

Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ – Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

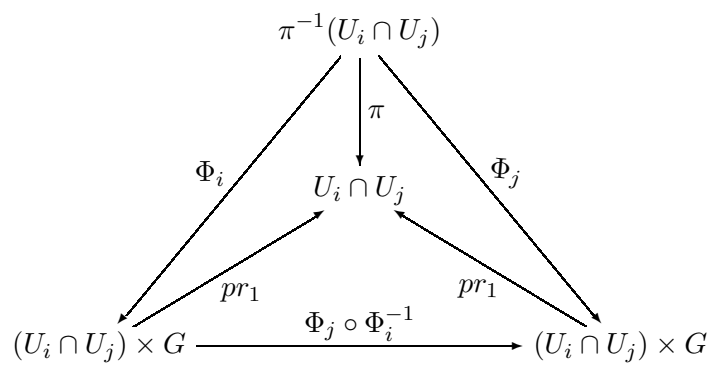
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ



Σημειώσεις Μεταπτυχιακών Μαθημάτων
Επιμέλεια: ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΖΑΧΡΙΣΤΑΣ MSc. - Μ.Π.Λ.Α

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ 2007

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ



**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ
GEOMETRY OF FIBER BUNDLES
AMS (2000) Subject Classification:
53B05, 53B20, 53C05, 55R10,
57R40, 57R42, 57R55

COPYRIGHT © 2007 by E. Vassiliou - M. Papatriantafillou
All rights reserved

Περιεχόμενα

Πρόλογος	vii
1 Απεικονίσεις Μέγιστης Τάξης	1
1.1 Κανονικές Υποπολλαπλότητες	2
1.2 Εμφυτεύσεις	13
1.3 Εμβαπτίσεις	24
1.4 Εγκάρσιες απεικονίσεις	35
2 Διανυσματικές Δέσμες	45
2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες	46
2.2 Απεικονίσεις μεταφοράς	49
2.3 Κατασκευές ορισμένων διανυσματικών δεσμών	56
2.3.1 Η δέσμη των γραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης	56
2.3.2 Η δέσμη των διγραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης	57
2.3.3 Το ευθύ άθροισμα (άθροισμα Whitney) διανυσματικών δεσμών	58
2.3.4 Η δέσμη των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ των νημάτων δύο δεσμών.	59
2.4 Η αντίστροφη εικόνα (pull-back)	60
2.5 Οι ιδιότητες της κατηγορίας $VB(X)$	63
2.6 Ακριβείς ακολουθίες - Διασπάσεις	70

2.7 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2	83
3 Πρωτεύουσες Δέσμες	87
3.1 Διαφορίσιμες δράσεις	88
3.2 Πρωτεύουσες (ή κύριες) δέσμες	91
3.3 Οι τομές μιας πρωτεύουσας δέσμης	100
3.4 Μορφισμοί πρωτευουσών δεσμών	106
3.5 Η αντίστροφη εικόνα μίας πρωτεύουσας δέσμης	112
3.6 Οι απεικονίσεις μεταφοράς	115
4 Συνοχές σε Πρωτεύουσες Δέσμες	125
4.1 Βασικοί ορισμοί	126
4.2 Συνοχές	130
4.3 Παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης	141
5 Ο Συναρτητής Τομή	149
5.1 Οι τομές μιας διανυσματικής δέσμης.	150
5.2 Η ισομορφία των $Mor(\ell_1, \ell_2)$ και $Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$	155
5.3 Το Θεώρημα Serre-Swan.	160
5.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5	163
6 Δομή Riemann και Συνοχές	165
6.1 Δομή Riemann	166
6.2 Συνοχές και συναλλοίωτη παραγωγή	172
6.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6.	182
Παραρτήματα	185
A' Συμπληρωματικές Αποδείξεις	187
B' Κατηγορίες και Συναρτητές	199
Γ' Προβολικά Πρότυπα	211
Βιβλιογραφία	217
Ευρετήριο	221

Πρόλογος

But what is geometry? ... The best definition so far offered is due to a distinguished American geometer [Oscar Veblen]: “Geometry is what geometers do”. If it be asked what geometers do, the reply is equally satisfying: “Geometers do geometry”. These definitions were not intended facetiously. They were a frank acknowledgement that to a majority of those who call themselves geometers, all things are geometry.

E. T. BELL [4, p. 419]

Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται σε μία σειρά προγενεστέρων χειρογράφων σημειώσεων μας [3], και σκοπεύουν να καλύψουν τις διδακτικές ανάγκες ενός μέρους της Μεταπτυχιακής (Διαφορικής) Γεωμετρίας, την οποίαν διδάσκουμε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Η πλήρης διδασκαλία του συνόλου των σημειώσεων αυτών απαιτεί περίπου δύο διδακτικά εξάμηνα. Η ποικιλία των παρουσιαζομένων θεμάτων επιτρέπει, με κατάλληλη επιλογή της ύλης, τη διαμόρφωση δύο ενοτήτων, που είναι σχεδόν ανεξάρτητες μεταξύ τους, άρα επιτρέπουν την διδασκαλία δύο αντιστοιχών μαθημάτων, ανάλογα με τα ενδιαφέροντα των διδασκόντων και τη σύνθεση του ακροατηρίου.

Στους άμεσους στόχους μας είναι η συμπλήρωση των σημειώσεων αυτών με μερικές ακόμη βασικές έννοιες (όπως, Καμπυλότητα, Ομάδες Ολονομίας, Μετασχηματισμοί Βαθμίδας), προκειμένου να καταστεί ένα ολοκληρωμένο κείμενο, το οποίο θα παρέχει περισσότερη πληροφόρηση στους ενδιαφερόμενους μεταπτυχιακούς φοιτητές και θα συμπληρώνει την ελλιπή ελληνική βιβλιογραφία στο πεδίο αυτό.

Το μεγαλύτερο μέρος των αρχικών χειρογράφων σημειώσεών μας είχε την καλοσύνη να μετατρέψει στο παρόν κείμενο, στοιχειοθετημένο με το πρόγραμμα \LaTeX , ο συνάδελφος μαθηματικός Γιώργος Τζαχρίστας (MSc. του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Λογικής και Αλγορίθμων). Τον ευχαριστούμε θερμά για τον κόπο που κατέβαλε, την επιμέλεια που έδειξε σ' αυτήν την επίπονη προσπάθεια, και τις βελτιώσεις που πρότεινε.

Αθήνα, Μάιος 2007.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Απεικονίσεις Μέγιστης Τάξης

In this chapter we will explore conditions under which a subset of a smooth manifold can be considered as a smooth manifold in its own right. As you will soon discover, the situation is quite a bit more subtle than the analogous theory of topological subspaces.

J. M. LEE [17, P. 38]

Στο κεφάλαιο αυτό συμπληρώνουμε τη βασική θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων, που έχουμε αναπτύξει στο [2], με τη μελέτη θεμελιωδών εννοιών όπως: οι υποπολλαπλότητες, οι εμφυτεύσεις και εμβαπτίσεις, καθώς και οι εγκάρσιες απεικονίσεις. Περιοριζόμαστε σε βασικά συμπεράσματα, κυρίως αυτά που είναι απαραίτητα και έχουν άμεση εφαρμογή στα επόμενα κεφάλαια.

Για τους συμβολισμούς και τη γενική θεωρία των (διαφορικών) πολλαπλοτή-

των παραπέμπουμε στο [2]

1.1 Κανονικές Υποπολλαπλότητες

Υποθέτουμε ότι $M \equiv (M, \mathcal{A})$ είναι μία C^∞ (διαφορίσιμη) πολλαπλότητα με διάσταση $\dim M = m$. Υπενθυμίζουμε ότι \mathcal{A} είναι ο μέγιστος άτλαντας, ο οποίος ορίζει τη διαφορική δομή της M .

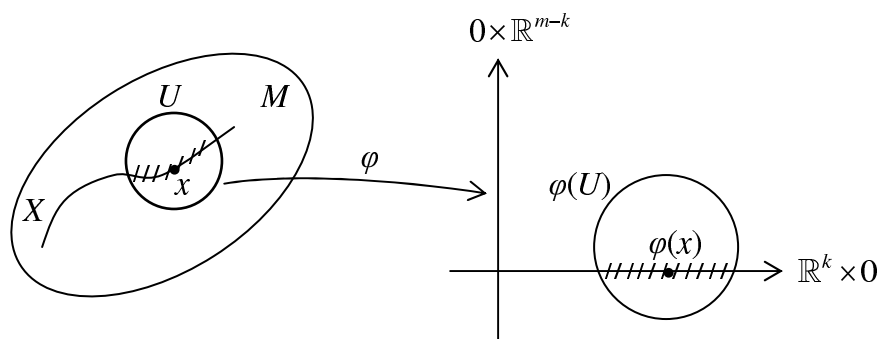
Αν $X \subset M$, συχνά προκύπτει το ερώτημα κατά πόσον το X μπορεί να εφοδιαστεί και αυτό με δομή πολλαπλότητας. Ο ορισμός μιάς τέτοιας δομής δεν είναι τόσο απλός ή άμεσος, όπως στην περίπτωση π.χ. μιάς (υπο)ομάδας ή ενός τοπολογικού (υπο)χώρου. Επιπλέον, είναι δυνατόν να οριστούν διάφορες διαφορικές δομές επί του X , οι οποίες δεν συμπίπτουν αναγκαιώς μεταξύ τους.

Εδώ θα ασχοληθούμε με τη δομή της *κανονικής* υποπολλαπλότητας, σε αντιδιαστολή με τη δομή της *εμφυτευμένης* ή της *εμβαπτισμένης* υποπολλαπλότητας. Η πρώτη είναι αρκετά φυσιολογική, με την έννοια ότι η τοπολογία της, η οποία εισάγεται από τη διαφορική δομή, συμπίπτει με την σχετική τοπολογία και η απεικόνιση $i : X \hookrightarrow M$ (φυσική εμφύτευση) είναι C^∞ -απεικόνιση.

1.1.1 Ορισμός. Ένα υποσύνολο $X \subset M$, όπου $M \equiv (M, \mathcal{A})$ είναι m -διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, καλείται **κανονική υποπολλαπλότητας M , διάστασης $k \leq m$** (regular submanifold), αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, έτσι ώστε $x \in U$ και να ισχύει η συνθήκη

$$\text{(ΥΠ. 1)} \quad \varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$$

Το επόμενο σχήμα μπορεί να διευκολύνει στην κατανόηση του ορισμού.



Σχήμα 1.1

Στην (ΥΠ. 1) γράφοντας 0 εννοούμε ότι

$$0 \equiv \{0\} \equiv \{(0, \dots, 0)\} \in \mathbb{R}^{m-k}.$$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, αν καλέσουμε x_i ($i = 1, \dots, m$) τις συντεταγμένες του χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, δηλαδή

$$x_i = pr_i \circ \varphi \quad (\text{όπου } pr_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ η } i\text{-προβολή}),$$

θα είναι

$$(1.1.1) \quad x_j(p) = 0, \quad \forall j = k+1, \dots, m \quad \text{και } p \in U \cap X.$$

Εκτός του Ορισμού 1.1, ένα χρήσιμο κριτήριο για να διαπιστώσουμε συχνά αν το $X \subset M$ είναι υποπολλαπλότητα μας δίνει και η

1.1.2 Πρόταση. *Το $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k τότε και μόνον τότε αν, για κάθε $x \in X$, υπάρχει $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, έτσι ώστε $x \in V$ και ισχύει η συνθήκη*

$$(ΥΠ. 2) \quad \psi(V) = B_1 \times B_2, \quad \psi(V \cap X) = B_1 \times 0,$$

όπου $B_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ και $B_2 \subseteq \mathbb{R}^{m-k}$ είναι ανοιχτά σύνολα με $0 \in B_2$.

Απόδειξη. Έστω ότι το X είναι κανονική υποπολλαπλότητα και $x \in X$. Τότε κατά τον Ορισμό 1.1.1, υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί την (ΥΠ. 1). Εξ άλλου, επειδή το $\varphi(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ και $\varphi(x) \in \varphi(U)$, θα υπάρχουν ανοιχτά $B_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ και $B_2 \subseteq \mathbb{R}^{m-k}$, εις τρόπον ώστε $\varphi(x) \in B_1 \times B_2 \subset \varphi(U)$. Θέτουμε

$$V := \varphi^{-1}(B_1 \times B_2) \quad \text{και} \quad \psi := \varphi|_V.$$

Προφανώς, $x \in V$ και $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, εφ' όσον το τελευταίο ζεύγος προκύπτει από κατάλληλο περιορισμό (επί ανοιχτού υποσυνόλου) του χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \psi(V \cap X) &= \varphi(V \cap X) = \varphi(V \cap U \cap X) \\ &= \varphi(V) \cap \varphi(U \cap X) \\ &= \varphi(V) \cap \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ (\text{επειδή } V \subset U) \quad &= \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ &= (B_1 \times B_2) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ &= B_1 \times 0, \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην (ΥΠ. 2). Σημειώνουμε ότι [λόγω της (ΥΠ. 1)] $\varphi(x) = (a, 0)$, άρα αναγκαίως $0 \in B_2$.

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί την (ΥΠ. 2). Τότε μπορούμε (παρόμοια με τις προηγούμενες σχέσεις) να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned}\psi(V \cap X) &= B_1 \times 0 = (B_1 \times \mathbb{R}^k) \times (B_2 \cap 0) \\ &= (B_1 \times B_2) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ &= \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)\end{aligned}$$

Θέτοντας $U := V$ και $\varphi := \psi$, καταλήγουμε στην ύπαρξη ενός χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ όπως στον Ορισμό 1.1.1. \square

Ο όρος υποπολλαπλότητα υπονοεί ότι υπάρχει στο X δομή πολλαπλότητας, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Έστω $X \subset M$ κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k . Εισάγουμε τον εξής συμβολισμό:

$$\mathcal{A}_X := \{(U \cap X, p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}, \text{ που ικανοποιεί την (ΥΠ. 1)}\}.$$

Εδώ $p_{1,0} : \mathbb{R}^k \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα [σε αντιδιαστολή προς τη (συνήθη) $pr_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$].

1.1.3 Πρόταση. Το \mathcal{A}_X ορίζει επί του X έναν C^∞ -άτλαντα, διάστασης k .

Απόδειξη. i) Κάθε ζεύγος $(U \cap X, p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \in \mathcal{A}_X$ αποτελεί χάρτη: Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$(1.1.2) \quad (p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X}))(U \cap X) = p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) = p_{1,0}(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)).$$

Όμως το $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k \times 0$ (κατά τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}^k \times 0$, ως υποχώρου του $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$) και η

$$p_{1,0} : \mathbb{R}^k \times 0 \longrightarrow \mathbb{R}^k : (a, 0) \mapsto a$$

είναι ομοιομορφισμός με αντίστροφη την

$$(1.1.3) \quad j : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \times 0 : b \mapsto (b, 0).$$

Επομένως, η (1.1.2) συνεπάγεται ότι το $(p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X}))(U \cap X)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο \mathbb{R}^k . Επίσης, η $p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})$ είναι 1-1 απεικόνιση, ως σύνθεση απεικονίσεων 1-1, οπότε πράγματι ορίζεται χάρτης

ii) Είναι προφανές ότι οι χάρτες του \mathcal{A}_X καλύπτουν το X , αφού, για κάθε $x \in X$, υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με τις ιδιότητες του Ορισμού 1.1.1 και $x \in U \cap X$.

iii) Οι χάρτες του \mathcal{A}_X είναι \mathcal{C}^∞ -συμβιβάσιμοι μεταξύ τους. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα ζεύγη

$$(U \cap X, p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \quad \text{και} \quad (\tilde{U} \cap X, p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X}))$$

του \mathcal{A}_X , που προκύπτουν από τους αντίστοιχους χάρτες $(U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$, και ας υποθέσουμε ότι $U \cap \tilde{U} \cap X \neq \emptyset$. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap \tilde{U} \cap X) &= \varphi((U \cap \tilde{U}) \cap (U \cap X)) = \\ \varphi(U \cap \tilde{U}) \cap \varphi(U \cap X) &= \varphi(U \cap \tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times 0). \end{aligned}$$

Λόγω της συμβιβάσιμότητας των χαρτών (U, φ) και $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ είναι $\varphi(U \cap \tilde{U}) \subset \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ ανοιχτό, άρα (βάσει του ορισμού της σχετικής τοπολογίας) και το $\varphi(U \cap \tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k \times 0$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον ομοιομορφισμό $p_{1,0} : \mathbb{R}^k \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^k$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$(p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X}))(U \cap \tilde{U} \cap X) = p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X)) \subset \mathbb{R}^k \quad \text{ανοιχτό.}$$

Παρόμοια και για το

$$(p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X}))(U \cap \tilde{U} \cap X) = p_{1,0}(\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U} \cap X)) \subset \mathbb{R}^k.$$

Τέλος διαπιστώνουμε ότι η

$$(p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \circ (p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X}))^{-1} : p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X)) \rightarrow p_{1,0}(\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U} \cap X))$$

είναι \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση, αφού

$$\begin{aligned} &(p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \circ (p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X}))^{-1} \\ &\equiv (p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \circ (p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X}))^{-1} \Big|_{p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X))} \\ &= p_{1,0} \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ p_{1,0}^{-1} \Big|_{p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X))} \\ &= p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \circ j \Big|_{p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X))}, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε σύνθεση \mathcal{C}^∞ -απεικονίσεων (προφανώς, η $p_{1,0}$ είναι \mathcal{C}^∞ ως γραμμική απεικόνιση και ανάλογα η αντίστροφη-της j). Παρόμοια αποδεικνύεται η διαφορισιμότητα της $(p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \circ (p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X}))^{-1}$, οπότε και ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

1.1.4 Θεώρημα. Αν $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k , τότε το (X, \mathcal{A}'_X) , όπου \mathcal{A}'_X ο αντίστοιχος μέγιστος άτλαντας του \mathcal{A}_X , είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης k .

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.1.3. \square

1.1.5 Πρόταση. Ο διαφορικός άτλαντας \mathcal{A}_X περιέχει και τους χάρτες της μορφής $(V \cap X, p_1 \circ \psi|_{V \cap X})$, για όλα τα $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (ΥΠ. 2).

Απόδειξη. Σύμφωνα με τους συλλογισμούς που έγιναν στην απόδειξη του αντίστροφου μέρους της Πρότασης 1.1.2, κάθε χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ ο οποίος ικανοποιεί την (ΥΠ. 2), μπορεί να πάρει και τη μορφή χάρτη που ικανοποιεί την (ΥΠ. 1), άρα οδηγεί στην κατασκευή χάρτη του \mathcal{A}_X . \square

Το Θεώρημα 1.1.4 ήδη δικαιολόγησε την ορολογία υπό-πολλαπλότητα για το X . Θα πρέπει να εξηγηθεί και ο όρος κανονική. Αυτός αναφέρεται στην τοπολογική δομή την οποία εισάγει επί του X ο \mathcal{A}'_X , όπως προκύπτει από το

1.1.6 Θεώρημα. Έστω $X \subset M$ κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k . Αν τ_σ είναι η σχετική τοπολογία που εισάγει επί του X η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$ (την οποίαν ορίζει ο \mathcal{A} επί της M), τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\tau_\sigma = \tau_{\mathcal{A}_X} = \tau_{\mathcal{A}'_X}.$$

Απόδειξη. Για να δείξουμε την $\tau_\sigma = \tau_{\mathcal{A}_X}$, αρκεί να δείξουμε ότι $U \cap X \in \tau_\sigma$ και η $p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})$ είναι τ_σ -ομοιομορφισμός, για κάθε $(U \cap X, p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \in \mathcal{A}_X$.

Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεσος, αφού $U \in \tau_{\mathcal{A}}$, άρα $U \subset M$ ανοιχτό. Για τον δεύτερο έχουμε ότι η αναφερόμενη απεικόνιση είναι τ_σ -ομοιομορφισμός ως σύνθεση τ_σ -ομοιομορφισμών, όπως προκύπτει από το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U \cap X & \xrightarrow{\varphi|_{U \cap X}} & \varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \subset \mathbb{R}^k \times 0 \\ & \searrow p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X}) & \downarrow p_{1,0} \\ & & p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

Διάγραμμα 1.1

Εδώ ας επεξηγήσουμε ότι, επειδή η $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ είναι ομοιομορφισμός, θα είναι και η $\varphi|_{U \cap X} : U \cap X \rightarrow \varphi(U \cap X)$ ομοιομορφισμός (ως προς τη σχετική τοπολογία). Επίσης, η $p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})$ είναι ομοιομορφισμός ως περιορισμός του ομοιομορφισμού $p_{1,0} : \mathbb{R}^k \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ επί του ανοιχτού $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \subset \mathbb{R}^k \times 0$ ως προς τη σχετική τοπολογία και πάλι.

