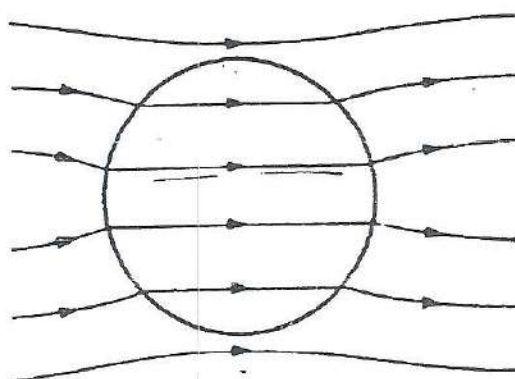


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις
του
μεταπτυχιακού μαθήματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ



Χ. Αθανασιάδης

Ι. Στρατής

ΑΘΗΝΑ 2000

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις
του
μεταπτυχιακού μαθήματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΜΕΡΟΣ Β'

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Χ. Αθανασιάδης

Περιεχόμενα:

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

- Πλάτος σκέδασης.
- Ενεργειακές διατομές.
- Τελεστής μακρινού πεδίου.
- Ένα πολυστρωματικό μοντέλο.
- Σφαιρικά ακουστικά κύματα.

ΑΘΗΝΑ 2000

ΣΚΕΔΑΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία σκέδασης ασχολείται με τη μελέτη των μεταβολών που υφίσταται ένα κυματικό πεδίο, όταν στο χώρο διάδοσής του υπάρχει ένα εμπόδιο, δηλαδή ο σκεδαστής. Το φαινόμενο της σκέδασης εμφανίζεται επίσης όταν το μέσο διάδοσης του κυματικού πεδίου είναι μη ομογενές, δηλαδή οι φυσικές παράμετροι είναι συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής. Όταν είναι γνωστό το προσπίπτον σε ένα σκεδαστή κυματικό πεδίο καθώς επίσης και οι φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή (συνεπώς οι συνοριακές συνθήκες) και αναζητούμε το σκεδασμένο κυματικό πεδίο, έχουμε ένα *ευθύ πρόβλημα σκέδασης*. Όταν γνωρίζουμε το προσπίπτον και το σκεδασμένο πεδίο και αναζητούμε πληροφορίες για τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του σκεδαστή, έχουμε ένα *αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης*. Εδώ θα αναπτύξουμε ορισμένα θέματα από το ευθύ πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων, που δημιουργεί ένα εμπόδιο τοποθετημένο στο χώρο διάδοσής τους.

Από μαθηματική άποψη, ένα πρόβλημα σκέδασης τοποθετείται, γενικά, στην περιοχή των προβλημάτων συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου. Ειδικότερα όμως, η ακουστική σκέδαση με αρμονική χρονική εξάρτηση, οπότε απαλείφεται ο χρόνος, είναι ένα *εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών* για την εξίσωση Helmholtz (ελλειπτικού τύπου). Για την “καλή τοποθέτηση” του μαθηματικού προβλήματος της σκέδασης, εκτός από τις συνοριακές συνθήκες που ισχύουν πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή και οι οποίες προκύπτουν από τις φυσικές ιδιότητές του, είναι απαραίτητη και μια συνθήκη στο άπειρο, η *συνθήκη ακτινοβολίας*, όπως λέγεται. Ο σκεδαστής μπορεί να είναι διαπερατός, δηλαδή τα ακουστικά κύματα να διέρχονται στο εσωτερικό του, ή μη διαπερατός. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ένα *μεταβατικό ή διαπερατό πρόβλημα* και πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή ικανοποιούνται κατάλληλες *συνθήκες σύνδεσης*. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ένα απλό *εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών*.

Η ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης καθώς επίσης και η συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα (καλή τοποθέτηση) του προβλήματος σκέδασης μελετώνται (συνήθως) με τη θεωρία Riesz - Fredholm για συμπαγείς τελεστές, (βλ. [12], [13]). Για τη μοναδικότητα λύσης, αποδεικνύουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει μόνο τη μηδενική λύση, χρησιμοποιώντας σαν βασικό κριτήριο το Λήμμα Rellich ([12], σελ. 77). Για την ύπαρξη λύσης, χρησιμοποιούμε τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος και μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σκέδασης σε μια (συνοριακή) ολοκληρωτική εξίσωση. Αποδείξεις ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης μερικών προβλημάτων ακουστικής σκέδασης μπορεί να βρει κανείς στα βιβλία των Colton - Kress [12], [13] και του D.S. Jones [19].

Την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης ενός προβλήματος σκέδασης τη μελετάμε μέσω του πλάτους σκέδασης, που είναι η σπουδαιότερη συνάρτηση στη θεωρία σκέδασης από πλευράς εφαρμογών και έχει κεντρικό ρόλο στην επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης. Τα βασικά θεωρήματα που ισχύουν για το πλάτος σκέδασης αποδεικνύονται στην ενότητα 3, για την περίπτωση ενός ηχητικά μαλακού σκεδαστή.

Η εύρεση της λύσης ενός προβλήματος σκέδασης παρουσιάζει, γενικά, μεγάλες δυσκολίες, που οφείλονται κυρίως στη γεωμετρία του σκεδαστή. Συνήθως χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές μεθόδους υπολογισμού της λύσης, οι οποίες είναι είτε αριθμητικές, είτε αναλυτικές. Μια αναλυτική μέθοδος, φυσικού ενδιαφέροντος, είναι η θεωρία χαμηλών συχνοτήτων [3], [4]. Είναι κατάλληλη για την επίλυση προβλημάτων όπου τα κυματικά πεδία έχουν μεγάλο μήκος κύματος, δηλαδή χαμηλή συχνότητα, εν σχέσει με τη χαρακτηριστική διάσταση του σκεδαστή. Στη θεωρία χαμηλών συχνοτήτων τα κυματικά πεδία αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές ως προς τον κυματικό αριθμό, με κέντρο το μηδέν (σειρές Rayleigh). Το πρόβλημα ακουστικής σκέδασης μετασχηματίζεται σε μια ακολουθία προβλημάτων θεωρίας δυναμικού, τα οποία και επιλύονται.

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνουμε το μαθηματικό πρόβλημα ακουστικής σκέδασης και αποδεικνύουμε τα βασικά θεωρήματα για έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή, δηλαδή για ένα σκεδαστή με συνοριακή συνθήκη Dirichlet. Ορίζουμε τις κυματικές συναρτήσεις Helgoltz, που είναι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης Helmholtz, και τον τελεστή μακρινού πεδίου, του οποίου μελετάμε το φάσμα· αυτός ο τελεστής χρησιμοποιείται για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης. Στο τέλος του κεφαλαίου περιγράφουμε μερικά πρόσφατα αποτελέσματα επί των σφαιρικών κυμάτων που εκπέμπει μια σημειακή πηγή. Περισσότερες λεπτομέρειες καθώς επίσης και άλλα θέματα σκέδασης μπορεί να βρει κανείς στη βιβλιογραφία στο τέλος του Κεφαλαίου. Ιδιαίτέρως αναφέρουμε το βιβλίο [17] των Δάσιου και Kleimann, όπου γίνεται μια συστηματική και εκτενής περιγραφή των προβλημάτων σκέδασης ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων. Μελέτη ορισμένων προβλημάτων ακουστικής σκέδασης καθώς και χρήση των ολοκληρωτικών εξισώσεων στην επίλυσή τους περιγράφεται στις διπλωματικές εργασίες [20], [22].

Τέλος, να σημειωθεί ότι η θεωρία σκέδασης ακουστικών κυμάτων έχει πολλές και σημαντικές εφαρμογές σε διάφορους τομείς της εφαρμοσμένης έρευνας. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά, τη χρήση υπερήχων στη διαγνωστική και θεραπευτική ιατρική (π.χ. διάγνωση και θεραπεία πέτρας του νεφρού). Το γνωστό υπερηχογράφημα βασίζεται στην επίλυση ενός αντιστρόφου προβλήματος ακουστικής σκέδασης.

2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

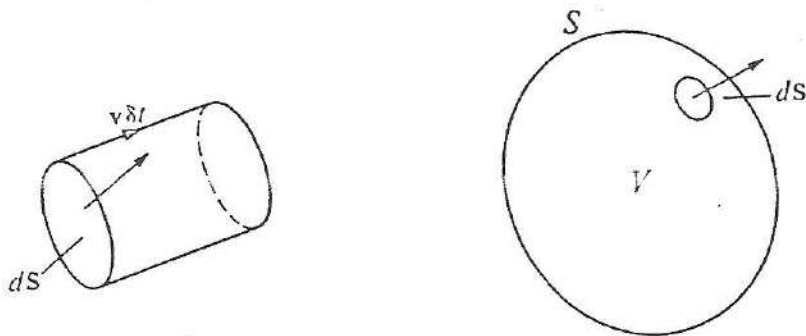
Έστω $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ το πεδίο ταχύτητας, $p = p(\mathbf{x}, t)$ η πίεση και $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ η πυκνότητα ενός ρευστού στη θέση $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ τη χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, ότι το μέσο είναι συνεχές (βλ. μέρος Α'). Θεωρούμε μια επιφάνεια S , που περιβάλλει ένα απλά συνεκτικό πεδίο Ω ($S = \partial\Omega$) που βρίσκεται μέσα στο ρευστό. Θα μελετήσουμε τις βασικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των συνεχών μέσων εφαρμόζοντας τις αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής, σε συντεταγμένες Euler.

2.1 Εξίσωση συνέχειας

Η ολική μάζα m του ρευστού στο Ω είναι

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (2.1)$$

και η μεταβολή της σε ένα μικρό χρονικό διάστημα δt είναι



$$\delta t \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

αφού το Ω παραμένει σταθερό. Υποθέτουμε ότι η μεταβολή της μάζας στο Ω οφείλεται σε ροή ρευστού δια μέσου της επιφάνειας S . Η μάζα που θα μεταφερθεί δια μέσου της στοιχειώδους επιφάνειας ds σε χρόνο δt περιέχεται σε ένα κύλινδρο όγκου

$$(\mathbf{v} \delta t) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds,$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην S διάνυσμα με φορά προς τον εξωτερικό του Ω χώρο (σχ. 1). Η ολική μάζα που θα μεταφερθεί είναι

$$- \delta t \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds. \quad (2.3)$$

Από (2.2), (2.3) και λόγω της αρχής διατήρησης της μάζας, έχουμε

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_S \rho v \cdot \hat{n} ds. \quad (2.4)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Gauss (απόκλισης) στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της (2.4) (υποθέτουμε ότι ισχύσουν οι κατάλληλες υποθέσεις) και παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho v) dx \quad (2.5)$$

και επειδή η (2.5) ισχύει για αυθαίρετο Ω , έπεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (2.6)$$

που είναι η εξίσωση συνέχειας για τη ροή των ρευστών στον \mathbb{R}^3 .

Παρατηρήσεις

- (i) Εκτός από τη ροή ρευστού δια μέσου της επιφάνειας S είναι δυνατόν να έχουμε παραγωγή ή απορρόφηση ύλης μέσα στο Ω (π.χ. ύπαρξη μιας πηγής στο Ω). Αν $\psi(x, t)$ είναι η ποσότητα αυτής της ύλης, τότε η εξίσωση συνέχειας (2.6) γίνεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = \psi. \quad (2.7)$$

- (ii) Αν το ρευστό έχει σταθερή πυκνότητα, τότε η (2.6) γίνεται

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2.8)$$

- (iii) Αν η κίνηση του ρευστού είναι αστρόβιλη, δηλαδή $\operatorname{curl} v = 0$ (Ω : απλά συνεκτικό), τότε υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση φ , το δυναμικό ταχύτητας, τέτοια ώστε

$$v = \operatorname{grad} \varphi. \quad (2.9)$$

Από τις (2.8), (2.9) προκύπτει

$$\Delta \varphi = 0, \quad (2.10)$$

δηλαδή το δυναμικό ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Αν επιπλέον $\varphi \in C^2$, τότε φ είναι αρμονική συνάρτηση.

2.2 Εξίσωση Euler

Υποθέτουμε ότι το ρευστό κινείται. Θα κατασκευάσουμε την εξίσωση κίνησης (εξίσωση Euler) που οφείλεται στις δυνάμεις που εξασκούνται στο ρευστό, εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της ορμής. Οι δυνάμεις είναι δύο ειδών:

- (i) Δυνάμεις πεδίου (εξωτερικές, π.χ. βαρύτητας), έστω f (δύναμη/μονάδα μάζας),
- (ii) Επιφανειακές δυνάμεις (π.χ. δυνάμεις που οφείλονται στην πίεση), έστω $-p \hat{n} ds$, όπου το αρνητικό πρόσημο έχει τεθεί επειδή το κάθετο στην επιφάνεια $S = \partial\Omega$ μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} έχει φορά προς το εξωτερικό του Ω .

Η ολική δύναμη F που δρα στο Ω είναι

$$F = \int_{\Omega} \rho f dx - \int_S p \hat{n} ds. \quad (2.11)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στο επιφανειακό ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$F = \int_{\Omega} \rho f dx - \int_{\Omega} \text{grad } p dx. \quad (2.12)$$

Η γραμμική ορμή του Ω είναι

$$\int_{\Omega} \rho v dx \quad (2.13)$$

και η χρονική μεταβολή της,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v dx = \int_{\Omega} \rho \frac{dv}{dt} dx + \int_{\Omega} v \frac{d}{dt} (\rho dx), \quad (2.14)$$

αφού ο όγκος Ω μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Όμως ρdx είναι η μάζα του στοιχειώδους όγκου dx και παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης, συνεπώς $\frac{d}{dt} (\rho dx) = 0$. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής, η ταχύτητα μεταβολής της ορμής στο Ω ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων που εξασκούνται στο Ω . Από τις (2.12), (2.14) έχουμε

$$\int_{\Omega} \rho \frac{dv}{dt} dx = \int_{\Omega} (\rho f - \text{grad } p) dx, \quad (2.15)$$

για όλα τα Ω . Συνεπώς

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = f. \quad (2.16)$$

Αλλά

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad})v. \quad (2.17)$$

Άρα

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{f}, \quad (2.18)$$

που είναι η εξίσωση Euler.

Παρατηρήσεις

- (i) Αν χρησιμοποιήσουμε τη διανυσματική ταυτότητα $\text{grad}v^2 = 2\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$, η (2.18) γίνεται

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}v^2 - \mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{f}. \quad (2.19)$$

- (ii) Αν το πεδίο εξωτερικών δυνάμεων είναι συντηρητικό, δηλ. $\mathbf{f} = -\text{grad}h$ και η πυκνότητα του ρευστού σταθερή, τότε η (2.19) γίνεται

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{v} = -\text{grad} \left(h + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \right). \quad (2.20)$$

- (iii) Αν στην (2.20) υποθέσουμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη, δηλαδή $\text{curl } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left(h + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \right). \quad (2.21)$$

- (iv) Αν η ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερή, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0}$, η (2.20) γίνεται

$$\mathbf{v} \times \text{curl } \mathbf{v} = \text{grad} \left(h + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \right). \quad (2.22)$$

Πολλαπλασιάζουμε (εσωτερικά) επί \mathbf{v} την (2.22) και παίρνουμε

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} \left(h + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \right) = 0, \quad (2.23)$$

δηλαδή η ταχύτητα είναι κάθετη στο $\text{grad} \left(h + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \right)$ και συνεπώς εφαπτομένη στην επιφάνεια $h + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{σταθ}$. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $h + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2$ παραμένει σταθερή κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής, δηλαδή μιας καμπύλης που οι εφαπτόμενές της είναι παράλληλες της ταχύτητας στα αντίστοιχα σημεία. Αυτή η παρατήρηση εκφράζει τη γενική μορφή του θεωρήματος Bernoulli: Αν h παραμένει σταθερό ($\rho = \text{σταθ.}$) τότε αύξηση της ταχύτητας συνεπάγεται μείωση της πίεσης και αντιστρόφως.

2.3. Γραμμικοποίηση

Έστω $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ένα βαθμωτό μέγεθος (π.χ. η πυκνότητα) και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ η ταχύτητα ροής ενός ρευστού. Σε χρόνο δt (μικρό) ένα σωματίδιο του ρευστού, που αρχικά είναι στο σημείο \mathbf{x} , μετακινείται στο σημείο $\mathbf{x} + \mathbf{v}\delta t$. Η αντίστοιχη τιμή του μεγέθους φ θα γίνει $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t)$ και η μεταβολή του, $\delta\varphi$,

$$\delta\varphi = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t) - \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (2.24)$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα Taylor και παίρνουμε

$$\delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right) \delta t + O(\delta t^2). \quad (2.25)$$

Διαιρούμε δια δt και παίρνουμε το όριο όταν $\delta t \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi. \quad (2.26)$$

Το όριο αυτό συνήθως γράφεται $\frac{D\varphi}{Dt}$, για να διακρίνεται από τη μερική παράγωγο $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ και είναι η υλική παράγωγος, δηλαδή

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi. \quad (2.27)$$

Στις εφαρμογές, τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά αν οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που διέκουν την κίνηση των ρευστών αντικατασταθούν με τις αντίστοιχες γραμμικοποιημένες εξισώσεις. Θα γραμμικοποιήσουμε τις βασικές εξισώσεις.

Εξίσωση συνέχειας:

$$\rho_t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (2.28)$$

Εξίσωση Euler:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (2.29)$$

Καταστατική εξίσωση:

$$p = F(\rho), \quad (2.30)$$

όπου η συνάρτηση F εξαρτάται από τη φύση του υλικού. Θεωρούμε μικρές διαταραχές της ροής, δηλαδή μικρές αποκλίσεις από τις σταθερές $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0 = F(\rho_0)$. Έστω $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$

η συμπίκνωση. Εργαζόμενοι όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση (βλ. μέρος Α') καταλήγουμε, αντίστοιχα:

$$\delta_t + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{v}_t + c_0^2 \operatorname{grad} \delta = 0, \quad (2.32)$$

$$p = p_0 + \rho_0 c_0^2 \delta, \quad (2.33)$$

όπου $c_0^2 = f'(\rho_0)$, c_0 εκφράζει την ταχύτητα των ακουστικών κυμάτων. Από τις (2.31), (2.32), (2.33) απαλείφοντας την ταχύτητα (παραγωγίζοντας ως προς t την (2.31)), παίρνουμε

$$\delta_{tt} = c_0^2 \Delta \delta, \quad (2.34)$$

$$p_{tt} = c_0^2 \Delta p, \quad (2.35)$$

δηλαδή η συμπίκνωση και η πίεση (και η πυκνότητα) ικανοποιούν την κυματική εξίσωση στον \mathbb{R}^3 . Από τη γραμμικοποιημένη εξίσωση Euler (2.32), παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα δυναμικό ταχύτητας $\varphi(\mathbf{x}, t)$ έτσι ώστε

$$\mathbf{v} = c_0^2 \operatorname{grad} \varphi \quad (2.36)$$

και

$$\delta = -\varphi_t. \quad (2.37)$$

Από τις (2.31), (2.36), (2.37) προκύπτει

$$\varphi_{tt} = c_0^2 \Delta \varphi. \quad (2.38)$$

Θεωρούμε ακουστικά κύματα με αρμονική χρονική εξάρτηση, δηλαδή κύματα της μορφής

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad (2.39)$$

όπου $\omega > 0$ είναι η κυκλική συχνότητα. Με αντικατάσταση της φ από την (2.39) στην (2.38), παίρνουμε

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.40)$$

όπου $k = \omega/c_0$ είναι ο κυματικός αριθμός, δηλαδή το χωρικό τμήμα του ακουστικού κύματος είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Παρατηρήσεις

- (i) Σε πολλές εφαρμογές η πίεση εξαρτάται και από την ειδική εντροπία $S = S(\mathbf{x}, t)$ του ρευστού, δηλαδή η καταστατική εξίσωση (2.30) είναι $p = F(\rho, S)$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $c_0^2 = \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)$, όπου S_0 είναι η ειδική εντροπία σε κατάσταση ισορροπίας.
- (ii) Γενικότερα, αν λάβουμε υπόψη και άλλες φυσικές παραμέτρους, ο κυματικός αριθμός k μπορεί να είναι μιγαδικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε $\text{Im}k \geq 0$.

2.4 Συνοριακές συνθήκες

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις της συνέχειας και του Euler δεν επαρκούν για να ορισθεί η κίνηση ενός ακουστικού κύματος, όταν μέσα στο ρευστό υπάρχει ένα εμπόδιο, ο σκεδαστής. Σε μια επιφάνεια, που χωρίζει δύο διαφορετικά μέσα διάδοσης ενός ακουστικού κύματος, η ταχύτητά του μπορεί να αλλάξει αιφνιδίως με αποτέλεσμα το πεδίο να μην παραμείνει συνεχές. Επίσης η πίεση του ρευστού μπορεί να μηδενισθεί πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το δυναμικό ταχύτητας και συνεπώς το χωρικό του τμήμα $u(\mathbf{x})$ πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή, δηλαδή οι συνοριακές συνθήκες, εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητές του. Αναφέρουμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

- (i) Αν ο σκεδαστής είναι ένα σταθερό, ηχητικά σκληρό σώμα, δηλαδή η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας του κύματος είναι μηδέν πάνω στην επιφάνεια, τότε $\hat{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ και λόγω των (2.36), (2.39) έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{στην } S, \quad (2.41)$$

δηλαδή συνθήκη Neumann (*hard boundary condition*).

- (ii) Αν ο σκεδαστής είναι ένα σταθερό, ηχητικά μαλακό σώμα, δηλαδή πάνω στην επιφάνειά του δημιουργούνται συνθήκες μηδενισμού της πίεσης του ρευστού, τότε $p = 0$ και λόγω των (2.32), (2.33), (2.36), (2.39) έχουμε

$$u = 0 \quad \text{στην } S, \quad (2.42)$$

δηλαδή συνθήκη Dirichlet (*soft boundary condition*).

- (iii) Αν θεωρήσουμε ότι πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή υπάρχουν δυνάμεις τριβής του ιξώδους, που είναι και περισσότερο ρεαλιστικό, τότε έχουμε τη συνοριακή συνθήκη $\hat{n} \cdot v + (p - p_0)\psi = 0$, όπου ψ είναι μια συνάρτηση του $x \in S$ που εκφράζει την αντίσταση που προβάλλει ο σκεδαστής στην είσοδο του ακουστικού κύματος στο εσωτερικό του (acoustic impedance). Η συνθήκη αυτή ως προς το (χωρικό) δυναμικό της ταχύτητας έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 \quad \text{στην } S, \quad (2.43)$$

όπου λ (εν γένει μιγαδική συνάρτηση του $x \in S$) εξαρτάται από τις φυσικές παραμέτρους του σκεδαστή και την κυκλική συχνότητα του κύματος. Η (2.43) είναι μια συνοριακή συνθήκη τύπου Robin (*impedance boundary condition*).

- (iv) Τέλος, στην περίπτωση που ο σκεδαστής είναι διαπερατός, δηλαδή το ακουστικό κύμα εισέρχεται στο εσωτερικό του, τότε οι πιέσεις του ρευστού και οι κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας του κύματος πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή, από το εξωτερικό και το εσωτερικό του, είναι ίσες, δηλαδή $p_1 = p_2$, $\hat{n} \cdot v_1 = \hat{n} \cdot v_2$ (οι δείκτες 1 και 2 δηλώνουν το εσωτερικό και το εξωτερικό του σκεδαστή, αντίστοιχα). Όπως και προηγουμένως παίρνουμε

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \end{aligned} \right| \quad \text{στην } S, \quad (2.44)$$

δηλαδή συνθήκες σύνδεσης ή διαπερατότητας ή μεταφοράς (*transmission conditions*).

2.5 Συνθήκη ακτινοβολίας

Για να είναι καλά τοποθετημένο ένα πρόβλημα σκέδασης απαιτείται και μια κατάλληλη συνθήκη στο άπειρο, που είναι μέρος του θεμελιώδους πεδίου του προβλήματος (εξωτερικό πρόβλημα). Η συνθήκη αυτή πρέπει να εξασφαλίζει για το σκεδασμένο πεδίο (scattered field) u^{sc} δύο απαιτήσεις: Να έχει την απαραίτητη ασυμπτωτική τάξη εξασθένησης με την απόσταση από το σκεδαστή και να διαδίδεται από το σκεδαστή προς το άπειρο, δηλαδή ο σκεδαστής να δρα σαν πηγή. Ο σκεδαστής δεν παράγει ενέργεια, αλλά εκτρέπει την ενεργειακή ροή του προσπίπτοντος κύματος, δηλαδή παίρνει ενέργεια από το προσπίπτον κύμα και την επανεκπέμπει με τη μορφή του σκεδασμένου κύματος. Για το λόγο αυτό, η συνθήκη στο άπειρο ονομάζεται *συνθήκη ακτινοβολίας* (*radiation condition*). Μια συνθήκη ακτινοβολίας, που συνήθως χρησιμοποιούμε, είναι αυτή του Sommerfeld

$$\frac{x}{|x|} \cdot \text{grad } u^{sc}(x) - i k u^{sc}(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.45)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\frac{x}{|x|}$. Αποδεικνύεται ότι, αν ισχύει η (2.45), τότε

$$u^{sc}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.46)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις (βλ. άσκ. 2.7/20). Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε ακέραια λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld είναι μηδενική συνάρτηση. Τέλος, να σημειωθεί ότι η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld ισχύει ανεξάρτητα από τη θέση της αρχής των συντεταγμένων.

