_o\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε $z \neq w_o$ έχουμε $f(z) \neq w_o$. Άρα η μοναδική λύση της $f(z) = w_o$ είναι η w_o. Επομένως

$$f(z) - w_o = c(z - w_o)^n, \quad (c \in \mathbb{C}, \quad \text{σταθερά}), \ (f \text{ πολ. βαθμού } n).$$

Τότε $w_o \notin \mathcal{J}_0(f)$ (Παραδείγματα και Παρατηρήσεις 3.2.2).

Ισχυρισμός 3:

Εάν U είναι ανοικτό σύνολο με $U \cap \mathcal{J}_0(f) \neq \varnothing$, τότε :

i. Εάν $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C}\backslash\{w_o\}$ και $z \neq w_o$, θα έχουμε $U \cap f^{-k}(z) \neq \varnothing$ για άπειρες τιμές $k \in I\!N$.

ii. Εάν $\mathbb{C} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ και $z \in \mathbb{C}$, θα έχουμε $U \cap f^{-k}(z) \neq \varnothing$ για άπειρες τιμές $k \in I\!N$.

Πράγματι:

i. Έστω $z \in \mathbb{C}\backslash\{w_o\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$. Υπάρχει $k_1 \in I\!N$, ώστε $z \in f^{k_1}(U)$ άρα $U \cap f^{-k_1}(z) \neq \varnothing$.

Επειδή $\mathcal{J}_o(f^{k_1}) = \mathcal{J}_0(f)$ και $U \cap \mathcal{J}_0(f) \neq \varnothing$, έχουμε $\mathcal{J}_o(f^{k_1}) \cap U \neq \varnothing$, άρα

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{k_1+k}(U) = \mathbb{C}\backslash\{w_o\} \quad (\text{Ισχ. 1}) \text{ και}$$

$$z \in f^{k_2}(U) \quad \text{για κάποιο } k_2 > k_1.$$

Άρα $U \cap f^{(-k_2)}(z) \neq \varnothing$. Επαγωγικά,

$$U \cap f^{-k_\nu}(z) \neq \varnothing, \quad \nu \in I\!N, \quad \{k_\nu : \nu \in I\!N\} \quad \text{άπειρο σύνολο.}$$

ii. Ανάλογα.

Βάσει των ανωτέρω θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{J}_0(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$, $z \in \mathcal{J}_0(f)$.

Έστω $z \in \mathcal{J}_0(f)$. Τότε

$$f^{-k}(z) \subseteq f^{-k}(\mathcal{J}_0(f)) = \mathcal{J}_0(f), \quad k \in I\!N. \quad (\text{Πρόταση 3.2.3}).$$

Άρα

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subseteq \overline{\mathcal{J}_0(f)} = \mathcal{J}_0(f) \qquad (\mathcal{J}_0(f) \text{ κλειστό}).$$

Έστω U ανοικτή περιοχή του $z \in \mathcal{J}_0(f)$.

Τότε $z \neq w_o$ ($w_o \notin \mathcal{J}_0(f)$, Ισχ.2), και $U \cap f^{-k_o}(z) \neq \varnothing$ για κάποιο $k_o \in I\!N$ (Ισχ.3). Άρα

$$z \in \overline{f^{-k_o}(z)} \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}.$$

Επομένως $\mathcal{J}_0(f) \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$. □

Πρόταση 3.2.5.

Το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι

i. Σύνολο με κενό εσωτερικό.

ii. Τέλειο σύνολο, δηλαδή, $\mathcal{J}_o(f) = \mathcal{J}_o'(f)$.

iii. Υπεραριθμήσιμο σύνολο.

iv. Το σύνολο $K = \{w \in \mathcal{J}_0(f) : \exists z \neq w$ με $f(z) = w$ και $f'(z) \neq 0\}$ είναι πυκνό στο $\mathcal{J}_0(f)$.

Απόδειξη.

i. Έστω $w \in \mathcal{J}_0(f)$ και $S(w, \varepsilon) \subseteq \mathcal{J}_0(f)$. Τότε (Ισχ.1 θεωρ. 3.2.1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} \backslash \{w_o\} &\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(S(w,\varepsilon)) \\
&\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(\mathcal{J}_0(f)) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}_0(f) = \mathcal{J}_0(f).
\end{aligned}$$

Άτοπο, διότι το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι φραγμένο σύνολο.

Άρα το $\mathcal{J}_0(f)$ έχει κενό εσωτερικό.

ii. Έστω $z_o \in \mathcal{J}_0(f)$ και U περιοχή του z_o. Θα αποδείξουμε ότι $(U \setminus \{z_o\}) \cap \mathcal{J}_0(f) \neq \varnothing$, διακρίνοντας περιπτώσεις για το z_o.

(α) Έστω $f(z_o) = z_o$. Επειδή $z_o \in \mathcal{J}_0(f)$ υπάρχει $w \neq z_o$ ώστε $f(w) = z_o$ (Παραδείγματα και Παρατηρήσεις 3.2.2). Τότε

$$w \in f^{-1}(\mathcal{J}_0(f)) = \mathcal{J}_0(f), \quad \text{άρα}$$

$$f^{-k}(w) \cap U \neq \varnothing \quad \text{για κάποιο } k \in I\!N$$

(Ισχ.3 θεώρημα 3.2.1). Εάν $z_o \in f^{-k}(w)$, τότε $w = f^k(z_o) = z_o$, άτοπο. Άρα

$$f^{-k}(w) \cap (U \setminus \{z_o\}) \neq \varnothing.$$

Επειδή $f^{-k}(w) \subseteq \mathcal{J}_0(f)$ έχουμε και $\mathcal{J}_0(f) \cap (U \setminus \{z_o\}) \neq \varnothing$.

(β) Έστω $f^p(z_o) = z_o$, για κάποιο $p \geq 2$.

Επειδή $\mathcal{J}_o(f^p) = \mathcal{J}_o(f)$, η περίπτωση αυτή ανάγεται στην (α).

(γ) Έστω $f^p(z_o) \neq z_o, \quad p \in I\!N$.

Έχουμε $U \cap f^{-k}(z_o) \neq \varnothing$, για κάποιο $k \in I\!N$, και $f^p(z_o) \neq z_o, \quad p \in I\!N$ άρα

$$(U \setminus \{z_o\}) \cap f^{-k}(z_o) \neq \varnothing.$$

Επομένως $(U \setminus \{z_o\}) \cap \mathcal{J}_0(f) \neq \varnothing$.

Αποδείξαμε ότι το κλειστό σύνολο $\mathcal{J}_0(f) \subseteq \mathcal{J}_o'(f)$, άρα είναι τέλειο.

iii. Κάθε τέλειο σύνολο στο $\mathbb{C}$ είναι υπεραριθμήσιμο. (βλ. [2])

iv. Έχουμε

$$K = \{w \in \mathcal{J}_0(f) : \exists z \neq w \quad \text{με} \quad f(z) = w \quad \text{και} \quad f'(z) \neq 0\} \subseteq \mathcal{J}_0(f)$$

άρα $\overline{K} \subseteq \mathcal{J}_0(f)$.

Επειδή το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι τέλειο σύνολο, το σύνολο $\mathcal{J}_0(f) \backslash \overline{K}$ θα είναι κενό ή άπειρο σύνολο. Όμως

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(f) \backslash \overline{K} &\subseteq \mathcal{J}_0(f) \backslash K \\ &= \{w \in \mathcal{J}_0(f) : \exists z \neq w \quad \text{με} \quad f(z) = w \quad \text{και} \quad f'(z) = 0\} \\ &\subseteq \{f(z_1), \ldots, f(z_{n-1}), \quad \text{όπου} \quad f'(z_i) = 0, \;\; i = 1, \ldots, n-1\}. \end{aligned}$$

Άρα $\quad \mathcal{J}_0(f) \backslash \overline{K} = \varnothing$. Τελικά $\overline{K} = \mathcal{J}_0(f)$.