Η ισότητα $\tau_{\mathcal{A}_X} = \tau_{\mathcal{A}'_X}$ είναι αποτέλεσμα ενός γενικότερου συμπεράσματος, που γνωρίζουμε για τυχούσες C^∞ -πολλαπλότητες (βλ.. [2]). \square

1.1.7 Πρόταση. Αν $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα, τότε η κανονική εμφύτευση $i : (X, \mathcal{A}'_X) \hookrightarrow (M, \mathcal{A})$ είναι C^∞ -απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x \in X$. Εφόσον το X είναι υποπολλαπλότητα, θα υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U$, ο οποίος ικανοποιεί την (ΥΠ. 1), όποτε ορίζεται και ο χάρτης $(U \cap X, p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X}))$ του X , με $x \in U \cap X$. Επειδή $i(U \cap X) \subset U$, μπορούμε να σχηματίσουμε την τοπική παράσταση της i ως προς τους δύο προηγούμενους χάρτες, δηλαδή την $\varphi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \varphi)^{-1}$, όπως προκύπτει από το επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
 U \cap X & \xrightarrow{i} & U \\
 \downarrow p_{1,0} \circ \varphi & & \downarrow \varphi \\
 \mathbb{R}^k \supset p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) & \xrightarrow{\varphi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \varphi)^{-1}} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \equiv \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.2

Εδώ να σημειώσουμε ότι γράφουμε $p_{1,0} \circ \varphi$ αντί $p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})$. Αυτή τη σύμβαση θα ακολουθούμε συστηματικά στη συνέχεια, αφήνοντας στον αναγνώστη την επιμέλεια του προσδιορισμού του πεδίου ορισμού και των σχετικών περιορισμών των διάφορων απεικονίσεων, οι οποίες θα εμφανίζονται στους υπολογισμούς.

Επομένως, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 1.1.3 [μέρος iii)], έχουμε ότι:

$$\varphi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \varphi)^{-1} = \varphi \circ i \circ \varphi^{-1} \circ j = j : p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \times 0,$$

που είναι C^∞ -απεικόνιση παντού, άρα και στο $p_{1,0}(\varphi(x))$. Συνεπώς, η i είναι C^∞ στο x και, παρόμοια, σε όλο το X . \square

1.1.8 Παρατήρηση. Μια παρόμοια απόδειξη μπορεί να γίνει και με τη χρήση χαρτών της μορφής $(V \cap X, p_{1,0} \circ (\psi|_{V \cap X}))$, για $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιούν την (ΥΠ. 2). Ας την κάνουμε, σύντομα, ως παράδειγμα εφαρμογής τέτοιων χαρτών. Πάλι, για τυχόν $x \in X$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2, θα υπάρχει $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, με τις γνωστές ιδιότητες. Επομένως, κατά την Πρόταση 1.1.5, το ζεύγος $(V \cap X, p_{1,0} \circ (\psi|_{V \cap X}))$ είναι χάρτης της διαφορικής δομής του X με $x \in V \cap X$ και $i(V \cap X) \subset V$. Άρα έχουμε την αντίστοιχη τοπική παράσταση

$\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1}$ (βλ. και τη σημειούμενη σύμβαση στην απόδειξη της Πρότασης 1.1.7)

$$\begin{array}{ccc}
 V \cap X & \xrightarrow{i} & V \\
 \downarrow p_{1,0} \circ \psi & & \downarrow \psi \\
 B_1 = p_{1,0}(\psi(V \cap X)) & \xrightarrow{\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1}} & B_1 \times B_2
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.3

Προφανώς, $\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1} = j$ που είναι C^∞ -απεικόνιση. Επομένως καταλήγουμε, όπως και πριν, στο συμπέρασμα της Πρότασης.

1.1.9 Πρόρισμα. Η απεικόνιση $T_x i \equiv (di)_x: T_x X \rightarrow T_x M$ είναι 1-1, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τους χάρτες και την αντίστοιχη τοπική παράσταση του Διαγράμματος 1.3, έχουμε και το αντίστοιχο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc}
 T_x X & \xrightarrow{T_x i} & T_{i(x)} M = T_x M \\
 \downarrow \overline{p_{1,0} \circ \psi} \cong & & \downarrow \overline{\psi} \cong \\
 \mathbb{R}^k & \xrightarrow{D(\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1})(p_{1,0}(\psi(x)))} & \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.4

Επειδή (λόγω γραμμικότητας της j)

$$D(\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1})(p_{1,0}(\psi(x))) = Dj(p_{1,0}(\psi(x))) = j,$$

καταλήγουμε στην

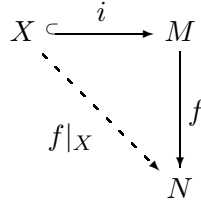
$$T_x i = \overline{\psi}^{-1} \circ j \circ \overline{(p_{1,0} \circ \psi)},$$

η οποία είναι 1-1. Παρόμοια απόδειξη ισχύει αν χρησιμοποιήσουμε το Διάγραμμα 1.2. \square

1.1.10 Πρόρισμα. Μετά την ταύτιση $T_x X \equiv T_x i(T_x X)$, μέσω της 1-1 $T_x i$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_x X$ μπορεί να θεωρηθεί γραμμικός υπόχωρος του $T_x M$ με διάσταση k .

1.1.11 Πρόταση. Έστω $f : M \rightarrow N$ C^∞ -απεικόνιση μεταξύ των διαφορικών πολλαπλασιωμένων M και N . Αν X είναι κανονική υποπολλαπλασιωμένη της M , τότε η απεικόνιση $f|_X : X \rightarrow N$ είναι C^∞ .

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του μεταθετικού διαγράμματος



Διάγραμμα 1.5

δηλαδή $f|_X = f \circ i$ που είναι C^∞ ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων. \square

1.1.12 Πρόταση. Έστω $f : N \rightarrow M$ μια απεικόνιση, μεταξύ των διαφορικών πολλαπλασιωμένων $N \equiv (N, \mathcal{B})$ και $M \equiv (M, \mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλασιωμένη (διάστασης k), τέτοια ώστε $f(N) \subset X$, και συμβολίζουμε με $f_X : N \rightarrow X$ την απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση $f_X(y) := f(y), y \in N$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$[\eta f : N \rightarrow M \text{ είναι } C^\infty] \Leftrightarrow [\eta f_X : N \rightarrow X \text{ είναι } C^\infty].$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την κατεύθυνση \Rightarrow : Αν $y \in N$ είναι τυχόν σημείον του πεδίου ορισμού και θέσουμε $x := f(y)$, τότε υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $\varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.1. Επειδή $f^{-1}(U) \subset N$ ανοιχτό, θα υπάρχει χάρτης (V, ψ) της N τέτοιος ώστε $y \in V \subset f^{-1}(U)$. Επομένως, αφού η f είναι C^∞ στο y και $f(V) \subset U$, προκύπτει ότι και η τοπική παράσταση της f , μέσω των προηγούμενων χαρτών,

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(V) \longrightarrow \varphi(U)$$

θα είναι C^∞ στο $\psi(y)$. Θεωρούμε τους χάρτες (V, ψ) και $(U \cap X, p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X}))$ των N και X αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι $f_X(V) = f(V) \subset U \cap X$ [αφού $f(V) \subset U$ και $f(V) \subset X$ λόγω της υπόθεσης]. Επομένως, η αντίστοιχη τοπική παράσταση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$(p_{1,0} \circ (\varphi|_{U \cap X})) \circ f_X \circ \psi^{-1} = p_{1,0} \circ (\varphi \circ f_X \circ \psi^{-1}) = p_{1,0} \circ (\varphi \circ f \circ \psi^{-1})$$

(για ευκολία παραλείπουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς). Η τελευταία είναι C^∞ απεικόνιση στο $\psi(y)$ ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων. Επομένως, η f_X είναι C^∞ στο y και ανάλογα σε ολόκληρο το N .

Η κατεύθυνση \Leftarrow είναι προφανής: Η f μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$f = i \circ f_X, \quad \text{όπου } i : X \hookrightarrow M.$$

Άρα η f είναι C^∞ σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.7. \square

1.1.13 Παραδείγματα. 1) Αν $M \equiv (M, \mathcal{A})$ είναι διαφορική πολλαπλότητα, τότε η διαγώνιος Δ_M είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M \times M$ με $\dim \Delta_M = \dim M = m$. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο $(x, x) \in \Delta_M$. Επειδή $x \in M$, υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ της M με $x \in U$. Αν θεωρήσουμε την (προφανώς) αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση

$$\sigma : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : (\alpha, b) \mapsto (\alpha, b - \alpha),$$

τότε το ζεύγος $(U \times U, \sigma \circ (\varphi \times \varphi))$ είναι χάρτης της $M \times M$, για τον οποίον ισχύει ότι

$$(1.1.4) \quad \begin{aligned} & (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))((U \times U) \cap \Delta_M) = \\ & = (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(\Delta_U) = \sigma(\Delta_{\varphi(U)}) = \varphi(U) \times 0. \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$\begin{aligned} & (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(U \times U) = \sigma(\varphi(U) \times \varphi(U)) = \\ & = \{(\varphi(y), \varphi(z) - \varphi(y)) \mid (y, z) \in U \times U\}, \end{aligned}$$

οπότε

$$(1.1.5) \quad (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(U \times U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0) = \{(\varphi(y), 0) \mid y \in U\} = \varphi(U) \times 0.$$

Από τις (1.1.4) και (1.1.5) προκύπτει ότι

$$(\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(U \times U) \cap \Delta_M = (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(U \times U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0).$$

Επομένως, για το τυχόν $(x, x) \in \Delta_M$, βρίσκουμε χάρτη που ικανοποιεί τον Ορισμό 1.1.1, άρα η Δ_M είναι κανονική υποπολλαπλότητα, διάστασης m , της $2m$ -διάστατης πολλαπλότητας $M \times M$.

2) Ο εφαπτόμενος χώρος $T_x M$ ($x \in M$) είναι κανονική υποπολλαπλότητα, διάστασης m , της εφαπτόμενης δέσμης TM (αν $\dim M = m$). Πράγματι, για το

$x \in M$ υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ της M με $x \in U$. Συνεπώς ο αντίστοιχος χάρτης $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ της TM (βλ.. [2, Θεώρημα 2.4.3]) με

$$\Phi(u) := (\varphi(y), \bar{\varphi}_y(u)), \quad \text{αν } u \in T_y M \text{ και } \bar{\varphi}_y : T_y M \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^m.$$

Ο χάρτης $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ καλύπτει ολόκληρο τον εφαπτόμενο χώρο $T_x M$, άρα

$$\pi^{-1}(U) \cap T_x M = T_x M.$$

Για τον ίδιο χάρτη έχουμε ότι

$$\Phi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \quad (\text{ανοιχτό})$$

και

$$(1.1.6) \quad \begin{aligned} \Phi(\pi^{-1}(U) \cap T_x M) &= \Phi(T_x M) = \{(\varphi(x), \bar{\varphi}(u)) \mid u \in T_x M\} \\ &= \{\varphi(x)\} \times \bar{\varphi}(T_x M) = \{\varphi(x)\} \times \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι οι προηγούμενες εκφράσεις ουσιαστικά αποδεικνύουν ότι, για κάθε $v \in T_x M$, βρίσκουμε χάρτη [πάντοτε τον ίδιο $(\pi^{-1}(U), \Phi)$], που ικανοποιεί την ιδιότητα (ΥΠ. 2) της Πρότασης 1.1.2.

Για να είμαστε, πιο τυπικά, σύμφωνοι με την (ΥΠ. 2) θα πρέπει να βρούμε στο τελευταίο μέλος της (1.1.6) την έκφραση $\mathbb{R}^m \times 0$ αντί της $\{\varphi(x)\} \times \mathbb{R}^m$. Αυτό γίνεται αφ' ενός με κατάλληλη μεταφορά του χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ και αφ' ετέρου με εφαρμογή της απεικόνισης συμμετρίας. Ακριβέστερα, αντί του $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ θα θεωρήσουμε τον χάρτη $(\pi^{-1}(U), \tilde{\Phi})$ όπου η απεικόνιση $\tilde{\Phi}$ προκύπτει από το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \\ \tilde{\Phi} \downarrow \text{---} & & \downarrow S \\ \mathbb{R}^m \times B & \xleftarrow{id_{\mathbb{R}^m} \times \tau} & \mathbb{R}^m \times \varphi(U) \end{array}$$

Διάγραμμα 1.6

όπου

$$\tau : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m : h \mapsto h - \varphi(x) \quad (\text{αμφιδιαφόριση})$$

$$B := \tau(\varphi(U)) \subset \mathbb{R}^m \quad (\text{ανοιχτό})$$

$$S : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : (\alpha, b) \mapsto (b, \alpha) \quad (\text{αμφιδιαφόριση}),$$

δηλαδή $\tilde{\Phi} = (id_{\mathbb{R}^m} \times \tau) \circ S \circ \Phi$, οπότε έχουμε τις σχέσεις

$$\tilde{\Phi}(\pi^{-1}(U)) = \mathbb{R}^m \times B$$

και (όπως πριν, για την Φ)

$$\tilde{\Phi}(T_x M \cap \pi^{-1}(U)) = \mathbb{R}^m \times 0.$$

1.1.14 Σχόλιο. Οι κανονικές υποπολλαπλότητες είναι τα υποσύνολα μιας πολλαπλότητας που "κληρονομούν" με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη διαφορική δομή της πολλαπλότητας, έτσι ώστε η επαγόμενη (από την διαφορική δομή) τοπολογία να συμπίπτει με την σχετική τοπολογία και η φυσική εμφύτευση να είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Σε αντίθεση προς τις κανονικές υποπολλαπλότητες, οι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες (βλ.. την επόμενη παράγραφο) δεν έχουν την παραπάνω τοπολογική ιδιότητα.

1.1.15 Ασκήσεις.

1. Αν M και N είναι C^∞ -πολλαπλότητες και $y \in N$ τυχόν σημείο, τότε το σύνολο $M \times \{y\}$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M \times N$.
2. Αν X είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M , τότε

$$T_x X \equiv \{[(\alpha, x)] \in T_x M \mid \text{Im}(\alpha) \subset X\}$$

3. Η διαφορική δομή του $T_x M$ ως κανονικής υποπολλαπλότητας της TM [βλ.. Παράδειγμα 1.1.13(2)] συμπίπτει με τη "φυσιολογική" διαφορική δομή, την οποία έχει ως διανυσματικός χώρος.
4. Κάθε διανυσματικός υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V (πεπερασμένης διάστασης) είναι κανονική υποπολλαπλότητα του V .
5. Να αποδειχθεί ότι οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες
 - i) Το X είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M με $\dim X = \dim M$.
 - ii) Το X είναι ανοιχτό υποσύνολο της M .
6. Αν X_i είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M_i ($i = 1, 2$), τότε και η $X_1 \times X_2$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M_1 \times M_2$.
7. Η σφαίρα (επιφάνεια) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^3 . Ανάλογα και ο κύκλος S^1 είναι κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^2 .

8. Αν $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ -καμπύλη, τότε το γράφημα της

$$\Gamma_\alpha := \{(t, \alpha(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^2 . Επιπλέον, ισχύει η σχέση

$$T_{(t, \alpha(t))}\Gamma_\alpha \equiv \Gamma_{T_t\alpha}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

9. Να γενικευτούν τα συμπεράσματα της Άσκησης 8 για μία C^∞ -καμπύλη $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$, όπου M είναι C^∞ -πολλαπλότητα.

10. Να αποδειχθεί η σχέση

$$T_{(x, x)}(\Delta_M) \equiv \Delta_{T_x M}, \quad \forall x \in M.$$

11. (Γενίκευση της 9). Δίνεται μία C^∞ -απεικόνιση $f : M \rightarrow N$. Να αποδειχθεί ότι το γράφημα της f

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N,$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M \times N$. Ποιά είναι η διάσταση της; Επιπλέον, να δειχθεί ότι

$$T_{(x, f(x))}\Gamma_f \equiv \Gamma_{T_x f}, \quad \forall x \in M.$$

1.2 Εμφυτεύσεις

Στην παράγραφο αυτή σταθεροποιούμε δύο διαφορικές πολλαπλότητες $M \equiv (M, \mathcal{A})$ και $N \equiv (N, \mathcal{B})$ με $\dim M = m$ και $\dim N = n$ αντιστοίχως, όπου $m \leq n$.

1.2.1 Ορισμός. Μια C^∞ -απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ καλείται **εμφύτευση** (immersion) **στο** $x_o \in M$, αν το σημειακό διαφορικό της (εφαπτομένη απεικόνιση στο x_o) $T_{x_o}f : T_{x_o}M \rightarrow T_{f(x_o)}N$ είναι απεικόνιση 1-1. Η f θα καλείται (απλώς) **εμφύτευση** αν είναι εμφύτευση σε κάθε σημείο $x \in M$.

Από τη γνωστή σχέση

$$\dim(T_{x_o}M) = \dim(\ker(T_{x_o}f)) + \dim(\operatorname{Im}(T_{x_o}f))$$

και την υπόθεση προκύπτει ότι (αφού $\ker(T_{x_o}f) = 0$)

$$\operatorname{rank}_{x_o}(f) := \dim(\operatorname{Im}(T_{x_o}f)) = m.$$

Το προηγούμενο δικαιολογεί και την έκφραση "μια εμφύτευση είναι **απεικόνιση μέγιστης τάξης**" (βλ. και την έννοια της εμβάπτισης, στην επόμενη Παράγραφο 1.3, όπου θα είναι $\operatorname{rank}_{x_o}(f) = n$).

1.2.2 Λήμμα. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

i) Η f είναι εμφύτευση στο $x_o \in M$.

ii) Υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U_o του $x_o \in M$, W_o του $0 \in \mathbb{R}^k$ ($k := n - m$) και V_o του $f(x_o) \in N$, καθώς και μια αμφιδιαφόριση $g : U_o \times W_o \xrightarrow{\cong} V_o$ τέτοια ώστε $f(x) = g(x, 0)$, για κάθε $x \in U_o$. Δηλαδή $f|_{U_o} = g \circ J$, όπου J είναι η φυσική εμφύτευση (σε επίπεδο πολλαπλασιωτών) $U_o \ni x \mapsto (x, 0) \in U_o \times W_o$.

Η συνθήκη ii) απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U_o & \xrightarrow{f} & V_o \\ & \searrow J & \uparrow g \\ & & U_o \times W_o \end{array}$$

Διάγραμμα 1.7

Επομένως, κατά το Λήμμα, έχουμε ότι, μέσω κατάλληλης ταύτισης (με τη βοήθεια της g), η f συμπίπτει με τη φυσική εμφύτευση (σε μια περιοχή του υπ' όψιν σημείου x_o). Έτσι λέμε ότι *τοπικά μια εμφύτευση είναι η φυσική εμφύτευση*.

Απόδειξη. i) \Rightarrow ii): Επειδή η f είναι C^∞ στο x_o , υπάρχουν χάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, τέτοιοι ώστε $x_o \in U$, $f(U) \subset V$ και η τοπική παράσταση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

να είναι C^∞ στο $\varphi(x_o)$. Επίσης, επειδή

$$\text{rank}_{x_o}(f) = \dim(\text{Im}(T_{x_o}M)) = m \leq n,$$

υπάρχει γραμμικός υπόχωρος F του $T_{f(x_o)}N$ με $\dim F = k := n - m$, και τέτοιος ώστε

$$T_{f(x_o)}N = T_{x_o}f(T_{x_o}M) \oplus F.$$

Εφαρμόζοντας τον γραμμικό ισομορφισμό $\bar{\psi} : T_{f(x_o)}N \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ στην τελευταία σχέση έχουμε ότι

$$\mathbb{R}^n = \bar{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M)) \oplus \bar{\psi}(F)$$

και

$$\dim [\bar{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M))] = m, \quad \dim \bar{\psi}(F) = k = n - m.$$

Κατασκευάζουμε και έναν γραμμικό ισομορφισμό $\xi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, που να έχει την ιδιότητα

$$\xi(\overline{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M))) = \mathbb{R}^m \times 0, \quad \xi(\overline{\psi}(F)) = 0 \times \mathbb{R}^k.*$$

Σχηματικά, τα προηγούμενα βήματα της απόδειξης απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_{f(x_o)}N & = & T_{x_o}f(T_{x_o}M) \oplus F \\ \overline{\psi} \downarrow & & \downarrow \overline{\psi} \\ \mathbb{R}^n & = & \overline{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M)) \oplus \overline{\psi}(F) \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ \mathbb{R}^n & = & (\mathbb{R}^m \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^k) \end{array}$$

Διάγραμμα 1.8

Επειδή η απεικόνιση ξ είναι αμφιδιαφόριση, μπορούμε να ορίσουμε και την επίσης διαφορίσιμη απεικόνιση

$$h : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n : (x, a) \mapsto h(x, a) := (\xi \circ \psi \circ f) + (0, a)$$

όπου εννοείται ότι $(0, a) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^n$. Υπολογίζουμε το διαφορικό της h στο σημείο $(x_o, 0)$. Βάσει του τύπου του Leibniz είναι

$$(1.2.1) \quad T_{(x_o, 0)}h(u, v) = T_{x_o}h_o(u) + T_0h_{x_o}(v),$$

για κάθε $(u, v) \in T_{(x_o, 0)}(U \times \mathbb{R}^k) \equiv T_{x_o}M \times T_0\mathbb{R}^k$. Για τις μερικές απεικονίσεις της σχέσης (1.2.1) βρίσκουμε ότι είναι:

$$\begin{aligned} h_o : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad h_o(x) = (\xi \circ \psi \circ f)(x) + c_1, \\ h_{x_o} : \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad h_{x_o}(b) = c_2 + (0, b), \end{aligned}$$

*Αυτό γίνεται με τον εξής κλασσικό τρόπο: Σταθεροποιούμε δύο βάσεις $\{u_i \mid i = 1, \dots, m\}$ και $\{u_j \mid j = 1, \dots, k\}$ των $\overline{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M))$ και $\overline{\psi}(F)$ αντιστοίχως, και ορίζουμε τον ξ από την απαίτηση να είναι $\xi(u_i) = e_i$ και $\xi(u_j) = e_{m+j}$, αν $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+k=n})$ είναι η φυσική βάση του \mathbb{R}^n .