Μια ασθενέστερη συνθήκη ακτινοβολίας είναι αυτή των Magnus - Wilcox - Müller

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \left| \frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - i k u^{sc} \right|^2 ds = 0, \quad (2.47)$$

όπου S_r είναι η επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r , με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων.

Η πρώτη συνθήκη ακτινοβολίας, που χρησιμοποιήθηκε στα προβλήματα σκέδασης, διατυπώθηκε από τον Rayleigh το 1879 και είχε τη μορφή

$$u^{sc}(r) = f(\hat{r}; \hat{p}) \frac{e^{ikr}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.48)$$

όπου $r = |r|$, f το πλάτος σκέδασης και \hat{r} , \hat{p} τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις παρατήρησης και πρόσπτωσης αντίστοιχα.

Σημείωση

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς των συμβόλων "όμικρον" του Landau. Έστω $f, g : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{S}$. Ορίζουμε

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \rightarrow z_0, \quad (2.49)$$

όταν υπάρχει σταθερά $b > 0$ και περιοχή V_0 του z_0 έτσι ώστε

$$|f(z)| \leq b|g(z)|, \quad \forall z \in V_0 \cap S.$$

Επίσης ορίζουμε

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0, \quad (2.50)$$

όταν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει περιοχή V_0 του z_0 έτσι ώστε

$$|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|, \quad \forall z \in V_0 \cap S.$$

Αν $g(z) \neq 0$, $z \in V_0$, τότε

$$f(z) = o(g(z)) \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 0. \quad (2.51)$$

Μερικές χρήσιμες σχέσεις, που συνδέουν τα δύο σύμβολα και προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς, για $z \rightarrow z_0$, είναι:

$$\begin{aligned} O(o(f)) &= o(O(f)) = o(o(f)) = o(f), \\ O(f)o(g) &= o(fg), \\ O(f)O(g) &= O(fg), \\ O(f) + o(f) &= O(f). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Για την ολοκλήρωση ισχύει

$$f = O(g), z \rightarrow z_0 \Rightarrow \int_z^{z_0} f(t) dt = O\left(\int_z^{z_0} |g(t)| dt\right), z \rightarrow z_0, \quad (2.53)$$

ενώ για την παραγωγή ισχύει

$$f = O(g), z \rightarrow z_0 \not\Rightarrow f' = O(g'), z \rightarrow z_0.$$

2.6 Προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων

Έστω D ένας σκεδαστής, δηλαδή ένα φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με C^2 -σύνορο. Ένα ακουστικό κύμα u^{inc} προσπίπτει πάνω στο σκεδαστή D . Το προσπίπτον (incident) κύμα μπορεί να είναι είτε επίπεδο είτε σφαιρικό. Το επίπεδο ακουστικό κύμα (plane wave) έχει τη μορφή

$$u^{inc}(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{d}}) = e^{ik\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.54)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση διάδοσής του και k είναι ο κυματικός αριθμός. Το σφαιρικό ακουστικό κύμα (spherical wave), που παράγει μια σημειακή πηγή (point source) τοποθετημένη στη θέση \mathbf{x}_0 έχει τη μορφή

$$u_{\mathbf{x}_0}^{inc}(\mathbf{x}) = A \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \quad (2.55)$$

όπου $A \in \mathbb{C}$ μια σταθερά. Να σημειωθεί ότι το προσπίπτον ακουστικό κύμα (2.54) ή (2.55) είναι μια λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$. Στον εξωτερικό του σκεδαστή χώρο το ολικό ακουστικό πεδίο u είναι

$$u = u^{inc} + u^{sc}, \quad (2.56)$$

όπου το σχεδασμένο πεδίο u^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.45). Οι συνοριακές συνθήκες, που ικανοποιεί η u πάνω στην επιφάνεια του σχεδαστή, εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητές του, όπως έχουμε αναφέρει. Διατυπώνουμε μερικά απλά προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων.

(i) *Ηχητικά μαλακός σχεδαστής:*

Να ορισθεί συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ u = 0 & \text{στο } \partial D, \\ u = u^{inc} + u^{sc} & \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus D, \\ \frac{x}{|x|} \cdot \text{grad } u^{sc} - iku^{sc} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), & |x| \rightarrow \infty, \\ \text{ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.} \end{cases} \quad (2.57)$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι η u^{inc} είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz, τότε στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την u^{sc} , που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και

$$\Delta u^{sc} + k^2 u^{sc} = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad u^{sc} = -u^{inc} \text{ στο } \partial D, \quad (2.58)$$

δηλαδή έχουμε ένα εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet για την u^{sc} .

(ii) *Ηχητικά σκληρός σχεδαστής:*

Διατυπώνεται όπως και στην περίπτωση του μαλακού σχεδαστή, όπου η συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂D έχει αντικατασταθεί από τη συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ στο } \partial D. \quad (2.59)$$

Εδώ, έχουμε ένα εξωτερικό πρόβλημα Neumann, δηλαδή αναζητούμε την u^{sc} που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και

$$\Delta u^{sc} + k^2 u^{sc} = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad \frac{\partial u^{sc}}{\partial n} = -\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \text{ στο } \partial D. \quad (2.60)$$

(iii) *Ανθεκτικός σχεδαστής:*

Διατυπώνεται όπως στην περίπτωση του μαλακού ή σκληρού σχεδαστή, όπου η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη έχει αντικατασταθεί από τη συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 \text{ στο } \partial D, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.61)$$

Η u^{sc} είναι λύση ενός εξωτερικού προβλήματος Robin, δηλαδή ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και

$$\Delta u^{sc} + k^2 u^{sc} = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad \frac{\partial u^{sc}}{\partial n} + \lambda u^{sc} = -\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} - \lambda u^{inc} \text{ στο } \partial D. \quad (2.62)$$

(iv) Διαπερατός σχεδαστής:

Να ορισθούν οι συναρτήσεις $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και $u_1 \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, που ικανοποιούν

$$\left[\begin{array}{l} \Delta u_0 + k_0^2 u_0 = 0 \\ \Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0 \\ u_0 = u_1 \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \\ u_0 = u^{inc} + u^{sc} \\ \frac{x}{|x|} \cdot \text{grad} u^{sc} - ik_0 u^{sc} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty, \\ \text{ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ \text{στο } D, \\ \text{στο } \partial D, \\ \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus D, \end{array} \quad (2.63)$$

Οι δείκτες 0 και 1 αναφέρονται στο εξωτερικό και το εσωτερικό του σχεδαστή, αντίστοιχα (ρ_0, ρ_1 : πυκνότητες).

Άλλα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων (resistive, conductive) αναφέρονται στην [1]. Στις [3], [4] διατυπώνεται ένα πρόβλημα ακουστικής σκέδασης με πολλαπλά διαπερατά στρώματα (multi-layered scatterer) και μη διαπερατό πυρήνα μαλακό ή σκληρό, (βλ. §3.5).

Παρατήρηση

Σε όλα τα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων έχουμε υποθέσει ότι οι φυσικές παράμετροι (π.χ. η πυκνότητα) του σχεδαστή και του μη φραγμένου χώρου διάδοσης των κυμάτων είναι σταθερές, δηλαδή είναι ομογενή μέσα. Στην περίπτωση που μεταβάλλονται οι φυσικές παράμετροι, τα αντίστοιχα προβλήματα δεν έχουν μελετηθεί πλήρως, υπάρχουν ανοικτά θέματα. Σαν ειδική περίπτωση, έχουμε θεωρήσει τα στρωματοποιημένα (stratified) υλικά, που είναι μέσα διάδοσης κυμάτων όπου οι φυσικές παράμετροι μεταβάλλονται μόνο ως προς τη μία συντεταγμένη της χωρικής μεταβλητής. Τέτοια υλικά υπάρχουν στη φύση, π.χ. στο νερό μιας λίμνης μπορούμε να θεωρήσουμε, με ικανοποιητική προσέγγιση, ότι η πυκνότητα μεταβάλλεται συναρτήσει μόνο του βάθους. Η μελέτη αυτών των προβλημάτων βασίζεται κυρίως στη φασματική ανάλυση των τελεστών των

προβλημάτων. Μια άλλη ειδική περίπτωση, που έχει μελετηθεί, [13], είναι όταν το μέσο διάδοσης του κύματος είναι μη ομογενές αλλά έχει συμπαγή φορέα. Τέλος, αναφέρουμε το πολυστρωματικό μοντέλο σχεδαστή, [3], [4], που είναι ένας κατά τμήματα ομογενής σχεδαστής. Όταν το πλήθος των στρωμάτων τείνει στο άπειρο μπορεί, με κατάλληλες υποθέσεις, να προσεγγίσει ένα μη ομογενή σχεδαστή.

2.7 Ασκήσεις

1. Να εκφράσετε την εξίσωση συνέχειας (2.6) σε κυλινδρικές, σφαιρικές και καρτεσιανές συντεταγμένες.
2. Αν ένα ρευστό είναι ακτινικά στρωματοποιημένο, δηλαδή $\rho = \rho(r, t)$, $\psi = \psi(r, t)$ και $\mathbf{v} = u(r, t)\hat{\mathbf{r}}$, όπου $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, να δείξετε ότι η εξίσωση συνέχειας (2.6) γίνεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = \psi(r, t).$$

Αν $\rho = \rho_0$ σταθ., $\psi = \frac{1}{r^2}$ και η ταχύτητα του ρευστού πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας είναι $\mathbf{v} = u(1, t)\hat{\mathbf{r}} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\rho_0} \sin t$, $t > 0$, να βρείτε την ταχύτητα του ρευστού πάνω στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $r = \frac{1}{\rho_0}$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{2}$.

(Απάντηση: $u\left(\frac{1}{\rho_0}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$).

3. Να αποδείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{v} = \left(\frac{-2xyz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{(x^2 - y^2)z}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

είναι δυνατόν να εκφράζει ταχύτητα κίνησης ενός ασυμπίεστου τέλει ρευστού. Είναι αυτή η κίνηση αστρόβιλη;

4. Έστω το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} = (2xye^z, x^2e^z, x^2ye^z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. (i) Να αποδείξετε ότι είναι αστρόβιλο. (ii) Να βρείτε ένα δυναμικό του.

5. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{v} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right), (x, y, z) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}).$$

να εξετάσετε αν είναι αστρόβιλο και συντηρητικό. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

6. Αν το δυναμικό φ της ταχύτητας ενός ρευστού με $\rho = \text{σταθ.}$, είναι μια C^2 συνάρτηση και σταθερή πάνω στο σύνορο του Ω , τότε να αποδείξετε ότι η φ έχει την ίδια σταθερή τιμή και στο εσωτερικό του Ω .

7. Να εκφράσετε την εξίσωση (2.18) σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.
8. Αν για ένα ρευστό που κινείται με ταχύτητα \mathbf{v} υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης \mathbf{f} ισχύει $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{f} \cdot \text{curl} \mathbf{f} = 0$.
9. Να αποδείξετε ότι το πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{r}$ με $f \in C^1$ είναι αστρόβιλο.
10. Να αποδείξετε ότι κατά τη διάδοση ενός ακουστικού κύματος σε ένα ρευστό, η πυκνότητα του ρευστού ικανοποιεί την κυματική εξίσωση.
11. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})$, όπου \mathbf{a}, \mathbf{b} σταθερά διανύσματα, είναι ένα δυναμικό του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{b})$.
12. Να αποδείξετε τη διανυσματική ταυτότητα $\text{grad} v^2 = 2\mathbf{v} \times \text{curl} \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$.
13. Αν φ είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \text{curl} \hat{\mathbf{a}} \varphi$ και $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = k^{-1} \text{curl} \mathbf{F}_1(\mathbf{r})$, όπου $\hat{\mathbf{a}}$ τυχαίο σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα, είναι λύσεις της εξίσωσης $\text{curl} \text{curl} \mathbf{F} = k^2 \mathbf{F}$.
14. Αν τα C^2 διανυσματικά πεδία \mathbf{F} και \mathbf{G} ικανοποιούν τις σχέσεις $\text{curl} \mathbf{F} = \mathbf{G}$, $\text{curl} \mathbf{G} = \mathbf{F}$, να αποδείξετε ότι

$$\Delta \mathbf{F} + \mathbf{F} = \Delta \mathbf{G} + \mathbf{G} = \mathbf{0}, \quad \text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G}^2 - \mathbf{F}^2.$$

15. Έστω $u = u(\mathbf{r})$, $v = v(\mathbf{r})$ με $f(u, v) = 0$ για τυχούσα συνάρτηση $f \in C^1$. Να αποδείξετε ότι $\text{grad} u \times \text{grad} v = \mathbf{0}$ (u, v : συναρτησιακώς εξαρτημένες).
16. Να επαληθεύσετε ότι το προσπίπτον ακουστικό κύμα (2.54) είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$.
17. Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $g(\mathbf{r}) = r^{-1} \exp(ik\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r})$, $r \neq 0$ είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz, και να συμπεράνετε ότι η συνάρτηση $f(\mathbf{r}) = r^{-1}$, $r \neq 0$ είναι λύση της εξίσωσης Laplace.
18. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων για διαπερατό σχεδαστή, που στο εσωτερικό του έχει ένα μαλακό ή σκληρό ή διαπερατό πυρήνα.
19. Αν το σχεδασμένο πεδίο u^{sc} ορίζεται στην επιφάνεια S_r μιας σφαίρας ακτίνας r , να δικαιολογήσετε ότι η συνθήκη ακτινοβολίας (2.45) του Sommerfeld γίνεται

$$r \left(\frac{\partial u^{sc}(\mathbf{r})}{\partial r} - ik u^{sc}(\mathbf{r}) \right) \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } r \rightarrow \infty.$$

20. Να αποδείξετε ότι κάθε λύση u της εξίσωσης Helmholtz, που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, έχει την ασυμπτωτική μορφή

$$u(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$.

3 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε τα θεωρήματα σκέδασης, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον από μαθηματική και φυσική άποψη, για έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να αποδείξει αυτά τα θεωρήματα και για άλλα προβλήματα ακουστικής σκέδασης (π.χ. ηχητικά σκληρό, διαπερατό σκεδαστή κ.ά.). Επίσης, αντίστοιχα θεωρήματα αποδεικνύονται και στη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων [5], [6], [7], [11], [17]. Να σημειωθεί ότι πολλά από τα αποτελέσματα αυτά έχουν δημοσιευθεί πρόσφατα, ενώ αντίστοιχα προβλήματα που αναφέρονται σε σφαιρικά κύματα είναι υπό μελέτη.

3.1 Προκαταρκτικά

Υπενθυμίζουμε τα θεωρήματα Green και την εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz, που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτή την ενότητα. Τις αποδείξεις μπορεί να βρει κανείς στα βιβλία [12] και [13].

Έστω D ένα φραγμένο πεδίο του \mathbb{R}^3 κλάσης C^1 και \hat{n} το μοναδιαίο κάθετο στο ∂D διάνυσμα κατευθυνόμενο στο εξωτερικό του D . Τότε για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ ισχύει, το πρώτο θεώρημα Green,

$$\int_D (u\Delta v + \text{grad}u \cdot \text{grad}v)dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds \quad (3.1)$$

και για $u, v \in C^2(\bar{D})$ ισχύει, το δεύτερο θεώρημα Green,

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (3.2)$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$, που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη των προβλημάτων, είναι

$$\Phi(r, r') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}, \quad r \neq r'. \quad (3.3)$$

Έστω D ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο του \mathbb{R}^3 και $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ κλάσης C^2 . Αν $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ είναι μια λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, τότε

$$u(r) = \int_{\partial D} \left[u(r') \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial n(r')} - \Phi(r, r') \frac{\partial u(r')}{\partial n} \right] ds(r'), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \quad (3.4)$$

Η ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.4) δίνει και το σχεδασμένο ακουστικό πεδίο u^s (αφού u^s είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz, που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld) στον $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ αν γνωρίζουμε το σχεδασμένο πεδίο και την κάθετη παράγωγό του πάνω στην επιφάνεια του σχεδαστή.

3.2 Πλάτος σκέδασης

Η σπουδαιότερη συνάρτηση στις εφαρμογές της θεωρίας σκέδασης είναι το πλάτος σκέδασης (scattering amplitude, far field pattern). Συνδέεται με την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σχεδασμένου πεδίου για $r \rightarrow \infty$. Σχετικά ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 Κάθε λύση u^s της εξίσωσης Helmholtz, που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, έχει την ασυμπτωτική μορφή

$$u^s(\mathbf{r}) = h(kr)u_\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις, όπου $h(x) = e^{ix}/ix$ είναι η σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Η συνάρτηση u_∞ που ορίζεται στη μοναδιαία σφαίρα S^2 είναι το πλάτος σκέδασης ή μακρινό πεδίο και δίνεται από τον τύπο

$$u_\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u^s(\mathbf{r}') \frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n(\mathbf{r}')} - e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{\partial u^s(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (3.6)$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε τις ασυμπτωτικές μορφές

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

στη θεμελιώδη λύση (3.3) της εξίσωσης Helmholtz και παίρνουμε

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ik}{4\pi} h(kr) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} = \frac{ik}{4\pi} h(kr) \frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n(\mathbf{r}')} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Αντικαθιστούμε τις Φ και $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ από τις (3.9) και (3.10) στην (3.4) και το θεώρημα αποδεικνύεται.

Σημείωση

Στα θεωρήματα σκέδασης που θα αποδείξουμε στη συνέχεια, θεωρούμε ότι τα προσπίπτοντα ακουστικά κύματα είναι επίπεδα. Σφαιρικά κύματα θα μελετήσουμε στην §3.6. Αν το προσπίπτον πάνω στο σκεδαστή επίπεδο ακουστικό κύμα είναι $u^i(r; \hat{p}) = e^{ik\hat{p}\cdot r}$, όπου $\hat{p} \in S^2$ η διεύθυνση διάδοσής του, θα γράφουμε $u(r; \hat{p})$, $u^s(r; \hat{p})$ και $u_\infty(\hat{r}; \hat{p})$ για να δηλώσουμε την εξάρτηση του ολικού εξωτερικού πεδίου, του σκεδασμένου πεδίου και του πλάτους σκέδασης αντίστοιχα, από τη διεύθυνση πρόσπτωσης \hat{p} .

Το πλάτος σκέδασης $u_\infty(\hat{r}; \hat{p})$ εκφράζει την ενέργεια που σκεδάζεται στη διεύθυνση \hat{r} για επίπεδη πρόσπτωση στη διεύθυνση \hat{p} .

Θεωρούμε το πρόβλημα σκέδασης για έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή. Να ορισθεί συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ τέτοια ώστε

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (3.11)$$

$$u = 0 \text{ στο } \partial D, \quad (3.12)$$

$$u = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D, \quad (3.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad (3.14)$$

όπου το όριο στην (3.14) ισχύει ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις \hat{r} . Το πρόβλημα αυτό, το οποίο στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $P(u^i)$, έχει μοναδική λύση, για κάθε προσπίπτον ακουστικό κύμα u^i (βλ. [4]). Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες σκέδασης για το $P(u^i)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$\{u, v\}_S = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (3.15)$$

όπου $S = \partial D$, που εισήγαγε ο Twersky στην εργασία του [24].

Λήμμα 3.2 Αν u_1^i, u_2^i είναι δύο προσπίπτοντα ακουστικά κύματα και u_1^s, u_2^s τα αντίστοιχα σκεδασμένα πεδία από έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή D , με $\partial D = S$, τότε ισχύει

$$\{u_1^i, u_2^s\}_S = \{u_2^i, u_1^s\}_S. \quad (3.16)$$

Απόδειξη

Αν u_1, u_2 είναι τα ολικά εξωτερικά πεδία, που αντιστοιχούν στα προσπίπτοντα ακουστικά κύματα u_1^i, u_2^i , δηλ. οι μοναδικές λύσεις των προβλημάτων $P(u_1^i), P(u_2^i)$ αντίστοιχα, τότε προφανώς

$$\{u_1, u_2\}_S = 0. \quad (3.17)$$

Θέτουμε στην (3.17) $u_j = u_j^i + u_j^s$, $j = 1, 2$ (από την (3.13)) και λόγω της διγραμμικότητας της (3.15), παίρνουμε,

$$\{u_1^i, u_2^i\}_S + \{u_1^i, u_2^s\}_S + \{u_1^s, u_2^i\}_S + \{u_1^s, u_2^s\}_S = 0. \quad (3.18)$$

Τα προσπίπτοντα ακουστικά κύματα u_j^i , $j = 1, 2$ είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στον \mathbb{R}^3 . Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα Green για τα u_j^i στο D και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \{u_1^i, u_2^i\}_S &= \int_S \left(u_1^i \frac{\partial u_2^i}{\partial n} - u_2^i \frac{\partial u_1^i}{\partial n} \right) ds = \int_D (u_1^i \Delta u_2^i - u_2^i \Delta u_1^i) dx \\ &= \int_D [u_1^i (-k^2 u_2^i) - u_2^i (-k^2 u_1^i)] dx = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Τα σκεδασμένα ακουστικά πεδία u_j^s , $j = 1, 2$ είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Θεωρούμε μια σφαίρα επιφανείας S_R , με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων, που βρίσκεται στο εσωτερικό του σκεδαστή, με ακτίνα R αρκετά μεγάλη ώστε να περιέχει στο εσωτερικό της το σκεδαστή. Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα Green στο χώρο D_R που βρίσκεται εξωτερικά της επιφάνειας S και εσωτερικά της S_R , για τις u_1^s, u_2^s και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \{u_1^s, u_2^s\}_S &= \{u_1^s, u_2^s\}_{S_R} - \int_{D_R} (u_1^s \Delta u_2^s - u_2^s \Delta u_1^s) dx \\ &= \{u_1^s, u_2^s\}_{S_R} - \int_{D_R} [u_1^s (-k^2 u_2^s) - u_2^s (-k^2 u_1^s)] dx \\ &= \{u_1^s, u_2^s\}_{S_R}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Για $R \rightarrow \infty$, περνάμε στη ζώνη ακτινοβολίας και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ασυμπτωτική μορφή (3.5) στην (3.20) και να πάρουμε

$$\{u_1^s, u_2^s\}_S = \{u_1^s, u_2^s\}_{S_\infty} = 0, \quad (3.21)$$

όπου $S_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} S_R$. Από τις (3.18), (3.19) και (3.21) έπεται η (3.16).

Τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε το *θεώρημα αμοιβαιότητας* (reciprocity theorem) για το μαλακό σκεδαστή.

Θεώρημα 3.3 Έστω $u^i(r; \hat{p}) = e^{ik\hat{p}\cdot r}$, $u^i(r; \hat{q}) = e^{ik\hat{q}\cdot r}$ δύο τυχόντα προσπίπτοντα ακουστικά κύματα σε ένα ηχητικά μαλακό σκεδαστή. Τότε ισχύει

$$u_\infty(\hat{p}; \hat{q}) = u_\infty(-\hat{q}; -\hat{p}). \quad (3.22)$$

Απόδειξη

Από την (3.6) έχουμε

$$u_\infty(\hat{p}; \hat{q}) = \frac{ik}{4\pi} \{u^s(\cdot; \hat{q}), \overline{u^i(\cdot; \hat{p})}\}_S, \quad (3.23)$$

όπου $u^i(r'; \hat{p}) = e^{ik\hat{p}\cdot r'}$ και $\overline{u^i(r'; \hat{p})} = e^{-ik\hat{p}\cdot r'} = u^i(r'; -\hat{p})$ είναι το συζυγές του προσπίπτοντος κύματος $u^i(r'; \hat{p})$, το οποίο επίσης είναι ένα προσπίπτον ακουστικό κύμα με αντίθετη διεύθυνση πρόσπτωσης.

Από τις (3.16) και (3.23) έχουμε

$$\begin{aligned} u_\infty(\hat{p}; \hat{q}) &= \frac{ik}{4\pi} \{u^s(\cdot; \hat{q}), u^i(\cdot; -\hat{p})\}_S \\ &= \frac{ik}{4\pi} \{u^s(\cdot; -\hat{p}), u^i(\cdot; \hat{q})\}_S \\ &= \frac{ik}{4\pi} \{u^s(\cdot; -\hat{p}), \overline{u^i(\cdot; \hat{q})}\}_S \\ &= u_\infty(-\hat{q}; -\hat{p}), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το θεώρημα.

Σημείωση

Από φυσική άποψη, με το θεώρημα αντιστροφής αποδεικνύεται ότι η ενέργεια που σκεδάζεται στη διεύθυνση \hat{p} για πρόσπτωση με διεύθυνση \hat{q} , ισούται με την ενέργεια που σκεδάζεται στη διεύθυνση $-\hat{q}$ για πρόσπτωση με διεύθυνση $-\hat{p}$.

Θα αποδείξουμε τώρα το γενικό θεώρημα σκέδασης για έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή.