□

Θεώρημα 3.2.2.

Ισχύει $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}_0(f)$.

Το σύνολο Julia $\mathcal{J}(f)$ του πολυωνύμου f είναι σύνολο μη κενό, συμπαγές, τέλειο, με κενό εσωτερικό και

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}, \qquad z \in \mathcal{J}(f).$$

Απόδειξη.

Έστω w απωθητικό περιοδικό σημείο της f, περιόδου $p \geq 1$. Τότε το w είναι απωθητικό σταθερό σημείο για την $g = f^p$.

Εάν $w \notin \mathcal{J}_0(f) = \mathcal{J}_o(g)$, τότε η $\{g^k\}_{k=1}^{\infty}$ θα ήταν κανονική στο w. Άρα υπάρχει υπακολουθία της $\{g^{k_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ ώστε

$$g^{k_\nu} \rightrightarrows g_o, \quad \text{ή} \quad g^{k_\nu} \rightrightarrows \infty$$

σε μια συμπαγή περιοχή $\overline{S(w,\varepsilon)} = V$ του w. Επειδή $g^k(w) = w,\ k \in I\!N$, έχουμε $g_o(z) \in \mathbb{C},\ z \in V$. Τότε (Θεώρημα Weierstrass 3.1.4)

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(g^{k_\nu}\right)'(w) = g_o'(w) \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Όμως $|\left(g^{k_\nu}\right)'(w)| = |g'(w)|^{k_\nu}$ με $|g'(w)| > 1$, άρα

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(g^{k_\nu}\right)'(w) = \infty \qquad (2)$$

Οι σχέσεις $(1), (2)$ αντιφάσκουν.

Άρα $w \in \mathcal{J}_o(g) = \mathcal{J}_o(f^p) = \mathcal{J}_0(f)$, και επειδή το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι κλειστό, έχουμε $\mathcal{J}(f) \subseteq \mathcal{J}_0(f)$.

Για να αποδείξουμε ότι $\mathcal{J}_0(f) \subseteq \mathcal{J}(f)$, θα χρησιμοποιήσουμε το σύνολο

$$K = \left\{w \in \mathcal{J}_0(f) : \exists z \neq w \quad \text{με} \quad f(z) = w \quad \text{και} \quad f'(z) \neq 0\right\}$$

(Πρόταση 3.2.5(iv)). Έστω $w \in K$ και

$$\begin{aligned} w &\notin \left\{z \in \mathcal{J}_0(f) : z \quad \text{περιοδικό αδιάφορο ή ελκυστικό σημείο}\right\} \\ &= \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \quad (\text{Παραδείγματα και Παρατηρήσεις 3.2.1}) \end{aligned}$$

και U πειριοχή του w. Θεωρούμε $z_o \neq w$ με $f(z_o) = w$ και $f'(z_o) \neq 0$, και $V_1 \subseteq U$ περιοχή του w με $w_1, w_2, \ldots, w_n \notin V_1$. Επειδή $f'(z_o) \neq 0$, υπάρχει

$V_2 \subseteq V_1$ περιοχή του w ώστε $f^{-1}|_{V_2}$ να είναι αναλυτική συνάρτηση (θεωρ. Αντισ. Συνάρτησης 3.1.2).

Επειδή $z_o \neq w = f(z_o)$ και η f^{-1} είναι συνεχής στο w, υπάρχει περιοχή $V \subseteq V_2$ του w, ώστε $f^{-1}(z) \neq z$ για κάθε $z \in V$. Ορίζεται η οικογένεια

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}, \qquad z \in V.$$

Επειδή $w \in \mathcal{J}_0(f)$ για κάθε $U \subseteq V$ περιοχή του w, η $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι κανονική στο w. Από το θ. Montel υπάρχει $z_1 \in U$, ώστε

$$h_k(z_1) = 0 \quad \text{ή} \quad h_k(z_1) = 1 \quad \text{για κάποιο} \quad k \in I\!N.$$

Τότε $f^k(z_1) = z_1 \quad$ ή $\quad f^{k+1}(z_1) = z_1$.

Άρα η περιοχή U του w περιέχει περιοδικό σημείο της f.

Επειδή $w_1, w_2, \ldots, w_n \notin V_1$ το σημείο z_1 είναι περιοδικό απωθητικό σημείο, δηλαδή για κάθε $w \in K, \quad w \neq w_1, w_2, \ldots, w_n$, έχουμε $w \in \overline{\mathcal{J}(f)} = \mathcal{J}(f)$.

Άρα $K \backslash \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subseteq \mathcal{J}(f)$.

Επειδή $\overline{K} = \mathcal{J}_0(f)$ και το $\mathcal{J}_0(f)$ είναι τέλειο θα έχουμε

$$\mathcal{J}_0(f) = \overline{K \backslash \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}} \subseteq \mathcal{J}(f).$$

□

Ορισμός 3.2.4.

i. *Έστω w ελκυστικό σταθερό σημείο της f (εφ' όσον υπάρχει).* **Λεκάνη έλξης του w** *είναι το σύνολο*

$$A(w) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{k \to \infty} f^k(z) = w \right\}.$$

ii. Ορίζουμε **Λεκάνη έλξης του** ∞ *να είναι το σύνολο*

$$A(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{k \to \infty} f^k(z) = \infty \right\}.$$

Παρατήρηση 3.2.1.

- *Η λεκάνη έλξης* $A(\infty)$*, είναι γνήσιο υποσύνολο του* $\mathbb{C}$*, μη κενό και μη φραγμένο. (βλ. Πρόταση 3.2.1).*

- *Σταθερό, ελκυστικό σημείο, δεν υπάρχει πάντοτε ακόμη και για πολυώνυμα δευτέρου βαθμού.*

  Επί παραδείγματι, εάν $f(z) = z - z^2$*, τότε το* $z_o = 0$ *είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της* f*, αλλά δεν είναι ελκυστικό.* $(f'(0) = 1)$.

- *Στον Η/Υ συνήθως απεικονίζουμε Julia σύνολα πολυωνύμων* $f_c(z) = z^2 + c$*, για κάποιο* $c \in \mathbb{C}$.

  Θα βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των $c \in \mathbb{C}$*, για τα οποία η* f_c *έχει ένα τουλάχιστον σταθερό, ελκυστικό σημείο.*

  Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*, είναι τα σταθερά σημεία της* $f_c(z) = z^2 + c$*, (δηλαδή είναι λύσεις της* $z^2 - z + c = 0$*), τότε* $\alpha + \beta = 1 \quad \textit{και} \quad \alpha \cdot \beta = c$*. Άρα* $f_c'(\alpha) + f_c'(\beta) = 2$*. Επομένως το πολύ ένα από τα* α, β *είναι ελκυστικό. Για να είναι το* α *ελκυστικό, θα πρέπει* $2|\alpha| = |f'(\alpha)| < 1$.

  Αλλά $c = \alpha(1 - \alpha)$*, άρα το ζητούμενο σύνολο των* c *είναι το*

$$\left\{ c \in \mathbb{C} : c = \alpha - \alpha^2, \quad \mu\varepsilon \quad |\alpha| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι το εσωτερικό του καρδιοειδούς με εξίσωση

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{it}\big(1 - \frac{1}{2}e^{it}\big), \qquad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.2.2.

- *Εάν το σύνολο* $A(w)$ *ορίζεται και* $z \in \mathbb{C}$, *ώστε* $f^p(z) \in A(w)$ *για κάποιο* $p \in I\!N$, *τότε* $z \in A(w)$.