όπου $c_1 = (0, 0)$ και $c_2 = (\xi \circ \psi \circ f)(x_o)$ σταθερές. Επομένως, $h_o = \xi \circ \psi \circ f$ και $h_{x_o} = c_2 + (0, id_{\mathbb{R}^k})$, οπότε

$$(1.2.2) \quad T_{x_o} h_o(u) = T_{x_o}(\xi \circ \psi \circ f)(u),$$

$$(1.2.3) \quad T_o h_{x_o}(v) = (0, v).$$

Άρα, οι (1.2.2) και (1.2.3) μετασχηματίζουν την (1.2.1) διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} T_{(x_o,0)} h(u, v) &= T_{x_o}(\xi \circ \psi \circ f)(u) + (0, v) \\ &= (T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi) \circ T_{x_o} f)(u) + (0, v) \\ &= T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi)(T_{x_o} f(u)) + (0, v). \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το διαφορικό της $\xi \circ \psi$ στην προηγούμενη έκφραση. Επειδή $\xi \circ \psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, χρησιμοποιώντας τους τοπικούς χάρτες (V, ψ) και $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$, η τοπική παράσταση της $\xi \circ \psi$ είναι η $id_{\mathbb{R}^n} \circ (\xi \circ \psi) \circ \psi^{-1} = \xi$. Συνεπώς, θέτοντας $z = \xi(\psi(f(x_o)))$, το αντίστοιχο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_{f(x_o)} N \equiv T_{f(x_o)} V & \xrightarrow{T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi)} & T_z \mathbb{R}^n \\ \bar{\psi} \downarrow & & \downarrow \bar{id}_{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D\xi(\psi(f(x_o)))} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 1.9

συνεπάγεται ότι

$$T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi) = \bar{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \xi \circ \bar{\psi},$$

αφού η ξ είναι γραμμική απεικόνιση, άρα $D\xi(x_o) = \xi$. Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} T_{(x_o,0)} h(u, v) &= (\bar{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ \xi \circ \bar{\psi})(T_{x_o} f(u)) + (0, u) \\ &= \bar{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} [(\xi \circ \bar{\psi})(T_{x_o} f(u))] + (0, u) \end{aligned}$$

Επειδή $\bar{id}_{\mathbb{R}^n} \equiv \bar{id}_{\mathbb{R}^m} \times \bar{id}_{\mathbb{R}^k}$, η προηγούμενη σχέση οδηγεί στην

$$(1.2.4) \quad \bar{id}_{\mathbb{R}^n}(T_{(x_o,0)} h(u, v)) = (\xi \circ \bar{\psi} \circ T_{x_o} f)(u) + (0, \bar{id}_{\mathbb{R}^k}(v))$$

με

$$(\xi \circ \bar{\psi} \circ T_{x_o} f)(u) + (0, \bar{id}_{\mathbb{R}^k}(v)) \in (\mathbb{R}^m \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^k) \equiv \mathbb{R}^n.$$

Από την (1.2.4) προκύπτει αμέσως ότι η

$$T_{(x_o,0)}h : T_{x_o}M \times T_o\mathbb{R}^k \longrightarrow T_{h(x_o,0)}\mathbb{R}^n$$

είναι γραμμική 1-1 απεικόνιση μεταξύ χώρων της ίδιας διάστασης ($: n$), άρα είναι γραμμικός ισομορφισμός, συνεπώς και η απεικόνιση h θα είναι μία τοπική αμφιδιαφόριση στο $(x_o, 0)$, δηλαδή θα υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $A \subset U \times \mathbb{R}^k$ και $B \subset \mathbb{R}^n$ με $(x_o, 0) \in A$ και $h(x_o, 0) = (\xi \circ \psi \circ f)(x_o) \in B$, και έτσι ώστε $h|_A : A \rightarrow B$ να είναι αμφιδιαφόριση. Θέτουμε $B_1 := B \cap (\xi \circ \psi)(V)$ ($B_1 \neq \emptyset$, αφού $f(x_o) \in V$!) και $A_1 := h^{-1}(B_1) \subset A$, οπότε $(x_o, 0) \in A_1$. Επομένως, θα υπάρχουν ανοιχτά $U_o \subset M$, $W_o \subset M$ και $W_o \subset \mathbb{R}^k$ με $x_o \in U_o$, $0 \in W_o$ και $U_o \times W_o \subset A_1$. Θέτουμε ακόμη

$$B_o := h(U_o \times W_o) \subset B_1 \subset (\xi \circ \psi)(V),$$

μέσω του οποίου ορίζουμε την ανοιχτή περιοχή του $f(x_o)$

$$V_o := (\xi \circ \psi)^{-1}(B_o) \subset V$$

και την απεικόνιση

$$g : U_o \times W_o \longrightarrow V_o \quad \text{με} \quad g := (\xi \circ \psi)^{-1} \circ h|_{U_o \times W_o}.$$

Η g είναι αμφιδιαφόριση ως σύνθεση αμφιδιαφορίσεων και ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x, 0) = (\xi \circ \psi)^{-1}(h(x, 0)) = (\psi^{-1} \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \psi \circ f)(x) = f(x); \quad x \in U_o,$$

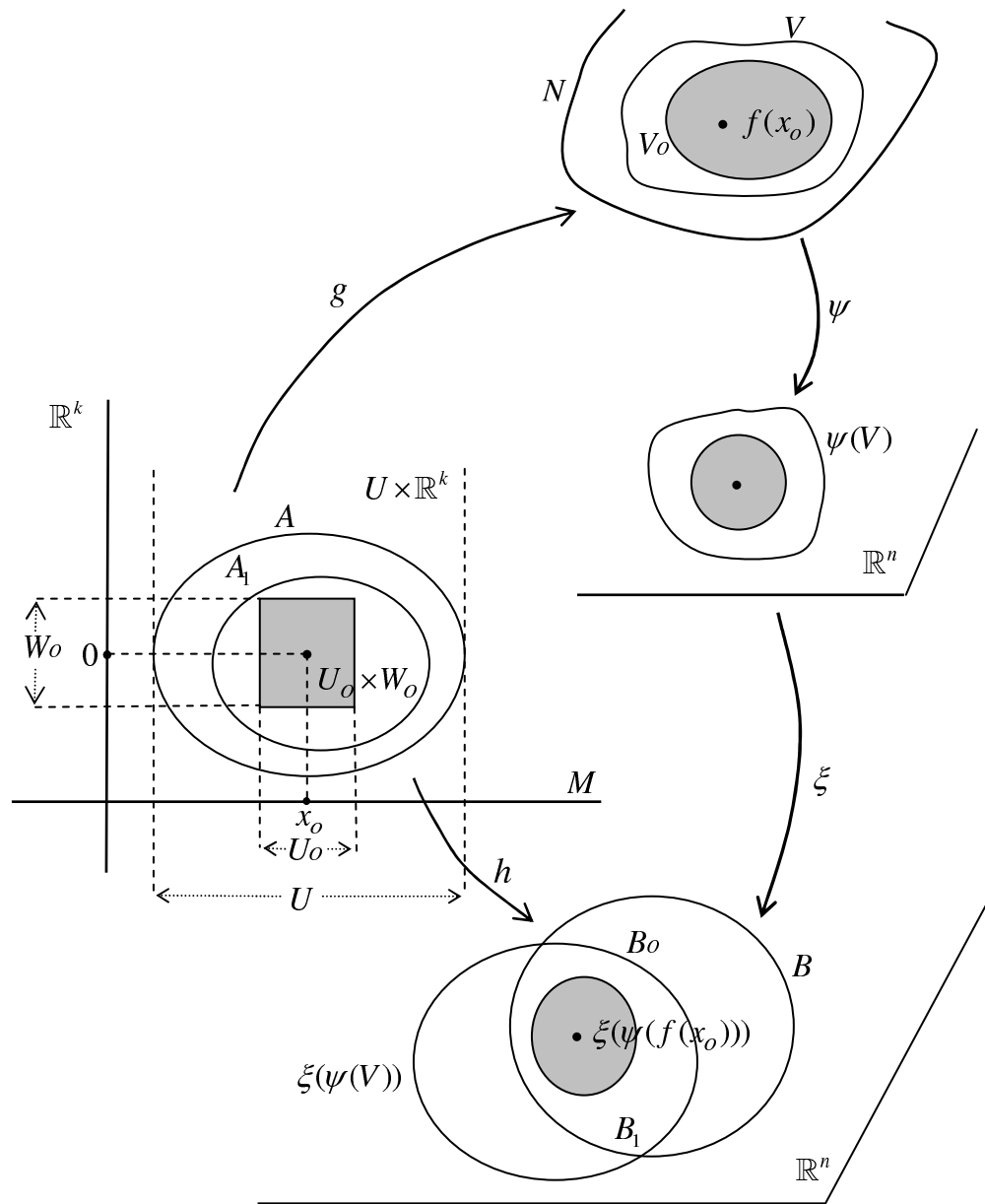
που αποδεικνύει πλήρως την ii).

Αντιστρόφως, αν ισχύει η ii), από τη σχέση $f|_{U_o} = g \circ J$ προκύπτει ότι

$$(1.2.5) \quad T_{x_o}f \equiv T_{x_o}(f|_{U_o}) = T_{(x_o,0)}g \circ T_{x_o}J.$$

Επειδή $J = (id_{U_o}, C_o)$, όπου C_o είναι η σταθερή απεικόνιση $C_o(x) = 0$, τελικά βρίσκουμε ότι $T_{x_o}J = (id_{T_{x_o}M}, 0)$ από την οποία έχουμε ότι $T_{x_o}J$ είναι απεικόνιση 1-1. Άρα και η (1.2.5) είναι 1-1, αφού, λόγω της αμφιδιαφορίας g , η $T_{(x_o,0)}g$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. \square

ΑΣ σχολιάσουμε λίγο την προηγούμενη απόδειξη, παραθέτοντας και το Σχήμα 1.2 στην επόμενη σελίδα. Εκείνο που ουσιαστικά προσπαθούμε να κάνουμε είναι να μικρύνουμε κατάλληλα το V , έτσι ώστε ο περιορισμός τους (μέσω αμφιδιαφορίας) να πάρει τη μορφή ενός γινομένου $U_o \times W_o$, όπου και το U_o είναι περιορισμός του U . Αυτό θα γίνει με αντίστοιχο περιορισμό του $\psi(V)$ και ανά-



Σχήμα 1.2

λυση του (μέσω ισομορφίας) σε γινόμενο ανοιχτών υποσυνόλων του

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \equiv (\mathbb{R}^m \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^{n-m}).$$

Οι προηγούμενοι Ευκλείδειοι χώροι είναι μοντέλα εφαπτομένων χώρων, οπότε η πιο πάνω ανάλυση θα γίνει μέσω κατάλληλης ανάλυσης/διάσπασης των αντίστοιχων εφαπτόμενων χώρων. Το προηγούμενο σχήμα απεικονίζει και την τελική διαδικασία προσδιορισμού των U_o, V_o, W_o και g .

1.2.3 Θεώρημα. Έστω $f : M \rightarrow N$ μία C^∞ -απεικόνιση. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i) Η f είναι εμφύτευση στο $x_o \in M$.

ii) Υπάρχουν χάρτες $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$, $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ με $f(U_o) \subseteq V_o$ και $\psi_o(V_o) = \varphi_o(U_o) \times W_o \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, όπου $k = n - m$ και W_o ανοιχτή περιοχή του $0 \in \mathbb{R}^k$, εις τρόπον ώστε η αντίστοιχη τοπική παράσταση της f

$$\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} : \varphi_o(U_o) \longrightarrow \psi_o(V_o) = \varphi_o(U_o) \times W_o$$

να είναι η κανονική εμφύτευση $j : a \mapsto (a, 0)$. Επομένως, $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$.**

iii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_o του $x_o \in M$ και κανονική υποπολλυπλοκότητα $P \subset N$ με $\dim P = m$, έτσι ώστε η $f|_{U_o} : U_o \rightarrow P$ να είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. i) \Rightarrow ii): Εφ' όσον η f είναι εμφύτευση στο x_o , θα υπάρχουν οι περιοχές U_o, V_o και W_o του Λήμματος 1.2.2, όπου τα U_o και V_o έχουν προκύψει από τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) , που αναφέρονται στην απόδειξη του ίδιου λήμματος. Θεωρούμε τώρα τους χάρτες

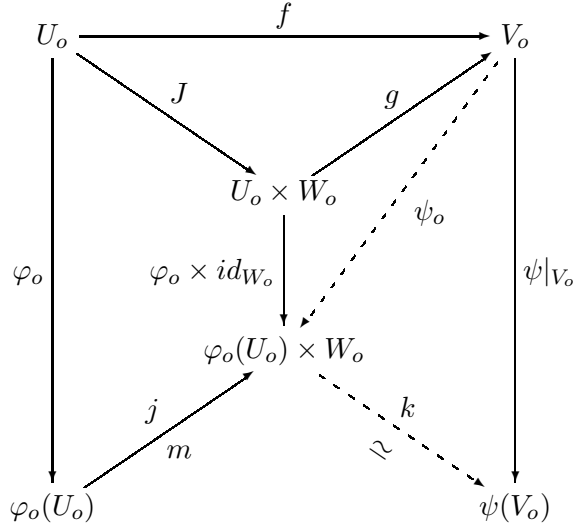
$$(U_o, \varphi_o|_{U_o}) \text{ και } (V_o, \psi_o) \text{ με } \psi_o = (\varphi_o \times id_{W_o}) \circ g^{-1},$$

όπου g είναι η αμφιδιαφόριση επίσης του Λήμματος 1.2.2 (βοηθητικά συμπληρώνουμε το Διάγραμμα 1.9 στο Διάγραμμα 1.10 της επόμενης σελίδας). Επειδή $f(U_o) \subset V_o$ (όπως ήδη έχουμε από το ίδιο λήμμα), ορίζεται η τοπική παράσταση της f μέσω των παραπάνω χαρτών, δηλαδή η $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1}$. Τότε, για οποιοδήποτε $\alpha \in \varphi_o(U_o)$ είναι

$$\begin{aligned} (\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\alpha) &= [(\varphi_o \times id_{W_o}) \circ g^{-1}](f(\varphi_o^{-1}(\alpha))) \\ &= [(\varphi_o \times id_{W_o}) \circ g^{-1}](g(\varphi_o^{-1}(\alpha), 0)) \\ &= (\alpha, 0) \end{aligned}$$

**Σημειώστε τη διαφορά μεταξύ της εμφύτευσης J του Λήμματος 1.2.2 της j [βλ. επίσης και τη σχέση (1.1.3)].

δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$.



$$\begin{aligned} \text{όπου } m &:= \psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1}, \\ k &:= (\psi|_{V_o} \circ g \circ \varphi \times id_{W_o})^{-1} \end{aligned}$$

Διάγραμμα 1.10

ii) \Rightarrow iii): Θέτουμε $P := f(U_o)$. Λόγω της υπόθεσης $f(U_o) \subset V_o$, είναι τελικά $P \subset V_o \subset N$. Ο προηγούμενος χάρτης (V_o, ψ_o) καλύπτει ολόκληρο το P και, από την κατασκευή του, έχει τη μορφή $\psi_o(V_o) = \varphi_o(U_o) \times W_o$ με $\varphi_o(U_o) \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $W_o \subset \mathbb{R}^k$ ανοιχτό. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \psi_o(V_o \cap P) &= \psi_o(P) = \psi_o(f(U_o)) \\ &= (\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(U_o)) \\ &= j(\varphi_o(U_o)) = \varphi_o(U_o) \times 0 \end{aligned}$$

Άρα το (V_o, ψ_o) είναι χάρτης της N που ικανοποιεί την (ΥΠ. 2), για όλα τα σημεία του P , οπότε το P είναι κανονική υποπολλαπλότητα της N , διάστασης m . Σημειώνεται ότι η διαφορική δομή του P ορίζεται από τον (μέγιστο) άτλαντα

$$\{(V_o \cap P = P, p_{1,0} \circ (\psi_o|_P))\}'.$$

Επειδή η $f : M \rightarrow N$ είναι C^∞ , θα είναι C^∞ και η $f|_{U_o} : U_o \rightarrow N$, άρα και η $f|_{U_o} : U_o \rightarrow P$, αφού $f(U_o) = P$ και P κανονική υποπολλαπλότητα της N (βλ. σχετικά και την Πρόταση 1.1.12).

Η $f|_{U_o} : M \rightarrow P$ είναι 1-1 (αφού η τοπική της παράσταση $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$ είναι 1-1). Επομένως, υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $(f|_{U_o})^{-1} : P \rightarrow U_o$. Δείχνουμε ότι και αυτή είναι απεικόνιση C^∞ : Χρησιμοποιώντας τον ολικό χάρτη $(P, p_1 \circ \psi_o|_P)$, που αναφέρθηκε στον παραπάνω σχολιασμό, η τοπική παράσταση της $(f|_{U_o})^{-1}$ είναι η

$$\begin{aligned} \varphi_o \circ (f|_{U_o})^{-1} \circ (p_{1,0} \circ (\psi_o|_P))^{-1} &= \varphi_o \circ (f|_{U_o})^{-1} \circ (\psi_o^{-1} \circ j) \\ &= (\varphi_o \circ (f|_{U_o})^{-1} \circ \psi_o^{-1}) \circ j \\ &= (\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})^{-1} \circ j \\ &= j^{-1} \circ j = id_{\varphi_o(U_o)} \end{aligned}$$

[θυμίζουμε ότι η συγκεκριμένη εμφύτευση $j : \alpha \mapsto (\alpha, 0)$ αντιστρέφεται]. Συνεπώς η $(f|_{U_o})^{-1}$ είναι C^∞ (σε όλο το πεδίο ορισμού της), δηλαδή τελικά η $f|_{U_o} : U_o \rightarrow P$ είναι αμφιδιαφόριση.

iii) \Rightarrow i): Εφ' όσον η $f|_{U_o} : U_o \rightarrow P$ είναι αμφιδιαφόριση και $\dim P = m = \dim M$, από τον γραμμικό ισομορφισμό

$$T_{x_o} f \equiv T_{x_o} (f|_{U_o}) : T_{x_o} U_o \equiv T_{x_o} M \xrightarrow{\cong} T_{f(x_o)} P$$

προκύπτει ότι

$$\dim (T_{x_o} f(T_{x_o} M)) = \dim (T_{f(x_o)} P) = 0,$$

άρα

$$\dim (\ker(T_{x_o} f)) = \dim (T_{x_o} M) - \dim (T_{x_o} f(T_{x_o} M)) = 0,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\ker(T_{x_o} f) = \{0\}$, δηλαδή καταλήγουμε στην i). \square

1.2.4 Πρόρισμα. Η $f : M \rightarrow N$ είναι εμφύτευση αν και μόνον αν διαθέτει **τοπικά αριστερή αντίστροφο**, δηλαδή, για κάθε $x \in M$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή $A \subset M$ του x , ανοιχτή περιοχή $B \subset N$ του $f(x)$ και C^∞ -απεικόνιση $\sigma : B \rightarrow A$ τέτοια ώστε $f(A) \subset B$ και $\sigma \circ f|_A = id_A$.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x_o \in M$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.3 υπάρχουν κατάλληλοι χάρτες (U_o, φ_o) και (V_o, ψ_o) των x_o και $f(x_o)$, έτσι ώστε $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$ (βλ. και το Διάγραμμα 1.11 στη συνέχεια).