Θεώρημα 3.4 Έστω $u^i(r; \hat{p}) = e^{ik\hat{p}\cdot r}$, $u^i(r; \hat{q}) = e^{ik\hat{q}\cdot r}$ δύο τυχόντα προσπίπτοντα ακουστικά κύματα σε έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή. Τότε ισχύει

$$u_\infty(\hat{p}; \hat{q}) + \overline{u_\infty(\hat{q}; \hat{p})} = \frac{-1}{2\pi} \int_{S^2} u_\infty(\hat{r}; \hat{q}) \overline{u_\infty(\hat{r}; \hat{p})} ds(\hat{r}). \quad (3.24)$$

Απόδειξη

Έστω $u(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}})$, $u(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{q}})$ τα ολικά εξωτερικά πεδία και $u^s(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}})$, $u^s(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{q}})$ τα σκεδασμένα πεδία, που αντιστοιχούν στα $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}})$ και $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{q}})$. Από τη διγραμμικότητα της μορφής $\{ \cdot, \cdot \}_S$ και τη σχέση $u = u^i + u^s$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \overline{\{u(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} &= \overline{\{u^i(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^i(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} + \overline{\{u^i(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^s(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} \\ &+ \overline{\{u^s(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^i(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} + \overline{\{u^s(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^s(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Από την (3.12) έχουμε $u = \bar{u} = 0$ στην S , συνεπώς

$$\overline{\{u(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} = 0. \quad (3.26)$$

Από την (3.19) έχουμε

$$\overline{\{u^i(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^i(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} = 0, \quad (3.27)$$

αφού \bar{u}^i και u^i είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης Helmholtz. Από την (3.23) έπεται

$$\overline{\{u^i(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^s(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} = -\frac{4\pi}{ik} u_\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{q}}), \quad (3.28)$$

$$\overline{\{u^s(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^i(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} = -\frac{4\pi}{ik} \overline{u_\infty(\hat{\mathbf{q}}; \hat{\mathbf{p}})}. \quad (3.29)$$

Όπως στο Λήμμα 3.2, σχέση (3.20), βρίσκουμε

$$\overline{\{u^s(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^s(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} = \overline{\{u^s(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^s(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_{S_R}}, \quad (3.30)$$

όπου S_R σφαίρα με ακτίνα R αρκετά μεγάλη, ώστε να περιέχει το σκεδαστή. Για $R \rightarrow \infty$ μπορούμε να κάνουμε χρήση της ασυμπτωτικής μορφής (3.5) για τα σκεδασμένα πεδία. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{\{u^s(\cdot; \hat{\mathbf{p}}), u^s(\cdot; \hat{\mathbf{q}})\}_S} &= 2ik \int_{S_\infty} |h(kr)|^2 u_\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{q}}) \overline{u_\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}})} ds(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{2i}{k} \int_{S^2} u_\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{q}}) \overline{u_\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}})} ds(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Από τις (3.25) - (3.31) έπεται η (3.24) και το θεώρημα αποδεικνύεται.

3.3 Ενεργειακές διατομές

Στα προβλήματα σκέδασης μας ενδιαφέρει η επίδραση που έχει ο σκεδαστής στην ενέργεια του κύματος. Ένα μέτρο αυτής της επίδρασης μας δίνει η ενεργειακή διατομή σκέδασης σ_s (scattering

cross-section), που εκφράζει το πηλίκον του μέσου ρυθμού με τον οποίο σκεδάζεται η ενέργεια, προς το μέσο ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια του προσπίπτοντος κύματος διαπερνάει τη μοναδιαία επιφάνεια την κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης.

Οι συναρτήσεις ενεργειακής ροής (power flux) στη θεωρία ακουστικής σκέδασης έχουν τη μορφή

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho\omega} \text{Im}[\overline{f(\mathbf{r})} \text{grad} f(\mathbf{r})], \quad (3.32)$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα και ρ η πυκνότητα του μέσου διάδοσης. Για $f(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r})$, ορίζεται η προσπίπτουσα ενεργειακή ροή $I^i(\mathbf{r})$, για $f(\mathbf{r}) = u^s(\mathbf{r})$ ορίζεται η σκεδασμένη ενεργειακή ροή $I^s(\mathbf{r})$ και για $f(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})$, όπου $u(\mathbf{r})$ το ολικό εξωτερικό πεδίο, ορίζεται η ολική ενεργειακή ροή $I^t(\mathbf{r})$.

Η προσπίπτουσα ενεργειακή ροή του $u^i(\mathbf{r}) = e^{ik\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}$ κατά τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{d}}$ διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος υπολογίζεται:

$$\hat{\mathbf{d}} \cdot I^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho\omega} \text{Im} \left[e^{-ik\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} i k e^{ik\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}} \right] = \frac{k}{\rho\omega}. \quad (3.33)$$

Το σκεδασμένο πεδίο μακριά από το σκεδαστή συμπεριφέρεται σαν ένα σφαιρικό κύμα, όπως προκύπτει από την (3.5), και συνεπώς κατά τη διεύθυνση παρατήρησης η ακτινική ενεργειακή ροή σκέδασης είναι

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot I^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho\omega} \text{Im} \left[\overline{u^s(\mathbf{r})} \frac{\partial u^s(\mathbf{r})}{\partial r} \right], \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld (3.14) και τις ασυμπτωτικές μορφές (3.5), (2.46), παίρνουμε

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot I^s(\mathbf{r}) = \frac{k}{\rho\omega} |u^s(\mathbf{r})|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{k\rho\omega r^2} |u_\infty(\hat{\mathbf{r}})|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

Αν υποθέσουμε ότι η σκεδασμένη ροή πάνω σε μια μεγάλη σφαίρα ακτίνας r , είναι η ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, τότε η ολική σκεδασμένη ενεργειακή ροή που διέρχεται από αυτή τη σφαίρα είναι

$$4\pi r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot I^s(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{k\rho\omega} |u_\infty(\hat{\mathbf{r}})|^2 + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.36)$$

Ορίζουμε τη διαφορική ενεργειακή διατομή σκέδασης $\sigma(\hat{\mathbf{r}})$,

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot I^s(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{d}} \cdot I^i(\mathbf{r})}, \quad (3.37)$$

δηλαδή η $\sigma(\hat{r})$ εκφράζει το ποσό της ενέργειας που σχεδάζεται στη διεύθυνση παρατήρησης \hat{r} σε σχέση με το ποσό της ενέργειας που προσπίπτει στο σχεδαστή κατά τη διεύθυνση \hat{d} . Η $\sigma(\hat{r})$ μετριέται σε μονάδες εμβαδού. Από τις σχέσεις (3.35), (3.36) και (3.37) προκύπτει

$$\sigma(\hat{r}) = \frac{4\pi}{k^2} |u_\infty(\hat{r})|^2. \quad (3.38)$$

Η ενεργειακή διατομή σκέδασης σ_s ορίζεται ως ο μέσος όρος της διαφορικής ενεργειακής διατομής σκέδασης ως προς όλες τις διευθύνσεις, δηλαδή

$$\sigma_s = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \sigma(\hat{r}) ds(\hat{r}) \quad (3.39)$$

και λόγω της (3.38)

$$\sigma_s = \frac{1}{k^2} \int_{S^2} |u_\infty(\hat{r})|^2 ds(\hat{r}). \quad (3.40)$$

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται μια σχέση που συνδέει την ενεργειακή διατομή σκέδασης σ_s με το σχεδασμένο πεδίο u^s και την κάθετη παράγωγο της πάνω στην επιφάνεια του σχεδαστή.

Θεώρημα 3.5 Η ενεργειακή διατομή σκέδασης δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_s = \frac{1}{k} \text{Im} \int_S \overline{u^s(\mathbf{r})} \frac{\partial u^s(\mathbf{r})}{\partial n} ds(\mathbf{r}). \quad (3.41)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε μια σφαίρα επιφάνειας S_R με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα R αρκετά μεγάλη ώστε να περιέχει το σχεδαστή D . Για $R \rightarrow \infty$, χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική μορφή (3.5) και το ολοκλήρωμα της (3.40) μετασχηματίζεται στο

$$\sigma_s = \int_{S_\infty} |u^s(\mathbf{r})|^2 ds(\mathbf{r}), \quad (3.42)$$

όπου S_∞ είναι η επιφάνεια της σφαίρας με ασυμπτωτικά άπειρη ακτίνα. Από την (3.42) και τη συνθήκη ακτινοβολίας προκύπτει

$$\sigma_s = \frac{1}{k} \text{Im} \int_{S_\infty} \overline{u^s(\mathbf{r})} \frac{\partial u^s(\mathbf{r})}{\partial n} ds(\mathbf{r}). \quad (3.43)$$

Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα Green στο χώρο D_R που περιέχεται μεταξύ της επιφάνειας S του σχεδαστή και της S_R και παίρνουμε (όπως στο Λήμμα 3.3),

$$\{\overline{u^s}, u^s\}_{S_R} - \{\overline{u^s}, u^s\}_S = \int_{D_R} (\overline{u^s} \Delta u^s - u^s \Delta \overline{u^s}) dv. \quad (3.44)$$

Το χωρικό ολοκλήρωμα της (3.44) είναι μηδέν, αφού η u^s είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D_R και $k \in \mathbb{R}$. Για $R \rightarrow \infty$, από την (3.44) παίρνουμε

$$Im \int_{S_\infty} \overline{u^s(r)} \frac{\partial u^s(r)}{\partial n} ds(r) = Im \int_S \overline{u^s(r)} \frac{\partial u^s(r)}{\partial n} ds(r). \quad (3.45)$$

Από τις (3.43) και (3.45) προκύπτει το αποτέλεσμα.

Στο θεώρημα αυτό η ενεργειακή διατομή σκέδασης δίνεται συναρτήσει του σκεδασμένου πεδίου και της κάθετης παραγώγου του πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή. Η αντίστοιχη έκφραση, όπου το σκεδασμένο πεδίο u^s έχει αντικατασταθεί από το ολικό εξωτερικό πεδίο u , χρησιμοποιείται για να οριστεί η ενεργειακή διατομή απορρόφησης (absorption cross section) σ_α , δηλαδή

$$\sigma_\alpha = -\frac{1}{k} Im \int_S \overline{u(r)} \frac{\partial u(r)}{\partial n} ds(r) = \frac{1}{k} Im \int_S u(r) \frac{\partial \overline{u(r)}}{\partial n} ds(r). \quad (3.46)$$

Το αρνητικό πρόσημο στη (12?) δηλώνει ότι η ενεργειακή ροή εισέρχεται στο σκεδαστή (η ολοκλήρωση γίνεται κατά την εσωτερική κάθετο $-\hat{n}$). Είναι προφανές ότι για το μαλακό σκεδαστή ($u|_S = 0$) και για το σκληρό σκεδαστή ($\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$) η ενεργειακή διατομή απορρόφησης είναι μηδέν. Το ίδιο ισχύει και για το διαπερατό σκεδαστή χωρίς απορρόφηση ενέργειας, όπως περιγράφεται στην (2.6 (iv)). Για τον ανθεκτικό σκεδαστή ($\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u|_S = 0$) είναι $\sigma_\alpha = 0$ αν $Im(\lambda) = 0$ και $\sigma_\alpha \neq 0$ αν $Im(\lambda) \neq 0$.

Τέλος ορίζουμε την αποσβενημένη ενεργειακή διατομή σ_e (extinction cross section)

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_\alpha, \quad (3.47)$$

η οποία μετράει την ολική ενέργεια που ο σκεδαστής αποσπά από το προσπίπτον κύμα είτε με απορρόφηση είτε με σκέδαση.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται μια σχέση που συνδέει την ενεργειακή διατομή με το πλάτος σκέδασης και είναι γνωστό σαν οπτικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.6 Για έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή ισχύει

$$\sigma_s = -\frac{4\pi}{k^2} Re [u_\infty(\hat{p}; \hat{p})]. \quad (3.48)$$

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας το γενικό θεώρημα σκέδασης 3.4 για $\hat{p} = \hat{q}$ και λαμβάνοντας υπόψη την (3.40) το

θεώρημα αποδεικνύεται.

Παρατηρήσεις

- (i) Το οπτικό θεώρημα ισχύει και για άλλα προβλήματα ακουστικής σκέδασης. Αντίστοιχο θεώρημα ισχύει και στη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων [6] και ελαστικών κυμάτων [15].
- (ii) Η φυσική σημασία του τύπου (3.48) είναι: Αν γνωρίζουμε την ενέργεια που σκεδάζεται στη διεύθυνση πρόσπτωσης τότε μπορούμε να βρούμε την ολική ενέργεια που σκεδάζει το σώμα.
- (iii) Από τις (3.40), (3.48) συμπεραίνουμε ότι $Re[u_\infty(\hat{p}; \hat{p})] \neq 0$, $\hat{p} \in S^2$, γιατί αν $Re[u_\infty(\hat{p}; \hat{p})] = 0$ για κάποιο $\hat{p} \in S^2$ τότε $u_\infty(\hat{r}; \hat{p}) = 0$ για κάθε $\hat{r} \in S^2$, δηλαδή δεν υπάρχει σκεδαστής αφού δεν σκεδάζεται ενέργεια σε καμία διεύθυνση.

3.4 Συναρτήσεις Herglotz. Τελεστής μακρινού πεδίου

Θεωρούμε τώρα ότι το προσπίπτον ακουστικό πεδίο είναι μια κυματική συνάρτηση Herglotz u_h^i , δηλαδή μια λύση της εξίσωσης Helmholtz στον \mathbb{R}^3 , της μορφής

$$u_h^i(\mathbf{r}) = \int_{S^2} h(\hat{q}) e^{ik\hat{q}\cdot\mathbf{r}} ds(\hat{q}), \quad (3.49)$$

όπου $h \in L^2(S^2)$ είναι ο πυρήνας της u_h^i . Οι συναρτήσεις Herglotz είναι υπέρθεση των επιπέδων κυμάτων με συνάρτηση βάρους $h \in L^2(S^2)$. Το πλάτος σκέδασης, που αντιστοιχεί στο προσπίπτον κύμα u_h^i είναι επίσης υπέρθεση των πλατών σκέδασης $u_\infty(\cdot; \hat{q})$ που αντιστοιχούν σε πρόσπτωση κατά τη διεύθυνση \hat{q} , δηλαδή

$$u_{\infty, h}(\hat{r}) = \int_{S^2} h(\hat{q}) u_\infty(\hat{r}; \hat{q}) ds(\hat{q}). \quad (3.50)$$

Αποδεικνύεται (βλ. [13] σελ. 60) ότι μια ακέραια λύση u της εξίσωσης Helmholtz είναι συνάρτηση Herglotz τότε και μόνο τότε αν

$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{r \leq R} |u(\mathbf{r})|^2 dx < \infty. \quad (3.51)$$

Αν ονομάσουμε u_g^s , u_h^s τα σκεδασμένα πεδία και $u_{\infty, g}$, $u_{\infty, h}$ τα πλάτη σκέδασης που αντιστοιχούν στα προβλήματα $P(u_g^s)$, $P(u_h^s)$, αντίστοιχα, τότε έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις.

Πόρισμα 3.7 Για έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή ισχύουν οι σχέσεις

$$\{u_g^s, \overline{u_h^i}\}_S = \frac{4\pi}{ik} \int_{S^2} u_{\infty,g}(\hat{r}) \overline{h(\hat{r})} ds(\hat{r}), \quad (3.52)$$

$$\{\overline{u_g^s}, u_h^i\}_S = \frac{2i}{k} \int_{S^2} \overline{u_{\infty,g}(\hat{r})} u_{\infty,h}(\hat{r}) ds(\hat{r}). \quad (3.53)$$

Απόδειξη

Από την (3.23) έχουμε

$$u_{\infty,g}(\hat{r}) = \frac{ik}{4\pi} \{u_g^s, \overline{u^i(\cdot; \hat{r})}\}_S. \quad (3.54)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.54) επί $\overline{h(\hat{r})}$, ολοκληρώνουμε πάνω στη μοναδιαία σφαίρα και έχουμε την (3.52). Η (3.53) είναι απλή συνέπεια της (3.31).

Ορίζουμε, τέλος, τον τελεστή πλάτους σκέδασης ή τελεστή μακρινού πεδίου (far field operator) $\mathbb{F} : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$, που αντιστοιχεί στο πλάτος σκέδασης $u_{\infty}(\hat{r}; \hat{q})$,

$$(\mathbb{F}h)(\hat{r}) = \int_{S^2} u_{\infty}(\hat{r}; \hat{q}) h(\hat{q}) ds(\hat{q}). \quad (3.55)$$

Σημειώνουμε ότι $\mathbb{F}h$ είναι το πλάτος σκέδασης του προβλήματος $P(u_h^i)$, δηλαδή

$$(\mathbb{F}h)(\hat{r}) = u_{\infty,h}(\hat{r}). \quad (3.56)$$

Ο τελεστής μακρινού πεδίου χρησιμοποιείται στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης. Η μέθοδος της υπέρθεσης των προσπιπτόντων πεδίων, όπως λέγεται, βασίζεται στη μελέτη της ολοκληρωτικής εξίσωσης πρώτου είδους $\mathbb{F}h = u_{\infty,h}$. Λεπτομερή ανάπτυξη της μεθόδου μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο [13], σελίδα 138.

Στο επόμενο θεώρημα, με (f, φ) συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(S^2)$, δηλαδή $(f, \varphi) = \int_{S^2} f \overline{\varphi} ds$.

Θεώρημα 3.8 Αν \mathbb{F} είναι ο τελεστής πλάτους σκέδασης για ένα ηχητικά μαλακό σκεδαστή και $h, g \in L^2(S^2)$, τότε

$$(\mathbb{F}h, g) + (h, \mathbb{F}g) = \frac{-1}{2\pi} (\mathbb{F}h, \mathbb{F}g). \quad (3.57)$$

Οι ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{C}$ του \mathbb{F} βρίσκονται στον κύκλο

$$|\lambda|^2 + 4\pi \operatorname{Re}(\lambda) = 0. \quad (3.58)$$

Απόδειξη

Η (3.57) προκύπτει από το γενικό θεώρημα σκέδασης 3.4, αν πάρουμε σαν προσπίπτοντα πεδία τις κυματικές συναρτήσεις Herglotz u_h^i, u_g^i και χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (3.52), (3.53). Έστω $\mathbb{F} g = \lambda g, \lambda \in \mathbb{C}$. Θέτουμε στην (3.57) $h = g \neq 0$ και παίρνουμε

$$\lambda \|g\|^2 + \bar{\lambda} \|g\|^2 = \frac{-1}{2\pi} |\lambda|^2 \|g\|^2, \quad (3.59)$$

από την οποία έπεται η (3.58).

3.5 Πολυστρωματικός ακουστικός σκεδαστής

Ο πολυστρωματικός σκεδαστής (multi-layer scatterer) αποτελείται από πολλά ηχητικά διαπερατά στρώματα, με σταθερές φυσικές παραμέτρους το καθένα, στο εσωτερικό των οποίων μπορεί να υπάρχει ένας σκληρός ή μαλακός πυρήνας. Η μελέτη πολυστρωματικών μοντέλων σκέδασης παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές, για δύο κυρίως λόγους: Πρώτον, όταν το πλήθος των στρωμάτων γίνεται πολύ μεγάλο (τείνει στο ∞) και το πάχος τους γίνεται πολύ μικρό (τείνει στο 0), τότε ο πολυστρωματικός σκεδαστής προσεγγίζει ικανοποιητικά ένα μη ομογενή σκεδαστή, δηλαδή ένα σκεδαστή του οποίου οι φυσικές παράμετροι, π.χ. η πυκνότητα, είναι συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής. Η προσέγγιση αυτή είναι σημαντική, αν ληφθεί υπόψη ότι το πρόβλημα σκέδασης από μη ομογενείς σκεδαστές δεν έχει μελετηθεί πλήρως. Δεύτερον, όταν επιλέξουμε κατάλληλα διαπερατά στρώματα (με κατάλληλες φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες), μπορούμε να επιτύχουμε επιθυμητά αποτελέσματα σκέδασης, δηλαδή ο πολυστρωματικός σκεδαστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα είδος “ρυθμιζόμενου σκεδαστή”. Μια τέτοια μελέτη για ομοεστιακά ελλειψοειδή έχει γίνει στην εργασία [3].

Στη συνέχεια περιγράφουμε έναν πολυστρωματικό σκεδαστή. Έστω D ένας σκεδαστής με C^2 -σύνορο S_0 . Το εσωτερικό του διαιρείται από τις C^2 επιφάνειες $S_j, j = 1, 2, \dots, N$, σε στρώματα $D_j, j = 1, 2, \dots, N + 1$. Κάθε επιφάνεια S_j περιβάλλει την S_{j+1} και $S_j \cap S_{j+1} = \emptyset$, για κάθε $j = 0, 1, \dots, N$. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \bar{n} στην επιφάνεια S_j διευθύνεται προς το εξωτερικό, δηλαδή προς το στρώμα D_j . Κάθε στρώμα D_j είναι ηχητικά διαπερατό και έχει σταθερή πυκνότητα $\rho_j, j = 1, 2, \dots, N + 1$. Το εξωτερικό του σκεδαστή, D_0 , είναι ένα άπειρο ομογενές μέσο διάδοσης με σταθερή πυκνότητα ρ_0 . Το ολικό ακουστικό πεδίο u_j στο $D_j, j = 0, 1, \dots, N + 1$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz με κυματικό αριθμό $k_j > 0$. Για το ολικό εξωτερικό πεδίο u_0 ισχύει

$$u_0 = u^i + u^s, \quad (3.60)$$

όπου u^i είναι το προσπίπτον και u^s το σκεδασμένο κύμα, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινο-

βολίας του Sommerfeld.

Το πρόβλημα ακουστικής σκέδασης για τον πολυστρωματικό σκεδαστή D διατυπώνεται ως εξής:

Να ορισθούν οι συναρτήσεις $u_j \in C^2(D_j) \cap C^1(\bar{D}_j)$, που ικανοποιούν

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0 \text{ στο } D_j, \quad j = 0, 1, \dots, N+1 \quad (3.61)$$

$$u_j = u_{j+1} \text{ στην } S_j, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial n} = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial n} \text{ στην } S_j, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.63)$$

$$\hat{r} \cdot \text{grad} u^s - ik_0 u^s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.64)$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις \hat{r} .

Η ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης αυτού του προβλήματος έχουν μελετηθεί στην εργασία [4]. Εδώ θα εξετάσουμε τα βασικά θεωρήματα σκέδασης για τον πολυστρωματικό σκεδαστή D .

Λήμμα 3.9 Αν u_0, v_0 είναι τα ολικά εξωτερικά ακουστικά πεδία, που οφείλονται σε πρόσπτωση των κυμάτων u^i, v^i πάνω στον πολυστρωματικό σκεδαστή D , τότε ισχύει

$$\{u_0, v_0\}_{S_0} = 0. \quad (3.65)$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (3.62), (3.63) για $j = 0$, παίρνουμε

$$\{u_0, v_0\}_{S_0} = \frac{\rho_0}{\rho_1} \int_{S_0} \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds. \quad (3.66)$$

Στο στρώμα D_1 , με $\partial D_1 = S_0 \cup S_1$, εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα Green για τις συναρτήσεις u_1, v_1

$$\int_{S_0} \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds = \int_{S_1} \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds + \int_{D_1} (u_1 \Delta v_1 - v_1 \Delta u_1) dx. \quad (3.67)$$

Τα πεδία u_1, v_1 είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο D_1 , επομένως

$$\int_{D_1} (u_1 \Delta v_1 - v_1 \Delta u_1) dx = \int_{D_1} [u_1(-k_1^2 v_1) - v_1(-k_1^2 u_1)] dx = 0. \quad (3.68)$$

Από τις (3.66) - (3.68) παίρνουμε

$$\{u_0, v_0\}_{S_0} = \frac{\rho_0}{\rho_1} \{u_1, v_1\}_{S_1}. \quad (3.69)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\int_{D_j} (u_j \Delta v_j - v_j \Delta u_j) dx = \int_{D_j} [u_j(-k_j^2 v_j) - v_j(-k_j^2 u_j)] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N+1, \quad (3.70)$$

αφού $\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0$ και $\Delta v_j + k_j^2 v_j = 0$, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες διαπερατότητας (3.62) και (3.63) και εφαρμόζοντας πάλι το δεύτερο θεώρημα Green για τις συναρτήσεις u_j, v_j στα στρώματα $D_j, j = 2, 3, \dots, N+1$ παίρνουμε, επαγωγικά,

$$\{u_0, v_0\}_{S_0} = \frac{\rho_0}{\rho_N} \{u_N, v_N\}_{S_N} = 0. \quad (3.71)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2 και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στο μαλακό σχεδαστή αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.10 Έστω $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}) = e^{ik\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}}$, $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{q}}) = e^{ik\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}}$ δύο ακουστικά κύματα προσπίπτοντα στον πολυστρωματικό σχεδαστή D . Τότε ισχύουν

$$(i) \quad u_\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{q}}) = u_\infty(-\hat{\mathbf{q}}; -\hat{\mathbf{p}}),$$

$$(ii) \quad u_\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{q}}) + \overline{u_\infty(\hat{\mathbf{q}}; \hat{\mathbf{p}})} = \frac{-1}{2\pi} \int_{S^2} u_\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{q}}) \overline{u_\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}})} ds(\hat{\mathbf{r}}),$$

$$(iii) \quad \sigma_s = -\frac{4\pi}{k^2} \text{Re}[u_\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{p}})].$$

Παρατήρηση

Αν το εσωτερικό στρώμα D_{N+1} του σχεδαστή είναι ένας μη διαπερατός, μαλακός ή σκληρός, πυρήνας, τότε τα τρία βασικά θεωρήματα σχέδασης ισχύουν πάλι. Για την απόδειξη της σχέσης (3.65) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το δεύτερο θεώρημα Green στο D_{N+1} , αφού τώρα δεν ορίζονται τα πεδία u_{N+1}, v_{N+1} . Στην περίπτωση όμως αυτή η ισχύς της (3.65) είναι άμεση αφού πάνω στην επιφάνεια $S_N = \partial D_{N+1}$ θα ισχύει $u_N = v_N = 0$ για το μαλακό πυρήνα ή $\frac{\partial u_N}{\partial n} = \frac{\partial v_N}{\partial n} = 0$ για το σκληρό πυρήνα.