  Πράγματι:

  Εφ' όσον $f^p(z) \in A(w)$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f^{pk}(z) = w,$ *άρα*

  $$\lim_{k\to\infty} f^{pk+r}(z) = f^r(w) = w \quad \text{για} \quad r = 0, 1, \ldots p-1.$$

  Τότε και $\quad \lim\limits_{n\to\infty} f^n(z) = w.$

- *Εάν* $f^p(z) \in A(\infty)$ *για κάποιο* $p \in I\!N$, *τότε* $z \in A(\infty)$.

  Πράγματι:

  Εάν όχι, $\quad \lim\limits_{i\to\infty} f^{k_i}(z) = w_1 \in \mathbb{C}$ *και*

  $$f^p(w_1) = \lim_{i\to\infty} f^{pk_i}(z) = \lim_{i\to\infty} \big(f^p\big)^{k_i}(z) = +\infty.$$

  Άτοπο.

Πρόταση 3.2.6.

Οι λεκάνες έλξης $A(w)$, $A(\infty)$ *είναι ανοικτά σύνολα.*

Απόδειξη.

- Επειδή $|f'(w)| < 1$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε

$$|f'(z)| \leq s, \quad \text{για κάποιο } 0 < s < 1 \text{ και } \quad z \in \overline{S(w,\delta)}.$$

Τότε

$$\big|f(z_1) - f(z_2)\big| \leq s|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \overline{S(w,\delta)}$$

Δηλαδή, η f είναι συνάρτηση συστολής στο $\overline{S(w,\delta)}$, άρα

$$\lim_{k\to\infty} f^k(z) = w, \quad \text{για} \quad z \in \overline{S(w,\delta)}.$$

Άρα $S(w,\delta) \subseteq A(w)$.

Εάν $z \in A(w)$ τότε, $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z) = w$. Άρα $f^{k_o}(z) \in S(w,\delta)$ για κάποιο $k_o \in I\!N$. Τότε

$$z \in f^{-k_o}\big(S(w,\delta)\big) \subseteq f^{-k_o}\big(A(w)\big) \subseteq A(w) \quad \text{(Παρατήρηση 3.2.2)}$$

με $f^{-k_o}\big(S(w,\delta)\big)$ ανοικτό σύνολο.

Άρα το $A(w)$ είναι ανοικτό σύνολο.

- $\mathbb{C}\backslash\overline{S(0,r)} \subseteq A(\infty)$ (βλ. απόδειξη Προτ. 3.2.1), και ανάλογα αποδεικνύουμε ότι το $A(\infty)$ είναι ανοικτό σύνολο. $\square$

Θεώρημα 3.2.3.

Ισχύει $\mathcal{J}(f) = \partial A(w) = \partial A(\infty)$, *όπου* $\partial A(w)$, $\partial A(\infty)$ *τα σύνορα των συνόλων* $A(w)$, $A(\infty)$.

Απόδειξη.

α) Έστω $z \in \mathcal{J}(f)$. Τότε $f^k(z) \in f^k(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$.

Εάν $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z) = w$, τότε

$$w \in \mathcal{J}(f) = \overline{\{w' : \quad \text{περιοδικό, απωθητικό σημείο της } f\}}.$$

Άτοπο, διότι w είναι περιοδικό, ελκυστικό σημείο.

Άρα $z \notin A(w)$, $z \in \mathbb{C}\backslash A(w) = \overline{\mathbb{C}\backslash A(w)}$ ($A(w)$ ανοικτό σύνολο) (1).

Έστω U περιοχή του z. Τότε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) = \mathbb{C} \quad \text{ή} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) = \mathbb{C}\backslash\{w_o\}.$$

Άρα υπάρχει $p \geq 1$, ώστε $f^p(U) \cap A(w) \neq \varnothing$. Έστω $z' \in U$ με $f^p(z') \in A(w)$, τότε $z' \in A(w)$ (Παρατήρηση 3.2.2). Δηλαδή $z' \in U \cap A(w)$. Άρα $z \in \overline{A(w)}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\mathcal{J}(f) \subseteq \partial A(w)$.

Έστω ότι υπάρχει $z_o \in \partial A(w)$ με $z_o \notin \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}_0(f)$. Τότε υπάρχει $S(z_o, \delta)$ και υπακολουθία $\{f^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ της $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$, που συγκλίνει ομοιόμορφα σε πεπερασμένη συνάρτηση g ή στο ∞, στα συμπαγή υποσύνολα του $S(z_o, \delta)$. Επειδή

$$\lim_{i\to\infty} f^{k_i}(z) = w, \quad \text{για} \quad z \in S(z_o, \delta) \cap A(w)$$

θα έχουμε $g(z) = w$ για $z \in S(z_o, \delta) \cap A(w)$. Επειδή η g είναι αναλυτική θα έχουμε

$$\lim_{i\to\infty} f^{k_i}(z_o) = g(z_o) = w$$

(Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης).

Άρα $z_o \in A(w)$, με $A(w)$ ανοικτό. Άτοπο, διότι $z_o \in \partial A(w)$.

Άρα $\partial A(w) \subseteq \mathcal{J}(f)$.

β) Έστω $z \in \mathcal{J}(f)$ και $\mathcal{J}(f) \subseteq S(0,r)$ (Το $\mathcal{J}(f)$ είναι συμπαγές).

Εάν $z \in A(\infty)$ θα έχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(z) = \infty$. Τότε $|f^k(z)| > r$ για $k \geq n_o$ άρα $f^{n_o}(z) \notin \mathcal{J}(f)$, $z \notin f^{-n_o}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$. Άτοπο.

Άρα $z \in \mathbb{C}\backslash A(\infty)$.

Έστω U περιοχή του z και $z' \in U$ με $f^p(z') \in A(\infty)$ για κάποιο $p \in \mathbb{N}$. Τότε $z' \in A(\infty)$ άρα $U \cap A(\infty) \neq \varnothing$. Άρα $z \in \overline{A(\infty)}$. Επομένως $\mathcal{J}(f) \subseteq \partial A(\infty)$.

Η απόδειξη $\partial A(\infty) \subseteq \mathcal{J}(f)$ είναι ανάλογη με την α).

$\square$

Πόρισμα 3.2.1.

$\mathbb{C} = A(\infty) \cup A(w) \cup \mathcal{J}(f)$, όπου $A(\infty), A(w), \mathcal{J}(f)$ είναι σύνολα ξένα ανά δύο.

Απόδειξη.

Ισχύει $\mathbb{C} = A(\infty) \cup \left(\mathbb{C}\backslash A(\infty)\right)^o \cup \mathcal{J}(f)$. Επειδή $\partial A(w) = \mathcal{J}_o = \partial A(\infty)$ έχουμε ότι $\left(\mathbb{C}\backslash A(\infty)\right)^o = A(w)$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.3.