Θέτουμε $A := U_o$, $B := V_o$, και ορίζουμε την απεικόνιση $\sigma : B \rightarrow A$ μέσω της σχέσης

$$\sigma(y) := \varphi_o^{-1}(p_1(\psi_o(y))); \quad y \in B,$$

όπου $p_1 : \varphi_o(U_o) \times W_o \rightarrow \varphi_o(U_o)$ είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα.

$$\begin{array}{ccc}
 U_o & \xrightarrow{f} & V_o \\
 \varphi_o \downarrow & & \downarrow \psi_o \\
 \varphi_o(U_o) & \xrightarrow{j} & \varphi_o(U_o) \times W_o
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.11

Προφανώς σ είναι C^∞ -απεικόνιση και ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned}
 (\sigma \circ f)(x) &= \sigma(f(x)) = (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(\psi_o(f(x))) \\
 &= (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1}(\varphi_o(x))) \\
 &= (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(j(\varphi_o(x))) \\
 &= (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(\varphi_o(x), 0) = x,
 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in A$. Άρα $\sigma \circ f|_A = id_A$.

Αντιστρόφως, η σχέση $\sigma \circ f|_A = id_A$ συνεπάγεται ότι

$$T_{x_o}(\sigma \circ f|_A) = T_{x_o}(id_A) = id_{T_{x_o}A} \equiv id_{T_{x_o}M},$$

επομένως

$$id_{T_{x_o}M} = T_{f(x_o)}\sigma \circ T_{x_o}(f|_A) = T_{f(x_o)}\sigma \circ T_{x_o}f,$$

απ' όπου προκύπτει ότι η $T_{x_o}f$ είναι όντως 1-1 (και παρεπιμπτόντως η $T_{f(x_o)}\sigma$ επί), άρα η f είναι εμφύτευση στο x_o και ανάλογα σε ολόκληρο το M . \square

1.2.5 Πρόρισμα. Το σύνολο

$$\mathcal{J} := \{x \in M : f \text{ είναι εμφύτευση στο } x\}$$

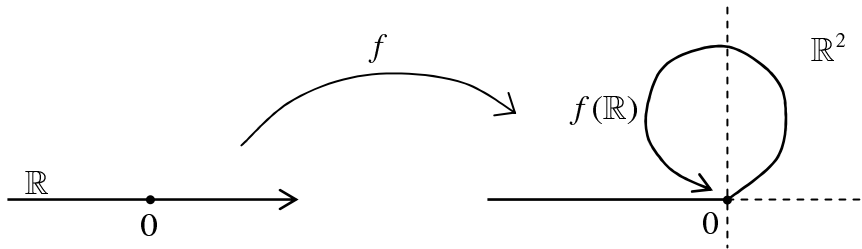
είναι ανοιχτό υποσύνολο του M .

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x_o \in \mathcal{J}$. Τότε, σύμφωνα με την περίπτωση iii) του Θεωρήματος 1.2.3, θα υπάρχει αμφιδιαφόριση $f|_{U_o} : U_o \xrightarrow{\cong} P$, όπου U_o περιοχή του x_o . Τότε όμως θα ισχύει η συνθήκη iii) του ίδιου θεωρήματος και για κάθε $x \in U_o$, άρα η f είναι εμφύτευση και σε κάθε $x \in U_o$, οπότε $U_o \subset \mathcal{J}$. Δηλαδή για το x_o βρίσκουμε ανοιχτό $U_o \subset M$ με $x_o \in U_o \subset \mathcal{J}$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. \square

1.2.6 Πρόταση. Αν X είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M , τότε η κανονική εμφύτευση $i : X \hookrightarrow M$ είναι εμφύτευση (με την έννοια του Ορισμού 1.2.1).

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Πορίσματος 1.1.9. \square

1.2.7 Σχόλια. Στο Θεώρημα 1.2.3 είδαμε ότι τοπικά η εικόνα μιας εμφύτευσης είναι κανονική υποπολλαπλότητα. Όμως αυτή η ιδιότητα δεν ολικοποιείται, δηλαδή ακόμη και αν η απεικόνιση είναι παντού εμφύτευση και 1-1, δεν συνάγεται αναγκαστικά ότι ολόκληρη η εικόνα της είναι κανονική υποπολλαπλότητα του πεδίου τιμών. Ένα κλασικό αντιπαράδειγμα δίνεται από την απεικόνιση f του επομένου σχήματος:



Σχήμα 1.3

Εδώ θεωρούμε την απεικόνιση f η οποία απεικονίζει το \mathbb{R} στο \mathbb{R}^2 και η εικόνα της είναι η συνεχής γραμμή στο δεξιό μέρος του σχήματος. Η f είναι εμφύτευση παντού αλλά η εικόνα της δεν είναι κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^2 . Αυτό φαίνεται από μια στοιχειώδη εξέταση των περιοχών του 0, στο πεδίο ορισμού \mathbb{R} και στην εικόνα $f(\mathbb{R})$.

Γενικά, αν $f : M \rightarrow N$ είναι εμφύτευση 1-1, η εικόνα $f(M) \subset N$ καλείται **εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα**. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει (εκ μεταφοράς από την M) δομή πολλαπλότητας επί του $f(M)$, αλλά αυτή επάγεται μία τοπολογία που δεν συμπίπτει αναγκαστικά με την σχετική τοπολογία. Κάτι τέτοιο συμβαίνει αν και μόνον αν η f είναι ομοιομορφισμός από την M στην $f(M)$. Σημειώνουμε ότι μία εμφύτευση 1-1 καλείται **κατάκλιση** (embedding).

Ειδικότερα, αν M είναι υποσύνολο μίας πολλαπλότητας N και το M έχει μία δομή πολλαπλότητας, έτσι ώστε η $i : X \hookrightarrow M$ να είναι εμφύτευση, τότε το M είναι μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της N . Φυσικά η τοπολογία που εισάγει η διαφορετική δομή επί του M δεν συμπίπτει με τη σχετική τοπολογία (ως υποχώρου του N).

Συναφώς αναφέρουμε το εξής συμπέρασμα:

Έστω $f : M \rightarrow N$ μία 1-1 C^∞ -απεικόνιση και $P \subset N$. Τότε το P είναι κανονική υποπολλαπλότητα της N τότε και μόνον τότε αν $P = f(M)$ και $f : M \rightarrow P$ είναι ομοιομορφισμός.

1.2.8 Ασκήσεις.

1. Αν M και N είναι C^∞ -πολλαπλότητες, τότε η απεικόνιση

$$i_y : M \longrightarrow M \times N \quad \text{με} \quad i_y(x) := (x, y),$$

για ένα $y \in N$ σταθερό, είναι εμφύτευση.

2. Κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο είναι εμφύτευση.
3. Αν $f : M \rightarrow N_1$ είναι εμφύτευση και $g : M \rightarrow N_2$ τυχαία C^∞ -απεικόνιση, τότε η $(f, g) : M \rightarrow N_1 \times N_2$ είναι εμφύτευση.
4. Αν $f_i : M_i \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) είναι εμφυτεύσεις, τότε και η $f_1 \times f_2$ είναι εμφύτευση.
5. Να αιτιολογηθεί γιατί η f , που δίνεται στα Σχόλια 1.1.7, είναι εμφύτευση και γιατί η εικόνα της δεν είναι κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^2 .

1.3 Εμβάπτσεις

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, σταθεροποιούμε δύο πολλαπλότητες $M \equiv (M, \mathcal{A})$ και $N \equiv (N, \mathcal{B})$, όπου όμως τώρα υποθέτουμε ότι $\dim M = m \geq n = \dim N$.

1.3.1 Ορισμός. Μια C^∞ -απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ καλείται **εμβάπτιση** (submersion) **στο** $x_o \in M$ αν η $T_{x_o}f : T_{x_o}M \rightarrow T_{x_o}N$ είναι απεικόνιση επί. Η f θα καλείται **εμβάπτιση** αν είναι εμβάπτιση σε κάθε σημείο $x \in M$.

Από τον προηγούμενο Ορισμό προκύπτει ότι

$$\text{rank}_{x_o}(f) := \dim(T_{x_o}f(T_{x_o}M)) = \dim(T_{f(x_o)}N) = n.$$

Επομένως, μία εμβάπτιση είναι απεικόνιση μέγιστης τάξης. Επίσης, είναι και

$$(1.3.1) \quad \dim(\ker(T_{x_o}f)) = m - n =: k$$

1.3.2 Λήμμα. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i) Η f είναι εμβάπτιση στο $x_o \in M$.

ii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U_o \subset M$ του x_o , ανοιχτή περιοχή $V_o \subset N$ του $f(x_o)$, ανοιχτή περιοχή $W_o \subset \mathbb{R}^k$ του 0 και αμφιδιαφόριση $g : U_o \xrightarrow{\cong} V_o \times W_o$ έτσι ώστε $f|_{U_o} = p_1 \circ g$, όπου $p_1 : V_o \times W_o \rightarrow V_o : (\alpha, b) \mapsto \alpha$ είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα.

Η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} U_o & \xrightarrow{f} & V_o \\ & \searrow g \cong & \downarrow p_1 \\ & & V_o \times W_o \end{array}$$

Διάγραμμα 1.12

Επομένως, μέσω κατάλληλης ταύτισης (με τη βοήθεια της αμφιδιαφόρισης g), η f συμπίπτει τοπικά (δηλαδή σε μια περιοχή του x_o) με την πρώτη προβολή (: προβολή στον πρώτο παράγοντα). Δηλαδή, όπως λέμε, *τοπικά μία εμβάπτιση είναι μία προβολή*.

Απόδειξη. i) \Rightarrow ii): Ακολουθούμε μία διαδικασία ανάλογη με αυτήν της απόδειξης του Λήμματος 1.2.1: Λόγω της διαφορισμότητας της f στο x_o , θα υπάρχουν χάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x_o \in U$, $f(U) \subset V$, και έτσι ώστε η τοπική παράσταση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \quad (k = m - n)$$

να είναι \mathcal{C}^∞ στο $\varphi(x_o)$. Επίσης, λόγω της (1.3.1), υπάρχει $\mathbb{E} \leq T_{x_o}M$ με $\dim \mathbb{E} = n$ και τέτοιος ώστε

$$T_{x_o}M = \mathbb{E} \oplus \ker(T_{x_o}f),$$

οπότε και

$$\mathbb{R}^m = \overline{\varphi}(T_{x_o}M) = \overline{\varphi}(\mathbb{E}) \oplus \overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f))$$

με

$$\dim(\overline{\varphi}(\mathbb{E})) = n, \quad \dim \overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f)) = k = m - n.$$

Στη συνέχεια κάνουμε ένα μετασχηματισμό του \mathbb{R}^m έτσι ώστε ο $\overline{\varphi}(\mathbb{E})$ να απεικονίζεται ακριβώς στον $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times 0$ και ο $\overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f))$ στον $\mathbb{R}^k \cong 0 \times \mathbb{R}^k$, δηλαδή βρίσκουμε έναν γραμμικό ισομορφισμό $\xi : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε

$$\xi(\overline{\varphi}(\mathbb{E})) = \mathbb{R}^n \times 0 \quad \text{και} \quad \xi(\overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f))) = 0 \times \mathbb{R}^k$$

(βλ. την ανάλογη απόδειξη του Λήμματος 1.2.1 και τη σχετική υποσημείωση). Σχηματικά έχουμε το επόμενο βοηθητικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
 T_{x_o}M & = & \mathbb{E} \oplus \ker(T_{x_o}f) \\
 \downarrow \overline{\varphi} & & \downarrow \overline{\varphi} \\
 \mathbb{R}^m & = & \overline{\varphi}(\mathbb{E}) \oplus \overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f)) \\
 \downarrow \xi & & \downarrow \xi \\
 \mathbb{R}^m & = & (\mathbb{R}^n \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^k)
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.13

Μετά από αυτά ορίζουμε την απεικόνιση

$$(1.3.2) \quad h : U \longrightarrow V \times \mathbb{R}^k : x \mapsto h(x) := (f(x), (p_2 \circ \xi \circ \varphi)(x)),$$

όπου $p_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι η προβολή στον δεύτερο παράγοντα. Η h είναι \mathcal{C}^∞ και το διαφορικό της στο $x_o \in U$ είναι η απεικόνιση

$$T_{x_o}f : T_{x_o}U \equiv T_{x_o}M \longrightarrow T_{h(x_o)}(V \times \mathbb{R}^k) \equiv T_{f(x_o)}N \times T_q\mathbb{R}^k,$$

όπου, για ευκολία, έχουμε θέσει $q = (p_2 \circ \xi \circ \varphi)(x_o)$. Το τελευταίο διαφορικό, για τυχόν $u \in T_{x_o}M = \mathbb{E} \oplus \ker(T_{x_o}f)$ με $u = u_1 + u_2$, όπου $u_1 \in \mathbb{E}$ και $u_2 \in \ker(T_{x_o}f)$, δίνει ότι

$$(1.3.3) \quad \begin{aligned} T_{x_o}h(u) &= (T_{x_o}f(u_1 + u_2), T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2)) \\ &= (T_{x_o}f(u_1), T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2)) \end{aligned}$$

Επειδή $p_2 \circ \xi \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, η τοπική της παράσταση μέσω των χαρτών (U, φ) και $(\mathbb{R}^k, id_{\mathbb{R}^k})$ είναι η

$$id_{\mathbb{R}^k} \circ (p_2 \circ \xi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = p_2 \circ \xi|_{\varphi(U)} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Άρα, μέσω του μεταθετικού Διαγράμματος 1.14 της επόμενης σελίδας, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή $T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2)$. Ακριβέστερα, βρίσκουμε ότι

$$\begin{array}{ccc}
T_{x_o}M & \xrightarrow{T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)} & T_q\mathbb{R}^k \\
\bar{\varphi} \downarrow & & \downarrow \bar{id}_{\mathbb{R}^k} \\
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(p_2 \circ \xi)(\varphi(x_o))} & \mathbb{R}^k
\end{array}$$

Διάγραμμα 1.14

διαδοχικά είναι:

$$\begin{aligned}
T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2) &= [\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ D(p_2 \circ \xi)(\varphi(x_o)) \circ \bar{\varphi}](u_1 + u_2) \\
(\text{επειδή } p_2 \circ \xi \text{ γραμμική}) &= [\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ (p_2 \circ \xi) \circ \bar{\varphi}](u_1 + u_2) \\
&= (\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_2)(\xi(\bar{\varphi}(u_1)) + \xi(\bar{\varphi}(u_2)))
\end{aligned}$$

ή, θέτοντας $\xi(\bar{\varphi}(u_1)) = (\alpha, 0)$, $\xi(\bar{\varphi}(u_2)) = (0, b)$,

$$\begin{aligned}
&\equiv (\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_2)((\alpha, 0) + (0, b)) \\
&= (\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_2)(\alpha, b).
\end{aligned}$$

Άρα, αφού η $p_{2,0} : 0 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k : (0, b) \xrightarrow{\cong} b$, είναι γραμμικός ισομορφισμός

$$\begin{aligned}
T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2) &= \bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1}(b) \\
&= \bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1}[p_{2,0}(\xi(\bar{\varphi}(u_2)))].
\end{aligned}$$

Επομένως, βάσει της τελευταίας, η (1.3.3) παίρνει τη μορφή

$$(1.3.4) \quad T_{x_o}h(u_1 + u_2) = (T_{x_o}f(u_1), (\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_{2,0} \circ \xi \circ \bar{\varphi})(u_2))$$

Διαπιστώνουμε ότι η (1.3.4) είναι απεικόνιση 1-1: Ας θεωρήσουμε δύο στοιχεία $u, u' \in T_{x_o}M$ με $T_{x_o}h(u) = T_{x_o}h(u')$. Επειδή $u = u_1 + u_2$ και $u' = u'_1 + u'_2$, όπου $u_1, u'_1 \in \mathbb{E}$ και $u_2, u'_2 \in \ker(T_{x_o}f)$, λόγω της (1.3.4) θα είναι

$$(1.3.5) \quad T_{x_o}f(u_1) = T_{x_o}f(u'_1),$$

$$(1.3.6) \quad (\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_{2,0} \circ \xi \circ \bar{\varphi})(u_2) = (\bar{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_{2,0} \circ \xi \circ \bar{\varphi})(u'_2).$$

Από την (1.3.6), λόγω ισομορφισμού, έχουμε αμέσως ότι $u_2 = u'_2$. Απ' το άλλο μέρος, η (1.3.5) συνεπάγεται ότι $T_{x_o}f(u_1 - u'_1) = 0$, δηλαδή $u_1 - u'_1 \in \ker(T_{x_o}f)$. Όμως και $u_1 - u'_1 \in \mathbb{E}$, άρα [επειδή $\mathbb{E} \cap \ker(T_{x_o}f) = 0$] $u_1 = u'_1$, δηλαδή

καταλήγουμε στην $u = u'$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Επειδή το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της (1.3.4) έχουν ίδια διάσταση m , τελικά έχουμε ότι $T_{x_o}h$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Άρα, κατά το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης, η h είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο x_o , δηλαδή θα υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $A \subset U$ του x_o και μία ανοιχτή περιοχή $B \subset V \times \mathbb{R}^k$ του $h(x_o)$, έτσι ώστε η

$$h|_A : U \supset A \xrightarrow{\simeq} B \subset V \times \mathbb{R}^k$$

να είναι (\mathcal{C}^∞) -αμφιδιαφόριση. Βάσει του ορισμού της τοπολογίας στο καρτεσιανό γινόμενο, μπορούμε να βρούμε $V_o \subset V$ ανοιχτό και $W_o \subset \mathbb{R}^k$ ανοιχτό με $h(x_o) \in V_o \times W_o \subset B \subset V \times \mathbb{R}^k$. Θέτουμε $U_o := h^{-1}(V_o \times W_o)$, οπότε $x_o \in U_o \subset A \subset U$ και ορίζουμε τη ζητούμενη g μέσω της $g := h|_{U_o}$.

Θα δείξουμε ότι καταλήγουμε στις συνθήκες της ii). Πριν από αυτό όμως να παρατηρήσουμε το εξής: Όπως κατασκευάστηκε η περιοχή W_o δεν είναι βέβαιο πώς είναι ανοιχτή περιοχή του 0. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε μία περιοχή του 0, όπως στην εκφώνηση, ως εξής: Θέτοντας (για ευκολία) $h(x_o) = (\alpha_o, b_o) \in V_o \times W_o$, θεωρούμε την μετατόπιση

$$\tau_{-b_o} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k : \vec{h} \mapsto \vec{h} - b_o$$

οπότε ορίζεται η ανοιχτή περιοχή $\overline{W}_o := \tau_{-b_o}(W_o)$ του 0. Κατόπιν θεωρούμε, αντί της U_o , την $h^{-1}(V_o \times \overline{W}_o) = \overline{U}_o$ και ως g παίρνουμε πλέον την $h|_{\overline{U}_o}$, οπότε αντί της τριάδας δεδομένων $(U_o, g, V_o \times W_o)$ του Λήμματος θα πάρουμε την $(\overline{U}_o, g, V_o \times \overline{W}_o)$.

Επανερχόμενοι στην αρχική τριάδα $(U_o, g, V_o \times W_o)$ [και υποθέτοντας ότι W_o είναι περιοχή του 0] διαπιστώνουμε ότι η $g = h|_{U_o} : U_o \xrightarrow{\simeq} V_o \times W_o$ είναι αμφιδιαφόριση, τέτοια ώστε, για κάθε $x \in U_o$, να ικανοποιείται η σχέση

$$(p_1 \circ g)(x) = p_1(h(x)) = p_1(f(x)), (p_2 \circ \xi \circ \varphi)(x) = f(x),$$

η οποία αποδεικνύει πλήρως την ii).

Αντιστρόφως, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ii), από τη σχέση

$$f|_{U_o} = p_1 \circ g : U_o \longrightarrow V_o$$

προκύπτει ότι η

$$T_{x_o} f \equiv T_{x_o}(f|_{U_o}) : T_{x_o}U_o \equiv T_{x_o}M \longrightarrow T_{f(x_o)}V_o \equiv T_{f(x_o)}N$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$T_{x_o} f = T_{x_o}(p_1 \circ g) = T_{g(x_o)}p_1 \circ T_{x_o}g = p_1 \circ T_{x_o}g,^\dagger$$

από την οποίαν προκύπτει ότι είναι επί, δηλαδή καταλήγουμε στην i). \square

[†] Στο τελευταίο μέλος θέσαμε $p_1 = p_1|_{T_{\alpha_o}N \times T_{b_o}\mathbb{R}^k}$, αν $g(x_o) = (\alpha_o, b_o)$.