3.6 Σφαιρικά ακουστικά κύματα

Θεωρούμε μια σημειακή πηγή, τοποθετημένη στη θέση \mathbf{r}_0 , που εκπέμπει σφαιρικά ακουστικά κύματα με κυματικό αριθμό k . Τα κύματα αυτά, όπως έχουμε αναφέρει, έχουν τη μορφή

$$u_{\mathbf{r}_0}(r) = A \frac{e^{ik|r-\mathbf{r}_0|}}{|r-\mathbf{r}_0|}, \quad r \neq r_0, \quad (3.72)$$

όπου A προσδιοριστέα σταθερά. Τα σφαιρικά κύματα είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στον $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_0\}$ και επιπλέον ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, ιδιότητα που δεν έχουν τα επίπεδα κύματα.

Τα σφαιρικά κύματα εμφανίζονται σε πολλές και σημαντικές εφαρμογές. Η ερευνητική δουλειά όμως, που έχει γίνει για σκέδαση σφαιρικών κυμάτων είναι πολύ περιορισμένη, ενώ αντίθετα για τα επίπεδα κύματα υπάρχει πλούσιο έργο. Είναι χαρακτηριστικό ότι η πρώτη αναφορά στα σφαιρικά κύματα γίνεται το 1956 από τον Jones στην εργασία του [18] και η πρώτη συλλογή αποτελεσμάτων σκέδασης σφαιρικών κυμάτων από σχεδαστές με απλά γεωμετρικά σχήματα γίνεται το 1969 από τους Bowman, Senior και Usieghi στο βιβλίο τους [10]. Πρόσφατα, ο Δάσιος κ.ά σε μια σειρά εργασιών μελετούν τη σκέδαση σφαιρικών ακουστικών κυμάτων σε χαμηλές συχνότητες (π.χ. [11], [16]). να σημειωθεί ότι, όπως προκύπτει από την (3.5), το σχεδασμένο πεδίο έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός εξερχόμενου σφαιρικού κύματος.

Θεωρούμε ένα σχεδαστή D και ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στον \mathbb{R}^3 με αρχή στο εσωτερικό του D . Ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα $u_{\mathbf{r}_0}^i$ προσπίπτει στον D . Από το $u_{\mathbf{r}_0}^i$ απαιτούμε να ικανοποιεί δύο ιδιότητες:

- (i) Όταν η απόσταση της σημειακής πηγής από το σχεδαστή γίνεται πολύ μεγάλη, τότε το σφαιρικό κύμα να εκφυλίζεται σε επίπεδο κύμα με διεύθυνση διάδοσης από την πηγή προς το σχεδαστή, $-\hat{\mathbf{r}}_0$, δηλαδή

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} u_{\mathbf{r}_0}^i(\mathbf{r}) = e^{-ik\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}} \equiv u^i(\mathbf{r}; -\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (3.73)$$

- (ii) Το σφαιρικό κύμα να μεταφέρει την ίδια ποσότητα ενέργειας από τη θέση \mathbf{r}_0 στην αρχή των αξόνων κατά τη διεύθυνση $-\hat{\mathbf{r}}_0$, την οποία μεταφέρει το αντίστοιχο επίπεδο κύμα, δηλαδή

$$-\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}_0}^i(\mathbf{0}) = -\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{0}), \quad (3.74)$$

όπου $\mathbf{I}_{\mathbf{r}_0}^i$, \mathbf{I}^i είναι οι προσπίπτουσες ενεργειακές ροές του σφαιρικού και του αντίστοιχου επιπέδου κύματος, αντίστοιχα.

Το προσπίπτον σφαιρικό κύμα που ικανοποιεί αυτές τις δύο απαιτήσεις είναι

$$u_{r_0}^i(r) = r_0 e^{-ikr_0} \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}. \quad (3.75)$$

Σχετικά, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.11 Για το σφαιρικό ακουστικό κύμα (3.75) ισχύουν

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} u_{r_0}^i(r) = u(r; -\hat{r}_0), \quad (3.76)$$

$$-\hat{r}_0 \cdot I_{r_0}^i(0) = -\hat{r}_0 \cdot I^i(0). \quad (3.77)$$

Απόδειξη

Η (3.76) αποδεικνύεται αν στην (3.75) χρησιμοποιήσουμε τις ασυμπτωτικές μορφές

$$|r-r_0| = r_0 - \hat{r}_0 \cdot r + O\left(\frac{1}{r_0}\right), \quad r_0 \rightarrow \infty, \quad (3.78)$$

$$\frac{r_0}{|r-r_0|} = 1 + O\left(\frac{1}{r_0}\right), \quad r_0 \rightarrow \infty. \quad (3.79)$$

Για την (3.77) υπολογίζουμε τις ενεργειακές ροές.

Σφαιρικό κύμα:

$$\begin{aligned} -\hat{r}_0 \cdot I_{r_0}^i(0) &= -\frac{\hat{r}_0}{\rho\omega} \cdot \text{Im} \left[\overline{u_{r_0}^i(r)} \text{grad} u_{r_0}^i(r) \right] \Big|_{r=0} \\ &= -\frac{1}{\rho\omega} \text{Im} \left[\overline{u_{r_0}^i(r)} \frac{\partial u_{r_0}^i(r)}{\partial r} \right] \Big|_{r=0} \\ &= -\frac{1}{\rho\omega} \text{Im} \left[\frac{1}{|r-r_0|} - ik \right] \Big|_{r=0} = \frac{k}{\rho\omega}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} = -\frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{ikR}}{R} = -\left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \quad (3.81)$$

(Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στην παραγωγή κατά τη διεύθυνση $-\hat{R}$).

Για το αντίστοιχο επίπεδο κύμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
-\hat{r}_0 \cdot I^i(0) &= -\frac{\hat{r}_0}{\rho\omega} \operatorname{Im} \left[\overline{u^i(r; -\hat{r}_0)} \operatorname{grad} u^i(r; -\hat{r}_0) \right] \Big|_{r=0} \\
&= -\frac{1}{\rho\omega} \operatorname{Im} \left[\overline{u^i(r; -\hat{r}_0)} \frac{\partial u^i(r; -\hat{r}_0)}{\partial r} \right] \Big|_{r=0} \\
&= -\frac{1}{\rho\omega} \operatorname{Im}(-ik) = \frac{k}{\rho\omega}.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Από τις (3.80) και (3.82) προκύπτει η (3.77).

Αν u_{r_0} , $u_{r_0}^s$, g_{r_0} και σ_{r_0} είναι το ολικό εξωτερικό πεδίο, το σχεδασμένο, το πλάτος σκέδασης και η ενεργειακή διατομή σκέδασης αντίστοιχα, που δημιουργεί το προσπίπτον σφαιρικό κύμα $u_{r_0}^i$ τότε, όπως και στα επίπεδα κύματα, έχουμε

$$u_{r_0}(r) = u_{r_0}^i(r) + u_{r_0}^s(r), \tag{3.83}$$

$$u_{r_0}^s(r) = h(kr)g_{r_0}(\hat{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \tag{3.84}$$

$$\sigma_{r_0} = \frac{1}{k^2} \int_{S^2} |g_{r_0}(\hat{r})|^2 ds(\hat{r}). \tag{3.85}$$

Θεωρούμε τώρα, δύο προσπίπτοντα σφαιρικά ακουστικά κύματα και αποδεικνύουμε μια σχέση αμοιβαιότητας, ανάλογη του θεωρήματος 3.3 των επιπέδων κυμάτων. Πρώτα αποδεικνύουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.12 Έστω $u_{r_0}^i$, $u_{r_1}^i$ δύο προσπίπτοντα σε ένα σχεδαστή σφαιρικά ακουστικά κύματα προερχόμενα από τις σημειακές πηγές στις θέσεις r_0 , r_1 αντίστοιχα. Θεωρούμε τη σφαίρα $S_0 \equiv S(r_0; R_0) = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r_0 - r| = R_0\}$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \{u_{r_0}^i, u_{r_1}^s\}_{S_0} = 4\pi r_0 e^{-ikr_0} u_{r_1}^s(r_0). \tag{3.86}$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.81), παίρνουμε

$$\{u_{r_0}^i, u_{r_1}^s\}_{S_0} = r_0 e^{-ikr_0} \int_{S_0} \left[\frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{\partial u_{r_1}^s(r)}{\partial n} - u_{r_1}^s(r) \left(\frac{1}{R_0} - ik \right) \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right] ds(r). \tag{3.87}$$

Αν στο τελευταίο ολοκλήρωμα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής και πάρουμε $R_0 \rightarrow 0$, προκύπτει ο τύπος (3.86).

Θεώρημα 3.13 Αν $u_{r_0}^i, u_{r_1}^i$ είναι δύο σφαιρικά ακουστικά κύματα προσπίπτοντα σε έναν ηχητικά μαλακό σκεδαστή και $u_{r_0}^s, u_{r_1}^s$ τα αντίστοιχα σκεδασμένα πεδία, τότε ισχύει

$$\frac{e^{ikr_0}}{r_0} u_{r_0}^s(r_1) = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} u_{r_1}^s(r_0) \quad (3.88)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση $u_{r_j} = u_{r_j}^i + u_{r_j}^s, j = 0, 1$ και λόγω της διγραμμικότητας του $\{\cdot, \cdot\}_S$ παίρνουμε

$$\{u_{r_0}, u_{r_1}\}_S = \{u_{r_0}^i, u_{r_1}^i\}_S + \{u_{r_0}^i, u_{r_1}^s\}_S + \{u_{r_0}^s, u_{r_1}^i\}_S + \{u_{r_0}^s, u_{r_1}^s\}_S, \quad (3.89)$$

όπου $S = \partial D$ το σύνορο του σκεδαστή D . Λόγω των συνοριακών συνθηκών ($u_{r_0} = u_{r_1} = 0$ στην S) έχουμε

$$\{u_{r_0}, u_{r_1}\}_S = 0. \quad (3.90)$$

Επίσης, όπως και στα επίπεδα κύματα, είναι

$$\{u_{r_0}^s, u_{r_1}^s\}_S = 0, \quad (3.91)$$

αφού οι $u_{r_0}^s, u_{r_1}^s$ είναι ομαλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Ομοίως, όπως στην περίπτωση των επιπέδων κυμάτων, (βλ. σχέση 3.19) έχουμε

$$\{u_{r_0}^i, u_{r_1}^i\}_S = 0, \quad (3.92)$$

αφού $u_{r_0}^i, u_{r_1}^i$ είναι ομαλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο D .

Για τον υπολογισμό των υπολοίπων δύο ολοκληρωμάτων εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε τις σφαιρικές επιφάνειες

$$S_j \equiv S(r_j, R_j) = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r_j - r| = R_j\}, \quad j = 0, 1, \quad (3.93)$$

$$S_R \equiv S(0, R) = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r| = R\}. \quad (3.94)$$

Η ακτίνα R είναι αρκετά μεγάλη, ώστε η S_R να περιβάλλει το σκεδαστή και τις σφαιρικές επιφάνειες S_0, S_1 . Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα Green για τις συναρτήσεις $u_{r_0}^i, u_{r_1}^s$ στο χώρο που

περιβάλλεται από τις επιφάνειες S_0, S_R , όπου οι $u_{r_0}^i, u_{r_1}^s$ είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz, και παίρνουμε

$$\{u_{r_0}^i, u_{r_1}^s\}_S = \{u_{r_0}^i, u_{r_1}^s\}_{S_0} + \{u_{r_0}^i, u_{r_1}^s\}_{S_R}. \quad (3.95)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους για $R_0 \rightarrow 0$, δίνεται από την (3.86). Το δεύτερο ολοκλήρωμα για $R \rightarrow \infty$ γίνεται μηδέν, αφού και οι δύο συναρτήσεις $u_{r_0}^i, u_{r_1}^s$ ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Επομένως

$$\{u_{r_0}^i, u_{r_1}^s\}_S = 4\pi r_0 e^{-ikr_0} u_{r_1}^s(r_0). \quad (3.96)$$

Ομοίως έχουμε

$$\{u_{r_1}^i, u_{r_0}^s\}_S = 4\pi r_1 e^{-ikr_1} u_{r_0}^s(r_1). \quad (3.97)$$

Από τις (3.89)-(3.92), (3.96) και (3.97) έπεται η (3.88).

Σημειώνουμε ότι για $r_0 \rightarrow \infty$ και $r_1 \rightarrow \infty$ η σχέση (3.88) γίνεται

$$u_\infty(\hat{r}_0; -\hat{r}_1) = u_\infty(\hat{r}_1; -\hat{r}_0), \quad (3.98)$$

δηλαδή η σχέση αντιστροφής (3.22), που ισχύει για τα επίπεδα ακουστικά κύματα.

Σφαιρικά κύματα και σφαιρικός σκεδαστής. Θεωρούμε έναν ηχητικά μαλακό σφαιρικό σκεδαστή ακτίνας α . Επιλέγουμε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ) με αρχή το κέντρο του σκεδαστή. Μια σημειακή πηγή τοποθετείται στη θέση $(0, 0, r_0)$, με $r_0 > \alpha$ και παράγει το σφαιρικό ακουστικό κύμα $u_{r_0}^i$. Στην περίπτωση αυτή είναι εύκολο να υπολογίσουμε το σκεδασμένο πεδίο $u_{r_0}^s$ και κατά συνέπεια το πλάτος σκέδασης g_{r_0} και την ενεργειακή διατομή σκέδασης σ_{r_0} . Αναπτύσσουμε το προσπίπτον κύμα σε σειρά ([2], σ. 440)

$$u_{r_0}^i(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad r < r_0, \quad (3.99)$$

όπου $h_n(kr_0)$ είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους, $j_n(kr)$ οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και $P_n(\cos \theta)$ τα πολυώνυμα Legendre, (βλ. [2]).

Το σκεδασμένο πεδίο αναπτύσσεται όπως το προσπίπτον, όπου λόγω της συνθήκης ακτινοβολίας, οι συναρτήσεις Bessel $j_n(kr)$ έχουν αντικατασταθεί από τις συναρτήσεις Hankel $h_n(kr)$, δηλαδή

$$u_{r_0}^s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} A_n h_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad r \geq \alpha, \quad (3.100)$$

όπου οι συντελεστές A_n ορίζονται από τη συνοριακή συνθήκη του μαλακού σχεδαστή

$$u_{r_0}(r, \theta) = u_{r_0}^i(r, \theta) + u_{r_0}^s(r, \theta) = 0, \text{ για } r = \alpha. \quad (3.101)$$

Επομένως, έχουμε

$$A_n = -\frac{j_n(k\alpha)}{h_n(k\alpha)}. \quad (3.102)$$

Το πλάτος σκέδασης υπολογίζεται από την (3.100), αν χρησιμοποιήσουμε την ασυμπτωτική σχέση ([2] σ. 439)

$$h_n(x) \sim (-i)^n h_0(x) \text{ καθώς } x \rightarrow \infty. \quad (3.103)$$

Είναι

$$g_{r_0}(\hat{r}) = -\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} \frac{j_n(k\alpha)}{h_n(k\alpha)} P_n(\cos\theta). \quad (3.104)$$

Από τις (3.85), (3.104) προκύπτει και η ενεργειακή διατομή σκέδασης

$$\sigma_{r_0} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left| \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} \frac{j_n(k\alpha)}{h_n(k\alpha)} \right|^2. \quad (3.105)$$

3.7 Ασκήσεις

1. Να επαληθεύσετε ότι η κυματική συνάρτηση Herglotz (3.49) είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$.
2. Να αποδείξετε τον τύπο (3.45), χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss για τη διανυσματική συνάρτηση $f = \overline{u^s} \text{grad} u^s$.
3. Να αποδείξετε τον τύπο (3.17) για ένα διαπερατό σχεδαστή με ανθεκτικό πυρήνα.
4. Να αποδείξετε το Λήμμα 3.2 για ένα διαπερατό σχεδαστή με ανθεκτικό πυρήνα. Για τον ίδιο σχεδαστή να εξετάσετε αν ισχύει ο τύπος (3.26).
5. Να αποδείξετε ότι $\{u_1^s, u_2^s\}_{S_R} \rightarrow 0$ όταν $R \rightarrow \infty$, όπου u_1^s, u_2^s είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.
Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $\{u_1^s, u_2^s\}_{S_R} = \int_{S_R} \left[u_1^s \left(\frac{\partial u_2^s}{\partial R} - iku_2^s \right) - u_2^s \left(\frac{\partial u_1^s}{\partial R} - iku_1^s \right) \right] ds$ και λάβετε υπόψη ότι $u_j^s = O\left(\frac{1}{R}\right)$, για $R \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$.
6. Για έναν ανθεκτικό σχεδαστή (συνοριακή συνθήκη: $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u|_S = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$), να αποδείξετε:

(i)

$$u_\infty(\hat{p}; \hat{q}) = u_\infty(-\hat{q}; -\hat{p}).$$

(Θεώρημα αμοιβαιότητας).

(ii)

$$u_\infty(\hat{p}; \hat{q}) + \overline{u_\infty(\hat{q}; \hat{p})} = \frac{-1}{2\pi} \int_{S^2} u_\infty(\hat{r}; \hat{q}) \overline{u_\infty(\hat{r}; \hat{p})} ds(\hat{r}) - \frac{k}{2\pi} \operatorname{Im}(\lambda) \int_S u(r; \hat{q}) \overline{u(r; \hat{p})} ds(r).$$

(Γενικό θεώρημα σκέδασης).

(iii)

$$\sigma_s = -\frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}[u_\infty(\hat{p}; \hat{p})] - \frac{1}{k} \operatorname{Im}(\lambda) \int_S |u(r; \hat{p})|^2 ds(r).$$

(Οπτικό θεώρημα).

7. Έστω $v^s, w^s \in C^1(\mathbb{R}^3)$ λύσεις της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$, που έχουν την ασυμπτωτική μορφή

$$v^s(r) = \frac{e^{ikr}}{r} u_\infty(\hat{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\{v^s, \overline{w^s}\}_S = -2ik \int_{S^2} v_\infty \overline{w_\infty} ds,$$

όπου S η επιφάνεια τυχούσας σφαίρας.

8. Έστω $v^s \in C^1(\mathbb{R}^3)$ μια λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta v^s + k^2 v^s = 0$ τέτοια ώστε

$$v^s(r) = \frac{e^{ikr}}{r} v_\infty(\hat{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Έστω w_φ^i μια κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα $\varphi \in L^2(S^2)$, δηλαδή

$$w_\varphi^i(r) = \int_{S^2} e^{ik\hat{p}\cdot r} \varphi(\hat{p}) ds(\hat{p}).$$

Να αποδείξετε ότι

$$\{v^s, \overline{w_\varphi^i}\}_S = 4\pi \int_{S^2} v_\infty \overline{\varphi} ds.$$

9. Θεωρούμε το πρόβλημα $P(g)$:

$$\begin{aligned} \Delta v_g + k^2 \eta(r) v_g &= 0 \\ v_g &= v_g^i + v_g^s \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{στον } \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$
$$v_g^s(r) = \frac{e^{ikr}}{r} v_{\infty, g}(\hat{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

όπου v_g^i είναι η κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα $g \in L^2(S^2)$ και $\eta \in C^1(\mathbb{R}^3)$ είναι ο δείκτης διάθλασης με $Im(\eta) \geq 0$ και $\eta(r) = 1$ για $r \in (\mathbb{R}^3 \setminus B)$, B τυχούσα σφαίρα. Αν v_φ, v_h είναι οι λύσεις των προβλημάτων $P(\varphi), P(h)$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$(\mathbb{F}\varphi, h) - (\varphi, \mathbb{F}h) = \frac{ik}{2\pi}(\mathbb{F}\varphi, \mathbb{F}h) + \frac{ik^2}{2\pi} \int_B v_\varphi \overline{v_h} Im(\eta) dx,$$

όπου \mathbb{F} είναι ο τελεστής μακρινού πεδίου και (\cdot, \cdot) συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(S^2)$. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα να αποδείξετε ότι ο τελεστής \mathbb{F} δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές (εκτός της μηδενικής).

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το δεύτερο θεώρημα Green $\int_B (v_\varphi \Delta \overline{v_h} - \overline{v_h} \Delta v_\varphi) dx = \{v_\varphi, v_h\}_{\partial B}$ και χρησιμοποιείτε τις ασκήσεις 7 και 8.

10. Να αποδείξετε το Λήμμα 3.9 για έναν πολυστρωματικό σχεδαστή στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει ένας ηχητικά μαλακός ή σκληρός πυρήνας.

11. Να επαληθεύσετε ότι το σφαιρικό κύμα $u_{r_0}^i(r)$ είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz.

12. Να αποδείξετε το θεώρημα 3.13 για ένα διαπερατό σχεδαστή.

13. Έστω $u_{r_0}^i(r) = r_0 |r - r_0|^{-1} \exp[ik(|r - r_0| - r_0)]$ ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα και $S_R = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r_0 - r| = R\}$ η επιφάνεια σφαίρας κέντρου r_0 και ακτίνας R . Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{R \rightarrow 0} \{u_{r_0}^i, \overline{u_{r_0}^i}\}_{S_R} = 8i\pi r_0^2 k.$$

14. Έστω $u_{r_0}^i$ ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα προσπίπτον σε ένα σχεδαστή ηχητικά μαλακό ή σκληρό ή διαπερατό. Έστω $u_{r_0}^s$ το σχεδασμένο, g_{r_0} το πλάτος σκέδασης, σ_{r_0} η ενεργειακή διατομή σκέδασης και u_{r_0} το ολικό εξωτερικό πεδίο. Μια σφαίρα με επιφάνεια $S_r = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r| = r\}$ περιέχει το σχεδαστή και τη σημειακή πηγή. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{u_{r_0}, \overline{u_{r_0}}\}_{S_r} = \frac{2}{ik} \left[k^2 \sigma_{r_0} + 4\pi k^2 r_0^2 + 2kr_0 Im \left(e^{ikr_0} \int_{S^2} g_{r_0}(\hat{r}) e^{ik\hat{r} \cdot r_0} ds(\hat{r}) \right) \right].$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{u_{r_0}, \overline{u_{r_0}}\}_{S_r} = 2i Im \int_{S_r} u_{r_0} \frac{\partial \overline{u_{r_0}}}{\partial n} ds$ και χρησιμοποιείτε τις σχέσεις (3.83) - (3.85).

15. Ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα $u_{r_0}^i$ προσπίπτει σε έναν ηχητικά μαλακό ή σκληρό ή διαπερατό σχεδαστή. Να αποδείξετε ότι

$$\sigma_{r_0} = \frac{2r_0}{k} Im \left[e^{ikr_0} \left(2\pi u_{r_0}^s(r_0) - \int_{S^2} g_{r_0}(\hat{r}) e^{ik\hat{r} \cdot r_0} ds(\hat{r}) \right) \right].$$

Ο τύπος αυτός εκφράζει το οπτικό θεώρημα για σφαιρικά ακουστικά κύματα.

Υπόδειξη: Το δεύτερο θεώρημα Green δίνει $\{u_{r_0}, \overline{u_{r_0}}\}_S = \{u_{r_0}, \overline{u_{r_0}}\}_{S_R} + \{u_{r_0}, \overline{u_{r_0}}\}_{S_r}$, όπου S_R, S_r οι σφαιρικές επιφάνειες των ασκήσεων 13, 14 αντίστοιχα.

16. Ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα $u_{r_0}^i$ σκεδάζεται από έναν ηχητικά σκληρό σκεδαστή. Ακολουθώντας τη διαδικασία της §3.6, να υπολογίσετε τα $u_{r_0}^s$, $g_{r_0}^s$ και σ_{r_0} .
17. Τα πολυώνυμα Legendre n βαθμού $P_n(x)$ δίνονται από τον τύπο Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Να αποδείξετε:

- (i) Τα $P_n(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1) = 0.$$

- (ii) $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$, όπου δ_{mn} είναι το δέλτα Kronecker.

- (iii) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

- (iv) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx \right] P_n(x)$, για κάθε συνάρτηση f ομαλή στο $[-1, 1]$.

Υπόδειξη: (i) Να θέσετε $u(x) = (x^2 - 1)^n$, τότε $(1 - x^2)u - 2nxu = 0$ και να παραγωγίσετε $n + 1$ φορές. (ii, $m \neq n$). Γράψτε την εξίσωση στη μορφή $[(1 - x^2)y']' + n(n + 1)y = 0$ και ολοκληρώστε $\int_{-1}^1 [(1 - x^2)P_m']' P_n dx$. (ii, $m = n$), (iii) Χρησιμοποιείστε το ανάπτυγμα $(1 - 2x\rho + \rho^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\rho^n$, $|\rho| < 1$, $|x| \leq 1$. (iv) Χρησιμοποιείστε την (ii).

18. Η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης $\nu \in \mathbb{R}$, $J_\nu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δίνεται από τον τύπο

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k - 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

όπου Γ είναι η συνάρτηση γάμμα. Να αποδείξετε:

- (i) Η $J_\nu(x)$ είναι λύση της εξίσωσης Bessel τάξης ν

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

- (ii) Για $\nu \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$, οι συναρτήσεις J_ν και $J_{-\nu}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel.

- (iii) Για $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$, οι J_n, J_{-n} είναι γραμμικά εξαρτημένες και ισχύει

$$(-1)^n J_{-n} = J_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

19. Η συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους τάξης $\nu \in \mathbb{R}$, $Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (ή συνάρτηση Neumann τάξης ν , $N_\nu(x)$) ορίζεται:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \text{ για } \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} - (-1)^\nu \frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} \right] \Big|_{\nu=n} \text{ για } n \in \mathbb{Z}.$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $\nu \in \mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel.