Επειδή $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p), \quad p \in I\!N$*, ο ορισμός της λεκάνης έλξης μπορεί να γενικευτεί για* w *περιοδικό, ελκυστικό σημείο της* f*.*
Εάν $A(u) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim\limits_{k\to\infty} f^{pk}(z) = u \right\}$*, τότε το* $A(u)$ *είναι ανοικτό σύνολο και* $\partial A(u) \subseteq \mathcal{J}(f)$*, όπου* u *ελκυστικό σημείο, περιοδικό σημείο περιόδου* p*.*
Θα βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των $c \in \mathbb{C}$ *για τα οποία η* $f_c(z) = z^2 + c$*, έχει ελκυστική τροχιά* $\{u, v\}$*, με* u, v *ελκυστικά περιοδικά σημεία της* f_c^2*, ώστε*

$$f_c(u) = v, \quad f_c(v) = u \quad \textit{και} \quad u \neq v.$$

Η f_c *έχει δύο σταθερά σημεία* α, β*, τα οποία είναι σταθερά σημεία και για την* f_c^2*. Άρα*

$$\begin{aligned} f_c^2(z) - z &= (z^2 + c)^2 + c - z \\ &= (z^2 - z + c)(z^2 + z + 1 + c) \\ &= (z - \alpha)(z - \beta)(z - u)(z - v) \end{aligned}$$

Για να είναι τα u, v *ελκυστικά σημεία πρέπει* $\big|(f_c^2)'(u)\big|, \big|(f_c^2)'(v)\big| < 1$*. Όμως*

$$\begin{aligned} \big|(f_c^2)'(u)\big| &= \big|f_c'\big(f_c(u)\big) \cdot f_c'(u)\big| \\ &= \big|f_c'(v) \cdot f_c'(u)\big| \\ &= \big|4uv\big| = 4(1 + c) \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο σύνολο των c *είναι το*

$$\left\{ c \in \mathbb{C} : |1 + c| < \frac{1}{4} \right\}$$

που είναι κύκλος κέντρου -1 *και ακτίνας* $\frac{1}{4}$.

3.3 Σύνολο Mandelbrot

Το σύνολο Mandelbrot, ορίζεται για το σύνολο των Julia συνόλων πολυωνύμων δευτέρου βαθμού. (βλ. [8]). Κάθε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού μπορεί να γραφεί ως $f_c(z) = z^2 + c$ με κατάλληλο μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει τοπολογικά αναλλοίωτο το σύνολο Julia. Το σύνολο Mandelbrot σχετίζεται με την τοπολογική μορφή των συνόλων Julia και με τον τρόπο αυτό το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στα σύνολα Julia πολυωνύμων δευτέρου βαθμου με $f_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}$.

Ορισμός 3.3.1.

Έστω $\mathcal{J}(f_c) = \mathcal{J}_c$ *όπου* $f_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}$. **Σύνολο Mandelbrot** *είναι το*

$$M = \Big\{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}(f_c) \quad \textit{είναι συνεκτικό σύνολο}\Big\}.$$

Για να δώσουμε ισοδύναμους ορισμούς του συνόλου Mandelbrot, μας χρειάζονται ορισμένοι ορισμοί και αποτελέσματα από την Θεωρία Καμπυλών.

- Για συντομία μια παραγωγίσιμη, απλή, κλειστή καμπύλη Γ

$$\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \quad \big(\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2), \quad t_1, t_2 \in (\alpha, \beta), \quad \vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)\big)$$

θα αναφέρεται ως **λ-καμπύλη**.

- Μια παραγωγίσιμη, κλειστή καμπύλη ($\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$) με

$$\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2), \qquad t \in (\alpha, \beta) \backslash \{\gamma, \delta\},$$

$(\gamma, \delta \in (\alpha, \beta), \gamma \neq \delta)$ και $\vec{r}(\gamma) = \vec{r}(\delta)$ αναφέρεται ως **λημνίσκος** (ή **8-καμπύλη**).

- Μια απλή, κλειστή καμπύλη Γ χωρίζει το $\mathbb{C}$ σε δύο σύνολα, το ένα από τα οποία είναι φραγμένο και καλείται **εσωτερικό της καμπύλης, εσ$\boldsymbol{\Gamma}$**, και το άλλο μη φραγμένο και καλείται **εξωτερικό της καμπύλης, εξ$\boldsymbol{\Gamma}$**.

Ισχύουν τα εξής για λ-καμπύλη Γ του $\mathbb{C}$.

1. Εάν $f_c(z) = z^2 + c, \quad z \in \mathbb{C}$ και c είναι στο εσωτερικό μιας λ-καμπύλης Γ τότε η $f_c^{-1}(\Gamma)$ είναι μια λ-καμπύλη και

$$f_c^{-1}(\varepsilon\sigma\Gamma) = \varepsilon\sigma f_c^{-1}(\Gamma).$$

   Εάν $z \in f_c^{-1}(\Gamma)$, τότε $z \neq 0, f_c'(z) \neq 0$, οπότε τοπικά η $f_c|_{f_c^{-1}(\Gamma)}$ είναι "1-1".

2. Εάν $c \in \Gamma$ τότε η $f_c^{-1}(\Gamma)$ είναι ένας λημνίσκος αποτελούμενος από δύο κλειστές καμπύλες E_1, E_2 με

$$f_c^{-1}(\varepsilon\sigma\Gamma) = \varepsilon\sigma E_1 \cup \varepsilon\sigma E_2 \quad \text{και} \quad f(\varepsilon\sigma E_1) = f(\varepsilon\sigma E_2) = \varepsilon\sigma\Gamma.$$

   Εάν $0 \in f_c^{-1}(\Gamma)$, η f δεν μπορεί να γίνει "1-1" σε περιοχή του 0.

- Το σύνολο $K \subseteq \mathbb{C}$ καλείται **απλά συνεκτικό**, εάν το K και το $\mathbb{C} \backslash K$ είναι συνεκτικά σύνολα.

- Ένα απλά συνεκτικό σύνολο, έχει συνεκτικό σύνορο.

Αποδείξεις των ανωτέρω υπάρχουν σε βιβλία Θεωρίας Καμπυλών, καθώς και στο [8].

Παρατήρηση 3.3.1.

Κάθε λ-καμπύλη "ταυτίζεται" κατ' ουσίαν με την περιφέρεια κύκλου. Θα δώσουμε παραδείγματα ώστε τα 1) και 2) να γίνουν πλέον κατανοητά.

1. *Έστω* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \quad r > 1$ *και* $c = 0 \in \varepsilon\sigma\Gamma, \quad f_o(z) = z^2$. *Τότε*

$$f_o^{-1}(\Gamma) = \{w \in \mathbb{C} : |w^2| = r\} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r^{\frac{1}{2}}\}.$$

Άρα $f_o^{-k}(\Gamma) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r^{\frac{1}{2^k}}\}, \quad k \in I\!N$ *και*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\varepsilon\sigma f_o^{-k}(\Gamma)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} = K \quad \text{και} \quad \partial K = \mathcal{J}(f_o).$$

2. *Έστω* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *και* $c = 1 \in \Gamma, \quad f_1(z) = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(\Gamma) &= \{w \in \mathbb{C} : |w^2 + 1| = 1\} \\ &= \Big\{ w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) : \rho^2 = -2\cos 2\theta \quad \text{όπου} \\ &\qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \Big\} \\ &= E_1 \cup E_2. \end{aligned}$$

Η $f_1^{-1}(\Gamma)$ *είναι λημνίσκος με κέντρο συμμετρίας το 0 και* $f(\varepsilon\sigma E_1) = f(\varepsilon\sigma E_2) = \varepsilon\sigma\Gamma$.

Θεώρημα 3.3.1.

Για το σύνολο Mandelbrot M έχουμε:

i. $M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \quad \eta \quad \left\{f_c^k(0)\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \textit{είναι φραγμένη ακολουθία} \right\}$.

ii. $\mathbb{C} \backslash M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \lim\limits_{k\to\infty} f_c^k(0) = \infty \right\}$.

iii. $M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \left|f_c^k(0)\right| \leq 2, k \in I\!N \right\}$.

Απόδειξη.

i. Έστω ότι η $\left\{f_c^k(0)\right\}_{k=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη ακολουθία. Θεωρούμε $r > 0$, ώστε $|f_c^k(0)| < r, \quad k \in I\!N, \quad \lim\limits_{k\to\infty} f_c^k(z) = \infty$ για $|z| \geq r$ και $f_c^{-1}\big(\overline{S(0,r)}\big) \subseteq S(0,r)$.