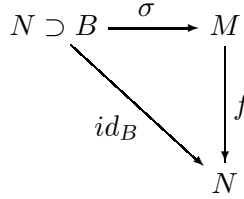
1.3.3 Θεώρημα. Αν είναι $f : M \rightarrow N$ μία C^∞ -απεικόνιση, τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- i) Η f είναι εμβάπτιση στο x_o , δηλαδή η $T_{x_o} f$ είναι απεικόνιση επί.
- ii) Υπάρχουν χάρτες $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$, $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ και ανοιχτή περιοχή W_o του $0 \in \mathbb{R}^k$ έτσι ώστε $x_o \in U_o$, $f(U_o) \subseteq V_o$, $\varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o$ και

$$\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1 : \varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o \longrightarrow \psi_o(V_o).$$

Εδώ \tilde{p}_1 συμβολίζει την προβολή στον πρώτο παράγοντα σε επίπεδο ευκλειδείου χώρων.

- iii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή $B \subset N$ του $f(x_o)$ και μία C^∞ -απεικόνιση $\sigma : N \supset B \rightarrow M$, τέτοια ώστε $\sigma(f(x_o)) = x_o$ και $f \circ \sigma = id_B$.



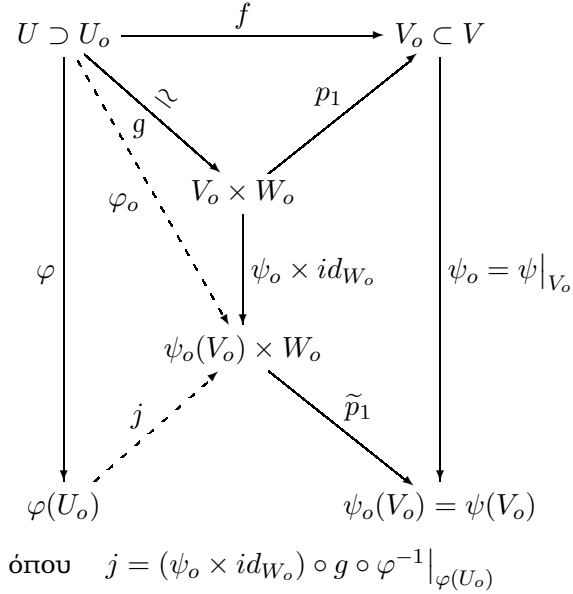
Διάγραμμα 1.15

Απόδειξη. i) \Rightarrow ii): Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.2, υπάρχουν περιοχές U_o, V_o και αμφιδιαφορία g έτσι ώστε το Διάγραμμα 1.12. Οι περιοχές αυτές προέκυψαν από κατάλληλη σμίκρυνση των χαρτών (U, φ) και (V, ψ) που αναφέρονται στην απόδειξη του Λήμματος 1.3.2, δηλαδή $U_o \subset U$ και $V_o \subset V$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τον χάρτη $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ με $\psi_o := \psi|_{V_o}$. Η κατασκευή του (U_o, φ_o) είναι πιο πολύπλοκη και προκύπτει από κατάλληλη "συμπλήρωση" του Διαγράμματος 1.12, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 1.16 της επόμενης σελίδας.

Ακριβέστερα, θέτουμε $\varphi_o := (\psi_o \times id_{W_o}) \circ g$, οπότε $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$, αφού φ_o είναι αμφιδιαφορία. Επειδή ήδη $f(U_o) \subset V_o$, ορίζεται η τοπική παράσταση της f [ως προς $(U_o, \varphi_o), (V_o, \psi_o)$] $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} : \psi_o(V_o) \times W_o \rightarrow \psi_o(V_o)$, για την οποίαν έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} &= \psi_o \circ f \circ ((\psi_o \times id_{W_o}) \circ g)^{-1} \\ &= \psi_o \circ (f \circ g^{-1}) \circ (\psi_o^{-1} \times id_{W_o}) \\ &= \psi_o \circ p_1|_{V_o \times W_o} \circ (\psi_o^{-1} \times id_{W_o}) \\ &= \tilde{p}_1|_{\psi_o(V_o) \times W_o}, \end{aligned}$$

όπως ακριβώς ζητούσαμε (η τελευταία ισότητα ελέγχεται στοιχειωδώς).



Διάγραμμα 1.16

ii) \Rightarrow iii): Θέτοντας $B := V_o$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$(1.3.7) \quad \sigma(y) := \varphi_o^{-1}(\psi_o(y), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))); \quad y \in B,$$

όπου $\tilde{p}_2: \psi_o(V_o) \times W_o \rightarrow W_o$ η προβολή στον δεύτερο παράγοντα (σε επίπεδο ευκλειδείων χώρων).

Διαπιστώνουμε ότι:

a) Η σ είναι \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση, αφού $\sigma = \varphi_o^{-1} \circ (\psi_o, c)$, δηλαδή είναι σύνθεση \mathcal{C}^∞ -απεικονίσεων, όπου c σταθερή απεικόνιση $c(y) := \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))$.

b) Ισχύει η σχέση $f \circ \sigma = id_B$, επειδή, για κάθε $y \in B$ είναι

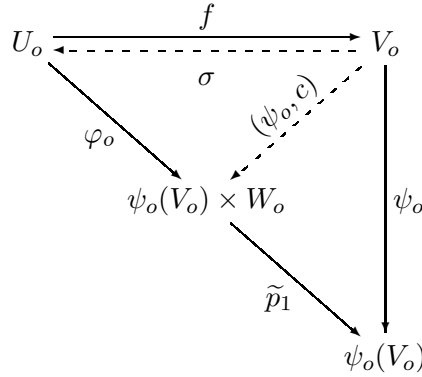
$$\begin{aligned} f(\sigma(y)) &= (f \circ \varphi_o^{-1})(\psi_o(y), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= (\psi_o^{-1} \circ \tilde{p}_1)(\psi_o(y), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= y. \end{aligned}$$

c) Ιδιαίτερος, στο $f(x_o)$, είναι

$$\begin{aligned} \sigma(f(x_o)) &= \varphi_o^{-1}(\psi_o(f(x_o)), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= \varphi_o^{-1}[(\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(x_o)), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))] \\ &= \varphi_o^{-1}(\tilde{p}_1(\varphi_o(x_o)), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= \varphi_o^{-1}(\varphi_o(x_o)) = x_o. \end{aligned}$$

Επομένως, η σ πληροί τις ιδιότητες της εκφώνησης και αποδεικνύει την iii).

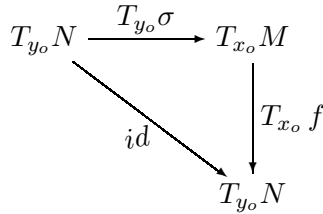
Παρενθετικά αναφέρουμε ότι η κατασκευή της σ προκύπτει από το Διάγραμμα 1.16 χωρίς τη χρήση της g [δηλαδή του (υπο)Διαγράμματος 1.12 που δεν περιέχεται στη συνθήκη ii)], όπως φαίνεται και στο επόμενο διάγραμμα.



Διάγραμμα 1.17

iii) \Rightarrow i): Θέτουμε, για ευκολία, $y_o := f(x_o)$. Παραγωγίζοντας την $f \circ \sigma = id_B$ στο y_o , βρίσκουμε ότι $T_{y_o}(f \circ \sigma) = T_{y_o}id_B$ ή

$$(1.3.8) \quad id_{T_{y_o}N} \equiv id_{T_{y_o}B} \equiv T_{y_o}id_B = T_{\sigma(y_o)}f \circ T_{y_o}\sigma = T_{x_o}f \circ T_{y_o}\sigma$$



Διάγραμμα 1.18

από την οποίαν προκύπτει ότι $T_{x_o}f$ είναι επί (και, παρεπιπτόντως, η $T_{y_o}\sigma$ 1-1). Άρα καταλήγουμε στην i), οπότε κλείνει η απόδειξη του θεωρήματος. \square

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι χάρτες της ii) στην πραγματικότητα είναι τέτοιοι ώστε $f(U_o) = V_o$. Πράγματι, από την τοπική παράσταση $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1$ προκύπτει ότι $f|_{U_o} = \psi_o^{-1} \circ \tilde{p}_1 \circ \varphi_o$, άρα η $f : U_o \rightarrow V_o$ είναι επί, απ' όπου προκύπτει ο ισχυρισμός.

1.3.4 Ορισμός. Μία C^∞ -απεικόνιση σ , όπως στο Θεώρημα 1.3.3, λέγεται **τοπική τομή της f** . Ιδιαίτερος, επειδή $\sigma(f(x_o)) = x_o$, λέμε ότι η σ έχει (ή ικανοποιεί την) **αρχική συνθήκη** $(x_o, f(x_o))$.

1.3.5 Πρόρισμα. Αν η f είναι εμβάπτιση στο x_o , τότε η τοπική τομή-της σ , με αρχική συνθήκη $(x_o, f(x_o))$, είναι εμφύτευση στο $f(x_o)$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του επί της $T_{y_o}\sigma$ (με $y_o = f(x_o)$) που προέκυψε στο τελευταίο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 1.3.3. \square

1.3.6 Πρόρισμα. Κάθε εμβάπτιση $f: M \rightarrow N$ διαδέτει τοπικές τομές, για την οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $(x, f(x))$

Απόδειξη. Προφανής συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.3. \square

1.3.7 Πρόρισμα. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι C^∞ -απεικόνιση, τότε το σύνολο

$$\mathcal{S} := \{x \in M : \eta f \text{ είναι εμβάπτιση στο } x\}$$

είναι ανοιχτό υποσύνολο του M .

Απόδειξη. Εστω τυχόν $x_o \in \mathcal{S}$. Τότε, κατά το Θεώρημα 1.3.3, υπάρχουν χάρτες (U_o, φ_o) και (V_o, ψ_o) με $x_o \in U_o$ και έτσι ώστε $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1$. Επομένως, για οποιοδήποτε $x \in U_o$, οι προηγούμενοι χάρτες ικανοποιούν την ii) του Θεωρήματος, άρα η f είναι εμβάπτιση σε κάθε x , δηλαδή η f είναι εμβάπτιση σ' ολόκληρο το U_o . Συνεπώς, $x_o \in U_o \subset \mathcal{S}$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. \square

1.3.8 Πρόρισμα. Κάθε εμβάπτιση είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω μία εμβάπτιση $f: M \rightarrow N$ και ένα τυχόν ανοιχτό $A \subset M$. Έχουμε δει ότι για τυχόν $x_o \in M$ υπάρχουν κατάλληλοι χάρτες (U_o, φ_o) και (V_o, ψ_o) των x_o και $f(x_o)$, ώστε

$$\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1 : \varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o \longrightarrow \psi_o(V_o),$$

οπότε $f|_{U_o} = \psi_o^{-1} \circ \tilde{p}_1 \circ \varphi_o$. Όμως, οι ψ_o, φ_o και \tilde{p}_1 είναι ανοιχτές απεικονίσεις, άρα και η $f|_{U_o}$ είναι ανοιχτή. Συνεπώς, για κάθε $x \in A$, θα υπάρχει (όπως πριν) ανοιχτό $U_x \subset M$ έτσι ώστε η $f|_{U_x}$ να είναι ανοιχτή απεικόνιση, οπότε $f(A \cap U_x) \subset N$ ανοιχτό (αφού $A \cap U_x \subset U_x$ ανοιχτό). Επειδή ακόμη $A = \bigcup_{x \in A} (A \cap U_x)$, τελικά

θα είναι

$$f(A) = f\left(\bigcup_{x \in A} (A \cap U_x)\right) = \bigcup_{x \in A} f(A \cap U_x)$$

ανοιχτό στο N , πράγμα που αποδεικνύει και το πόρισμα. \square

1.3.9 Ορισμός. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι εμβάπτιση και $y \in f(M) \subset N$, τότε το σύνολο $f^{-1}(\{y\}) \equiv f^{-1}(y) \subset M$ καλείται **νήμα** της f στο (ή πάνω από το) σημείο y .

Προφανώς μπορούμε να ορίσουμε το νήμα $f^{-1}(y)$ για οποιοδήποτε $y \in N$. Αν όμως η f δεν είναι επί, μπορούμε να βρούμε νήματα κενά. Τέτοια νήματα, βέβαια, δεν έχουν καμιά σημασία εδώ.

1.3.10 Θεώρημα. *Αν $f: M \rightarrow N$ είναι εμβάπτιση, τότε, για κάθε $y \in f(M)$, το νήμα $f^{-1}(y)$ είναι κανονική υποπολλυπλοότητα της M με*

$$\dim(f^{-1}(y)) = \dim M - \dim N = m - n =: k \quad (m \geq n)$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x_o \in f^{-1}(y)$. Επειδή η f είναι εμβάπτιση στο x_o , προκύπτουν χάρτες $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$ και $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ και περιοχή W_o όπως στη ii) του Θεωρήματος 1.3.3 (με $x_o \in U_o$ και $f(x_o) = y \in V_o$). Ιδιαίτερώς, έχουμε δει ότι

$$\varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o, \quad \psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση ("συμμετρία")

$$s: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n: (\alpha, b) \mapsto (b, \alpha),$$

η οποία είναι C^∞ -αμφιδιαφόριση, καθώς και την απεικόνιση

$$\mu = id_{\mathbb{R}^k} \times \tau_{-\psi_o(y)}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n: (\alpha, b) \mapsto (\alpha, b - \psi_o(y)).$$

Είναι άμεσον ότι $\tau_{-\psi_o(y)}$ και μ είναι αμφιδιαφορίσεις, οπότε μπορούμε να ορίσουμε και τον χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $U := U_o$ και $\varphi = \mu \circ s \circ \varphi_o$ ($x_o \in U$). Για τον τελευταίο χάρτη ισχύει ότι

$$(1.3.9) \quad \begin{aligned} \varphi(U) &= \mu(s(\varphi_o(U_o))) = \mu(s(\psi_o(V_o) \times W_o)) \\ &= \mu(W_o \times \psi_o(V_o)) = W \times P, \end{aligned}$$

όπου $P := \tau_{-\psi_o(y)}(\psi_o(V_o))$, το οποίον είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Από το άλλο μέρος, βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 \circ s^{-1}: W_o \times \psi_o(V_o) \longrightarrow \psi_o(V_o).$$

Ακόμη είναι προφανές ότι $U \cap f^{-1}(y) = f_U^{-1}(y)$, αν θέσουμε $f_U = f|_U$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap f^{-1}(y)) &= \varphi(f_U^{-1}(y)) = (\mu \circ s)(\varphi_o(f_U^{-1}(y))) \\ &= (\mu \circ s)(\varphi_o(f_U^{-1}(\{\psi_o^{-1}(\psi_o(y))\}))) \\ &= (\mu \circ s)((\psi_o \circ f|_{U=U_o} \circ \varphi_o^{-1})^{-1}(\{\psi_o(y)\})) \\ &= (\mu \circ s)(\tilde{p}_1^{-1}(\{\psi_o(y)\})) \\ &= (\mu \circ s)(\{\psi_o(y)\} \times W) \\ &= \mu(W \times \{\psi_o(y)\}) \\ &= W \times 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία, μαζί με την (1.3.9), αποδεικνύει ότι ο χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ικανοποιεί την (ΥΠ. 2) της Πρότασης 1.1.2. Παρόμοια ισχύουν και για κάθε άλλο σημείο του $f^{-1}(y)$, χρησιμοποιώντας ακριβώς τον ίδιο χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Άρα η απόδειξη είναι πλήρης. \square

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η σχέση $\varphi \circ (f_U^{-1}(\{y\})) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\{\psi(y)\})$ που χρησιμοποιήθηκε στο τελευταίο μέρος της προηγούμενης απόδειξης, αποδεικνύεται στοιχειωδώς.

1.3.11 Πρόρισμα. Έστω $f: M \rightarrow N$ μία εμβάπτιση και τυχόν $y \in f(M)$. Αν συμβολίσουμε με $Y := f^{-1}(y)$ το νήμα της f στο y , τότε ισχύει η θεμελιώδης σχέση

$$(1.3.10) \quad T_x i(T_x Y) = \ker(T_x f), \quad \forall x \in Y,$$

όπου $i: Y \hookrightarrow M$ η εμφύτευση. Ιδιαίτερος, μετά την ταύτιση $T_x Y \equiv T_x i(T_x Y)$ [βλ. σχετικώς και τα Πορίσματα 1.1.9 και 1.1.10], μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(1.3.10') \quad T_x Y \equiv \ker(T_x f).$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $u \in T_x i(T_x Y)$. Τότε υπάρχει $v \in T_x Y$ έτσι ώστε $u = T_x i(v)$, οπότε

$$(1.3.11) \quad T_x f(u) = T_x f(T_x i(v)) = T_x (f \circ i)(v).$$

Όμως, για κάθε $z \in Y = f^{-1}(\{y\})$, είναι $(f \circ i)(z) = f(z) = y$, δηλαδή η $f \circ i$ είναι σταθερή απεικόνιση, οπότε η (1.3.11) συνεπάγεται ότι $T_x f(u) = 0$ ή $u \in \ker(T_x f)$ και

$$(1.3.12) \quad T_x i(T_x Y) \leq \ker(T_x f).$$

Επειδή η f είναι εμβάπτιση, έχουμε διαδοχικά ότι

$$(1.3.13) \quad \begin{aligned} \dim(\ker(T_x f)) &= \\ (\text{βλ. σχέση (1.3.1)}) &= m - n \\ (\text{βλ. Πρόρισμα 1.3.10}) &= \dim(T_x U) \\ (\text{βλ. Πρόρισμα 1.3.9}) &= \dim(T_x i(T_x Y)). \end{aligned}$$

Η τελευταία και η (1.3.12) αποδεικνύουν τις (1.3.10) και (1.3.10'). \square

1.3.12 Σχόλια. Μία εμβάπτιση διαθέτει (μέσω των τοπικών τομών) **τοπικά δεξιά αντίστροφο**, ενώ οι εμφυτεύσεις διαθέτουν τοπικά αριστερή αντίστροφο (βλ.

Πόρισμα 1.2.4). Επίσης, είδαμε ότι τα νήματα $f^{-1}(\{y\})$ είναι κανονικές υποπολλαπλότητες του πεδίου ορισμού. Πιο γενικά, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(N)$ ή η $f^{-1}(P)$, αν $P \subset N$ κανονική υποπολλαπλότητα, δεν είναι αναγκαιώς κανονική υποπολλαπλότητα του πεδίου ορισμού M . Κάτι τέτοιο απαιτεί ιδιαίτερες συνθήκες επί της f (εγκαρσιότητα), όπως μελετούμε στην επόμενη παράγραφο.

1.3.13 Ασκήσεις.

1. Αν M και N είναι C^∞ -πολλαπλότητες, τότε οι προβολές $p_M: M \times N \rightarrow M$ και $p_N: M \times N \rightarrow N$ είναι εμβάπτσεις.
2. Η προβολή $\pi: TM \rightarrow M$ της εφαπτόμενης δέσμης είναι εμβάπτιση.
3. Αν $f_i: M_i \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) είναι εμβάπτσεις, τότε η $f_1 \times f_2$ είναι επίσης εμβάπτιση.
4. Αν M είναι συμπαγής πολλαπλότητα, N συνεκτική πολλαπλότητα Hausdorff και $f: M \rightarrow N$ εμβάπτιση, τότε η f είναι απεικόνιση επί.
5. Αν M είναι συμπαγής πολλαπλότητα, τότε δεν υπάρχει εμβάπτιση $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.
6. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι εμβάπτιση και $\dim M = \dim N$, τότε για κάθε $y \in f(M)$, το νήμα $f^{-1}(y)$ έχει ως σχετική τοπολογία την διακριτική.
7. Έστω $f: M \rightarrow N$ εμβάπτιση επί και $g: N \rightarrow P$ απεικόνιση τέτοια ώστε η $g \circ f$ να είναι C^∞ . Τότε η g είναι C^∞ -απεικόνιση.
8. Μια εμβάπτιση διαθέτει τοπικά δεξιά αντίστροφο.
9. Να αποδειχτεί, με χρήση εμβάπτσεων, ότι η σφαίρα S^2 και το γράφημα Γ_f μιας C^∞ -απεικόνισης $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κανονικές υποπολλαπλότητες του \mathbb{R} και $M \times \mathbb{R}$ αντιστοίχως (βλ. σχετικώς και τις Ασκήσεις 1.1.5).