20. Οι συναρτήσεις Hankel $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$, $\nu \in \mathbb{R}$, πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, ορίζονται από τις σχέσεις:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x),$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

Να αποδείξετε ότι αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της εξίσωσης Bessel.

21. Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel $j_n(x)$, $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, τάξης n , καθώς και οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel $h_n^{(1)}(x)$, $h_n^{(2)}(x)$ πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, τάξης n , είναι λύσεις της σφαιρικής εξίσωσης Bessel τάξης n

$$x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - n(n+1))y = 0.$$

Οι σφαιρικές αυτές συναρτήσεις συνδέονται με τις αντίστοιχες συναρτήσεις Bessel και Hankel με τους τύπους:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x),$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x).$$

- (i) Αν Z_n είναι οποιαδήποτε από τις σφαιρικές συναρτήσεις, να αποδείξετε:
- (α) $Z_{n-1} + Z_{n+1} = \frac{2n+1}{x} Z_n$,
- (β) $nZ_{n-1} - (n+1)Z_{n+1} = (2n+1)Z'_n$.
- (ii) Να υπολογίσετε τη σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους μηδενικής τάξης.

Βιβλιογραφία

- [1] T.S. Angell, R.E. Kleinman and F. Hettlich, *The resistive and conductive problems for the exterior Helmholtz equation*, SIAM J. Appl. Math. 50, (1990) 1607-1623.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, N. York: Dover, 1965.
- [3] C. Athanasiadis, *The multi-layered ellipsoid with a soft core in the presence of a low-frequency acoustic wave*, Q. Jl. Mech. appl. Math. 47, (1994), 441-459.
- [4] C. Athanasiadis, I.G. Stratis, *Low-frequency acoustic scattering by a infinitely stratified scatterer*, Rend. Mat. 15 (1995) 133-152.
- [5] C. Athanasiadis, *On the acoustic scattering amplitude for a multi-layered scatterer*, J. Austr. Math. Soc. Ser. B (1998), 1-18.
- [6] C. Athanasiadis, *Scattering theorems for time-harmonic electromagnetic waves in a piecewise homogeneous medium*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 123, (1998), 179-190.
- [7] C. Athanasiadis, P.A. Martin, I.G. Stratis, *Electromagnetic scattering by a homogeneous chiral obstacle: scattering relations and the far-field operator*, Math. Meth. in the Appl. Sci.
- [8] C. Athanasiadis, P.A. Martin, I.G. Stratis, *On the spherical-wave scattering by a spherical scatterer*, (υπό δημοσίευση).
- [9] Χ. Αθανασίου, *Επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών με μεθόδους ολοκληρωτικών εξισώσεων*, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 1997.
- [10] J.J. Bowman, T.B.A. Senior and P.E. Uslenghi, *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*, North-Holland, N. York. 1969.
- [11] A. Charalampopoulos, G. Dassios, *Scattering of a spherical wave by a small ellipsoid*, IMA J. Appl. Math. 62, (1999), 117-136.
- [12] D. Colton and R. Kress, *Integral equations methods in scattering theory*, Wiley, N. York, 1983.
- [13] D. Colton and R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [14] Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα, 1994.

- [15] G. Dassios, K. Kiriaki and D. Polyzos, *On the scattering amplitudes for elastic waves*, J. Appl. Math. Phys. 38, (1987), 856-873.
- [16] G. Dassios, G. Kamvyssas, *Point source excitation in direct and inverse scattering: The soft and the hard small sphere*, IMA J. Math. 56, (1995), 67-84.
- [17] G. Dassios, R. Kleimann, *Low Frequency Scattering*, Oxford U.P. 1999.
- [18] D.S. Jones, *A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disc*, Commun, Pure Appl. Math. 9, (1956), 713-746.
- [19] D.S. Jones, *Acoustic and electromagnetic scattering*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [20] Α. Καραγεώργου, *Σκέδαση ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση*, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 1996.
- [21] L. Sowerby, *Vector field theory with applications*, Longman, N. York, 1974.
- [22] Σ.Α. Τερσένοβ, *Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1992.
- [23] Α.Ν. Τσίτσας, *Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών II*, Αθήνα, 1983.
- [24] V. Twersky, *Certain transmission and reflection theorems*, J. Appl. Phys. 25, (1954), 859-862.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις
του
μεταπτυχιακού μαθήματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

ΣΤΙΣ

ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΜΕΡΟΣ Γ'

I. Στρατής

Περιεχόμενα

- Η μέθοδος των χαμηλών συχνοτήτων στο πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων.
- Αντίστροφα προβλήματα: γενικές έννοιες - παραδείγματα.
- Μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα.
- Το αντίστροφο ακουστικό πρόβλημα σκέδασης: μοναδικότητα.
- Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας: εισαγωγή - θεωρήματα αναπαράστασης και συνθήκες ακτινοβολίας - τα βασικά προβλήματα συνοριακών τιμών.

ΑΘΗΝΑ 2000

1 Το Πρόβλημα Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων - Η Μέθοδος των Χαμηλών Συχνοτήτων

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση της σκέδασης ενός επίπεδου ακουστικού κύματος της μορφής

$$u^{inc}(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{d}}}, \quad (1.1)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και $k > 0$ ο κυματικός αριθμός, από έναν σκεδαστή D (από μαθηματικής πλευράς το D είναι ένας φραγμένος τόπος του \mathbb{R}^3 με C^2 -σύνορο ∂D). Θεωρούμε ότι ο σκεδαστής είναι ηχητικώς μαλακός (δηλ. ικανοποιείται μία συνθήκη Dirichlet επί του ∂D). Όπως είναι ήδη γνωστό, το προκύπτον πρόβλημα σκέδασης διατυπώνεται ως εξής:

Να ορισθεί συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ u = 0, & \text{επί του } \partial D, \\ u = u^{inc} + u^{sc}, & \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus D, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}|=r} \left| \frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - ik u^{sc} \right|^2 ds = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Η τρίτη σχέση του (1.2) εκφράζει ότι το (ζητούμενο) ολικό πεδίο είναι η υπέρθεση του προσπίπτοντος και του σκεδασμένου πεδίου. Παρατηρούμε ότι το προσπίπτον πεδίο (1.1) είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz. Σημειώνουμε ότι η τέταρτη σχέση του (1.2) αποτελεί την ασθενή διατύπωση της γνωστής συνθήκης ακτινοβολίας Sommerfeld.

Θα προχωρήσουμε στην απόδειξη της ακόλουθης βασικής σχέσης που θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στη συνέχεια.

Έστω $h(s) := \frac{e^{is}}{is}$. Τότε

$$u(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{d}}} + \frac{k}{4\pi i} \int_{\partial D} h(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \frac{\partial u(\mathbf{x}')}{\partial n} ds(\mathbf{x}') \quad (1.3)$$

Πράγματι, έστω $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}', \quad (1.4)$$

Παρατηρούμε ότι $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{k}{4\pi i} h(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$. Υπενθυμίζουμε ότι αν v είναι μία λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, τότε [3] ισχύει

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \left[v(\mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n(\mathbf{x}')} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial v(\mathbf{x}')}{\partial n} \right] ds(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \quad (1.5)$$

Η u^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Συνεπώς

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \left[u^{sc}(\mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n(\mathbf{x}')} - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial u^{sc}(\mathbf{x}')}{\partial n} \right] ds(\mathbf{x}'). \quad (1.6)$$

Από το ότι ο σκεδαστής είναι ηχητικώς μαλακός έπεται ότι

$$u^{sc} = -u^{inc}, \text{ επί του } \partial D. \quad (1.7)$$

Έτσι

$$\begin{aligned} u^{sc}(x) &= - \int_{\partial D} \Phi(x, x') \left[\frac{\partial u^{inc}(x')}{\partial n} + \frac{\partial u^{sc}(x')}{\partial n} \right] ds(x') \\ &\quad - \int_{\partial D} \left[u^{inc}(x') \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial n(x')} - \Phi(x, x') \frac{\partial u^{inc}(x')}{\partial n} \right] ds(x') \\ &= - \int_{\partial D} \Phi(x, x') \frac{\partial u(x')}{\partial n} ds(x') \\ &\quad - \int_{\partial D} \left[u^{inc}(x') \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial n(x')} - \Phi(x, x') \frac{\partial u^{inc}(x')}{\partial n} \right] ds(x'). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι αν v είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz σ' ένα φραγμένο σύνολο D με C^2 -σύνορο ∂D , τότε ισχύει

$$\int_{\partial D} \left[v(x') \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial n(x')} - \Phi(x, x') \frac{\partial v(x')}{\partial n} \right] ds(x') = \begin{cases} -v(x), & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (1.9)$$

Εφ' όσον η u^{inc} είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, από την (1.9) έπεται ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα της (1.8) ισούται με μηδέν. Έτσι προκύπτει η (1.3).

Θα περάσουμε τώρα στην περιγραφή της μεθόδου των χαμηλών συχνοτήτων για τον ηχητικώς μαλακό σκεδαστή. Η μέθοδος αυτή έχει μεγάλο ενδιαφέρον αφ' ενός γιατί σε σκεδαστές με ειδική γεωμετρία (σφαίρα, ελλειψοειδές, κ.λπ.) επιτρέπει την εύρεση της λύσης αναλυτικά, ενώ αφ' ετέρου αποτελεί το δομικό στοιχείο για τις θεωρίες ομογενοποίησης. Τα στοιχεία που ακολουθούν αποτελούν απλώς μία εισαγωγή στις ιδέες της μεθόδου χαμηλών συχνοτήτων. Ας σημειωθεί ότι η θεωρία και οι εφαρμογές της μεθόδου χαμηλών συχνοτήτων στην ακουστική, τον ηλεκτρομαγνητισμό, τη γραμμική ελαστικότητα και αλλού, συνιστούν μια ερευνητική περιοχή σημαντικού ενδιαφέροντος' σχετικά δεσ [6].

Ο όρος "χαρακτηριστική διάσταση του σκεδαστή" δηλώνει την ακτίνα (έστω a) της ελάχιστης περιγράψιμης περί τον σκεδαστή σφαίρας. Αν k είναι ο κυματικός αριθμός των υπό θεώρηση πεδίων, αναφερόμαστε σε "χαμηλές συχνότητες" αν ισχύει

$$ka \ll 1, \quad (1.10)$$

με άλλα λόγια αν η συχνότητα ν (το μήκος κύματος λ) είναι πολύ μικρή (πολύ μεγάλο) σε σχέση με τη χαρακτηριστική διάσταση του σκεδαστή. Υπενθυμίζουμε ότι $k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi\nu}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$, ω : η κυκλική συχνότητα, c_0 : η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

Παρατηρούμε ότι ισχύει το ακόλουθο ανάπτυγμα του προσπίπτοντος κύματος

$$e^{ikx \cdot \hat{d}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} (x \cdot \hat{d})^m. \quad (1.11)$$

Με κίνητρο την (1.11) αναζητούμε λύση του προβλήματος (1.2) στη μορφή

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \Psi_m(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

όπου οι συναρτήσεις $\Psi_m(\mathbf{x})$ είναι ανεξάρτητες του k και ονομάζονται “συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων”.

Αποδεικνύεται ότι η λύση u είναι αναλυτική συνάρτηση ως προς k , περί το $k = 0$, και έτσι είναι πράγματι επιτρεπτό το να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα (1.12). Αντικαθιστούμε την (1.12) στην εξίσωση $\Delta u + k^2 u = 0$ και παίρνουμε

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \Delta \Psi_m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^{m+2}}{(m+2)!} (m+2)(m+1) \Psi_m = 0,$$

απ’ όπου έχουμε

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} [\Delta \Psi_m - m(m-1) \Psi_{m-2}] = 0.$$

Έτσι η εξίσωση Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ αντικαθίσταται από την αναδρομική ακολουθία εξισώσεων

$$\Delta \Psi_m = m(m-1) \Psi_{m-2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \quad (1.13)$$

Παρατηρούμε ότι για $m = 0$ και $m = 1$ η (1.13) είναι η εξίσωση Laplace, ενώ για $m \geq 2$ η εξίσωση Poisson (το δεξί μέλος είναι γνωστό αναδρομικά σε κάθε βήμα). Ομοίως η συνθήκη $u = 0$ επί του ∂D , του συνόρου του ηχητικώς μαλακού σκεδαστή, μετασχηματίζεται στις

$$\Psi_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{ επί του } \partial D. \quad (1.14)$$

Όσον αφορά στη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, αυτή αντικαθίσταται στη μέθοδο χαμηλών συχνοτήτων ως εξής: οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη ως ασκήσεις: αναπτύσσοντας την $h(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ σε δυναμοσειρά ως προς k , από την (1.3) παίρνουμε ότι

$$\Psi_m(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{d}})^m - \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} \int_{\partial D} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\ell-1} \frac{\partial \Psi_{m-\ell}(\mathbf{x}')}{\partial n} ds(\mathbf{x}'). \quad (1.15)$$

Αν αφήσουμε $r \rightarrow \infty$ στην (1.15), παίρνουμε ότι

$$\Psi_m(\mathbf{x}) \sim (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{d}})^m - \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m}{\ell+1} \int_{\partial D} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\ell} \frac{\partial \Psi_{m-\ell-1}(\mathbf{x}')}{\partial n} ds(\mathbf{x}'), \quad (1.16)$$

που παίζει το ρόλο της συνθήκης ακτινοβολίας. Παρατηρούμε ότι στο δεξί μέλος εμφανίζονται μόνον οι $\Psi_0, \dots, \Psi_{m-1}$, κι έτσι η ασυμπτωτική συμπεριφορά για $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ της Ψ_m καθορίζεται “αναδρομικά”.

Πρώτος ο Λόρδος Rayleigh το 1897 επιχείρησε να προσεγγίσει το κυματικό πρόβλημα σκέδασης με μια ακολουθία προβλημάτων θεωρίας δυναμικού, στην περίπτωση που το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από τη χαρακτηριστική διάσταση του σκεδαστή, βασιζόμενος σε φυσικά επιχειρήματα. Για την προσφορά του Rayleigh στη θεωρία σκέδασης δες [29]. Η θεμελίωση της

σύγχρονης θεωρίας οφείλεται ουσιαστικά στον Kleinman. Σημαντική είναι και η συνεισφορά των Δάσιου, και Jones. Σχετικά δες [6], [15].

Ασκήσεις

1. Να αποδειχθούν οι (1.15), (1.16).
2. Να περιγραφεί η μέθοδος χαμηλών συχνοτήτων για το μεταβατικό πρόβλημα (διαπερατός σχεδαστής):

$$\begin{aligned} \Delta u_0 + k_0^2 u_0 &= 0, \text{ στο } D_0 := \mathbb{R}^3 \setminus D, \\ \Delta u + k^2 u &= 0, \text{ στο } D, \quad k = \eta k_0, \quad \eta : \text{σταθερά}, \\ u_0 &= u, \text{ επί του } \partial D, \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} &= \theta \frac{\partial u}{\partial n}, \text{ επί του } \partial D, \quad \theta : \text{σταθερά}, \\ u_0 &= e^{ik_0 x \cdot \vec{a}} + u^{sc}, \text{ στο } D_0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} \left| \frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - ik_0 u^{sc} \right|^2 ds &= 0. \end{aligned}$$

Όταν $\theta \rightarrow 0$ και $\eta \rightarrow 0$ αναγόμεστε στην περίπτωση του ηχητικώς σκληρού σχεδαστή (συνοριακή συνθήκη Neumann).

2 Αντίστροφα Προβλήματα: Γενικές Έννοιες - Παραδείγματα

Σύμφωνα με τον Keller [17] δύο προβλήματα λέγονται μεταξύ τους “αντίστροφα” αν η διατύπωση του ενός απαιτεί πλήρη ή μερική γνώση του άλλου. Ως προς αυτόν τον ορισμό είναι αυθαίρετο το ποιο πρόβλημα θα χαρακτηρίζουμε ως “ευθύ” και ποιο ως “αντίστροφο”. Συνήθως έχει προηγηθεί η μελέτη - και μάλιστα με περισσότερες λεπτομέρειες - του ενός προβλήματος: αυτό συνήθως ονομάζεται ευθύ, ενώ το άλλο αντίστροφο. Όμως υφίσταται συχνά μία άλλη, πολύ σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο προβλημάτων. Ο Hadamard [10] εισήγαγε την έννοια του “καλώς τοποθετημένου προβλήματος”, ξεκινώντας από τη θέση ότι το μαθηματικό μοντέλο ενός φυσικού προβλήματος οφείλει να έχει τις ιδιότητες της ύπαρξης, μοναδικότητας και ευστάθειας της λύσης. Αν δεν ικανοποιείται μία απ’ αυτές τις ιδιότητες το πρόβλημα λέγεται “μη καλώς τοποθετημένο”. Πολλά σημαντικά προβλήματα διαφόρων επιστημών συμβαίνει να οδηγούν σε μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα, ενώ τα αντίστοιχα ευθέα προβλήματα είναι καλώς τοποθετημένα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε μια σειρά παραδειγμάτων για την καλύτερη κατανόηση των ανωτέρω εννοιών και εν συνεχεία θα εισάγουμε τον αναγνώστη στο πεδίο της “θεωρίας αντίστροφης σκέδασης”, μελετώντας ορισμένα θέματα σχετικά με το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων.

Παραδείγματα

1. Ευθύ Πρόβλημα: δίνεται ο αναγωγικός τύπος μιας αριθμητικής ακολουθίας. Να βρεθούν οι όροι της.
Αντίστροφο Πρόβλημα: Δίνονται οι όροι $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6$ μιας ακολουθίας

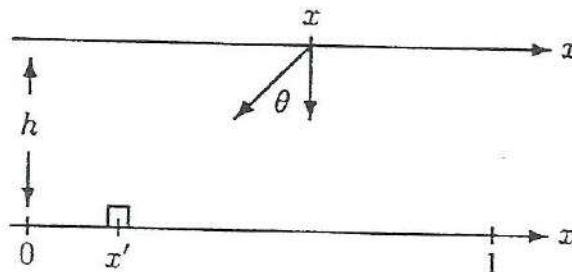
φυσικών αριθμών. Να βρεθεί ο a_4 .

(Η απάντηση $a_4 = 8$ που αντιστοιχεί στην $a_n = 2n$ είναι σωστή. Το ίδιο, όμως, ισχύει και για την $a_4 = 32$ που αντιστοιχεί στην $a_n = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 4n$. Μοναδικότητα;)

- Ευθύ Πρόβλημα: να βρεθούν οι ρίζες x_1, x_2, \dots, x_n ενός πολυωνύμου $p_n(x)$.
 Αντίστροφο Πρόβλημα: να βρεθεί ένα πολυώνυμο $p_n(x)$ από τις ρίζες του x_1, x_2, \dots, x_n .
 (Απάντηση: $p_n(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Το αντίστροφο είναι ευκολότερο από το ευθύ σ' αυτήν την περίπτωση).
- Παρεμβολή Lagrange.
 Ευθύ πρόβλημα: να υπολογισθούν οι τιμές ενός πολυωνύμου $p_n(x)$ στα σημεία ξ_n .
 Αντίστροφο Πρόβλημα: να βρεθεί πολυώνυμο $p_n(x)$ που παίρνει δεδομένες τιμές $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, σε δεδομένα σημεία $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$, αντιστοίχως.
- Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας και $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ διαγώνιος πίνακας.
 Ευθύ Πρόβλημα: να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές του $A + D$.
 Αντίστροφο Πρόβλημα: δοθέντος του A και n πραγματικών αριθμών $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, να βρεθεί πίνακας D , ώστε ο $A + D$ να έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- Γεωλογικός Εντοπισμός.
 Πρόκειται γενικώς για το πρόβλημα του εντοπισμού, του προσδιορισμού του σχήματος και/ή κάποιων παραμέτρων (όπως η αγωγιμότητα) γεωλογικών ανωμαλιών στο εσωτερικό της Γης από μετρήσεις στην επιφάνειά της. Θεωρούμε ένα απλό μονοδιάστατο παράδειγμα και περιγράφουμε το ακόλουθο αντίστροφο πρόβλημα.

Να προσδιορισθούν μεταβολές $\rho = \rho(x)$, $0 \leq x \leq 1$, της πυκνότητας μάζας ενός ανώμαλου χωρίου σε βάθος h , από μετρήσεις της κατακόρυφης συνιστώσας $f_v(x)$ της μεταβολής της δύναμης στο x . Η μάζα ενός "στοιχειώδους όγκου" στο x' είναι $\rho(x')\Delta x'$, ενώ η απόστασή του από το όργανο μετρήσεων είναι $\sqrt{(x - x')^2 + h^2}$. Η μεταβολή της βαρύτητας περιγράφεται από το νόμο του Νεύτωνα $f = g \frac{m}{r^2}$. Για την κατακόρυφη συνιστώσα έχουμε

$$\Delta f_v(x) = g \frac{\rho(x')\Delta x'}{(x - x')^2 + h^2} \cos \theta = g \frac{h\rho(x')\Delta x'}{((x - x')^2 + h^2)^{3/2}}$$



Έτσι παίρνουμε την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση για τον προσδιορισμό του ρ :

$$f_v(x) = gh \int_0^1 \frac{\rho(x')}{((x - x')^2 + h^2)^{3/2}} dx', \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Για περαιτέρω μελέτη αυτού του προβλήματος και συναφών προβλημάτων γεωλογικού εντοπισμού παραπέμπουμε στα [8], [31].

6. Οπισθοδρομική Εξίσωση της Θερμότητας.
Θεωρούμε τη μονοδιάστατη εξίσωση της θερμότητας

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

και αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Με χωρισμό μεταβλητών παίρνουμε τη λύση

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \sin(ny) dy.$$

Το *ευθύ πρόβλημα* συνίσταται στην επίλυση του κλασικού προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών: δεδομένων της αρχικής κατανομής θερμοκρασίας u_0 και του τελικού χρόνου T , να προσδιοριστεί η $u(\cdot, T)$.

Στο *αντίστροφο πρόβλημα*, επιχειρείται ο προσδιορισμός της θερμοκρασίας σε χρόνο $t < T$ (π.χ. της αρχικής θερμοκρασίας $u(\cdot, 0)$) από τη μέτρηση της τελικής κατανομής θερμοκρασίας $u(\cdot, T)$.

Πρέπει, συνεπώς, να προσδιορίσουμε την $u_0 := u(\cdot, 0)$ από την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$u(x, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k(x, y) u_0(y) dy, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

όπου $k(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(ny)$.

Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε στα [1], [21], [24].

7. Διάχυση σε Μη Ομογενές Μέσο.

Η εξίσωση διάχυσης σε μη ομογενές μέσο (σε δύο διαστάσεις) είναι

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{c} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u(x, t)), \quad x \in D, \quad t > 0,$$

όπου c σταθερά και $k = k(x)$ μία παράμετρος που περιγράφει το μέσο.

Στη στάσιμη περίπτωση, η ανωτέρω εξίσωση ανάγεται στην

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0, \quad \text{στο } D.$$

Το *ευθύ πρόβλημα* συνίσταται στην επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών γι' αυτήν την εξίσωση με δεδομένες συνοριακές τιμές $u|_{\partial D}$ και δεδομένη συνάρτηση k .

Στο αντίστροφο πρόβλημα, επιχειρείται ο προσδιορισμός της άγνωστης συνάρτησης k στο D από τη γνώση της u και της $\frac{\partial u}{\partial n}$ επί του ∂D . Αυτό είναι παράδειγμα του λεγόμενου προβλήματος αναγνώρισης παραμέτρου για μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Από την πολύ εκτεταμένη σχετική βιβλιογραφία, αναφέρουμε μόνο τα [1], [24].

8. Πρόβλημα Ιδιοτιμών Sturm-Liouville

Θεωρούμε μια χορδή μήκους L και πυκνότητας μάζας $\rho = \rho(x) > 0$, $0 \leq x \leq L$, που είναι στερεωμένη στα άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Έστω $v(x, t)$, $0 \leq x \leq L$, $t > 0$, η μετατόπιση στο σημείο x κατά τη χρονική στιγμή t . Η μετατόπιση ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

με συνοριακές συνθήκες $v(0, t) = v(L, t) = 0$, $t > 0$.

Μια περιοδική μετατόπιση

$$v(x, t) = w(x) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]$$

συχνότητας $\omega > 0$, είναι λύση του ανωτέρω προβλήματος συνοριακών τιμών τότε και μόνον τότε αν τα w, ω ικανοποιούν το πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville

$$w''(x) + \omega^2 \rho(x) w(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

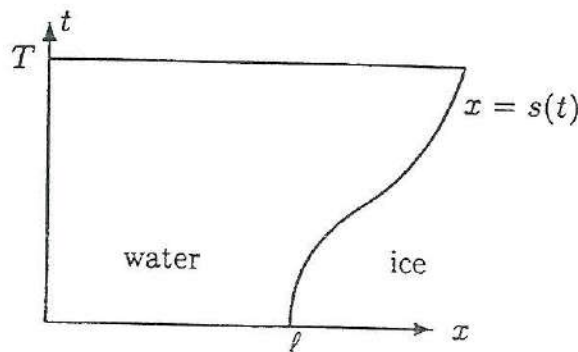
$$w(0) = w(L) = 0.$$

Το ευθύ πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων ω και των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων για γνωστή συνάρτηση ρ .

Στο αντίστροφο πρόβλημα επιχειρείται ο προσδιορισμός της πυκνότητας μάζας ρ από ένα πλήθος μετρήσεων συχνοτήτων ω . Στο [18] μπορεί κανείς να δει ότι προβλήματα εκτίμησης παραμέτρων για παραβολικά και υπερβολικά προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών συνδέονται στενά με αντίστροφα φασματικά προβλήματα.