Έστω Γ το σύνορο της $S(0,r)$. Επειδή $c = f_c(0)$, το $c \in$ εσΓ, άρα η $f_c^{-1}(\Gamma)$ είναι μια λ-καμπύλη και $f_c^{-1}(\Gamma) \subseteq$ εσΓ. Επειδή $f_c(c) = f_c^2(0) \in$ εσΓ, θα έχουμε $c \in$ εσ$f_c^{-1}(\Gamma)$. Άρα η $f_c^{-2}(\Gamma)$ είναι λ-καμπύλη και

$$f_c^{-2}(\Gamma) \subseteq \text{εσ} f_c^{-2}(\Gamma) = f_c^{-1}\big(\text{εσ} f_c^{-1}\Gamma\big) \subseteq f_c^{-1}(\text{εσ}\Gamma) = \text{εσ} f_c^{-1}(\Gamma).$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε λ-καμπύλες $\left\{f_c^{-k}\big(\Gamma\big)\right\}_{k\in I\!N}$ ώστε

$$f_c^{-k}\big(\Gamma\big) \subseteq \text{εσ} f_c^{-(k-1)}(\Gamma) \quad \text{και} \quad c \in \text{εσ} f_c^{-k}\Gamma, \quad k \in I\!N.$$

Έστω $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\varepsilon\sigma f_c^{-k}(\Gamma)}$.

Εάν $w \in \mathbb{C}\backslash K$ τότε $w \in \varepsilon\xi f_c^{-k_o}(\Gamma)$ για κάποιο $k_o \in I\!N$. Άρα υπάρχει $z \in \varepsilon\xi\Gamma$, ώστε $f_c^{k_o}(z) = w$. Τότε $|z| \geq r$, άρα $\lim\limits_{k\to\infty} f_c^{k+k_o}(z) = \infty$. Άρα $w \in A(\infty)$. Επομένως $\mathbb{C}\backslash K \subseteq A(\infty)$.

Εάν $z \in A(\infty)$, τότε $\left|f_c^{k_o}(z)\right| > r$ για κάποιο $k_o \in I\!N$, άρα $z \notin \varepsilon\sigma f_c^{-k_o}(\Gamma)$, δηλαδή $z \in \mathbb{C}\backslash K$.

Τελικά $\mathbb{C}\backslash K = A(\infty)$. Όμως

$$\mathcal{J}(f_c) = \partial A(\infty) = \partial(\mathbb{C}\backslash K) = \partial K \qquad (\Theta\varepsilon\omega\rho.\ 3.2.3).$$

Επειδή τα $\overline{\varepsilon\sigma} f_c^{-k}(\Gamma)$ είναι απλά συνεκτικά σύνολα, $k \in I\!N$ (το σύνορο τους είναι η λ-καμπύλη $f_c^{-k}(\Gamma)$), το K είναι απλά συνεκτικο σύνολο, άρα το σύνορο του $\mathcal{J}(f_c)$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Έστω ότι η $\left\{f_c^k(0)\right\}_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη ακολουθία. Εάν $|f_c(z)| \geq 2|z|$ για $|z| \geq r_1$, τότε υπάρχει $k_o \in I\!N$ ώστε $\left|f_c^{k_o}(0)\right| \geq r_1$. Επομένως $\left|f_c^{n+k_o}(0)\right| \geq 2^n r_1$, από όπου έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^n(0) = \infty$.

Θεωρούμε $r > 0$, ώστε $\lim\limits_{k\to\infty} f_c^k(z) = +\infty$ για $|z| > r$ και

$$f_c^{-1}\left(\overline{S(0,r)}\right) \subseteq S(0,r) \quad \text{και} \quad |f_c^p(0)| = r \quad \text{για κάποιο } p \in I\!N.$$

Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} |f_c^k(0)| &> r \quad \text{για } k > p \text{ και} \\ |f_c^k(0)| &< r \quad \text{για } k = 1, 2, \ldots, p-1 \end{aligned}$$

Έστω Γ το σύνορο της $S(0,r)$. Επειδή $c \in$ εσΓ κατασκευάζουμε λ-καμπύλες, $f_c^{-1}(\Gamma), \ldots, f_c^{-(p-1)}(\Gamma)$ (όπως για την περίπτωση της φραγμένης ακολουθίας). Επειδή $c \in f_c^{-(p-1)}(\Gamma) \quad (f_c^p(0) = f_c^{p-1}(c))$, η καμπύλη $f_c^{-p}(\Gamma)$ είναι ένας λημνίσκος, αποτελούμενος από τις κλειστές καμπύλες E_1, E_2.

Το σύνολο $\mathcal{J}_c \subseteq S(0,r) =$ εσΓ, άρα

$$\mathcal{J}_c = f_c^{-p}(\mathcal{J}_c) \subseteq \text{εσ} f_c^{-p}(\Gamma) = \text{εσ}E_1 \cup \text{εσ}E_2 \subseteq \text{εσ} f_c^{-(p-1)}(\Gamma).$$

Εξ'άλλου

$$f_c(\text{εσ}E_1) = f_c(\text{εσ}E_2) = \text{εσ} f_c^{-(p-1)}(\Gamma) \quad \text{και} \quad \text{εσ}E_1 \cap \text{εσ}E_2 = \varnothing.$$

Έστω $z_o \in \mathcal{J}_c$, τότε υπάρχουν $z_1 \in$ εσE_1, $\quad z_2 \in$ εσE_2 ώστε $z_o = f_c(z_1), \quad z_o = f_c(z_2)$. Άρα

$$z_1, z_2 \in f_c^{-1}(\mathcal{J}_c) = \mathcal{J}_c$$

δηλαδή $\mathcal{J}_c \cap$ εσ$E_1 \neq \varnothing$ και $\mathcal{J}_c \cap$ εσ$E_2 \neq \varnothing$. Επειδή το εσ$E_1 \cup$ εσE_2 είναι μη συνεκτικό σύνολο που περιέχει το $\mathcal{J}_c$ και το $\mathcal{J}_c$ τέμνει τα εσE_1, εσE_2 το $\mathcal{J}_c$ δεν είναι συνεκτικό.

Από τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.

ii. Εάν $c \notin M$, τότε η $\left\{f_c^k(0)\right\}_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^n(0) = +\infty$. (βλ. Απόδ. i.)

Εάν η $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^n(0) = \infty$, προφανώς $c \notin M$.

iii. Έχουμε $\left\{c \in \mathbb{C} : \left|f_c^k(0)\right| \leq 2, \quad k \in I\!N\right\} \subseteq M$. (από το i.)

Θεωρούμε $c \in \mathbb{C}$ και $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq |c|, \quad |z| > 2\}$.

Για κάθε $z \in A$, υπάρχει $\varepsilon_z > 0$, ώστε $|z| \geq 2 + \varepsilon_z$. Τότε

$$\left|f_c(z)\right| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| \geq (1 + \varepsilon_z)|z|$$

άρα $f_c(z) \in A \quad$ και $\quad \left|f_c(z)\right| \geq 2 + \varepsilon_z$.

Θέτοντας $f_c(z)$ στη θέση του z και συνεχίζοντας θα έχουμε ότι

$$\left|f_c^n(z)\right| \geq (1 + \varepsilon_z)^n |z|.$$

Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^n(z) = \infty$ για κάθε $z \in A$.

Έστω $c \in M$.

Τότε $f_c^n(0) \notin A, n \in I\!N$. Πράγματι:

Αν $f_c^{n_o}(0) \in A$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^{n+n_o}(0) = \infty$, το οποίο είναι άτοπο από το ii).