1.4 Εγκάρσιες απεικονίσεις

Σταθεροποιούμε και πάλι δύο διαφορετικές πολλαπλότητες $M = (M, \mathcal{A})$ και $N \equiv (N, \mathcal{B})$

1.4.1 Ορισμός. Έστω $f: M \rightarrow N$ C^∞ -απεικόνιση και $W \subset N$ κανονική υποπολλαπλότητα. Η f λέγεται **εγκάρσια** (transverse /transversal) **προς την** W **στο** x (συμβολισμός: $f \overline{\pitchfork}_x W$) αν ισχύει μία από τις επόμενες συνθήκες:

(I) $f(x) \notin W$,

(II) $f(x) \in W$ και $T_{f(x)}N = T_x f(T_x M) + T_{f(x)}W$

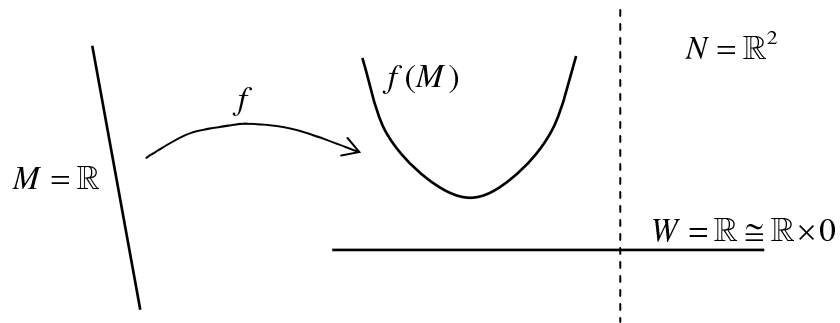
Η f θα λέγεται εγκάρσια στην W (συμβ: $f \bar{\perp} W$) αν είναι εγκάρσια προς την W σε κάθε $x \in M$

Πριν προχωρήσουμε, μερικά σχόλια: Στη συνθήκη (II) του προηγούμενου ορισμού χρησιμοποιείται η ταύτιση

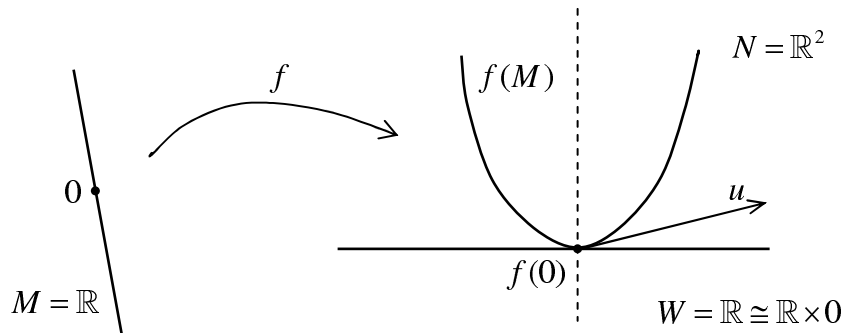
$$T_{f(x)}W \equiv T_{f(x)}i(T_{f(x)}W) \leq T_{f(x)}N,$$

όπου $i: W \hookrightarrow N$ είναι η εμφύτευση. Επίσης, αντί για της παραπάνω ορολογίας, χρησιμοποιούμε συχνά και την έκφραση "η f τέμνει την W εγκαρσίως (στο x)".

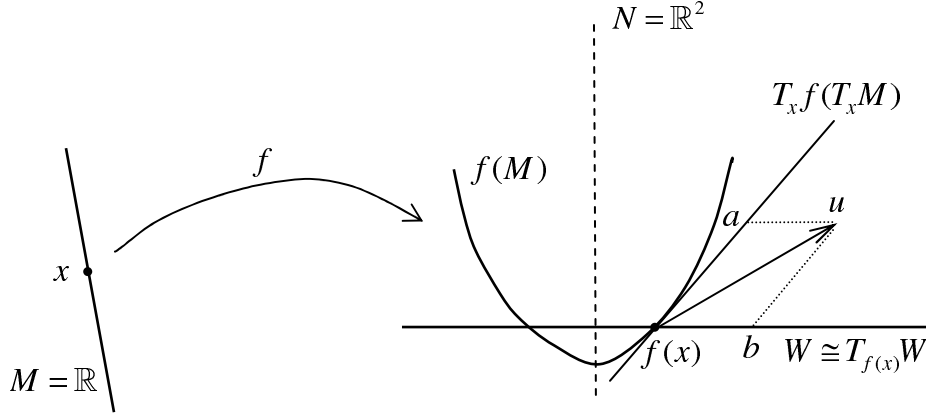
Μερικές περιπτώσεις εγκαρσίων απεικονίσεων παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 1.4



Σχήμα 1.5



Σχήμα 1.6

Στην περίπτωση του Σχήματος 1.4 έχουμε ότι $f \overline{\cap} W$, αφού για κάθε $x \in M$ είναι $f(x) \notin W$. Στο Σχήμα 1.5 έχουμε ότι $f \overline{\cap}_x W$, για κάθε $x \neq 0$. Ιδιαίτερως, για κάθε $x = 0$, έχουμε ότι $T_o f(T_o M) \cong \mathbb{R} \cong T_{f(o)} W$. Συνεπώς, τυχόν στοιχείο $u \in T_{f(o)} N \cong \mathbb{R}^2$ δεν μπορεί να παρασταθεί ως $a + b$, με $a \in T_o f(T_o M)$ και $b \in T_{f(o)} W$, αφού $T_o f(T_o M) \equiv T_{f(o)} W \equiv \mathbb{R}$. Τέλος, στην περίπτωση του Σχήματος 1.6, έχουμε ότι $f \overline{\cap} W$. Αυτό είναι προφανές για κάθε x με $f(x) \notin f(M) \cap W$. Για τα σημεία x με $f(x) \in f(M) \cap W$ έχουμε τη συνθήκη (II). Πράγματι, τυχόν $u \in T_{f(x)} N \cong \mathbb{R}^2$ μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα όπως στο σχήμα, δηλαδή $u = a + b$ με $a \in T_x f(T_x M) \cong \mathbb{R}$ και $b \in T_{f(x)} W \cong \mathbb{R}$.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι το άθροισμα της συνθήκης (II) του Ορισμού 1.4.1 στη γενική περίπτωση δεν είναι κατ' ανάγκην το ευθύ άθροισμα (αν και στην περίπτωση του Σχήματος 1.6 συμβαίνει κάτι τέτοιο).

1.4.2 Λήμμα. Για f και W όπως στον Ορισμό 1.4.1, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες :

i) $f \overline{\cap} W$ [με $f(x) \in W$].

ii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U \subset M$ του x και χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ έτσι ώστε $f(U) \subset V$, $\psi(V) = B_1 \times B_2$ (όπου $B_1 \subset \mathbb{R}^k$, $B_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ ανοιχτά, $k = \dim W$, $n = \dim N$), $\psi(V) \cap W = B_1 \times 0$, $\psi(f(x)) = (0, 0)$ και η απεικόνιση

$$\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f : U \longrightarrow B_2$$

να είναι εμβάπτιση στο x , όπου $\tilde{p}_2 : B_1 \times B_2 \rightarrow B_2$ συμβολίζει την προβολή στον δεύτερο παράγοντα.

Απόδειξη. Εφ' όσον W είναι κανονική υποπολλαπλότητα της N , για το σημείο $y := f(x) \in W$ θα μπορούμε να βρούμε χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ [βλ. (ΥΠ. 2), στην

Πρόταση 1.1.2] που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\psi(V) = B_1 \times B_2, \quad \psi(V \cap W) = B_1 \times 0, \quad \psi(y) = (0, 0)$$

όπως στην εκφώνηση [ιδιαίτερος η τελευταία επιτυγχάνεται πάντοτε με κατάλληλη μεταφορά του χάρτη της (ΥΠ. 2)]. Θέτουμε $U := f^{-1}(V)$, οπότε $x \in U$ και $f(U) \subset V$. Ακόμη, αφού $\dim W = k$, θα είναι $\dim T_{f(x)}W = k$ καθώς και $\dim(\ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi))) = k$, επειδή

$$T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi) : T_{f(x)}N \longrightarrow T_{p_2(\psi(f(x)))}B_2 \cong \mathbb{R}^{n-k}$$

είναι επί [αφού $T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi) = (p_2|_{T_{(\cdot)}B_1 \times T_{(\cdot)}B_2}) \circ T_{f(x)}\psi$ είναι απεικόνιση επί], οπότε

$$\begin{aligned} \dim(\ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi))) &= \dim T_{f(x)}N - \dim(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)(T_{f(x)}N)) \\ &= n - (n - k) = k. \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, αν

$$u = [(\alpha, f(x))] \in T_{f(x)}W$$

όπου $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \cap W$ είναι μία C^∞ -καμπύλη με $\alpha(0) = f(x)$, βρίσκουμε ότι

$$T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)(u) = [\tilde{p}_2 \circ \psi \circ \alpha, (\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(x)] = [(0, 0)] = 0,$$

άρα

$$T_{f(x)}W \leq \ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)).$$

Επειδή όμως

$$\dim T_{f(x)}W = \dim(\ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi))) = k,$$

τελικά είναι

$$T_{f(x)}W = \ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)).$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} f \overline{\cap}_x W &\Leftrightarrow T_x f(T_x M) + T_{f(x)}W = T_{f(x)}N \\ &\Leftrightarrow T_x f(T_x M) + \ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)) = T_{f(x)}N \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi) \circ T_x f = T_x(\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f) \quad \text{είναι επί.} \quad \square \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισοδυναμία ($\stackrel{*}{\Leftrightarrow}$) της προηγούμενης απόδειξης χρησιμοποιήσαμε το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη αποτελεί στοιχειώδη άσκηση της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΑΣΚΗΣΗ Α : Αν $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ είναι γραμμική απεικόνιση και $g : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$ γραμμικός επιμορφισμός τότε ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία :

$$\text{Η απεικόνιση } g \circ h \text{ είναι επί} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{F} = \text{Im}(h) + \ker(g).$$

1.4.3 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $f : M \rightarrow N$ C^∞ -απεικόνιση και $W \subset N$ κανονική υποπολληπλότητα με $\dim W = k$. Εάν $f \bar{\cap} W$, τότε ισχύουν τα εξής :

- i) Η $f^{-1}(W)$ είναι κανονική υποπολληπλότητα.
- ii) Οι πολληπλότητες W και $f^{-1}(W)$ έχουν την ίδια συνδιάσταση.
- iii) $T_{x_o}(f^{-1}(W)) = (T_{x_o}f)^{-1}(T_{f(x_o)}W)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι ισχύει η i). Έστω τυχόν $x_o \in f^{-1}(W)$. Επειδή $f \bar{\cap}_{x_o} W$, κατά το Λήμμα 1.4.2, υπάρχουν $U, (V, \psi)$ και B_1, B_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες της ii) του ίδιου λήμματος, ιδιαιτέρως η

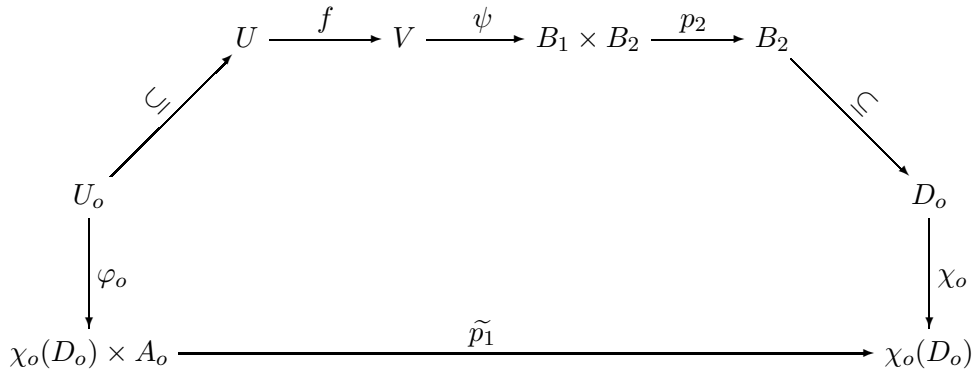
$$p_2 \circ \psi \circ f : M \supset U \longrightarrow B_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$$

είναι εμβάπτιση στο x_o . Επομένως, κατά την ii) του Θεωρήματος 1.3.3, θα υπάρχουν χάρτες (U_o, φ_o) της ανοιχτής υποπολληπλότητας U (άρα και της M), με $x_o \in U_o$, και (D_o, χ_o) της $B_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ έτσι ώστε $\varphi_o(U_o) = \chi_o(D_o) \times A_o$ (A_o ανοιχτή περιοχή του 0 στην \mathbb{R}^{n-k}), $\chi_o(0) = 0$ ‡ και

$$(1.4.1) \quad \chi_o \circ (p_2 \circ \psi \circ f) \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1 : \chi_o(D_o) \times A_o \longrightarrow \chi_o(D_o).$$

(βλ. και το επόμενο διάγραμμα).

Θα δείξουμε ότι μέσω του χάρτη (U_o, φ_o) ικανοποιείται η συνθήκη (ΥΠ. 1) του Ορισμού 1.1.1 για την $f^{-1}(W)$ και το x_o



Διάγραμμα 1.19

Εκ κατασκευής, $\varphi_o(U_o) = \chi_o(D_o) \times A_o$. Προφανώς, $x_o \in U_o \cap f^{-1}(W)$. Μένει να δείξουμε ότι

$$(1.4.2) \quad \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W)) = 0 \times A_o.$$

‡ Αυτό γίνεται, ως συνήθως, με κατάλληλη μεταφορά.

Πράγματι, αν $z \in U_o \cap f^{-1}(W)$, τότε $f(z) \in W$. Επομένως

$$\tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ (\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f) \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ \tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(z),$$

ή, επειδή $\psi(V \cap W) = B_1 \times 0$, [βλ. και συνθήκη ii)]

$$\tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = \chi_o(0),$$

άρα, λόγω της σχέσης και υποσημείωσης (\ddagger),

$$\tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = 0,$$

απ' όπου $\varphi_o(z) \in \{0\} \times A$, που σημαίνει ότι

$$(1.4.3) \quad \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W)) \subset 0 \times A_o.$$

Αντιστρόφως, αν $(0, a) \in 0 \times A_o$, επειδή $\varphi_o(U_o) = \chi_o(D_o) \times A_o$ και ισχύει η (1.4.1), θα υπάρχει $z \in U_o$ με $\varphi_o(z) = (0, a)$ και έτσι ώστε

$$0 = \tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ \tilde{p}_2 \circ \psi \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ \tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(z).$$

Επομένως

$$(\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(z) = \chi_o^{-1}(0) = 0,$$

κι επειδή $\psi(f(z)) \in \psi(V) = B_1 \times B_2$, θα είναι $(\psi \circ f)(z) \in B_1 \times 0$ ή [βλ. και πάλι τη συνθήκη ii)]

$$f(z) \in \psi^{-1}(B_1 \times 0) = V \cap W,$$

άρα $f(z) \in W$ και $z \in f^{-1}(W)$. Επειδή ήδη $z \in U_o$, τελικά βρίσκουμε ότι $z \in U_o \cap f^{-1}(W)$, οπότε $(0, a) = \varphi_o(z) \in \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W))$, δηλαδή

$$(1.4.4) \quad 0 \times A_o \subset \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W)),$$

η οποία μαζί με την (1.4.3) αποδεικνύει την (1.4.2). Τα προηγούμενα αποδεικνύουν ότι έχουμε δομή υποπολλαπλότητας επί του W . [Πιο τυπικά, για να βρισκόμαστε σε απόλυτη συμφωνία με την (ΥΠ. 1) του Ορισμού 1.1.1, θα πρέπει να πάρουμε τον χάρτη $(U_o, s \circ \varphi_o)$, όπου s η συμμετρία $0 \times A \xrightarrow{\cong} 0 \times A$].

Δείχνουμε τώρα τη ii). Από τους χάρτες (U_o, φ_o) της προηγούμενης απόδειξης φαίνεται ότι η $f^{-1}(W)$ εφοδιάζεται με χάρτες, των οποίων η εικόνα είναι ανοιχτά σύνολα της μορφής $A_o \subset \mathbb{R}^{m-n-k}$. Άρα, $\dim f^{-1}(W) = m - n - k$ και

$$\begin{aligned} \text{codim} f^{-1}(W) &:= \dim M - \dim f^{-1}(W) \\ &= m - (m - n + k) = n - k \\ &= \dim N - \dim W \\ &= \text{codim} W. \end{aligned}$$

Για την iii) προχωρούμε ως εξής. Σύμφωνα με την Άσκηση 1.1.15(2), έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} u = [(\alpha, x_o)] \in T_{x_o}(f^{-1}(W)) &\Leftrightarrow \text{Im}(\alpha) \subset f^{-1}(W) \Leftrightarrow \\ \text{Im}(f \circ \alpha) \subset W &\Leftrightarrow T_{x_o}f(u) = [(f \circ \alpha, f(x_o))] \in T_{f(x_o)}W, \end{aligned}$$

από την οποίαν προκύπτει το ζητούμενο και ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

1.4.4 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $f : X \rightarrow Z$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι C^∞ -απεικονίσεις (με ίδιο πεδίο τιμών). Τότε, για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ με $f(x) = g(y)$, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- i) $(f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z$
- ii) $T_Z Z = T_x f(T_x X) + T_y g(T_y Y)$, αν $z = f(x) = g(y)$.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε προηγουμένως το εξής αλγεβρικό αποτέλεσμα, του οποίου επίσης η απόδειξη είναι στοιχειωδής.

ΑΣΚΗΣΗ Β: Αν \mathbb{E} και \mathbb{F} είναι γραμμικοί υπόχωροι του γραμμικού χώρου \mathbb{G} , τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} = (\mathbb{E} \times \mathbb{F}) + \Delta_{\mathbb{G}} \Leftrightarrow \mathbb{G} = \mathbb{E} + \mathbb{F}.$$

Απόδειξη της Πρότασης 1.4.4. Έστω τυχόν $(x, y) \in X \times Y$ με $f(x) = g(y) := z$, δηλαδή $f(x), g(y) \in \Delta_z$. Επομένως, σύμφωνα με την συνθήκη ii) του ορισμού 1.4.1, έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$\begin{aligned} (f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z &\Leftrightarrow T_{(f \times g)(x,y)}(Z \times Z) = T_{(x,y)}(f \times g)(T_{(x,y)}(X \times Y)) \\ &\quad + T_{(f \times g)(x,y)} \Delta_Z, \end{aligned}$$

ή, μετά τις απαραίτητες ταυτίσεις,

$$\begin{aligned} (f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z &\Leftrightarrow T_{f(x)}Z \times T_{g(y)}Z = (T_x f(T_x X) \times T_y g(T_y Y)) \\ &\quad + T_{(f(x),g(y))}(\Delta_Z). \end{aligned}$$

Άρα, βάσει των Ασκήσεων 1.1.15(10) και Β, καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} (f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z &\Leftrightarrow T_z Z \times T_z Z = (T_x f(T_x X) \times T_y g(T_y Y)) + \Delta_{T_z Z} \\ &\Leftrightarrow T_z Z = T_x f(T_x X) \times T_y g(T_y Y), \end{aligned}$$

οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

1.4.5 Πόρισμα. Αν f και g είναι C^∞ -απεικονίσεις όπως στην Πρόταση 1.4.4 και μία εξ αυτών είναι εμβάπτιση, τότε $(f \times g) \overline{\cap} \Delta_Z$.

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή της προηγούμενης Πρότασης □

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την κατασκευή του νηματικού γινομένου, που θα χρειαστούμε στα Κεφάλαια 2 και 3.

1.4.6 Ορισμός. Θεωρούμε δύο απεικονίσεις $f: X \rightarrow Z$ και $g: Y \rightarrow Z$. Καλούμε **νηματικό γινόμενο** των f και g (ή ακόμη και νηματικό γινόμενο των X, Y μέσω των f, g) το σύνολο

$$X \times_Z Y := \{(x, y) : f(x) = g(y)\}.$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $X \times_Z Y \subset X \times Y$ και ορίζονται δύο απεικονίσεις

$$\begin{aligned} f_* : X \times_Z Y &\longrightarrow Y & \text{με} & \quad f_* := p_2|_{X \times_Z Y}, \\ g_* : X \times_Z Y &\longrightarrow X & \text{με} & \quad g_* := p_1|_{X \times_Z Y}, \end{aligned}$$

όπου p_1, p_2 είναι οι προβολές του $X \times Y$ στον πρώτο και δεύτερο παράγοντα αντιστοίχως.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{f_*} & U \\ \downarrow g_* & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Διάγραμμα 1.20

1.4.7 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $f: X \rightarrow Z$ και $g: Y \rightarrow Z$ είναι C^∞ -απεικονίσεις και η g εμβάπτιση. Τότε το νηματικό γινόμενο $X \times_Z Y$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $X \times Y$ και οι f_*, g_* C^∞ -απεικονίσεις.