9. Αντίστροφο Πρόβλημα Stefan

Το 1889 ο Φυσικός J. Stefan μοντελοποίησε την τήξη αρκτικού πάγου το καλοκαίρι μ' ένα απλό μονοδιάστατο μοντέλο. Ας θεωρήσουμε ένα ομογενές κομμάτι πάγου που κατέχει το χωρίο $x \geq \ell$ στη χρονική στιγμή $t = 0$. Ο πάγος αρχίζει να λιώνει με το να θερμανθεί η αριστερή πλευρά του. Έτσι κατά τη χρονική στιγμή $t > 0$, το χωρίο μεταξύ $x = 0$ και $x = s(t)$, για κάποια $s(t) > 0$, καταλαμβάνεται από νερό, ενώ το χωρίο $x \geq s(t)$ από πάγο. Έστω $u(x, t)$ η θερμοκρασία στο x, t για $0 < x < s(t)$, $t > 0$. Η u ικανοποιεί τη μονοδιά-



στατη εξίσωση θερμότητας

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \text{ στο } D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < s(t), t > 0\},$$

που υπόκειται στις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = f(t), \quad u(s(t),t) = 0, \quad t \in [0,T]$$

και την αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Εδώ η u_0 περιγράφει την αρχική θερμοκρασία και η $f(t)$ τη ροή θερμότητας στο αριστερό σύνορο $x = 0$. Η ταχύτητα με την οποία κινείται η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ νερού και πάγου είναι ανάλογη με τη ροή θερμότητας. Αυτό περιγράφεται με τη *συνθήκη Stefan*:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{\partial u(s(t),t)}{\partial x}, \quad t \in [0,T].$$

Το *ευθύ πρόβλημα* συνίσταται στον υπολογισμό της καμπύλης s όταν οι συνοριακές πληροφορίες f και u_0 είναι δεδομένες. Στο *αντίστροφο πρόβλημα*, έχουμε μια επιθυμητή καμπύλη s και επιχειρούμε να ανακατασκευάσουμε την u και την f (ή την u_0). Για λεπτομερή εισαγωγή στα προβλήματα Stefan παραπέμπουμε στα [2], [24].

10. Το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης

Να βρεθεί το σχήμα ενός σώματος (σχεδαστή) δεδομένης της έντασης (και φάσης) ακουστικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που σχεδιάζονται από το σώμα αυτό.

Το *ευθύ πρόβλημα* περιγράφεται ως εξής: Έστω $D \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ή 3) φραγμένος τόπος με λείο σύνορο ∂D . Έστω $u^{inc}(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{d}}}$ ένα επίπεδο προσπίπτον κύμα, όπου $k > 0$ ο κυματικός αριθμός και $\hat{\mathbf{d}}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα που περιγράφει τη διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος. Το *ευθύ πρόβλημα* συνίσταται στην εύρεση του ολικού πεδίου $u = u^{inc} + u^{sc}$, όπου u^{sc} το σχεδασμένο πεδίο, έτσι ώστε

$$\Delta u + k^2 u = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^N \setminus \bar{D},$$

$$u = 0, \quad \text{επί του } \partial D,$$

$$\frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - iku^{sc} = O\left(r^{-\frac{N+1}{2}}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \text{ ομοιόμορφα ως προς } \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Από τη συνθήκη ακτινοβολίας προκύπτει η ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|^{\frac{N-1}{2}}} u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + O\left(|\mathbf{x}|^{-\frac{N+1}{2}}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

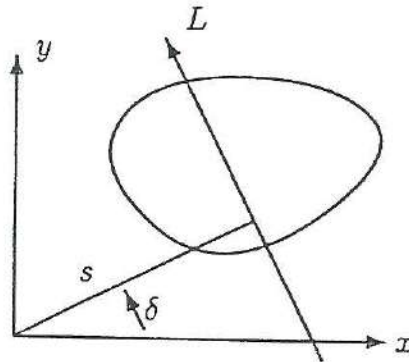
όπου $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

Το *αντίστροφο πρόβλημα* συνίσταται στον προσδιορισμό του σχήματος του D όταν το πλάτος σκέδασης $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ μετρείται για όλα τα $\hat{\mathbf{x}}$ επί της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{R}^N . Μια μερική

μελέτη αυτού του προβλήματος περιέχεται στην επόμενη παράγραφο. Τέτοια αντίστροφα προβλήματα σκέδασης έχουν εκτεταμένες εφαρμογές π.χ. στην υπολογιστική τομογραφία (computer tomography), στη σεισμική και ηλεκτρομαγνητική διερεύνηση στη γεωφυσική, και στο μη καταστροφικό έλεγχο υλικών. Βασική βιβλιογραφία σε ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης είναι οι μονογραφίες [3], [5], [22], [26] και τα άρθρα επισκόπησης [4], [27]. Δες επίσης τη διπλωματική εργασία [16].

11. Υπολογιστική Τομογραφία

Η πλέον εντυπωσιακή εφαρμογή του μετασχηματισμού Radon εμφανίζεται στην ιατρική απεικόνιση. Π.χ. θεωρούμε μια συγκεκριμένα επίπεδη τομή του ανθρώπινου σώματος. Έστω $\rho(x, y)$ η μεταβολή της πυκνότητας στο σημείο (x, y) και έστω L τυχούσα ευθεία σ' αυτό το επίπεδο. Κατευθύνουμε μια λεπτή δέσμη ακτίνων X στο σώμα κατά μήκος της L και μετράμε πόσο απορροφάται η ένταση κατά τη διέλευση από το σώμα.



Παραμετροποιούμε την L με (s, δ) , $s \in \mathbb{R}$, $\delta \in [0, \pi)$. Η ακτίνα $L_{s, \delta}$ έχει συντεταγμένες $se^{i\delta} + iue^{i\delta} \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{R}$ (έχουμε ταυτίσει το \mathbb{C} με το \mathbb{R}^2). Η απορρόφηση της έντασης I περιγράφεται προσεγγιστικά ως $dI = -\gamma \rho I$, όπου γ σταθερά. Ολοκληρώνοντας κατά μήκος της ακτίνας, παίρνουμε

$$\ln I(u) = -\gamma \int_{u_0}^u \rho(se^{i\delta} + iue^{i\delta}) du,$$

ή, υποθέτοντας ότι η ρ έχει συμπαγή φορέα, η σχετική απώλεια έντασης δίνεται από τη σχέση

$$\ln I(\infty) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \rho(se^{i\delta} + iue^{i\delta}) du.$$

Θεωρητικά, από τους παράγοντες απορρόφησης μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα ολοκληρώματα

$$(R\rho)(s, \delta) := \int_{-\infty}^{\infty} \rho(se^{i\delta} + iue^{i\delta}) du.$$

Το $R\rho$ λέγεται μετασχηματισμός Radon της ρ . Το ευθύ πρόβλημα συνίσταται στον υπολογισμό του $R\rho$ όταν είναι γνωστή η ρ . Το αντίστροφο πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της ρ για ένα δεδομένο $R\rho$ (δηλ. από μετρήσεις όλων των ολοκληρωμάτων).

Στην ειδική περίπτωση που η ρ είναι ακτινικά συμμετρική και χρησιμοποιούμε μόνο κατακόρυφες ακτίνες, μετά από κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών καταλήγουμε στην ολοκληρωτική

εξίσωση Abel

$$V(\sqrt{R^2 - y}) = -\gamma \int_0^y \frac{\rho(\sqrt{R^2 - z})}{\sqrt{y - z}} dz, \quad 0 \leq y \leq R.$$

Βασική βιβλιογραφία επί του μετασχηματισμού Radon και των εφαρμογών του είναι τα [11], [12], [25].

Παρατήρηση 1

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να διατυπώσουμε το ευθύ πρόβλημα ως τον προσδιορισμό ενός τελεστή K που δρα επί ενός γνωστού "μοντέλου" x σ' έναν χώρο μοντέλων X και το αντίστροφο πρόβλημα ως τη λύση της εξίσωσης $K(x) = y$:

Ευθύ Πρόβλημα: δεδομένου του x (και του K) να προσδιορισθεί το $K(x)$.

Αντίστροφο Πρόβλημα: δεδομένου του y (και του K) να λυθεί η $K(x) = y$ ως προς x .

Για να διατυπώσουμε ένα αντίστροφο πρόβλημα, πρέπει να δώσουμε τον ορισμό του τελεστή K συμπεριλαμβανομένων των πεδίων ορισμού και τιμών του. Η διατύπωση υπό μορφή εξίσωσης τελεστών μας επιτρέπει να διακρίνουμε μεταξύ προβλημάτων πεπερασμένης και άπειρης διάστασης, γραμμικών και μη γραμμικών.

Γενικώς, ο προσδιορισμός του $K(x)$ ανάγεται στην επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών για μια διαφορική εξίσωση, ή στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Για περισσότερες πληροφορίες δες [18], [23].

Παρατήρηση 2

Στο παράδειγμα 11 αναφερθήκαμε σε μία μέθοδο ιατρικής απεικόνισης. Παραθέτουμε στη συνέχεια μερικά συνοπτικά στοιχεία για ορισμένες βασικές τέτοιες μεθόδους. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [30].

i) Κλασικό Υπερηχογράφημα.

Χρησιμοποιούνται ακουστικά κύματα συχνότητας 1-15 MHz (ακουστοί ήχοι: 20 Hz - 20 kHz). Η εκπεμπόμενη υπερηχητική δέσμη ανακλάται στις διαχωριστικές επιφάνειες ιστών που χαρακτηρίζονται από διαφορετικές ακουστικές ιδιότητες (εμπέδηση), οι οποίες εξαρτώνται από μηχανικά χαρακτηριστικά των ιστών (ελαστικότητα). Η λαμβανόμενη εικόνα του υπό εξέταση οργάνου του σώματος κωδικοποιεί σε κλίμακα του γκρι την ένταση των ανακλώμενων ηχητικών κυμάτων (στα οστά η υπερηχητική δέσμη ανακλάται πλήρως).

ii) Υπερηχογράφημα Doppler.

Χρησιμοποιούνται ακουστικά κύματα συχνότητας 2-10 MHz. Απεικονίζεται σε έγχρωμη κλίμακα (μπλε-κόκκινο) και εκτιμάται η αιματική ροή. Τα ερυθροκύτταρα του αίματος δρουν ως κινούμενες δευτερογενείς πηγές της υπερηχητικής δέσμης. Η επιστρέφουσα δέσμη έχει διαφορετική μέση συχνότητα από την εκπεμπόμενη. Δεν παρατηρείται το φαινόμενο Doppler όταν η δέσμη είναι κάθετη στη διεύθυνση ροής του αίματος.

iii) Αξονική Τομογραφία

Χρησιμοποιούνται ακτίνες X ενέργειας 100-300 kV. Η βασική περιγραφή είναι όπως στο Παράδειγμα 11. Απεικονίζονται σε κλίμακα του γκρι οι συντελεστές εξασθένησης της ακτινοβολίας X που χαρακτηρίζουν τις διάφορες δομές στην υπό εξέταση τομή του σώματος.

iv) Μαγνητική Τομογραφία

Χρησιμοποιούνται μαγνητικά πεδία έντασης 1.5-2.0 T. Οι πυρήνες υδρογόνου (που περιέχονται στο υπό εξέταση όργανο ή σωματικό ιστό) συμπεριφέρονται ως μαγνητικά δίπολα και προσανατολίζονται στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, ενώ ταυτόχρονα περιστρέφονται γύρω από τον άξονά τους και γύρω από τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Ένα δεύτερο μαγνητικό πεδίο, κάθετο στο προηγούμενο, προκαλεί απόκλιση των πυρήνων υδρογόνου. Όταν το δεύτερο αυτό πεδίο διακοπεί, οι πυρήνες υδρογόνου επιστρέφουν στην αρχική τους θέση. Μετράται ουσιαστικά ο χρόνος επιστροφής σ' αυτή τη θέση, ο οποίος κωδικοποιείται σε κλίμακα του γκρι. Ο χρόνος επιστροφής είναι χαρακτηριστικός κάθε οργάνου ή ιστού και εξαρτάται από την πυκνότητα των πυρήνων υδρογόνου σ' αυτό.

v) Σπινθηρογράφημα

Αποτελεί τη βασική διαγνωστική μέθοδο της Πυρηνικής Ιατρικής. Χρησιμοποιούνται ραδιοϊσότοπα που εκπέμπουν ακτίνες γ (το πλέον διαδεδομένο ραδιοϊσότοπο είναι το $Tc\ 99m$ (τεχνητό) με ακτίνα γ ενέργειας 140 keV). Το ραδιοϊσότοπο εγχύεται, συνήθως ενδοφλεβίως (μετά από κατάλληλη διαδικασία "σήμανσης") και συγκεντρώνεται στο υπό εξέταση σωματικό όργανο. Οι εκπεμπόμενες ακτίνες γ ανιχνεύονται από κατάλληλο σύστημα (γ -κάμερα). Στη λαμβανόμενη εικόνα κωδικοποιείται, σε έγχρωμες ή ασπρόμαυρες κλίμακες, το πλήθος των φωτονίων σε διάφορες περιοχές του υπό εξέταση οργάνου.

Ασκήσεις

1. Να επιλύσετε πλήρως το ευθύ πρόβλημα του παραδείγματος 6.
2. Ομοίως για το παράδειγμα 8, στην περίπτωση που $\rho(x) = \frac{1}{c^2}$, c : σταθερά.
3. (α) Να κάνετε με λεπτομέρειες τα αναφερόμενα επί του ευθέος προβλήματος του παραδείγματος 11.

(β) Να θεωρήσετε την ακόλουθη ειδική περίπτωση του παραδείγματος 11:

- $\rho = \rho(r)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) και έχει συμπαγή φορέα στο $\{x : |x| \leq R\}$,
- η L_x διέρχεται από το $(x, 0)$ και παραμετρικοποιείται, με (x, u) , $u \in \mathbb{R}$, και να δείξετε ότι ισχύει η ολοκληρωτική εξίσωση του Abel

$$V(\sqrt{R^2 - y}) = -\gamma \int_0^y \frac{\rho(\sqrt{R^2 - z})}{\sqrt{y - z}} dz, \quad 0 \leq y \leq R,$$

αν

$$V(x) := \ln I(\infty), \quad u = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad z = R^2 - r^2, \quad y = R^2 - x.$$

3 Μη Καλώς Τοποθετημένα Προβλήματα

Σε όλα τα ζεύγη προβλημάτων που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ του ευθέος και του αντιστρόφου προβλήματος. Σε όλες τις περιπτώσεις το αντίστροφο πρόβλημα είναι μη καλώς τοποθετημένο με την έννοια του Hadamard, ενώ το ευθύ είναι καλώς τοποθετημένο. Στο [10] ο Hadamard ισχυρίζεται ότι ένα μαθηματικό μοντέλο ενός φυσικού προβλήματος (είχε κατά νου προβλήματα συνωριακών τιμών για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους) οφείλει να είναι καλώς τοποθετημένο, υπό την έννοια ότι έχει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- i) Υπάρχει λύση του προβλήματος (ύπαρξη).
- ii) Το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση (μοναδικότητα).
- iii) Η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα (ευστάθεια).

Από μαθηματικής άποψης, η ύπαρξη λύσης μπορεί να επιβληθεί με τη διεύρυνση του χώρου λύσεων: η έννοια των ασθενών λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ένα τέτοιο παράδειγμα. Αν το πρόβλημα έχει περισσότερες από μία λύσεις τότε οι πληροφορίες για το μοντέλο είναι ελλιπείς. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούν να ενσωματωθούν στο μοντέλο επιπρόσθετες ιδιότητες, όπως π.χ. συνθήκες προσήμου. Η απαίτηση της ευστάθειας είναι η πιο σημαντική. Αν ένα πρόβλημα δεν έχει την ιδιότητα της ευστάθειας, τότε ο υπολογισμός της λύσης του είναι πρακτικώς αδύνατος. Οποιαδήποτε μικρή διαταραχή στα δεδομένα μπορεί να οδηγήσει στον υπολογισμό μιας λύσης που δεν έχει απολύτως καμία σχέση με την πραγματική λύση. Δεν υπάρχει τρόπος να ξεπερασθεί αυτή η δυσκολία, εκτός αν είναι διαθέσιμες επιπρόσθετες πληροφορίες για τη λύση.

Η έννοια της καλής τοποθέτησης ενός προβλήματος διατυπώνεται ως εξής:

Ορισμός

Έστω X και Y χώροι με νόρμα και $K : X \rightarrow Y$ μια (γραμμική ή μη) απεικόνιση. Η εξίσωση $Kx = y$ λέγεται καλώς τοποθετημένη αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Ύπαρξη: Για κάθε $y \in Y$ υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $x \in X$ τέτοιο ώστε $Kx = y$.
2. Μοναδικότητα: Για κάθε $y \in Y$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in X$ με $Kx = y$.
3. Ευστάθεια: Η λύση x εξαρτάται συνεχώς από το y , δηλ. για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ με $Kx_n \rightarrow Kx$, $n \rightarrow \infty$, έπεται ότι $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$.

Οι εξισώσεις για τις οποίες δεν ισχύει (τουλάχιστον) μία απ' αυτές τις ιδιότητες λέγονται μη καλώς τοποθετημένες.

Είναι ουσιαστικό να τονίσουμε ότι πρέπει να προσδιορίζεται η πλήρης τριάδα (X, Y, K) καθώς και οι νόρμες. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα εξαρτώνται μόνο από την αλγεβρική φύση των χώρων και του τελεστή, δηλ. από το αν ο τελεστής είναι επί ή ένα προς ένα. Η ευστάθεια, όμως, εξαρτάται και από τις τοπολογίες των χώρων, δηλ. από το αν ο αντίστροφος τελεστής $K^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι συνεχής.

Αυτές οι απαιτήσεις δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Π.χ. λόγω του Θεωρήματος Ανοικτής

Απεικόνιση, ο αντίστροφος τελεστής είναι αυτομάτως συνεχής αν ο K είναι γραμμικός και συνεχής και οι X, Y είναι χώροι Banach.

Ως παράδειγμα μη καλώς τοποθετημένου προβλήματος, δίνουμε το κλασικό παράδειγμα του Hadamard:

Παράδειγμα 1: Το πρόβλημα Cauchy για την εξίσωση του Laplace.
Να βρεθεί λύση u της εξίσωσης του Laplace

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \text{ στο } \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

που ικανοποιεί τις “αρχικές συνθήκες”

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου f και g είναι δεδομένες συναρτήσεις.

Στην περίπτωση που $f(x) = 0$ και $g(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$, η (μοναδική) λύση δίνεται από τη σχέση

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0.$$

Ισχύει, συνεπώς, ότι

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|f(x)| + |g(x)|\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ενώ

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

για κάθε $y > 0$. Το σφάλμα στα δεδομένα τείνει στο μηδέν, ενώ το σφάλμα στη λύση u τείνει στο άπειρο!

Πολλά αντίστροφα προβλήματα οδηγούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου είδους με συνεχείς ή ασθενώς ιδιόμορφους πυρήνες. Τέτοιοι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι συμπαγείς ως προς οποιαδήποτε “λογική” τοπολογία.

Παράδειγμα 2: Παραγωγή

Το ευθύ πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση της αντιπαραγώγου y με $y(0) = 0$ μιας δεδομένης συνεχούς συνάρτησης x επί του $[0, 1]$, δηλ. ο υπολογισμός του

$$y(t) = \int_0^t x(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Στο αντίστροφο πρόβλημα, δίνεται μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση y επί του $[0, 1]$ με $y(0) = 0$ και αναζητείται η $x = y'$.

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$Kx = y,$$

όπου ο $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ορίζεται ως εξής

$$(Kx)(t) := \int_0^t x(s) ds, \quad t \in [0, 1], \text{ για } x \in C[0, 1].$$

Εδώ εφοδιάζουμε τον $C[0, 1]$ με τη supremum νόρμα, $\|x\|_\infty := \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$. Η λύση της $Kx = y$ είναι η παράγωγος $x = y'$, αν ισχύει $y(0) = 0$ και η y είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν x είναι η ακριβής λύση της $Kx = y$ και αν διαταράξουμε την y ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, τότε η διαταραγμένη \tilde{y} δεν οφείλει να είναι παραγωγίσιμη, αλλά ακόμα και αν είναι, η λύση του διαταραγμένου προβλήματος δεν είναι αναγκαστικά κοντά στην ακριβή λύση. Αν, π.χ., διαταράξουμε την y κατά $\delta \sin\left(\frac{t}{\delta^2}\right)$ για μικρό δ , τότε το σφάλμα στα δεδομένα (ως προς την $\|\cdot\|_\infty$) είναι δ και το σφάλμα στη λύση είναι $\frac{1}{\delta}$. Συνεπώς το πρόβλημα $(K, C[0, 1], C[0, 1])$ είναι μη καλώς τοποθετημένο. Επιλέγουμε τώρα ένα διαφορετικό χώρο $Y := \{y \in C^1[0, 1] : y(0) = 0\}$ και τον εφοδιάζουμε με την ισχυρότερη νόρμα $\|x\|_C := \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$. Σ' αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα $(K, C[0, 1], Y)$ είναι καλώς τοποθετημένο, εφ' όσον ο $K : C[0, 1] \rightarrow Y$ είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο. Αυτό το παράδειγμα δείχνει το γεγονός ότι η καλή τοποθέτηση εξαρτάται από την τοπολογία.

Κατά την αριθμητική αντιμετώπιση ολοκληρωτικών εξισώσεων δεν μπορεί ν' αποφευχθεί σφάλμα διακριτοποίησης. Για ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου είδους, μια "απλοϊκή" διακριτοποίηση οδηγεί συνήθως σε καταστροφικά αποτελέσματα, όπως φαίνεται από το επόμενο

Παράδειγμα 3

Η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_0^1 e^{ts} x(s) ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

με

$$y(t) = \frac{e^{t+1} - 1}{t + 1},$$

έχει μοναδική λύση

$$x(t) = e^t.$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με τον κανόνα του τραπεζιού

$$\int_0^1 e^{ts} x(s) ds \approx h \left(\frac{1}{2} x(0) + \frac{1}{2} e^t x(1) + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jht} x(jh) \right)$$

με $h := \frac{1}{n}$. Για $t = ih$ παίρνουμε το γραμμικό σύστημα

$$h \left(\frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} e^{ih} x_n + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jih^2} x_j \right) = y(ih), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Τότε το x_i θα πρέπει ν' αποτελεί προσέγγιση του $x(ih)$. Επιλέγοντας το i έτσι ώστε $ih = t$, έχουμε

t	n=4	n=8	n=16	n=32	e^t
0	0.44	-3.08	1.08	-38.21	1
0.25	-0.67	-38.16	-25.17	50.91	1.28
0.5	0.95	-75.44	31.24	-116.45	1.65
0.75	-1.02	-22.15	20.03	103.45	2.12
1	1.09	-0.16	-4.23	-126.87	2.72

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση δεν έχει καμμία σχέση με την πραγματική λύση και ότι χειροτερεύει όσο λεπτότερα γίνονται τα σχήματα διακριτοποίησης.

Στα δύο τελευταία παραδείγματα είχαμε να λύσουμε ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου είδους. Οι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι συμπαγείς σε πολλές "φυσικές" τοπολογίες υπό πολύ ασθενείς συνθήκες επί των πυρήνων τους. Ισχύει, [18], ότι οι γραμμικές εξισώσεις της μορφής $Kx = y$, με K συμπαγή τελεστή, είναι πάντα μη καλώς τοποθετημένες.

Παρατήρηση

Με τα ανωτέρω παραδείγματα και σχόλια στόχος μας είναι να δώσουμε ένα κίνητρο για περαιτέρω μελέτη σε θέματα σχετικά με τα καλώς και (κυρίως) τα μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα. Μια εισαγωγή στα θέματα αυτά θα περιείχε τουλάχιστον στοιχεία θεωρίας κανονικοποίησης (regularization) για γραμμικά μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα σε χώρους Hilbert, για μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα σε απειροδιάστατους χώρους και τις διακριτοποιήσεις τους, για αντίστροφα προβλήματα ιδιοτιμών και για θεωρία αντίστροφης σκέδασης. Μια καλή εισαγωγή περιέχεται στη μονογραφία [18]. Όπως έχουμε αναφέρει και αλλού, στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ορισμένα στοιχεία για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων.

Ασκήσεις

1. Να κάνετε με λεπτομέρειες τα αναφερόμενα στο παράδειγμα 1.
2. Ομοίως για το παράδειγμα 2.

4 Το Αντίστροφο Ακουστικό Πρόβλημα Σκέδασης: Μοναδικότητα

Υπενθυμίζουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D \quad (k > 0), \quad (4.1)$$

$$u = 0, \quad \text{επί του } \partial D, \quad (4.2)$$

$$u = u^{inc} + u^{sc}, \quad (4.3)$$

$$u^{inc}(x) = e^{ikx \cdot \hat{d}}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - iku^{sc} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \text{ομοιόμορφα ως προς } \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}. \quad (4.5)$$

Ως γνωστόν αντί της συνοριακής συνθήκης Dirichlet (4.2) (ηχητικώς μαλακός σχεδαστής), μπορούμε να έχουμε τη συνθήκη Neumann (ηχητικώς σκληρός σχεδαστής)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{επί του } \partial D, \quad (4.6)$$

ή τη (μικτή) συνθήκη Robin

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda(s)u = 0 \quad \text{επί του } \partial D, \quad \text{με } \text{Im} \lambda \geq 0, \quad \lambda \in C(\partial D). \quad (4.7)$$

Όπως και πριν, για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι το D είναι φραγμένος τόπος στον \mathbb{R}^3 με C^2 σύνορο ∂D .