Άρα $f_c^n(0) \notin A$ για κάθε $n \in I\!N$, δηλαδή για $n \in I\!N$ έχουμε

$$\left|f_c^n(0)\right| < |c| \quad ή \quad \left|f_c^n(0)\right| \leq 2.$$

Για $n = 1, \quad |f_c(0)| = |c|$, θα έχουμε $|c| \leq 2$. Άρα $|f_c^n(0)| \leq 2$ για κάθε $n \in I\!N$. Άρα $M \subseteq \left\{c \in \mathbb{C} : \left|f_c^k(0)\right| \leq 2, \quad k \in I\!N\right\}$.

□

Πόρισμα 3.3.1.

Το σύνολο Mandelbrot είναι συμπαγές.

Απόδειξη.

Έστω $c \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε ακολουθία $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $p_n(z) = z^2 + c_n$ ως εξής:
Για $n = 1$, $\quad p_1(c) = c = f_c(0)$ και $p_{n+1}(c) = \big[p_n(c)\big]^2 + c$.
Έχουμε $p_n(c) = f_c^n(0)$. Τότε

$$\begin{aligned} M &= \Big\{c \in \mathbb{C} : \big|f_c^k(0)\big| \leq 2, k \in I\!N\Big\} \\ &= \Big\{c \in \mathbb{C} : \big|p_k(c)\big| \leq 2, \quad k \in I\!N\Big\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} p_k^{-1}\Big(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}\Big) \end{aligned}$$

το οποίο είναι κλειστό.

Εξ'άλλου $M \subseteq \overline{S(0,2)}$ (Θεώρημα 3.3.1 iii). Άρα το M είναι συμπαγές. □

3.3.1 Ιδιότητες και Διάσταση συνόλων Julia και Mandelbrot

Εάν $f_c(z) = z^2 + c, \quad z \in \mathbb{C}$ και $\mathcal{J}(f_c)$ το σύνολο Julia της f_c γνωρίζουμε ότι:

1. Εάν έχουμε περιοδικό σταθερό σημείο (βλ. Παρατήρηση 3.2.1), τότε το $\mathcal{J}(f_c)$ είναι απλή κλειστή καμπύλη και

$$s = \dim_H \mathcal{J}(f_c) = \dim_B \mathcal{J}(f_c) \cong 1 + \frac{|c|^2}{4\log 2} \quad \text{για} \quad c \cong 0.$$

2. Εάν $c \notin M$, τότε το $\mathcal{J}(f_c)$ είναι ολικά μη συνεκτικό. (βλ. [5]).

Εάν το M είναι το σύνολο Mandelbrot, γνωρίζουμε ότι

1. Το M είναι απλά συνεκτικό σύνολο. (βλ. [5]).

2. Η $\dim_H \partial M = 2$ και για κάθε ανοικτό σύνολο U με $U \cap \partial M \neq \varnothing$, έχουμε $\dim_H\big(\partial M \cap U\big) = 2$. (βλ. [19]).

Υπάρχει $A \subseteq \partial M$, πυκνό στο ∂M, τέτοιο ώστε για κάθε $c \in A, \dim_H \mathcal{J}_c = 2$.

Κεφάλαιο 4

Αλγόριθμοι κατασκευής fractal συνόλων

Για την κατασκευή των fractal συνόλων είναι αναγκαία η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, και δεν είναι τυχαίο ότι υπήρξε ραγδαία εξέλιξη μέσα στη τελευταία δεκαετία. Για την αναπαράσταση τους στον υπολογιστή παραθέτουμε τον σκελετό κάποιων προγραμμάτων υπό μορφή ψευδοκώδικα, ώστε να μπορούν να προγραμματισθούν σε οποιαδήποτε γλώσσα.

4.1 Κατασκευή fractal συνόλων με ΣΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε αλγόριθμους που χρησιμοποιούν Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΣΕΣ) για την κατασκευή fractal συνόλων στον $I\!R$, $\quad I\!R^2$ και $\quad I\!R^3$.

Βήμα 1 <u>Διάβασε :</u>

- το πλήθος N των συστολών,
- τις συστολές $w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$.
- το αρχικό σύνολο S_0,
- τον αριθμό των βημάτων Steps.

Βήμα 2 Για όλα τα $j = 1, 2, \ldots, Steps$

$S_1 = \varnothing$

Για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, N$

$S_1 = S_1 \cup w_i(S_0)$

Τύπωσε το σύνολο S_1

$S_0 = S_1$

4.1.1 Τριαδικό σύνολο Cantor

Για το Τριαδικό σύνολο Cantor χρησιμοποιούμε τις συστολές που δίνονται στην παράγραφο 1.4.1 . Τα σχήματα που παράγονται σε κάθε βήμα καθώς και το "τελικό" σχήμα φαίνονται πιο κάτω:

Σχήμα 4.1: Τριαδικό σύνολο Cantor, με αρχικό σύνολο $B = [0,1]$ Διάσταση: $\frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.63$

4.1.2 Τρίγωνο Sierpinski

Για το Τρίγωνο Sierpinski χρησιμοποιούμε τις συστολές που δίνονται στην παράγραφο 1.4.2 . Τα σχήματα που παράγονται σε κάθε βήμα καθώς και το τελικό φαίνονται πιο κάτω:

Σχήμα 4.2: Τρίγωνο Sierpinski, με αρχικό σύνολο $B = [0,1]$. Διάσταση: $\frac{\log 3}{\log 2} \simeq 1.58$

Σχήμα 4.3: Τρίγωνο Sierpinski, με αρχικό σύνολο $(\mathbf{A})$:$B =$ ”κύκλος”, $(\mathbf{B})$:$B =$ ”ταύρος”. Διάσταση: $\frac{\log 3}{\log 2} \simeq 1.58$

4.1.3 Σπόγγος του Menger ή Sierpinski

Τα σχήματα που παράγονται σε κάθε βήμα καθώς και το τελικό φαίνονται πιο κάτω:

Σχήμα 4.4: Σπόγγος του Menger ή Sierpinski, με αρχικό σύνολο κύβο. Διάσταση: $\frac{\log 20}{\log 3} \simeq 2.72$

4.1.4 Καμπύλη του von Koch

Για τη Καμπύλη του von Koch χρησιμοποιούμε τις συστολές που δίνονται στην παράγραφο 1.4.4 .

Τα σχήματα που παράγονται σε κάθε βήμα καθώς και το τελικό φαίνονται πιο κάτω:

Σχήμα 4.5: Καμπύλη Von Koch, με αρχικό σύνολο B = τρίγωνο. Διάσταση: $\frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1.26$

4.1.5 Πλατανόφυλλο

Για το πλατανόφυλλο, χρησιμοποιούμε τις συστολές που δίνονται στην παράγραφο 1.4.5 . Τα σχήματα που παράγονται σε κάθε βήμα καθώς και το τελικό φαίνονται πιο κάτω:

Σχήμα 4.6: Πλατανόφυλλο

4.2 Κατασκευή fractal συναρτήσεων παρεμβολής με ΣΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε αλγόριθμους που χρησιμοποιούν ΣΕΣ για την κατασκευή fractal συναρτήσεων παρεμβολής. Η θεωρία και οι συμβολισμοί είναι στην παράγραφο 1.5.

Βήμα 1 Διάβασε :

- το N,
- τα σημεία παρεμβολής $P_i = (x_i, F_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N$,
- τους συντελεστές $d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$,
- τον αριθμό των επαναλήψεων $N_{\max}$.

Βήμα 2 Υπολόγισε τα a_i, c_i, f_i, e_i από τους τύπους που δίνονται από τις σχέσεις **(I)**.