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι $X \times_Z Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_Z)$. Επειδή η Δ_Z είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $Z \times Z$ [βλ. Παράδειγμα 1.1.13(1)] και $(f \times g) \overline{\cap} \Delta_Z$ (βλ. Πόρισμα 1.4.5), το πρώτο συμπέρασμα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.4.3 και της παραπάνω έκφρασης του νηματικού γινομένου. Η διαφορισμότητα των f_* και g_* είναι συνέπεια της διαφορισμότητας των p_1, p_2 και της Πρότασης 1.1.11. □

1.4.8 Ασκήσεις.

1. Αν $f: X \rightarrow Z$ και $g: Y \rightarrow Z$ είναι C^∞ -απεικονίσεις, W κανονική υποπολλαπλότητα της Z και $g \overline{\cap} W$, τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$f \overline{\cap} (g^{-1}(W)) \Leftrightarrow (g \circ f) \overline{\cap} W.$$

2. Δύο κανονικές υποπολλαπλότητες X και Y της πολλαπλότητας M θα λέγονται **εγκάρσιες** αν η κανονική εμφύτευση $i: X \hookrightarrow M$ είναι εγκάρσια στην Y . Επομένως για δύο εγκάρσιες υποπολλαπλότητες X, Y ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα :

- i) $X \cap Y$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M .
 ii) $T_a(X \cap Y) = (T_a X) \cap (T_a Y), \quad \forall a \in X \cap Y.$

3. Ισχύει η ισοδυναμία των επομένων συνθηκών :

- i) $f \overline{\cap}_x W$ όπου $f: M \rightarrow N$ και $W \subset N$ κανονική υποπολλαπλότητα.
 ii) Αν $q: T_{f(x)}N \rightarrow T_{f(x)}N/T_{f(x)}W$ είναι η κανονική απεικόνιση (στο πηλίκον), τότε η σύνθεση των απεικονίσεων του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} N \\ & \searrow q \circ T_x f & \downarrow q \\ & & T_{f(x)} N / T_{f(x)} W \end{array}$$

Διάγραμμα 1.21

είναι επί (μετά την ταύτιση $T_{f(x)}W \equiv T_{f(x)}i(T_{f(x)}W) \leq T_{f(x)}N$, όπου $i: W \hookrightarrow N$).

4. Να επαληθευτεί ο ισχυρισμός της Άσκησης Α, μετά την απόδειξη του Λήμματος 1.4.2.
 5. Να αποδειχτεί πλήρως το Πρόσχημα 1.4.5.
 6. Να αποδειχτεί ο ισχυρισμός της Άσκησης Β, πριν την απόδειξη της Πρότασης 1.4.4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

Διανυσματικές Δέσμες

They [vector bundles] played an increasingly important role in modern mathematics, culminating in the sophisticated subject K-theory, which studies equivalence classes of vector bundles over a given space.

D. W. KAHN [13, p. 38]

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις βασικές ιδιότητες των διανυσματικών δεσμών και των μορφισμών τους. Μεταξύ των άλλων, εξετάζουμε τις απεικονίσεις μεταφοράς, μέσω των οποίων (ανα)κατασκευάζεται πλήρως μία διανυσματική δέσμη, ενώ μεγάλο μέρος του κεφαλαίου αφιερώνεται στην κατασκευή διαφόρων σημαντικών διανυσματικών δεσμών, που χρειάζονται στη συνέχεια.

2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Η έννοια που εισάγεται εδώ αποτελεί γενίκευση της έννοιας της εφαπτόμενης δέσμης.

2.1.1 Ορισμός. Έστω X, E C^∞ -πολλαπλότητες και $\pi : E \rightarrow X$ C^∞ -απεικόνιση. Έστω ακόμη ότι το σύνολο

$$(ΔΔ. 1) \quad E_x := \pi^{-1}(x)$$

έχει δομή διανυσματικού χώρου, για κάθε $x \in X$. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X και, για κάθε $i \in I$, υπάρχουν $n(i) \in \mathbb{N}$ και μια C^∞ -αμφιδιαφόριση

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(i)},$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη :

το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times \mathbb{R}^{n(i)} \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & U_i \end{array}$$

(ΔΔ. 2)

Διάγραμμα 2.1

είναι μεταθετικό και οι περιορισμοί της τ_i :

$$\tau_{ix} := p_2 \circ \tau_i|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^{n(i)}$$

είναι γραμμικές απεικονίσεις.

Τότε η τριάδα $\ell = (E, \pi, X)$ λέγεται (C^∞ - **διαφορίσιμη**) **διανυσματική δέσμη**, η πολλαπλότητα E **ολικός χώρος**, η X **βάση**, η απεικόνιση π **προβολή**, οι αντίστροφες εικόνες $\pi^{-1}(x) = E_x$ **νήματα** και η οικογένεια $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ **απλοποιούσα κάλυψη**. Κάθε (U_i, τ_i) της κάλυψης αποτελεί ένα **απλοποιούν ζεύγος**

Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n(i) = n$, για κάθε $i \in I$, λέμε ότι η ℓ έχει **νήματα τύπου \mathbb{R}^n** .

2.1.2 Παρατηρήσεις. 1) Από τον ορισμό προκύπτει ότι η απεικόνιση π είναι επί και οι απεικονίσεις τ_{ix} είναι γραμμικοί ισομορφισμοί.

2) Αν (U, τ) είναι απλοποιούν ζεύγος και $V \subset U$ ανοικτό, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι $(V, \tau|_{\pi^{-1}(V)})$ είναι επίσης απλοποιούν ζεύγος.

3) Όπως και στο σύνολο των n -διαστάτων C^k -ατλάντων επί ενός συνόλου X , έτσι και στο σύνολο των απλοποιουσών καλύψεων μιας δεδομένης τριάδας (E, π, X) ορίζονται σχέσεις διάταξης μέσω του περιέχεσθαι, και ισοδυναμίας μέσω της συμβιβασιμότητας. Αποδεικνύεται ότι κάθε απλοποιούσα κάλυψη περιέχεται σε μια μοναδική απλοποιούσα κάλυψη που είναι μεγιστικό στοιχείο ως προς την διάταξη του περιέχεσθαι. Στη διεθνή βιβλιογραφία, συνήθως δεν γίνεται αναφορά σε μέγιστες απλοποιούσες καλύψεις, για τεχνικούς όμως λόγους είναι σκόπιμο να δουλεύει κανείς με αυτές. Στα επόμενα, όταν θεωρούμε απλοποιούσα κάλυψη θα εννοούμε μέγιστη απλοποιούσα κάλυψη.

4) Παρακάτω θα θεωρούμε πάντοτε δέσμες με *νήματα σταθερού τύπου* \mathbb{R}^n . Η παραδοχή αυτή δεν προκαλεί σοβαρή βλ.άθη της γενικότητας, γιατί πάνω από κάθε συνεκτική συνιστώσα της βάσης μιας διανυσματικής δέσμης τα νήματα είναι σταθερού τύπου (βλ. Άσκηση 2).

5) Η σχέση (2.1.2) χαρακτηρίζει τη δέσμη ως **τοπικώς τετριμμένη**. Η ορολογία αυτή θα εξηγηθεί πλήρως από το επόμενο Παράδειγμα 1 και την εισαγωγή της έννοιας του ισομορφισμού διανυσματικών δεσμών (Ορισμός 2.1.4).

6) Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι η $\pi : E \rightarrow X$ είναι εμβάπτιση. Συνεπώς, κάθε E_x είναι υποπολλαπλότητα του E και

$$\dim E_x = n = \dim E - \dim X = \dim(U \times \mathbb{R}^n) - \dim U,$$

όπου (U, τ) απλοποιούν ζεύγος που περιέχει το x .

2.1.3 Παραδείγματα. 1) Η **H τετριμμένη δέσμη** $(X \times \mathbb{R}^n, p_1, X)$, όπου X είναι μια διαφορική πολλαπλότητα. Σ' αυτήν την περίπτωση μια (όχι μέγιστη) απλοποιούσα κάλυψη αποτελείται από το (ολικό) απλοποιούν ζεύγος $(X, id_{X \times \mathbb{R}^n})$.

2) Η **εφαπτόμενη δέσμη** (TX, π, X) μιας διαφορικής πολλαπλότητας X : Αν m είναι η διάσταση της πολλαπλότητας X , τα νήματα $\pi^{-1}(x)$ είναι οι εφαπτόμενοι χώροι $T(X, x)$, άρα έχουν δομή m -διάστατου πραγματικού διανυσματικού χώρου. Μια απλοποιούσα κάλυψη είναι η οικογένεια

$$\{(U, (\pi, \bar{\varphi})) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

όπου

$$(\pi, \bar{\varphi}) : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m : v \mapsto (\pi(v), \bar{\varphi}(v)).$$

Πράγματι, το Διάγραμμα 2.2 της επόμενης σελίδας είναι μεταθετικό και επιπλέον ο περιορισμός της $(\pi, \bar{\varphi})$ σε κάθε νήμα $\pi^{-1}(x) = T(X, x)$ είναι η απεικόνιση

$$\bar{\varphi} = p_2 \circ (\pi, \bar{\varphi}) : T(X, x) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

που είναι γραμμική.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{(\pi, \bar{\varphi})} & U \times \mathbb{R}^m \\
 & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\
 & & U
 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.2

2.1.4 Ορισμός. Έστω $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2$, διανυσματικές δέσμες. Ένα ζεύγος (f, g) δύο διαφορίσιμων απεικονίσεων $f : E_1 \rightarrow E_2$ και $g : X_1 \rightarrow X_2$ λέγεται **μορφισμός διανυσματικών δεσμών** αν ισχύουν οι συνθήκες

το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 X_1 & \xrightarrow{g} & X_2
 \end{array}$$

(ΜΔΔ.1)

Διάγραμμα 2.3

είναι μεταθετικό, και

(ΜΔΔ. 2) για κάθε $x \in X$, ο περιορισμός $f_x : E_{1x} \rightarrow E_{2g(x)}$ της f στο νήμα E_{1x} είναι γραμμική απεικόνιση.

Εξάλλου ένας μορφισμός $(f, g) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ θα λέγεται **ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών**, αν υπάρχει μορφισμός $(f', g') : \ell_2 \rightarrow \ell_1$, έτσι ώστε

$$f \circ f' = id_{E_2}, \quad f' \circ f = id_{E_1}, \quad g \circ g' = id_{X_2}, \quad g' \circ g = id_{X_1}.$$

2.1.5 Παρατηρήσεις. 1) Το μεταθετικό διάγραμμα της συνθήκης (ΜΔΔ. 1) μας εξασφαλίζει ότι

$$f(E_{1x}) \subseteq E_{2g(x)}, \quad \forall x \in X_1,$$

άρα και το καλά ορισμένο της απεικόνισης f_x της συνθήκης (ΜΔΔ. 2).

2) Αν $(f, g) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι ισομορφισμός, τότε οι f, g είναι αμφιδιαφορίσιες και η f_x ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, για κάθε $x \in X$. Αλλά και αντιστρόφως, αν $(f, g) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έτσι ώστε οι f, g να είναι αμφιδιαφορίσιες, τότε το (f, g) είναι ισομορφισμός (βλ. Άσκηση 5 στο τέλος του κεφαλαίου).

3) Μια διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ με νήματα τύπου \mathbb{R}^n θα λέγεται **τετριμμένη**, αν υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών

$$(\Phi, id_X) : \ell \longrightarrow (X \times \mathbb{R}^n, p_1, X).$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, το ζεύγος (X, Φ) είναι ολικό απλοποιούν ζεύγος.

2.1.6 Παραδείγματα. 1) Για κάθε διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$, το ζεύγος (id_E, id_X) είναι ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών.

2) Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2, 3$, είναι διανυσματικές δέσμες και

$$(f_i, g_i) : \ell_i \longrightarrow \ell_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

είναι (ισο)μορφισμοί διανυσματικών δεσμών, τότε το

$$(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) : \ell_1 \longrightarrow \ell_3$$

είναι (ισο)μορφισμός.

3) Αν $(f, g) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έτσι ώστε οι f, g να είναι αμφιδιαφορίσεις, τότε το $(f^{-1}, g^{-1}) : \ell_2 \rightarrow \ell_1$ είναι μορφισμός.

4) Αν (U, τ) είναι απλοποιούν ζεύγος μιας $\ell = (E, \pi, X)$, τότε το ζεύγος (τ, id_U) είναι ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών δεσμών

$$\ell_U = (\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U) \quad \text{και} \quad (U \times \mathbb{R}^n, p_1, U).$$

Αυτό εξηγεί τον όρο "τοπικώς τετριμμένη" για την δέσμη ℓ .

5) Έστω M, N διαφορίσιμες πολλαπλότητες και $f : M \rightarrow N$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε το ζεύγος (df, f) είναι μορφισμός από την (TM, π_M, M) στην (TN, π_N, N) . Αν η f είναι αμφιδιαφόριση, τότε το (df, f) είναι ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών.

Οι διανυσματικές δέσμες, οι μορφισμοί τους και η σύνθεση που ορίζεται στο Παράδειγμα 2.1.6(2), αποτελούν την **κατηγορία των διανυσματικών δεσμών**, που θα συμβολίσουμε με VB . Αν σταθεροποιήσουμε μια πολλαπλότητα (X, \mathcal{A}) και θεωρήσουμε μόνο τις δέσμες με βάση X και τους μορφισμούς που αφήνουν τη βάση αναλλοίωτη (δηλαδή $g = id_X$) παίρνουμε μια υποκατηγορία της VB που θα συμβολίζουμε με $VB(X)$.

2.2 Απεικονίσεις μεταφοράς

Ας δούμε τώρα αναλυτικά τι συμβαίνει στην τομή δύο απλοποιούντων ζευγών (U_i, τ_i) , (U_j, τ_j) μιας απλοποιούσας κάλυψης $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ της διανυσματικής

δέσμης $\ell = (E, \pi, X)$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Πρώτα παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί των τ_i, τ_j στο σύνολο

$$\pi^{-1}(U_i \cap U_j) = \bigcup_{x \in U_i \cap U_j} E_x$$

έχουν εικόνα ακριβώς το σύνολο $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε και το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tau_j \circ \tau_i^{-1}} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \tau_i^{-1} & \nearrow \tau_j \\ & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ & \downarrow \pi & \\ & U_i \cap U_j & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.4

του οποίου όλα τα τρίγωνα είναι μεταθετικά. Αν τώρα $(x, h) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$, τότε

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = (A(x, h), B(x, h)),$$

όπου $A = p_1 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}$ και $B = p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}$. Όμως,

$$\begin{aligned} A(x, h) &= p_1 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = \pi \circ \tau_i^{-1}(x, h) = p_1(x, h) = x, \\ B(x, h) &= p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = p_2 \circ \tau_j(v = \tau_i^{-1}(x, h)) = \tau_{jx}(v), \\ \tau_{ix}^{-1}(h) = v &\Rightarrow \tau_{ix}(v) = h \Rightarrow \tau_i(v) = (x, h) \Rightarrow \tau_{ix}^{-1}(h) = \tau_i^{-1}(x, h). \end{aligned}$$

Άρα

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = (x, \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(x, h)).$$

Για κάθε $x \in U_i \cap U_j$ παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ είναι σύνθεση δύο γραμμικών ισομορφισμών, δηλαδή

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}) \subseteq L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

2.2.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^n και απλοποιούσα κάλυψη $\{U_i, \tau_i\}_{i \in I}$. Τότε οι απεικονίσεις

$$\Gamma_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) : x \mapsto \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1},$$

όπου $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, λέγονται **απεικονίσεις μεταφοράς** της ℓ ως προς την απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$.

Όπως θα δούμε στο Θεώρημα 2.2.6, οι απεικονίσεις μεταφοράς καθορίζουν την δέσμη.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού είναι ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς ικανοποιούν την σχέση

$$(2.2.1) \quad T_{kj}(x) \circ T_{ji}(x) = T_{ki}(x),$$

για κάθε $i, j, k \in I$ με $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ και $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Την ιδιότητα αυτή εκφράζουμε λέγοντας ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς αποτελούν **σύγκυκλο**. Επίσης, από την (2.2.1) προκύπτουν οι

$$T_{ii}(x) = id_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in U_i \quad \text{και} \quad \forall i \in I,$$

$$T_{ij}(x) = T_{ji}(x)^{-1}, \quad \forall i, j \in I \quad \text{με} \quad U_i \cap U_j \neq \emptyset \quad \text{και} \quad x \in U_i \cap U_j.$$

2.2.2 Πρόταση. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^n και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Τότε, για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, η απεικόνιση μεταφοράς

$$T_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

είναι διαφορίσιμη.

Υπενθυμίζουμε ότι $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ανοικτή υποπολλαπλότητα του $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ που είναι διανυσματικός χώρος, άρα και διαφορική πολλαπλότητα, διάστασης n^2 . Η Πρόταση 2.2.5 είναι άμεσο αποτέλεσμα του επομένου λήμματος:

2.2.3 Λήμμα. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ μια απεικόνιση, τέτοια ώστε, για κάθε $x \in U$, η μερική απεικόνιση

$$f_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k : h \mapsto f_x(h) := f(x, h)$$

να είναι γραμμική. Τότε η f είναι διαφορίσιμη, εάν και μόνον εάν η

$$F : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) : x \mapsto f_x$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Στο χώρο $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ θεωρούμε τον ολικό χάρτη

$$\Phi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathbb{R}^{n \cdot k},$$

όπου

$$\Phi(g) = (g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n)) \in \underbrace{\mathbb{R}^\kappa \times \dots \times \mathbb{R}^\kappa}_{n\text{-φορές}}$$

και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^n . Η F είναι διαφορίσιμη, εάν και μόνον εάν είναι διαφορίσιμη η απεικόνιση

$$\Phi \circ F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \cdot \kappa} : x \mapsto (f_x(e_1), f_x(e_2), \dots, f_x(e_n)).$$

Παρατηρούμε ότι αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε κάθε απεικόνιση

$$x \mapsto f_x(e_i) = f_{e_i}(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

είναι διαφορίσιμη ως προς x ως μερική απεικόνιση της f , άρα η $\Phi \circ F$ είναι διαφορίσιμη.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\Phi \circ F$ είναι διαφορίσιμη. Τότε κάθε

$$x \mapsto (f_x(e_i) = f(x, e_i)$$

είναι διαφορίσιμη ως προς x . Άρα, για $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$f(x, h) = f\left(x, \sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i f_x(e_i),$$

δηλαδή η f είναι διαφορίσιμη. □

Αποτέλεσμα του ανωτέρω λήμματος είναι η επόμενη πρόταση, που είναι ανάλογη της Πρότασης 2.2.2 αλλά αφορά τους μορφισμούς.

2.2.4 Πρόταση. Έστω $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$ διανυσματικές δέσμες με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(i)}$ ($i = 1, 2$) και $(f, g) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν $(U_1, \tau_1), (U_2, \tau_2)$ είναι απλοποιούντα ζεύγη των ℓ_1, ℓ_2 , αντιστοίχως, με $g(U_1) \subseteq U_2$, τότε η

$$U_1 \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}) : x \mapsto \tau_{2g(x)} \circ f_x \circ \tau_{1x}^{-1}$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η σύνθεση

$$U_1 \times \mathbb{R}^{n(1)} \xrightarrow{\tau_1^{-1}} \pi_1^{-1}(U_1) \xrightarrow{f} \pi_2^{-1}(U_2) \xrightarrow{\tau_2} U_2 \times \mathbb{R}^{n(2)} \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}^{n(2)}$$

είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων και, για κάθε $x \in U_i$, ο περιορισμός

$$\tau_{2g(x)} \circ f_x \circ \tau_{1x}^{-1} : \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n(2)}$$

είναι γραμμική απεικόνιση. Επομένως, εφαρμόζεται το Λήμμα 2.2.3 □

Η επόμενη πρόταση είναι ένα βασικό εργαλείο για την κατασκευή διανυσματικών δεσμών με δεδομένα νήματα.

2.2.5 Πρόταση. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης m , E σύνολο, $\pi : E \rightarrow X$ απεικόνιση, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του X . Έστω ακόμη ότι, για κάθε $i \in I$, υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U_i \end{array}$$

Διάγραμμα 2.5

και τέτοια ώστε, για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, η σύνθεση

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

να είναι C^∞ -αμφιδιαφόριση και, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός-της

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

να είναι γραμμικός ισομορφισμός.

Τότε υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη δομή διαφορικής πολλαπλότητας επί του E , τέτοια ώστε η τριάδα $\ell = (E, \pi, X)$ να γίνεται διανυσματική δέσμη με ανοιχτή κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$.