Από τη συνθήκη ακτινοβολίας (4.5) προκύπτει η ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά του σχεδασμένου πεδίου

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{ikr} u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

όπου $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{r} \in S^2$ (S^2 : η μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^3) και u_∞ το πλάτος σκέδασης. Για να δόσουμε έμφαση στην εξάρτηση του πλάτους σκέδασης από τη διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος $\hat{\mathbf{d}}$ και τον κυματικό αριθμό k , θα γράφουμε $u_\infty(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{d}}, k)$.

Το αντίστροφο ακουστικό πρόβλημα σκέδασης διατυπώνεται ως εξής:

Αντίστροφο Πρόβλημα: να βρεθεί το σχήμα του D και η συνοριακή συνθήκη επί του ∂D όταν είναι γνωστό το $u_\infty(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{d}}, k)$ σε κάποιο υποσύνολο του $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}$.

Θα θεωρήσουμε τα ακόλουθα σημαντικά υποσύνολα του $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}$:

(A): $\{\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}_0 : \text{δεδομένο}, \hat{\mathbf{x}} \in \Sigma^2, 0 \leq \alpha \leq k \leq \beta\}$, όπου Σ^2 δεδομένη στερεά γωνία (δηλ. ένα ανοιχτό υποσύνολο του S^2).

(B): $\{\text{τα } \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{d}} \text{ διατρέχουν υποσύνολα του } S^2, k = k_0 > 0 : \text{δεδομένο}\}$.

Θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα της λύσης του αντίστροφου προβλήματος στις δύο ανωτέρω περιπτώσεις. Για περισσότερα στοιχεία καθώς και αριθμητικές μεθόδους για την προσεγγιστική επίλυση το αντίστροφου προβλήματος παραπέμπουμε στα [5], [13], [18], [26].

Θεώρημα A

Τα δεδομένα (A) προσδιορίζουν το ∂D μονοσήμαντα. Επίσης προσδιορίζουν μονοσήμαντα τη συνοριακή συνθήκη (δηλ. τη συνάρτηση λ) στην περίπτωση του προβλήματος Robin (4.7).

Στη σχιαγράφηση της απόδειξης που ακολουθεί, θα χρειαστούμε δυο προτάσεις που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

Λήμμα Rellich: Έστω $B_R := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R, R > 0\}$ και $\Omega_R := \mathbb{R}^3 \setminus B_R$. Έστω w λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta w + k^2 w = 0, \text{ στο } \Omega_R, k > 0,$$

τέτοια ώστε

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |w|^2 ds = 0.$$

Τότε

$$w \equiv 0, \text{ στο } \Omega_R.$$

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στα [3], [5].

Αρχή Μονοσήμαντης Συνέχισης: Έστω G ανοικτό και συνεκτικό σύνολο του \mathbb{R}^3 . Έστω ότι η $v \in C^2(G)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$\Delta v + k^2 p(x)v = 0, \text{ στο } G, k > 0,$$

όπου $p \in C(\bar{G})$. Έστω $x_0 \in G$ και ότι η v μηδενίζεται σε κάποια περιοχή του x_0 . Τότε

$$v \equiv 0, \text{ στο } G.$$

Περνάμε τώρα στη σχιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος A. Θεωρούμε δύο σκεδαστές D_1 και D_2 με το ίδιο πλάτος σκέδασης $u_\infty(\hat{x}, \hat{d}_0, k)$, $\hat{x} \in \Sigma^2$, $0 \leq \alpha \leq k \leq \beta$, $\alpha < \beta$ και την ίδια συνοριακή συνθήκη. Για λόγους απλότητας θεωρούμε τη συνθήκη Dirichlet.

1η περίπτωση: $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Έστω $u_j(x, \hat{d}_0, k)$ η λύση του ευθέως προβλήματος (4.1) - (4.5), $j = 1, 2$. Έστω $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R\}$, $R > 0$, τέτοια ώστε $D_1 \cup D_2 \subset B_R$ και $\Omega_R := \mathbb{R}^3 \setminus B_R$. Έστω $u := u_1 - u_2$. Εργαζόμαστε στο Ω_R . Έχουμε

$$u_j = u^{inc} + \frac{e^{ikr}}{ikr} u_\infty + o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty$$

και συνεπώς

$$u = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty.$$

Από το Λήμμα Rellich έπεται ότι $u \equiv 0$ στο Ω_R . Από δε την Αρχή της Μονοσήμαντης Συνέχισης για την εξίσωση Helmholtz ($p(x) \equiv 1$), έπεται ότι

$$u \equiv 0 \text{ στο } \Omega_{12} := \mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$$

και συνεπώς

$$u = 0 \text{ επί του } \partial D_1 \cup \partial D_2,$$

δηλ.

$$u_1 \equiv u_2 \text{ στο } \Omega_{12}.$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$u_1 = 0 \text{ επί του } \partial D_2,$$

εφ' όσον $u_2 = 0$ επί του ∂D_2 (η u_2 είναι λύση του (4.1) - (4.5) για το D_2).

Έτσι η u_1 ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u_1 + k^2 u_1 = 0 & , \text{ στο } D_2, \alpha \leq k \leq \beta, \\ u_1 = 0 & , \text{ επί του } \partial D_2. \end{cases}$$

Επιπλέον ισχύει $u_1 \not\equiv 0$ στο D_2 . Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση θα είχαμε

$$u_1 = 0 \text{ στο } \Omega_1 := \mathbb{R}^3 \setminus D_1,$$

πράγμα άτοπο, αφού

$$|u_1| = |u^{inc} + u_1^{sc}| \geq |u^{inc}| - |u_1^{sc}| = 1 - O\left(\frac{1}{r}\right) > 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Καταλήξαμε στο ότι το φάσμα της Λαπλασιανής, με συνοριακή συνθήκη Dirichlet, στο D_2 είναι συνεχές: άτοπο, αφού το $[\alpha, \beta]$ είναι συμπαγές.

Ως τώρα έχουμε αποδείξει ότι δεν ισχύει: $D_1 \neq D_2$ και $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

2η περίπτωση: $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Θεωρούμε το $\mathcal{D} := D_2 \setminus (D_1 \cap D_2)$. Εργαζόμενοι όπως στην πρώτη περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο. Δηλαδή δεν ισχύει: $D_1 \neq D_2$ και $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Άρα, τελικώς, $D_1 = D_2$, έχουμε δηλ. μονοσήμαντο προσδιορισμό του D από τα δεδομένα (A).

Οι αποδείξεις για συνοριακές συνθήκες Neumann (4.2) και Robin (4.7) είναι ανάλογες.

Τέλος, στην περίπτωση της συνοριακής συνθήκης Robin, ο μονοσήμαντος προσδιορισμός της λ έπεται από τη μοναδικότητα της u και το ότι

$$\lambda = -\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial n}, \text{ επί του } \partial D.$$

Θεώρημα Β

Έστω $\Sigma_0^2 := \{\{\hat{d}_m\}_{m \in \mathbb{N}} : \hat{d}_m \neq \hat{d}_\ell, m \neq \ell \text{ και υπάρχει όριο } \hat{d}_0\}$.

Τα δεδομένα

$$(\hat{B}) : \{\hat{d} \in \Sigma_0^2, \hat{x} \in \Sigma^2, k = k_0 > 0 : \text{δεδομένο}\}$$

προσδιορίζουν το ∂D μονοσήμαντα. Επίσης προσδιορίζουν μονοσήμαντα τη συνάρτηση λ στην περίπτωση του προβλήματος Robin.

Περνάμε τώρα στη σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος Β:

Όπως και στο Θεώρημα Α, αποδεικνύεται ότι η $u_j = u_j(x, d_j, k_0)$, $j = 1, 2, \dots$, είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u_j + k_0^2 u_j = 0 & , \text{ στο } \mathcal{D}, \\ u_j = 0 & , \text{ στο } \partial \mathcal{D}, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

Αν αποδειχθεί ότι το σύστημα $\{u_j\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο στον $L^2(\mathcal{D})$, θα έχουμε ως συμπέρασμα ότι το k_0^2 θα είναι ιδιοτιμή άπειρης πολλαπλότητας της Λαπλασιανής, με συνοριακή συνθήκη

Dirichlet, στο φραγμένο χωρίο D : άτοπο.

Έστω, λοιπόν, ότι

$$\sum_{m=1}^n c_m u_m = 0, \quad c_m : \text{σταθ.}, \quad n : \text{αυθαίρετος φυσικός, στον } L^2(D).$$

Από την Αρχή Μονοσήμαντης Συνέχισης για την εξίσωση Helmholtz έπεται ότι $\sum_{m=1}^n c_m u_m = 0$ στο Ω_R . Συνεπώς

$$\sum_{m=1}^n c_m \left\{ e^{ik_0 \hat{x} \cdot \hat{d}_m} + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} = 0, \quad \text{στο } \Omega_R$$

και

$$c_\ell \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} + \sum_{m \neq \ell} c_m \left\{ e^{ik_0 \hat{x} \cdot (\hat{d}_m - \hat{d}_\ell)} + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} = 0, \quad \text{στο } \Omega_R. \quad (*)$$

Εξ υποθέσεως έχουμε ότι $\min |\hat{d}_m - \hat{d}_\ell| > 0, m \neq \ell$. Έστω $\hat{d}_m - \hat{d}_\ell = \alpha_{m\ell} \hat{d}_{m\ell}$, όπου $\alpha_{m\ell} = |\hat{d}_m - \hat{d}_\ell|$ και $\hat{d}_{m\ell} = \alpha_{m\ell}^{-1}(\hat{d}_m - \hat{d}_\ell)$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} & \int_{|x-x_0| \leq \alpha} e^{ik_0 \alpha_{m\ell} \hat{d}_{m\ell} \cdot \hat{x}} dx = \\ & = e^{ik_0 \alpha_{m\ell} \hat{d}_{m\ell} \cdot x_0} \int_{|y| \leq \alpha} e^{ik_0 \alpha_{m\ell} |y| \cos \theta} dy = \\ & = e^{ik_0 \alpha_{m\ell} \hat{d}_{m\ell} \cdot x_0} \int_0^\alpha r^2 \left(\frac{\pi}{2rk_0 \alpha_{m\ell}} \right)^{1/2} 4\pi \left(\frac{2}{\pi k_0 r \alpha_{m\ell}} \right)^{1/2} \sin(k_0 \alpha_{m\ell} r) dr \\ & = 4\pi e^{ik_0 \alpha_{m\ell} \hat{d}_{m\ell} \cdot x_0} \frac{1}{k_0 \alpha_{m\ell}} \int_0^\alpha r \sin(k_0 \alpha_{m\ell} r) dr = O(\alpha). \end{aligned} \quad (**)$$

Ολοκληρώνουμε την (*) επί της $|x - x_0| \leq \alpha$, επιλέγουμε το x_0 αρκετά μεγάλο ώστε $O\left(\frac{1}{|x|}\right) < 1$ και θεωρούμε μεγάλο α . Τότε, μετά την ολοκλήρωση, ο πρώτος όρος της (*) είναι $O(|c_\ell| \alpha^3)$, ενώ το άθροισμα είναι - σύμφωνα με την (*) - $O(\alpha)$. Συνεπώς $c_\ell = 0$. Αφού ο ℓ είναι αυθαίρετος, έχουμε δείξει ότι $c_m = 0, m = 1, 2, \dots, n$, πράγμα που συμπληρώνει την απόδειξη.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ορισμένα σχόλια για ανάλογα αποτελέσματα μοναδικότητας για το μεταβατικό πρόβλημα.

Παρατήρηση

Θεωρούμε το μεταβατικό πρόβλημα (διαπερατός σχεδαστής, πρβλ. άσκηση 1.2).

Αν το πλάτος σκέδασης $u_\infty(\hat{x}, \hat{d}, k_0)$ είναι γνωστό για κάθε $\hat{x}, \hat{d} \in S^2$, τότε ο σχεδαστής D προσδιορίζεται μονοσήμαντα.

Αντίθετα, η γνώση του πλάτους σκέδασης $u_\infty(\hat{x}, \hat{d}_0, k_0)$ για κάθε $\hat{x} \in S^2$ δεν προσδιορίζει μονο-

σήμαντα τον D . Πράγματι, έστω $D = \{x : |x| \leq 1\}$ και θεωρούμε το μεταβατικό πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u + k_D^2 u = 0, & \text{στο } D, \\ \Delta u + u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ u_+ = u_-, & \text{επί του } \partial D, \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_-, & \text{επί του } \partial D, \mu : \text{σταθ.}, \\ u = \beta \frac{e^{ir}}{r}, \quad r \geq 1, \beta : \text{σταθ.} \\ u = \gamma \frac{\sin(k_D r)}{r}, \quad r \leq 1, \gamma : \text{σταθ.} \end{cases}$$

Οι μεταβατικές συνθήκες ικανοποιούνται αν

$$\beta e^i = \gamma \sin k_D$$

και

$$\beta(i-1)e^i = \mu\gamma(k_D \cos k_D - \sin k_D),$$

που ισχύουν αν

$$\frac{k_D}{\tan k_D} = 1 + \frac{1}{\mu}(i-1).$$

Για δεδομένο μ η εξίσωση αυτή έχει πολλές ρίζες $k_{D,m}$, $m = 1, 2, \dots$, δηλ. πολλές τριάδες $(D, \mu, k_{D,m})$ παράγουν το ίδιο πεδίο και το ίδιο πλάτος σκέδασης u_∞ .

5 Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας

5.1 Εισαγωγή

1. Οι Εξισώσεις Πεδίου

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παράγεται από μια κατανομή ηλεκτρικού ρεύματος και φορτίου. Είναι γενικώς παραδεκτό ότι η ύλη δεν είναι συνεχώς διασπάλσιμη, αλλά ότι αποτελείται από μικρά διακριτά σωματίδια. Η κίνηση ενός τέτοιου φορτισμένου σωματιδίου είναι ισοδύναμη με ένα ρεύμα. Εν τούτοις, δεν ασχολούμαστε με τα μικροσκοπικά σωματίδια ξεχωριστά (η θεωρία της κίνησης τους υπάγεται στην κβαντική θεωρία), αλλά μόνο με τη μέση συμπεριφορά μεγάλου αριθμού τους. Φυσικά, δεν μπορεί να χαραχθεί σαφής διαχωριστική γραμμή μεταξύ της κβαντικής και της μακροσκοπικής θεωρίας. Η τελική επαλήθευση για την αποδοχή της μακροσκοπικής άποψης, μπορεί, μόνον, να γίνει με την πρόβλεψη αποτελεσμάτων που έρχονται σε συμφωνία με τα πειραματικώς διαπιστωθέντα.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τους νόμους που συνδέουν τις βασικές (διανυσματικές) συναρτήσεις στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Για τη φυσική τους σημασία και τους ορισμούς τους, παραπέμπουμε στα συγγράμματα [7], [9], [14], [15], [19], [20], [28]. Κατ' αρχάς, ένα σημείο (x, t) στο $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ονομάζεται κανονικό, αν σε κάποια περιοχή του οι φυσικές ιδιότητες του μέσου είναι συνεχείς.

Έστω, $E(\mathbf{x}, t)$, $B(\mathbf{x}, t)$ η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, αντιστοίχως, $D(\mathbf{x}, t)$, $H(\mathbf{x}, t)$ η ηλεκτρική και μαγνητική διέγερση, $J(\mathbf{x}, t)$ η πυκνότητα ρεύματος, $\rho(\mathbf{x}, t)$ η πυκνότητα φορτίου, $\sigma(\mathbf{x})$ η αγωγιμότητα, $\mu(\mathbf{x})$ η μαγνητική διαπερατότητα και $\varepsilon(\mathbf{x})$ η ηλεκτρική επιδεκτικότητα. Στα κανονικά σημεία ισχύουν οι εξισώσεις Maxwell (οι οποίες πήραν το όνομά τους από τον Φυσικό James Clerk Maxwell (1831-1879)), δηλ.

$$\operatorname{curl} E(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial B(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{νόμος Maxwell-Faraday}) \quad (5.1)$$

$$\operatorname{curl} H(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial D(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = J(\mathbf{x}, t) \quad (\text{νόμος Maxwell-Ampère}) \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} D(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (\text{ηλεκτρικός νόμος Gauss}) \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} B(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{μαγνητικός νόμος Gauss}) \quad (5.4)$$

Ορίζουμε την πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας του πεδίου (E, B) , ως εξής

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[E(\mathbf{x}, t) \cdot D(\mathbf{x}, t) + H(\mathbf{x}, t) \cdot B(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

και την ηλεκτρομαγνητική ενέργεια του πεδίου (E, B) ως

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (5.6)$$

Θα αναφερόμαστε πάντοτε σε πεδία (E, B) για τα οποία ισχύει

$$W(t) < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Η κατ' αξιωματικό τρόπο εισαγωγή των (5.1) - (5.4) τεκμηριώνεται αρχικά στις ειδικές περιπτώσεις της ηλεκτροστατικής, της μαγνητοστατικής, των μαγνητικών αποτελεσμάτων σταθερών ρευμάτων και των βραδέως μεταβαλλόμενων ρευμάτων, όπου τα προβλεπόμενα φαινόμενα επαληθεύονται πειραματικώς. Επιπλέον, για τα ταχέως μεταβαλλόμενα ρεύματα και τη διάδοση διαταραχών (οπότε όλοι οι όροι των εξισώσεων (5.1) - (5.4) πρέπει να ληφθούν υπόψη, σε αντίθεση με τις προηγούμενες ειδικές περιπτώσεις όπου ορισμένοι όροι των εξισώσεων μπορούν να αγνοηθούν), οι προβλέψεις επίσης είναι συμβατές με τα πειραματικά αποτελέσματα.

II. Μακροσκοπικές Ιδιότητες της Ύλης

Υποθέτουμε ότι είναι δεδομένες οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος. Τότε, στο σύστημα (5.1) - (5.4), υπάρχουν δώδεκα άγνωστες βαθμωτές ποσότητες που πρέπει να προσδιορισθούν από (το πολύ) οκτώ βαθμωτές εξισώσεις. Προκειμένου να μπορεί να λυθεί το σύστημα, πρέπει να εισαχθούν και άλλες σχέσεις. Πειραματικά δεδομένα που αφορούν τη φύση των υλικών, προσφέρουν τις σχέσεις που λείπουν. Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένες κατηγορίες καταστατικών εξισώσεων:

(α) Στο κενό

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$D = \epsilon_0 E, \quad B = \mu_0 H \quad (5.8)$$

όπου ϵ_0 η απόλυτη διηλεκτρική σταθερά του κενού και μ_0 η απόλυτη μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Οι τιμές και οι διαστάσεις αυτών των σταθερών εξαρτώνται από το σύστημα μονάδων. Στο σύστημα *SI*, έχουμε

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Hm}^{-1}, \quad (H \text{ (henry): μονάδα χωρητικότητας πυκνωτή})$$

απ' όπου προσδιορίζεται και το

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{Fm}^{-1}, \quad (F \text{ (farad): μονάδα συντελεστή αυτεπαγωγής αγωγού})$$

εφόσον ισχύει

$$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό,

$$c = 3 \times 10^8 \text{m}(\text{sec})^{-1}.$$

(β) Ισοτροπικά Σώματα

Ισοτροπικά είναι εκείνα τα σώματα των οποίων οι φυσικές ιδιότητες στην περιοχή ενός εσωτερικού τους σημείου είναι ίδιες προς όλες τις διευθύνσεις. Για τέτοια σώματα - με την προϋπόθεση ότι δεν είναι σιδηρομαγνητικά - έχουμε

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H. \quad (5.9)$$

Πειραματικώς διαπιστώνεται ότι η (5.9) ισχύει για τα περισσότερα αέρια και υγρά, όταν το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι πολύ μεγάλο. Τα στερεά, γενικώς, έχουν κρυσταλλική δομή και δεν είναι ισοτροπικά σε ατομική κλίμακα. Εν τούτοις, σε μακροσκοπική κλίμακα, μπορούν και αυτά να θεωρηθούν ως ισοτροπικά.

(γ) Ανισοτροπικά Σώματα

Τα ανισοτροπικά υλικά έχουν ιδιότητες που διαφέρουν ως προς τη διεύθυνση. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$D = \underline{\epsilon} \cdot E, \quad B = \underline{\mu} \cdot H \quad (5.10)$$

όπου τα $\underline{\epsilon}$ και $\underline{\mu}$ είναι συμμετρικοί τανυστές.

(δ) Δι-ανισοτροπικά Υλικά

Για τα ισοτροπικά και τα ανισοτροπικά υλικά, οι καταστατικές σχέσεις συσχετίζουν τα δύο διανύσματα του ηλεκτρικού πεδίου (D, E) και τα δύο διανύσματα του μαγνητικού πεδίου (B, H) είτε μέσω μιας βαθμωτής ή μέσω μιας τανυστικής σταθεράς. Τέτοια υλικά πολώνονται αν βρεθούν

σε ένα ηλεκτρικό πεδίο και μαγνητίζονται αν τοποθετηθούν σε ένα μαγνητικό πεδίο. Ένα δι-ανιστροπικό υλικό εμφανίζει διασύνδεση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, και τοποθετούμενο είτε σε ένα ηλεκτρικό ή σε ένα μαγνητικό πεδίο, πολώνεται και μαγνητίζεται. Είναι γνωστό ότι 58 κλάσεις μαγνητικών κρυστάλλων επιδεικνύουν μαγνητοηλεκτρικές ιδιότητες δι-ανιστροπικού τύπου. Οι καταστατικές σχέσεις σε αυτήν την περίπτωση έχουν τη μορφή

$$D = A_1 E + A_2 H, \quad B = C_1 E + C_2 H \quad (5.11)$$

όπου A_1, A_2, C_1, C_2 είναι κατάλληλοι διαγώνιοι 3×3 πίνακες. Οι καταστατικές σχέσεις

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon E + \xi H \\ B &= \xi E + \mu H \end{aligned} \quad (\xi^2 \mu^{-1} \varepsilon^{-1} \simeq 1) \quad (5.12)$$

εισήχθηκαν από τον Tellegen (1948) για την καλύτερη μελέτη ηλεκτρικών δικτύων. Σε αυτήν την κατηγορία εμπίπτουν και τα χειρόμορφα (chiral) υλικά, μια περιγραφή των οποίων δίνεται από τις καταστατικές σχέσεις των Drude-Born- Fedorov:

$$D = \varepsilon(E + \beta \text{curl} E), \quad B = \mu(H + \beta \text{curl} H). \quad (5.13)$$

Σχεδόν όλα τα υλικά γίνονται δι-ανιστροπικά όταν κινούνται. Η δι-ανιστροπική περιγραφή υλικών έχει θεμελιώδη σημασία υπό το πρίσμα της θεωρίας της σχετικότητας.

(ε) Καταστατικοί Πίνακες

Η πιο γενική μορφή καταστατικών σχέσεων είναι

$$cD = PE + LcB, \quad H = ME + QcB, \quad (5.14)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και οι P, L, M, Q είναι 3×3 πίνακες. Τα στοιχεία τους ονομάζονται καταστατικές παράμετροι. Ο λόγος που οι καταστατικές σχέσεις γράφονται σε αυτήν τη μορφή, βασίζεται σε ιδέες της θεωρίας της σχετικότητας.

Για περισσότερα στοιχεία, αλλά και τη μελέτη καταστατικών σχέσεων των μορφών (δ) και (ε) , παραπέμπουμε στο βιβλίο του Kong [19].

Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε και το νόμο του Ohm

$$J = \sigma E \quad (5.15)$$

που ισχύει για τα ιστροπικά μέταλλα.

III. Οι ανηγμένες (συμμετρικοποιημένες) εξισώσεις Maxwell

Θα διατυπώσουμε τώρα τις εξισώσεις Maxwell στη μορφή που θα τις χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Θεωρούμε ότι η πυκνότητα φορτίου είναι μηδέν, καθώς και ότι έχουμε τους καταστατικούς νόμους

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H \quad (5.16)$$

με ηλεκτρική επιδεκτικότητα (ε) και μαγνητική διαπερατότητα (μ) σταθερές. Υποθέτουμε ότι και η αγωγιμότητα (σ) στο νόμο του Ohm είναι σταθερή. Αν $\omega > 0$ είναι η συχνότητα, θεωρούμε

αρμονική εξάρτηση ως προς το χρόνο, όλων των πεδίων, δηλ.

$$\left. \begin{aligned} E(x, t) &= e^{-i\omega t} \tilde{E}(x), & D(x, t) &= e^{-i\omega t} \tilde{D}(x) \\ H(x, t) &= e^{-i\omega t} \tilde{H}(x), & B(x, t) &= e^{-i\omega t} \tilde{B}(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Έτσι, από το σύστημα (5.1)-(5.4) παίρνουμε ότι

$$\operatorname{div} \tilde{E} = 0, \quad \operatorname{div} \tilde{H} = 0 \quad (5.18)$$

καθώς και

$$\operatorname{curl} \tilde{E} = i\omega \mu \tilde{H}, \quad \operatorname{curl} \tilde{H} = -i\omega \epsilon \tilde{E} + \sigma \tilde{E}. \quad (5.19)$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}(x) &= \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)^{-\frac{1}{2}} E(x), & \tilde{H}(x) &= \mu^{-\frac{1}{2}} H(x) \\ k^2 &= \mu \omega^2 \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right), & \operatorname{Im} k &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

ο οποίος οδηγεί στις ανηγμένες ή συμμετρικοποιημένες εξισώσεις Maxwell:

$$\operatorname{curl} E = ikH, \quad \operatorname{curl} H = -ikE \quad (5.21)$$

με τις οποίες εργαζόμαστε στη συνέχεια και, γενικώτερα, στη μαθηματική θεωρία.