Βήμα 3 $x = x_0, \quad y = F_0$.

Βήμα 4 Για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, N_{\max}$

Για όλα τα $j = 1, 2, \ldots, N$

$newx = a_j x + e_j.$

$newy = c_j x + d_j y + f_j.$

$px = newx.$

$py = newy.$

Χρωμάτισε το σημείο (px, py).

x=newx, y=newy.

Παραδείγμα 1

Θεωρούμε τα σημεία παρεμβολής,

$$P_0 = (x_0, F_0) = (0, 0),$$

$$P_1 = (x_1, F_1) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}),$$

$$P_2 = (x_2, F_2) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}),$$

$$P_3 = (x_3, F_3) = (1, 1).$$

1. Επιλέγουμε $d_1 = d_2 = 0.5, d_3 = 0.01$.

Σχήμα 4.7: Fractal συνάρτηση παρεμβολής με ΣΕΣ, διάστασης $1 + \frac{\log(1.01)}{\log 3} \simeq 1.009$

2. Επιλέγουμε $d_1 = d_2 = d_3 = 0.5$.

Σχήμα 4.8: Fractal συνάρτηση παρεμβολής με ΣΕΣ Διάσταση: $1 + \frac{\log(1.5)}{\log 3} \simeq 1.37$

3. Επιλέγουμε $d_1 = d_2 = d_3 = 0.9$.

Σχήμα 4.9: Fractal συνάρτηση παρεμβολής με ΣΕΣ Διάσταση: $1 + \frac{\log(2.7)}{\log 3} \simeq 1,9$

Παραδείγμα 2

Θεωρούμε τα σημεία παρεμβολής,

$$P_0 = (x_0, F_0) = (0, 0),$$

$$P_1 = (x_1, F_1) = (\tfrac{1}{3}, 1),$$

$$P_2 = (x_2, F_2) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{5}),$$

$$P_3 = (x_3, F_3) = (1, \tfrac{1}{5}).$$

1. Επιλέγουμε $d_1 = d_2 = d_3 = 0.5$.

Σχήμα 4.10: Fractal συνάρτηση παρεμβολής με ΣΕΣ, Διάσταση: $1 + \frac{\log(1.5)}{\log 3} \simeq 1.37$

2. Επιλέγουμε $d_1 = 0.5,\ d_2 = -0.5,\ d_3 = 0.5$.

Σχήμα 4.11: Fractal συνάρτηση παρεμβολής με ΣΕΣ, Διάσταση: $1 + \frac{\log(1.5)}{\log 3} \simeq 1.37$

4.2.1 Κατασκευή Καμπυλών που γεμίζουν το χώρο με ΣΕΣ

Οι συστολές που χρησιμοποιούμε για να δημιουργήσουμε τις καμπύλες Hilbert δίδονται στην Παρατήρηση 1.4.1. Ο ελκυστής αυτού του ΣΕΣ είναι το τετράγωνο. Ξεκινώντας από διαφορετικά αρχικά σύνολα παίρνουμε ενδιαφέροντα ενδιάμεσα βήματα που όλα όμως καταλήγουν στο ίδιο σύνολο.

Στα επόμενα παραδείγματα χρησιμοποιούμε τις παραπάνω συστολές, απλά αλλάζοντας το αρχικό σύνολο.

Σχήμα 4.12: Καμπύλες γεμίζουσες το χώρο με ΣΕΣ

Σχήμα 4.13: Καμπύλες γεμίζουσες το χώρο με ΣΕΣ

Σχήμα 4.14: Καμπύλες γεμίζουσες το χώρο με ΣΕΣ

4.3 Κατασκευή συνάρτησης τύπου Weierstrass

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αλγόριθμους για την κατασκευή μιας συνάρτησης τύπου Weierstrass. Για την κατασκευή του αλγορίθμου υλοποιούμε τη συνάρτηση που δίδεται από το θεώρημα 2.61.

Βήμα 1 <u>Διάβασε :</u>

- τις παραμέτρους λ, s της συνάρτησης Weierstrass,
- τα άκρα του διαστήματος που θέλετε να υπολογιστεί η συνάρτηση, $x_{\min}, x_{\max}$,
- την ακρίβεια σύγκλισης, ε της σειράς (σημειώνουμε ότι η σειρά συγκλίνει).

Βήμα 2 $\mathrm{sum}_1 = 0, k = 1$

Βήμα 3 Όσο το $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ [1] τότε

$\mathrm{sum}_0 = \mathrm{sum}_1$ [σχέση (1)]

$\mathrm{sum}_1 = \mathrm{sum}_1 + \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k x)$

Αν $|\,\mathrm{sum}_1 - \mathrm{sum}_0\,| > \varepsilon$ τότε πήγαινε στη [σχέση (1)]

Αλλιώς Τύπωσε το σημείο (x, sum_1)

[1] Συνήθως ορίζουμε ένα βήμα, ώστε να καλύπτουμε το διάστημα μας με πεπερασμένο αριθμό σημείων, προτείνουμε την ισοδιαμέριση δηλ. $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_{\delta\iota\alpha\sigma.}}$, όπου $n_{\delta\iota\alpha\sigma.}$ ο αριθμός των διαστημάτων που θέλουμε να το χωρίσουμε τότε $x_i = x_{\min} + ih$, με $i = 1, \ldots, n_{\delta\iota\alpha\sigma.}$

Σχήμα 4.15: Το γράφημα της πρώτης Weierstrass έχει διάσταση $\dim_B F = 1.1$ ενώ της δεύτερης έχει $\dim_B F = 1.9$.

4.4 Κατασκευή συνόλων Julia και συνόλου Mandelbrot

4.4.1 Σύνολα Julia

Στήν παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε αλγορίθμους για την κατασκευή συνόλων Julia. Για την κατασκευή των αλγορίθμων υλοποιούμε τη συνάρτηση που δίδεται στη θεωρία (βλέπε Κεφ. 3). Πρέπει να προσέξουμε όμως γιατί η συνάρτηση που θέλουμε να υλοποιήσουμε είναι μιγαδική. Αυτό μας κάνει να ξεφεύγουμε από τη μια διάσταση και να περνάμε στις δυο. Επειδή όμως στον υπολογιστή δεν μπορούμε να απεικονίσουμε μιγαδικές συναρτήσεις τη σπάμε σε δυο μέρη, πραγματικό και φανταστικό.

Εφαρμογή (Αλγόριθμος χρόνων διαφυγής)

Για να αποφύγουμε ανούσια πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας (μια και γενικεύεται και για δυνάμεις μεγαλύτερες του 2) θα υλοποιήσουμε την $f(z) = z^2 + c$ με κάπως γενικό τρόπο ώστε να είναι κατανοητό πως θα επεκταθεί και για υψηλότερες δυνάμεις. Η $f(z) = (x+iy)^2 + c = x^2 - y^2 + \alpha + i(2xy + b)$ όπου $z = x + iy, c = \alpha + ib$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε $f(z) = f(x,y) = f_{\mathrm{Re}}(x,y) + i * f_{\mathrm{Im}}(x,y)$ όπου $f_{\mathrm{Re}}(x,y) = x^2 - y^2 + \alpha, f_{\mathrm{Im}}(x,y) = 2xy + b$. Σε αυτήν τη μορφή μπορούμε να φέρουμε όλες τις $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n =$

$f_{\mathrm{Re}}(x,y) + i * f_{\mathrm{Im}}(x,y)$.

Βήμα 1 Διάβασε :

- τις παραμέτρους α_i του πολυώνυμου f.
- τα άκρα του διαστήματος που θέλετε να υπολογιστεί η συνάρτηση, $x_{\min}, x_{\max}$ ως προς τον άξονα x,
- τα άκρα του διαστήματος που θέλετε να υπολογιστεί η συνάρτηση, $y_{\min}, y_{\max}$ ως προς τον άξονα y,
- το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $n_{\max}$
- το g για τη συνθήκη τερματισμού $|f^n(z)| > g$ όπου n ο αριθμός των επαναλήψεων που έχουν γίνει.

Βήμα 2 Όσο το $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ [2] τότε

Όσο το $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ [3] τότε

n=0

$x_0 = x$

$y_0 = y$

Σχέση (1) $x_0 = f_{\mathrm{Re}}(x_0, y_0)$

[2] Συνήθως ορίζουμε ένα βήμα, ώστε να καλύπτουμε το διάστημα μας με πεπερασμένο αριθμό σημείων, προτείνουμε την ισοδιαμέριση δηλ. $dx = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_{x-\text{διασ.}}}$, όπου $n_{x-\text{διασ.}}$ ο αριθμός των διαστημάτων που θέλουμε να το χωρίσουμε τότε $x_i = x_{\min} + idx$, με $i = 1, \ldots, n_{x-\text{διασ.}}$

[3] Όμοια για το σχόλιο του x, έχουμε $dy = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n_{y-\text{διασ.}}}$, όπου $n_{y-\text{διασ.}}$ ο αριθμός των διαστημάτων που θέλουμε να το χωρίσουμε τότε $y_j = y_{\min} + jdy$, με $j = 1, \ldots, n_{y-\text{διασ.}}$

$$y_0 = f_{\mathrm{Im}}(x_0, y_0)$$

$$n = n + 1$$

Αν $(n \leq n_{\max})$ και $(x_0^2 + y_0^2 \leq g)$ τότε πήγαινε στη Σχέση (1)

Αν $(n < n_{\max})$ τότε Τύπωσε το σημείο (x, y)

4.4.2 Σύνολο Mandelbrot

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε αλγόριθμους για την κατασκευή του συνόλου Mandelbrot. Για την κατασκευή του αλγορίθμου υλοποιούμε την $f(z) = z^2 + c$. Πρέπει να προσέξουμε όμως γιατί η συνάρτηση που θέλουμε να υλοποιήσουμε είναι μιγαδική. Αυτό μας κάνει να ξεφεύγουμε από τη μια διάσταση και να περνάμε στις δυο. Επειδή όμως στον υπολογιστή δεν μπορούμε να απεικονίσουμε μιγαδικές συναρτήσεις την σπάμε σε δυο μέρη, πραγματικό και φανταστικό (βλέπε παραπάνω στην εφαρμογή για τα σύνολα Julia). Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τη μιγαδική σταθερά $c = \alpha + ib$.

Βήμα 1 Διάβασε :

- τα άκρα του διαστήματος που θέλετε να υπολογιστεί η συνάρτηση, $x_{\min}, x_{\max}$ ως προς τον άξονα x,
- τα άκρα του διαστήματος που θέλετε να υπολογιστεί η συνάρτηση, $y_{\min}, y_{\max}$ ως προς τον άξονα y,
- το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $n_{\max}$

- το g για τη συνθήκη τερματισμού $|f^n(z)| > g$ όπου n ο αριθμός των επαναλήψεων που έχουν γίνει.

Βήμα 2 Όσο το $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ [4] τότε

$a = x$

Όσο το $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ [5] τότε

$b = y$

$n = 0$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

Σχέση (1) $x_0 = f_{\mathrm{Re}}(x_0, y_0)$

$y_0 = f_{\mathrm{Im}}(x_0, y_0)$

$n = n + 1$

Αν $(n \leq n_{\max})$ και $(x_0^2 + y_0^2 \leq g)$ τότε πήγαινε στη Σχέση (1)

Αν $(n < n_{\max})$ τότε Τύπωσε το σημείο (x, y)

---

[4] Συνήθως ορίζουμε ένα βήμα, ώστε να καλύπτουμε το διάστημα μας με πεπερασμένο αριθμό σημείων, προτείνουμε την ισοδιαμέριση δηλ. $dx = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_{x-\text{διασ.}}}$, όπου $n_{x-\text{διασ.}}$ ο αριθμός των διαστημάτων που θέλουμε να το χωρίσουμε τότε $x_i = x_{\min} + idx$, με $i = 1, \ldots, n_{x-\text{διασ.}}$

[5] Όμοια για το σχόλιο του x, έχουμε $dy = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n_{y-\text{διασ.}}}$, όπου $n_{y-\text{διασ.}}$ ο αριθμός των διαστημάτων που θέλουμε να το χωρίσουμε τότε $y_j = y_{\min} + jdy$, με $j = 1, \ldots, n_{y-\text{διασ.}}$

Σχήμα 4.16: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = -0,5 + 0,5i$

Σχήμα 4.17: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = -0,2 + 0,7i$

Σχήμα 4.18: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = -0,75 + 0,07i$

Σχήμα 4.19: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = -1,3 + 0,06i$

Σχήμα 4.20: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = 0 + 0,65i$

Σχήμα 4.21: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = -0,7 + 0,4i$

Σχήμα 4.22: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = -0,7 + 0,375i$

Σχήμα 4.23: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = 0,35 + 0,057i$

Σχήμα 4.24: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = 0,275 + 0,005i$

Σχήμα 4.25: Σύνολο Julia της $f(z) = z^2 + c$, για $c = 0,35 + 0,65i$

Σχήμα 4.26: Το σύνολο Mandelbrot

Σχήμα 4.27: Λεπτομέρεια του συνόλου Mandelbrot

Βιβλιογραφία

[1] Ahlfors, L.V., (1979), *Complex Analysis*, 2nd edition, McGraw - Hill.

[2] Aliprantis, C.D. and Border, K.C., (1994), *Infinite Dimensional Analysis*, Springer - Verlag.

[3] Barnsley M.F., (1988), *Fractals Everywhere*, Academic Press.

[4] Barnsley M.F., Elton J., Hardin D., Massopust P., (1989), Hidden variable fractal interpolation functions. *SIAM J. Math. Anal.* **20** (5), pp. 1218 - 1242.

[5] Beardon A.F., (1991) *Iteration of Rational Functions*, Springer - Verlag.

[6] Edgar G., (1990) *Measure, Topology and Fractal Geometry* Springer - Verlag.

[7] Falconer K.J., (1985), *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press.

[8] Falconer K.J., (1990), *Fractal Geometry*, John Wiley.

[9] Falconer K.J., (1990), *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley.

[10] Hutchinson J.E., (1981), Fractals and self similarity, *Indiana Un. Journal of Maths*, **30** pp. 713 - 747.

[11] Mandelbrot B., (1982), *The fractal Geometry of Nature*, Freeman.

[12] Mattila P., (1995), *Geometry of sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press.

[13] Peitgen H.O., Jürgens H., Saupe D., (1992), *Fractals for the Classroom - Part One - Introduction to fractal and chaos*

[14] Peitgen H.O., Jürgens H., Saupe D., (1992), *Fractals for the Classroom - Part Two - Complex system and mandelbrot set*

[15] Rogers C.A., (1970), *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press.

[16] Sagan H., (1994), *Space Filling Curves*, Springer - Verlag.

[17] Schiff J.L., (1993), *Normal Families*, Springer - Verlag.

[18] Schneider R., (1993), *Convex Bodies : The Brunn - Minkowski Theory*, Cambridge University Press.

[19] Shishikura M., (1998), The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Annals of Maths*, **147** (2) pp. 225 - 267.

Ευρετήριο

Δακτυλογράφηση, επιμέλεια: Μαρία Προδρόμου