Έχουμε, επίσης, ότι

$$\operatorname{div} E = \operatorname{div} H = 0. \quad (5.22)$$

5.2 Θεωρήματα Αναπαράστασης και Συνθήκες Ακτινοβολίας

Θεωρήματα Green

Αρχίζουμε με μία σύντομη περίληψη μερικών βασικών ιδιοτήτων των λύσεων των χρονικά αρμονικών εξισώσεων Maxwell

$$\operatorname{curl} E - ikH = 0, \quad \operatorname{curl} H + ikE = 0. \quad (5.23)$$

Αρχικά αναφέρουμε τη διανυσματική μορφή των ολοκληρωτικών θεωρημάτων Green. Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 και έστω n το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D . Τότε, για $E \in C^1(\bar{D})$ και $F \in C^2(\bar{D})$, έχουμε το πρώτο διανυσματικό θεώρημα Green

$$\int_D (E \cdot \Delta F + \operatorname{curl} E \cdot \operatorname{curl} F + \operatorname{div} E \operatorname{div} F) dx = \int_{\partial D} [(n \times E) \cdot \operatorname{curl} F + (n \cdot E) \operatorname{div} F] ds \quad (5.24)$$

και για $E, F \in C^2(\bar{D})$, έχουμε το δεύτερο διανυσματικό θεώρημα Green

$$\int_D (E \cdot \Delta F - F \cdot \Delta E) dx = \int_{\partial D} [(n \times E) \cdot \operatorname{curl} F + (n \cdot E) \operatorname{div} F - (n \times F) \cdot \operatorname{curl} E - (n \cdot F) \operatorname{div} E] ds. \quad (5.25)$$

Τα ολοκληρωτικά αυτά θεωρήματα, προκύπτουν συγχρόνως, εύκολα, από το ολοκληρωτικό θεώρημα απόκλισης του Gauss, όταν εφαρμοστεί για το διάνυσμα $E \times \operatorname{curl} F + \tilde{E} \operatorname{div} F$ και με τη βοήθεια

των διανυσματικών ταυτοτήτων $\operatorname{div} u\mathbf{E} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{E} + u \operatorname{div} \mathbf{E}$ και $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}) = \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F}$, για ένα συνεχώς διαφορίσιμο βαθμωτό u και για τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E} και \mathbf{F} και της ταυτότητας

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} \quad (5.26)$$

για ένα, δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμο, διανυσματικό πεδίο \mathbf{E} .
Ακόμα, σημειώνουμε τον τύπο $\operatorname{curl} u\mathbf{E} = \operatorname{grad} u \times \mathbf{E} + u \operatorname{curl} \mathbf{E}$.

Θεωρώντας τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

η οποία είναι η εξής:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

διατυπώνουμε ένα βασικό θεώρημα αναπαράστασης για τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E} και \mathbf{H} , που οφείλεται στους Stratton και Chu.

Θεώρημα 5.1 Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και έστω \mathbf{n} το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D . Για τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, έχουμε τον τύπο των Stratton-Chu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = & -\operatorname{curl} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \operatorname{grad} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & - ik \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \operatorname{curl} \int_D \{\operatorname{curl} \mathbf{E}(\mathbf{y}) - ik\mathbf{H}(\mathbf{y})\} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ & - \operatorname{grad} \int_D \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + ik \int_D \{\operatorname{curl} \mathbf{H}(\mathbf{y}) + ik\mathbf{E}(\mathbf{y})\} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in D, \end{aligned} \quad (5.27)$$

όπου τα ολοκληρώματα όγκου υπάρχουν ως γενικευμένα ολοκληρώματα. Έναν όμοιο τύπο παίρνουμε εάν ανταλλάξουμε αμοιβαία τους ρόλους των \mathbf{E} και \mathbf{H} .

Στην περίπτωση όπου τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E} και \mathbf{H} ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{στο } D,$$

οι απομείνοντες συνοριακοί όροι, μετασχηματίζονται όπως περιγράφεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.2 Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και έστω \mathbf{n} το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D . Έστω $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ λύσεις των εξισώσεων Maxwell

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{στο } D.$$

Τότε, έχουμε τους τύπους Stratton-Chu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = & -\operatorname{curl} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ & + \frac{1}{ik} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in D, \end{aligned} \quad (5.28)$$

και

$$H(x) = - \operatorname{curl} \int_{\partial D} (n(y) \times H(y)) \Phi(x, y) ds(y) + \frac{1}{ik} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\partial D} (n(y) \times E(y)) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D. \quad (5.29)$$

Επίσης, έχουμε και το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.3 Κάθε συνεχώς διαφορίσιμη λύση των εξισώσεων Maxwell, έχει αναλυτικές καρτεσιανές συνιστώσες.

Ειδικότερα, οι καρτεσιανές συνιστώσες των λύσεων των εξισώσεων Maxwell είναι αυτομάτως δύο φορές διαφορίσιμες. Γι' αυτό μπορούμε, χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα (5.26) να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.4 Έστω E και H λύσεις των εξισώσεων Maxwell

$$\operatorname{curl} E - ikH = 0 \text{ και } \operatorname{curl} H + ikE = 0.$$

Τότε τα E και H έχουν απόκλιση μηδέν και ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad \Delta H + k^2 H = 0.$$

Αντιστρόφως, έστω E (ή H) μία λύση της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz, που ικανοποιεί τη σχέση

$$\operatorname{div} E = 0 \text{ (ή } \operatorname{div} H = 0).$$

Τότε τα E και $H := \frac{1}{ik} \operatorname{curl} E$ (ή τα H και $E := \frac{1}{ik} \operatorname{curl} H$) ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^3$ μία διανυσματική σταθερά. Τότε τα

$$E_m(x) := \operatorname{curl}_x \alpha \Phi(x, y) \quad (5.30) \\ H_m(x) := \frac{1}{ik} \operatorname{curl}_x E_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$$

αναπαριστούν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που έχει παραχθεί από ένα μαγνητικό δίπολο, καθορισμένο από το σημείο $y \in \mathbb{R}^3$ και επιλύουν τις εξισώσεις Maxwell. Ομοίως, τα

$$H_e(x) := \operatorname{curl}_x \alpha \Phi(x, y) \quad (5.31) \\ E_e(x) := -\frac{1}{ik} \operatorname{curl}_x H_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$$

αναπαριστούν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που έχει παραχθεί από ένα ηλεκτρικό δίπολο.

Το Θεώρημα 5.2, προφανώς δίνει μία αναπαράσταση για κάθε λύση των εξισώσεων Maxwell, εκφραζόμενη σε ηλεκτρικά και μαγνητικά δίπολα, που έχουν κατανεμηθεί στη συνοριακή επιφάνεια και υπ' αυτήν την έννοια, τα πεδία (5.30) και (5.31) μπορούν να θεωρηθούν ως θεμελιώδεις λύσεις των εξισώσεων Maxwell.

Αποδεικνύεται ότι:

$$E_m(\mathbf{x}) = ik\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \times \boldsymbol{\alpha} \right) + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.32)$$

$$H_m(\mathbf{x}) = -ik\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left\{ \boldsymbol{\alpha} - \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right\} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.33)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ και ομοιόμορφα για όλα τα \mathbf{y} που περιέχονται σε κάθε φραγμένο σύνολο του \mathbb{R}^3 .

Θεώρημα 5.5 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο E_m, H_m ενός μαγνητικού διπόλου και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο E_e, H_e ενός ηλεκτρικού διπόλου, ικανοποιούν συγχρόνως τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller

$$\left(H \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) - E = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.34)$$

και

$$\left(E \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) - H = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.35)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

Τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller, μπορούμε να τις γράψουμε και ως εξής:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (H \times \mathbf{x} - rE) = 0 \quad (5.34)'$$

και

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (E \times \mathbf{x} - rH) = 0 \quad (5.35)'$$

όπου $r = |\mathbf{x}|$ και όπου το όριο θεωρείται ότι λαμβάνεται ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

Όπως θα δούμε παρακάτω, αρκεί να θεωρούμε μία μόνο από τις συνθήκες ακτινοβολίας, οι οποίες χαρακτηρίζουν πλήρως τη συμπεριφορά των λύσεων των εξισώσεων Maxwell, στο άπειρο.

Θεώρημα 5.6 Έστω ότι πεδία $E, H \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, επιλύουν τις εξισώσεις Maxwell:

$$\operatorname{curl} E - ikH = 0, \quad \operatorname{curl} H + ikE = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

και ικανοποιούν μία από τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller:

$$\left(H \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) - E = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.36)$$

ή

$$\left(E \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) + H = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.37)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Τότε

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times E(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) &= \frac{1}{ik} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times H(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad \mathbf{x} \in D \\ E(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.38)$$

και

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + \frac{1}{ik} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\partial D} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \\ = \begin{cases} \mathbf{0} & , \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 5.5 και 5.6, έχουμε τώρα το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.7 Κάθε λύση των εξισώσεων Maxwell, που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\left(\mathbf{H} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) - \mathbf{E} = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, ικανοποιεί επίσης και τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) + \mathbf{H} = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ και αντιστρόφως.

Με απευθείας υπολογισμούς, παρατηρούμε ότι οι καρτεσιανές συνιστώσες των θεμελιωδών λύσεων (5.30) και (5.31) των εξισώσεων Maxwell, ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld ομοιόμορφα για όλα τα \mathbf{y} που περιέχονται σε κάθε φραγμένο σύνολο του \mathbb{R}^3 . Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, μπορούμε τώρα από το Θεώρημα 5.6 να συμπεράνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 5.8 Οι καρτεσιανές συνιστώσες κάθε λύσης των εξισώσεων Maxwell που ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller, ικανοποιούν επίσης και τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz.

Τέλος έχουμε και το ακόλουθο

Θεώρημα 5.9 Κάθε λύση \mathbf{E}, \mathbf{H} των εξισώσεων Maxwell, που ικανοποιεί μία από τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller, έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{E}_\infty(\theta, \phi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (5.40)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{H}_\infty(\theta, \phi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (5.41)$$

Επίσης, ισχύουν

$$\mathbf{H}_\infty = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_\infty \text{ και } \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_\infty = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{H}_\infty = 0 \quad (5.42)$$

όπου \mathbf{e}_r το μοναδιαίο διάνυσμα στην ακτινική διεύθυνση.

Κάθε ένα από τα πεδία $\mathbf{E}_\infty, \mathbf{H}_\infty : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ καλείται μορφή του μακράν πεδίου ή μορφή του πεδίου ακτινοβολίας ή πλάτος σχέδασης (far-field pattern ή scattering amplitude) του \mathbf{E}, \mathbf{H} , αντιστοίχως.

Πόρισμα 5.10 Έστω $E, H \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ λύσεις των εξισώσεων Maxwell, που ικανοποιούν μία από τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller, για τις οποίες οι μορφές των μακρινών πεδίων E_∞, H_∞ μηδενίζονται ταυτοτικά. Τότε $E = H = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Παρατήρηση: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Οι εξισώσεις Maxwell με μία από τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller.
2. Η διανυσματική εξίσωση Helmholtz $\Delta U + k^2 U = 0$ για πεδία μηδενικής απόκλισης με τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\left(\operatorname{curl} U \times \frac{x}{|x|} \right) + \frac{x}{|x|} \operatorname{div} U - ikU = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (5.43)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $x/|x|$.

3. Η βαθμωτή εξίσωση Helmholtz με τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, για τις καρτεσιανές συνιστώσες $E_j, H_j, j = 1, 2, 3$ του ηλεκτρικού πεδίου E και του μαγνητικού πεδίου H , αντιστοίχως.

5.3 Τα Βασικά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

Έστω

$$C_D^{0,\alpha}(\partial D) := \{h \in C_T^{0,\alpha}(\partial D) : \operatorname{Div} h \in C^{0,\alpha}(\partial D)\}$$

και

$$C_T^{0,\alpha}(\partial D) := \{h \in C^{0,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3) : n \cdot h = 0 \text{ στο } \partial D\}.$$

όπου $\operatorname{Div} h$ η επιφανειακή απόκλιση του $h \in C_T^{0,\alpha}(\partial D)$ (για τον ορισμόδες [3], σελ. 60).

Τα βασικά εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών για τις εξισώσεις Maxwell, είναι τα ακόλουθα:

Εσωτερικό συνοριακό πρόβλημα Maxwell

Να βρεθούν δύο διανυσματικά πεδία $E, H \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\operatorname{curl} E - ikH = 0, \quad \operatorname{curl} H + ikE = 0 \text{ στο } D,$$

και τη συνοριακή συνθήκη

$$n \times E = c \text{ στο } \partial D,$$

όπου $c \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$.

Εξωτερικό συνοριακό πρόβλημα Maxwell

Να βρεθούν δύο διανυσματικά πεδία $E, H \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\operatorname{curl} E - ikH = 0, \quad \operatorname{curl} H + ikE = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

μία από τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller

$$\left(\mathbf{H} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) - \mathbf{E} = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

$$\left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) + \mathbf{H} = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ και τη συνοριακή συνθήκη

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{c} \text{ στο } \partial D,$$

όπου $\mathbf{c} \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι ένα δεδομένο εφαπτόμενο πεδίο.

Από το διανυσματικό τύπο

$$\operatorname{Div}(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = -(\mathbf{n} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{E})$$

παρατηρούμε ότι η συνθήκη για το δεδομένο εφαπτομενικό πεδίο \mathbf{c} , που έχει συνεχή επιφανειακή απόκλιση $\operatorname{Div} \mathbf{c}$, είναι απαραίτητη για την ύπαρξη λύσης για τα προβλήματα συνοριακών τιμών. Επιπρόσθετα, για τα προβλήματα συνοριακών τιμών των εξισώσεων Maxwell, μπορούμε να θεωρήσουμε τα ακόλουθα ελαφρώς πιο γενικά προβλήματα συνοριακών τιμών για τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz.

Εσωτερικό συνοριακό ηλεκτρικό πρόβλημα

Να βρεθεί ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{E} \in \mathcal{F}(D)$, όπου

$$\mathcal{F}(D) := \{\mathbf{E} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}^3 : \mathbf{E} \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \operatorname{div} \mathbf{E}, \operatorname{curl} \mathbf{E} \in C(\bar{D})\},$$

που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } D,$$

και τη συνοριακή συνθήκη

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{c}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \gamma \text{ στο } \partial D,$$

όπου $\gamma \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι μία δεδομένη συνάρτηση και $\mathbf{c} \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι ένα δεδομένο εφαπτομενικό πεδίο.

Εξωτερικό συνοριακό ηλεκτρικό πρόβλημα

Να βρεθεί ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{E} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\left(\operatorname{curl} E \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \operatorname{div} E - ikE = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right),$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ και τη συνοριακή συνθήκη

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{c}, \operatorname{div} E = \gamma \text{ στο } \partial D,$$

όπου γ και \mathbf{c} είναι δεδομένα, όπως στο εσωτερικό ηλεκτρικό πρόβλημα.

Εσωτερικό συνοριακό μαγνητικό πρόβλημα

Να βρεθεί ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(D)$, που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \text{ στο } D,$$

και τη συνοριακή συνθήκη

$$(\operatorname{curl} \mathbf{H} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{d}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = \delta \text{ στο } \partial D,$$

όπου $\delta \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι μία δεδομένη συνάρτηση και $\mathbf{d} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι ένα δεδομένο εφαπτομενικό πεδίο.

Εξωτερικό συνοριακό μαγνητικό πρόβλημα

Να βρεθεί ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, που ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\left(\operatorname{curl} \mathbf{H} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \operatorname{div} \mathbf{H} - ik\mathbf{H} = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right),$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ και τη συνοριακή συνθήκη

$$(\operatorname{curl} \mathbf{H} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{d}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = \delta \text{ στο } \partial D,$$

όπου δ και \mathbf{d} δίνονται όπως στο εσωτερικό μαγνητικό πρόβλημα.

Από τη σχέση $\Delta \operatorname{div} E = \operatorname{div} \Delta E$, παρατηρούμε ότι, για κάθε λύση E της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz $\Delta E + K^2 E = \mathbf{0}$, το $\operatorname{div} E$ επιλύει τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz.

Πράγματι,

$$\Delta(\operatorname{div} E) + k^2 \operatorname{div} E = \operatorname{div}(\Delta E) + k^2 \operatorname{div} E = \operatorname{div}(-k^2 E) + k^2 \operatorname{div} E = -k^2 \operatorname{div} E + k^2 \operatorname{div} E = 0.$$

Επιπλέον, για τα εξωτερικά προβλήματα, το $\operatorname{div} E$ ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld:

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \text{grad} \text{div} E(\mathbf{x}) - ik \text{div} E(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

ομοίωμα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, υπό τον όρο το E να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας (5.43).

Εξωτερικό συνοριακό πρόβλημα εμπέδησης

Να βρεθούν δύο διανυσματικά πεδία $E, H \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\text{curl} E - ikH = 0, \text{curl} H + ikE = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver-Müller

$$\left(H \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) - E = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

ή

$$\left(E \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) + H = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

ομοίωμα για όλες τις διευθύνσεις $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ και τη συνοριακή συνθήκη

$$[n \times (n \times H)] - \psi(n \times E) = d,$$

όπου $d \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι ένα δεδομένο εφαπτομενικό πεδίο και $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ μία δεδομένη συνάρτηση.

Μεταβατικό Πρόβλημα

Να βρεθούν διανυσματικά πεδία $E, H \in C^{1,\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$ και $E_0, H_0 \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, με $0 < \alpha < 1$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\text{curl} E - ikH = 0, \text{curl} H + ikE = 0 \text{ στο } D,$$

και

$$\text{curl} E_0 - ik_0 H_0 = 0, \text{curl} H_0 + ik_0 E_0 = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

τις συνθήκες σύνδεσης

$$n \times E_0 - n \times E = f, q_0 n \times H_0 - q n \times H = g \text{ επί του } \partial D,$$

καθώς και τη συνθήκη ακτινοβολίας Silver-Müller

$$\left(H_0 \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) - E_0 = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $x/|x|$, όπου $k, k_0, q, q_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, με $\text{Im}k_0 \geq 0$ και $f, g \in C_D^{0,\alpha}(\partial D)$.

Παρατήρηση: Η διαδικασία μέσω της οποίας λαμβάνουμε τις συνθήκες σύνδεσης από τις εξισώσεις Maxwell, περιγράφεται στο [15], σελ. 44-47.

Παρατηρήσεις (Αρχή της Αμοιβαιότητας - Μοναδικότητα στο Αντίστροφο Πρόβλημα)

1. Για τη θεωρία ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων των βασικών προβλημάτων συνοριακών τιμών παραπέμπουμε στα [3], [5] όπου αναπτύσσεται η σχετική μαθηματική θεωρία με τη μέθοδο των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.
2. Το ανάλογο του Θεωρήματος Αμοιβαιότητας (Reciprocity Theorem) της ακουστικής περίπτωσης είναι το εξής: θεωρούμε ένα επίπεδο προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα της μορφής

$$E^{inc}(x, \hat{d}, p) = ik(\hat{d} \times p) \times \hat{d}e^{ikx \cdot \hat{d}}$$

$$H^{inc}(x, \hat{d}, p) = ik\hat{d} \times pe^{ikx \cdot \hat{d}}$$

όπου $\hat{d} \in S^2$ η διεύθυνση διάδοσης και p το διάνυσμα πόλωσης. Το ηλεκτρικό πλάτος σκέδασης $E_\infty(\hat{x}, \hat{d}, p)$, του προβλήματος σκέδασης του ανωτέρω επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από έναν τέλειο αγωγό (δηλ. ένα σκεδαστή επί της επιφάνειας του οποίου ισχύει $n \times E = 0$, όπου $E = E^{inc} + E^{sc}$), ικανοποιεί την Αρχή της Αμοιβαιότητας

$$q \cdot E_\infty(\hat{x}, \hat{d}, p) = p \cdot E_\infty(-\hat{d}, -\hat{x}, q),$$

για κάθε $\hat{x}, \hat{d} \in S^2$ και κάθε $p, q \in \mathbb{R}^3$.

3. Η μελέτη του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον και είναι αντικείμενο έντονης ερευνητικής δραστηριότητας. Διατυπώνουμε δύο αποτελέσματα μοναδικότητας, ανάλογα μ' εκείνα της ακουστικής περίπτωσης που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έστω D_1, D_2 δύο τέλειοι αγωγοί. Συμβολίζουμε με

$$E_\infty^j(\hat{x}, \hat{d}, p, k), \quad j = 1, 2,$$

το ηλεκτρικό πλάτος σκέδασης για τον D_j , $j = 1, 2$, για επίπεδα προσπίπτοντα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με διεύθυνση διάδοσης $\hat{d} \in S^2$, διάνυσμα πόλωσης $p \in \mathbb{R}^3$ και κυματικό αριθμό $k > 0$.

Θεωρούμε τα ακόλουθα δεδομένα. Το ηλεκτρικό πλάτος σκέδασης E_∞ είναι γνωστό:

- (I): για κάθε $\hat{d} \in S^2$, για κάθε $p \in \mathbb{R}^3$ και για έναν συγκεκριμένο κυματικό αριθμό $k = k_0 > 0$.
- (II): για ένα συγκεκριμένο $\hat{d} = \hat{d}_0 \in S^2$, για ένα συγκεκριμένο $p = p_0 \in \mathbb{R}^3$ και για κάθε $k \in (\alpha, \beta) \subset (0, \infty)$.

Έχουμε τα ακόλουθα θεωρήματα μοναδικότητας:

1: Έστω ότι

$$E_\infty^{(1)}(\hat{x}, \hat{d}, p, k_0) = E_\infty^{(2)}(\hat{x}, \hat{d}, p, k_0)$$

για τα δεδομένα (I).

Τότε $D_1 = D_2$.

2: Έστω ότι

$$E_{\infty}^{(1)}(\hat{x}, \hat{d}_0, p_0, k) = E_{\infty}^2(\hat{x}, \hat{d}_0, p_0, k)$$

για τα δεδομένα (II).

Τότε $D_1 = D_2$.

Περισσότερα στοιχεία για ηλεκτρομαγνητικά αντίστροφα προβλήματα σκέδασης μπορούν να βρεθούν στο [6].

4. Η Μέθοδος Χαμηλών Συχνοτήτων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Για μια σειρά σχετικών θεμάτων παραπέμπουμε στο [6] και την εκεί βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- [1] J. Baumeister: *Stable Solutions of Inverse Problems*, Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [2] J.R. Cannon: *The One-Dimensional Heat Equation*, Addison-Wesley, Reading, 1984.
- [3] D. Colton - R. Kress: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley, New York, 1983.
- [4] D. Colton: *The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves*, SIAM Rev., 26, 1984, 323-350.
- [5] D. Colton - R. Kress: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 2nd ed., Springer, New York, 1998.
- [6] G. Dassios - R. Kleinman: *Low Frequency Scattering*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [7] R. Dautray - J.L. Lions: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 1: Physical Origins and Classical Methods*, Springer, Berlin, 1990.
- [8] V.B. Glasko: *Inverse Problems of Mathematical Physics*, Amer. Inst. of Physics, New York, 1996.
- [9] D.J. Griffiths: *Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική*, τόμοι I και II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1997.
- [10] J. Hadamard: *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, 1923.
- [11] S. Helgason: *The Radon Transform*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [12] G.T. Herman (ed): *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, New York, 1980.
- [13] V. Isakov: *On uniqueness in the inverse transmission scattering problem*, Comm. P.D.E., 15, 1990, 1565-1587.
- [14] J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., Wiley, New York, 1975.

- [15] D.S. Jones: *Acoustic and Electromagnetic Waves*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [16] Ν. Καβαλλάρης: *Αντίστροφο Ακουστικό Πρόβλημα Σκέδασης*, Διπλωματική Εργασία για το Μ.Δ.Ε. στα Θεωρητικά Μαθηματικά, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1997.
- [17] J.B. Keller: *Inverse problems*, Amer. Math. Mon., 83, 1976, 107-118.
- [18] A. Kirsch: *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, New York, 1996.
- [19] J.A. Kong: *Electromagnetic Wave Theory*, Wiley, New York, 1986.
- [20] Δ. Κοντογεώργος: *Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για τις Χρονικά Αρμονικές Εξισώσεις Maxwell*, Διπλωματική Εργασία για το Μ.Δ.Ε. στα Θεωρητικά Μαθηματικά, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1996.
- [21] M.M. Lavrentiev - V.G. Romanov - V.G. Vasiliev: *Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics vol. 167, Springer, Berlin, 1970.
- [22] P.D. Lax - R.S. Phillips: *Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1967.
- [23] J.D. Logan: *Applied Mathematics*, 2nd ed., Wiley, New York, 1997.
- [24] D.A. Murio: *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*, Wiley, New York, 1993.
- [25] F. Natterer: *The Mathematics of Computerized Tomography*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [26] A.G. Ramm: *Scattering by Obstacles*, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [27] B.D. Sleeman: *The inverse problem of acoustic scattering*, IMA J. Appl. Math., 29, 1982, 113-142.
- [28] J.A. Stratton: *Electromagnetic Theory*, Mc Graw Hill, New York, 1941.
- [29] V. Twersky: *Rayleigh scattering*, Appl. Opt., 3, 1964, 1150-1162.
- [30] S. Webb: *The Physics of Medical Imaging*, Institute of Physics Publ., Bristol, 1988.
- [31] D. Zidarov: *Inverse Gravimetric Problems in Geoprospecting and Geodesy*, Elsevier, Amsterdam, 1980.