Απόδειξη. Κάθε υποσύνολο $\pi^{-1}(U_i)$ του E έρχεται μέσω της τ_i σε 1-1 και επί αντιστοιχία με την πολλαπλότητα $U_i \times \mathbb{R}^n$, άρα έχει μια μονοσήμαντα ορισμένη διαφορίσιμη δομή, δηλαδή ένα άτλαντα \mathcal{A}_i έτσι ώστε η τ_i να γίνεται C^∞ -αμφιδιαφόριση.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \subseteq & \pi^{-1}(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n & \subseteq & U_i \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 2.6

Παρατηρούμε ότι οι τομές $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτές υποπολλαπλότητες των $\pi^{-1}(U_i)$ και $\pi^{-1}(U_j)$, για κάθε $i, j \in I$, με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Πράγματι κάθε τ_i ως αμφιδιαφόριση είναι και ομοιομορφισμός, άρα το

$$\pi^{-1}(U_i \cap U_j) = \tau_i^{-1}((U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n)$$

είναι ανοιχτό στο $\pi^{-1}(U_i)$.

Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση

$$id : (\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_i) \longrightarrow (\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_i).$$

Αυτή έχει τοπική παράσταση

$$\tau_j \circ id \circ \tau_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n$$

που είναι εξ' υποθέσεως αμφιδιαφόριση. Άρα

$$(\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_i) = (\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_j),$$

επομένως ο E δέχεται διαφορική δομή λόγω του Λήμματος της Συγκόλλησης (βλ. Παράρτημα), και η δομή αυτή είναι η μοναδική που κάνει τις τ_i αμφιδιαφορίσεις.

Ως προς την δομή αυτή η π είναι διαφορίσιμη γιατί τοπικά γράφεται ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, λόγω της μεταθετικότητας του Διαγράμματος 2.5.

Τέλος, η οικογένεια $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ ορίζει μία απλοποιούσα κάλυψη. Πράγματι, κάθε νήμα E_x δέχεται δομή διανυσματικού χώρου μέσω της απεικόνισης $\tau_{ix} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^n$, για $x \in U_i$. Η δομή αυτή είναι ανεξάρτητη του i , γιατί αν $x \in U_i \cap U_j$, εξ' υποθέσεως $\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ είναι γραμμική (βλ. ανάλογη απόδειξη στον ορισμό της γραμμικής δομής του εφαπτόμενου χώρου). Η (ΔΔ. 2) έχει ήδη αποδειχθεί. \square

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου:

2.2.6 Θεώρημα. Έστω X μια διαφορική πολλαπλότητα, $n \in \mathbb{N}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του X και $\{T_{ij}\}_{i, j \in I}$ ένας σύγκυκλος του X ως προς την ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ με τιμές στο $GL(n, \mathbb{R})$, δηλαδή, για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

$$T_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}),$$

έτσι ώστε να ισχύει η ιδιότητα (2.2.1). Τότε υπάρχει μια διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ με απεικονίσεις μεταφοράς τις T_{ij} . Η ℓ είναι μοναδική ως προς ένα ισομορφισμό διανυσματικών δεσμών.

Απόδειξη. Στο σύνολο

$$A = \{(i, x, h) : i \in I, x \in U_i, h \in \mathbb{R}^n\}$$

θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(i, x, h) \sim (j, y, k) \Leftrightarrow x = y \text{ και } T_{ji}(x)(h) = k.$$

Θέτουμε $E := A / \sim$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi : E \rightarrow X : [(i, x, h)] \mapsto x.$$

Επίσης, για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n : [(j, y, k)] \mapsto (y, T_{ij}(y)(k)).$$

Η τ_i είναι καλά ορισμένη και 1-1:

$$\begin{aligned} [(j, y, k)] = [(j', y', k')] &\Leftrightarrow \\ y = y' \text{ και } T_{j'j}(y)(k) = k' &\Leftrightarrow \\ y = y' \text{ και } T_{ij'}(y)(k') = T_{ij'}(y) \circ T_{j'j}(y)(k) = T_{ij}(y)(k) &\Leftrightarrow \\ \tau_i([(j, y, k)]) = \tau_i([(j', y', k')]) &. \end{aligned}$$

Η τ_i είναι επί:

$$(x, h) \in U_i \times \mathbb{R}^n \Rightarrow [(i, x, h)] \in \pi^{-1}(U_i) \text{ και } \tau_i([(i, x, h)]) = (x, h).$$

Επίσης, προφανώς $p_1 \circ \tau_i = \pi$. Έστω τώρα ότι $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Τότε

$$\begin{aligned} \tau_j \circ \tau_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n : \\ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = \tau_j(\tau_i^{-1}([(i, x, h)])) &= (x, T_{ij}(x)(h)) \\ &= (p_1, \text{ev} \circ (T_{ij} \circ p_1, p_2))(x, h), \end{aligned}$$

δηλαδή η $\tau_j \circ \tau_i^{-1}$ η είναι C^∞ -απεικόνιση, ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων (άρα και C^∞ -αμφιδιαφόριση).

Τέλος, αν $x \in U_i \cap U_j$, τότε, για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$, είναι

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(h) = \tau_{jx}(\tau_{ix}^{-1}([(i, x, h)])) = \tau_{jx}([(i, x, h)]) = T_{ji}(x)(h),$$

δηλαδή

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} = T_{ji}(x) \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Ικανοποιούνται επομένως οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5. \square

2.3 Κατασκευές ορισμένων διανυσματικών δεσμών

2.3.1 Η δέσμη των γραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης

Εστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^n και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Για κάθε νήμα E_x θεωρούμε τον δυϊκό διανυσματικό χώρο του $E_x^* = L(E_x, \mathbb{R})$ των γραμμικών μορφών E_x και συμβολίζουμε με E^* ή με $L(E, \mathbb{R})$ την διακεκριμένη ένωση των συνόλων:

$$E^* = L(E, \mathbb{R}) := \bigcup_{x \in X} E_x^*.$$

Συμβολίζουμε με $\bar{\pi}$ την φυσική προβολή :

$$E^* \longrightarrow X \quad \text{με} \quad \bar{\pi}(f) = x, \quad \text{αν} \quad f \in E_x^*.$$

Τότε η τριάδα $\ell^* = (E^*, \bar{\pi}, X)$ εφοδιάζεται με δομή διανυσματικής δέσμης με νήματα τύπου $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$.

Πράγματι, για κάθε $i \in I$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\bar{\tau}_i : \bar{\pi}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : u \mapsto (x := \bar{\pi}(f), u \circ \tau_{ix}^{-1}).$$

Είναι άμεσο ότι κάθε $\bar{\tau}_i$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και ότι $p_1 \circ \bar{\tau}_i = \bar{\pi}$.

Αν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ τότε η σύνθεση

$$\bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1} : U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

σε κάθε $(x, u) \in U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ δίνει

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}(x, f) &= \bar{\tau}_j(u := f \circ \tau_{ix}) = (x, f \circ \tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}) \\ &= (x, \sigma(f, T_{ij}(x))) = (p_1, \sigma \circ (p_2, T_{ij} \circ p_1))(x, f), \end{aligned}$$

όπου

$$\sigma : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : (f, g) \mapsto f \circ g,$$

T_{ij} απεικονίσεις μεταφοράς της αρχικής δέσμης ℓ και p_1, p_2 οι κανονικές προβολές του $U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Επομένως, η $\bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη (άρα και αμφιδιαφόριση) και, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός της $\bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}$ είναι η απεικόνιση

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : f \mapsto f \circ T_{ij}(x) = f \circ c,$$

με $c \in GL(n, \mathbb{R})$ σταθερά, άρα είναι γραμμικός ισομορφισμός. Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5.

Η ℓ^* λέγεται και **δυϊκή δέσμη** της ℓ . Στην περίπτωση που η ℓ είναι η επαπτόμενη δέσμη (TX, π, X) μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας X , η ℓ^* είναι η **συνεφαπτόμενη δέσμη** (T^*X, π^*, X) .

2.3.2 Η δέσμη των διγραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης

Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^n και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Για κάθε E_x θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $L_2(E_x, \mathbb{R})$ των διγραμμικών μορφών $E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$, και συμβολίζουμε με $L_2(E, \mathbb{R})$ την διακεκριμένη ένωση

$$L_2(E, \mathbb{R}) := \bigcup_{x \in X} L_2(E_x, \mathbb{R}).$$

Συμβολίζουμε με $\tilde{\pi}$ την φυσική προβολή $\tilde{\pi} : L_2(E, \mathbb{R}) \rightarrow X : \tilde{\pi}(u) = x$, για κάθε $u \in L_2(E_x, \mathbb{R})$. Τότε η τριάδα $(L_2(E, \mathbb{R}), \tilde{\pi}, X)$ εφοδιάζεται με δομή διανυσματικής δέσμης με νήματα τύπου $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Πράγματι, για κάθε $i \in I$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\tilde{\tau}_i : \tilde{\pi}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : u \mapsto (x := \tilde{\pi}(u), u \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})).$$

Προφανώς κάθε $\tilde{\tau}_i$ είναι 1-1, επί και $p_1 \circ \tilde{\tau}_i = \tilde{\pi}$. Εξάλλου, αν $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η σύνθεση $\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ σε ένα σημείο $(x, b) \in U_i \cap U_j \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ είναι

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}(x, b) &= \tilde{\tau}_j(u := b \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix})) \\ &= (x, b \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}) \circ (\tau_{jx}^{-1} \times \tau_{jx}^{-1})) \\ &= (x, b \circ ((\tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}) \times (\tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}))) \\ &= (x, b \circ (T_{ij}(x) \times T_{ij}(x))). \end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με s την τρι-γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} s : L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \\ (b, f, g) &\mapsto b \circ (f \times g), \end{aligned}$$

τότε η $\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ γράφεται

$$\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1} = (p_1, s \circ (p_2, T_{ij} \circ p_1, T_{ij} \circ p_1)),$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη (και αμφιδιαφόριση).

Τέλος, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός $\tilde{\tau}_{jx} \circ \tilde{\tau}_{ix}^{-1}$ είναι η απεικόνιση

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : b \mapsto b \circ (T_{ij}(x) \times T_{ij}(x)),$$

που είναι γραμμικός ισομορφισμός. Το αποτέλεσμα πλέον προκύπτει από την Πρόταση 2.2.5.

Εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν g_x είναι εσωτερικό γινόμενο του νήματος E_x της αρχικής δέσμης ℓ , τότε $g_x \in L_2(E_x, \mathbb{R})$. Άρα, μια δομή Riemann της δέσμης ℓ , (δηλαδή μια οικογένεια εσωτερικών γινομένων $\{g_x\}_{x \in X}$) είναι μια τομή της δέσμης των διγραμμικών μορφών της ℓ , με την ιδιότητα κάθε g_x να είναι επιπλέον, εσωτερικό γινόμενο. Αποδεικνύεται ότι η διαφορισμότητα της δομής Riemann (όπως συνήθως ορίζεται στην γεωμετρία Riemann) είναι ισοδύναμη με την διαφορισμότητα της

$$g : X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}) : x \mapsto g_x.$$

Η ύπαρξη λοιπόν μιας διαφορίσιμης δομής Riemann σε μια δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ ανάγεται στην ύπαρξη μιας διαφορίσιμης ολικής τομής $g : X \rightarrow L_2(E, \mathbb{R})$, τέτοιας ώστε κάθε $g(x)$ να είναι εσωτερικό γινόμενο.

2.3.3 Το ευθύ άθροισμα (άθροισμα Whitney) διανυσματικών δεσμών

Έστω $\ell_\kappa = (E_\kappa, \pi_\kappa, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(\kappa)}$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_{\kappa i})\}_{i \in I}$, $\kappa = 1, 2$. Θεωρούμε το σύνολο

$$E := \bigcup_{x \in X} E_{1x} \oplus E_{2x}$$

και την απεικόνιση

$$\pi : E \longrightarrow X : (u_1, u_2) \mapsto \pi(u_1, u_2) := \pi_1(u_1) = \pi_2(u_2).$$

Η υπόθεση ότι οι απλοποιήσεις $\{U_i, \tau_{\kappa i}\}_{i \in I}$ ($\kappa = 1, 2$) ορίζονται πάνω από την ίδια ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X , δεν αποτελεί βλ.άβη της γενικότητας, αφού, σε διαφορετική περίπτωση, μπορούμε πάντα να θεωρήσουμε τις τομές των δύο ανοιχτών καλύψεων. Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$$

μέσω της σχέσης

$$\tau_i(u_1, u_2) := (x = \pi(u_1, u_2), \tau_{1ix}(u_1), \tau_{2ix}(u_2)).$$

Είναι άμεσο ότι κάθε τ_i είναι 1-1, επί και $p_1 \circ \tau_i = \pi$. Αν $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$$

σε ένα σημείο $(x, h, \kappa) \in U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$ είναι

$$\begin{aligned}\tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h, \kappa) &= \tau_j(\tau_{1ix}^{-1}(h), \tau_{2ix}^{-1}(\kappa)) \\ &= (x, \tau_{1j} \circ \tau_{1i}^{-1}(x, h), \tau_{2j} \circ \tau_{2i}^{-1}(x, h)),\end{aligned}$$

άρα είναι (αμφι)διαφορίσιμη. Επίσης, αν $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} = (\tau_{1jx} \circ \tau_{1ix}^{-1}) \times (\tau_{2jx} \circ \tau_{2ix}^{-1})$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός, οπότε ισχύουν πάλι οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5.

2.3.4 Η δέσμη των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ των νημάτων δύο δεσμών.

Έστω $\ell_\kappa = (E_\kappa, \pi_\kappa, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(\kappa)}$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_{\kappa i})\}_{i \in I}$, $\kappa = 1, 2$. Θεωρούμε το σύνολο

$$L(E_1, E_2) = \bigcup_{x \in X} L(E_{1x}, E_{2x})$$

και την απεικόνιση

$$\pi : L(E_1, E_2) \longrightarrow X,$$

με $\pi(f) = x$, αν $f \in L(E_{1x}, E_{2x})$. Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)})$$

μέσω της σχέσης

$$\varphi_i(f) := (x := \pi(f), \tau_{2ix} \circ f \circ \tau_{1ix}^{-1}), \quad f \in L(E_{1x}, E_{2x}).$$

Είναι άμεσον ότι κάθε φ_i είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και ικανοποιεί την σχέση $p_1 \circ \varphi_i = \pi$. Εξάλλου, αν $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η σύνθεση

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}) \longrightarrow U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}),$$

υπολογισμένη σε ένα σημείο $(x, f) \in U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)})$, είναι

$$\begin{aligned}\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, f) &= \varphi_j(\tau_{2ix}^{-1} \circ f \circ \tau_{1ix}) \\ &= (x, \tau_{2jx} \circ \tau_{2ix}^{-1} \circ f \circ \tau_{1ix} \circ \tau_{1jx}^{-1}) \\ &= (x, \mathbb{T}_{ij}^2(x) \circ f \circ \mathbb{T}_{ij}^1(x)) \\ &= (p_1, \sigma \circ (\mathbb{T}_{ij}^2 \circ p_1, p_2, \mathbb{T}_{ij}^1 \circ p_1))(x, f),\end{aligned}$$

όπου

$$\sigma : L(\mathbb{R}^{n(2)}, \mathbb{R}^{n(2)}) \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}) \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(1)}) \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}) : \\ (f, g, h) \mapsto \sigma(f, g, h) := f \circ g \circ h.$$

Η σ είναι τρι-γραμμική, άρα διαφορίσιμη, επομένως η $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ είναι (αμ-φι)διαφορίσιμη. Τέλος, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός

$$\varphi_{jx} \circ \varphi_{ix}^{-1} = \sigma \left(T_{ij}^2(x), \cdot, T_{ij}^1(x) \right)$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Δηλαδή ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5.

Οι προηγούμενες κατασκευές διανυσματικών δεσμών και πολλές άλλες (όπως του τανυστικού γινομένου διανυσματικών δεσμών κλπ.) ενοποιούνται με χρήση ορισμένων εννοιών της θεωρίας Κατηγοριών (βλ., π.χ., [1], [16, Chap. 3, §4]).

2.4 Η αντίστροφη εικόνα (pull-back)

Ερχόμαστε τώρα σε μια άλλη πολύ χρήσιμη κατασκευή.

2.4.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^n , Y , διαφορική πολλαπλότητα και $f : Y \rightarrow X$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Ονομάζουμε **αντίστροφη εικόνα (pull-back) της ℓ μέσω της f** την τριάδα

$$f^*(\ell) := (f^*(E), \pi', X),$$

όπου

$$f^*(E) := \{(y, u) \in Y \times E : f(y) = \pi(u) \in X\} \subseteq Y \times E, \\ \pi' = p_1|_{f^*(E)} : f^*(E) \longrightarrow Y.$$

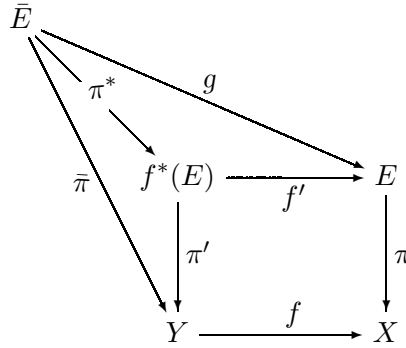
2.4.2 Πρόταση. Με τις υποθέσεις του προηγούμενου ορισμού ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

- i) Η τριάδα $f^*(\ell)$ δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης με νήματα τύπου \mathbb{R}^n .
- ii) Αν $f' := p_2|_{f^*(E)} : f^*(E) \rightarrow E$, τότε το ζεύγος (f', f) είναι μορφισμός μεταξύ των διανυσματικών δεσμών $f^*(\ell)$ και ℓ .
- iii) Η $f^*(\ell)$ έχει την επόμενη **καθολική ιδιότητα (universal property)**: για κάθε διανυσματική δέσμη $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, Y)$ και κάθε μορφισμό $(g, f) : \bar{\ell} \rightarrow \ell$, υπάρχει μια μοναδική διαφορίσιμη απεικόνιση $\pi^* : \bar{E} \rightarrow f^*(E)$ τέτοια ώστε

$$(\pi^*, id_Y) : \bar{\ell} \longrightarrow f^*(\ell)$$

να είναι μορφισμός και να ισχύει $f' \circ \pi^* = g$.

Το τελευταίο συμπέρασμα απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Διάγραμμα 2.7

Απόδειξη. i): Υποθέτουμε ότι $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ είναι μία απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Θεωρούμε την ανοιχτή κάλυψη $\{V_i := f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ του Y και, για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την

$$\varphi_i : \pi'^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n : (y, u) \mapsto (y, \tau_{i f(y)}(u)).$$

Η φ_i είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και $p_1 \circ \varphi_i = \pi'$. Έστω $i, j \in I$ με $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ (άρα και $U_i \cap U_j \neq \emptyset$). Τότε η απεικόνιση

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : V_i \cap V_j \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i \cap V_j \times \mathbb{R}^n,$$

υπολογισμένη σε ένα σημείο (y, h) , δίνει ότι

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y, h) &= \varphi_j(y, \tau_{i f(y)}^{-1}(h)) = (y, \tau_{j f(y)} \circ \tau_{i f(y)}^{-1}(h)) \\ &= (y, (\mathbb{T}_{j i} \circ f(y))(h)) = (p_1, ev \circ (\mathbb{T}_{j i} \circ f \circ p_1, p_2))(y, h), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι (αμφι)διαφορίσιμη. Τέλος, για κάθε $y \in V_i \cap V_j$, ο περιορισμός

$$\varphi_{j y} \circ \varphi_{i y}^{-1} = \tau_{j f(y)} \circ \tau_{i f(y)}^{-1} = \mathbb{T}_{j i}(f(y))$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Άρα το i) προκύπτει από την Πρόταση 2.2.5.

Για το ii) εργαζόμαστε ως εξής : Έστω $i \in I$. Η διαφορισιμότητα της f' στο $\pi'^{-1}(V_i)$ είναι ισοδύναμη με την διαφορισιμότητα της "τοπικής παράστασης"

$\tau_i \circ f' \circ \varphi_i^{-1}$, εφ' όσον οι φ_i, τ_i είναι αμφιδιαφορίσις (βλ. και το επόμενο Διάγραμμα 2.8). Πράγματι, για κάθε $(y, h) \in V_i \times \mathbb{R}^n$, είναι

$$\begin{aligned} \tau_i \circ f' \circ \varphi_i^{-1}(y, h) &= \tau_i \circ f'(y, \tau_i^{-1}(h)) = \tau_i(\tau_i^{-1}(h)) \\ &= \tau_i \circ \tau_i^{-1}(f(y), h) = (f(y), h), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} V_i \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} & \pi'^{-1}(V_i) & \xrightarrow{f'} & \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p_1 & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \swarrow p_1 \\ & & V_i & \xrightarrow{f} & U_i & & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.8

απ' όπου προκύπτει ότι η $\tau_i \circ f' \circ \varphi_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Επίσης, προφανώς, $\pi \circ f' = f \circ \pi'$. Τέλος, ο περιορισμός της f' σε ένα νήμα

$$f^*(E)_y := \{(z, u) \in Y \times E : \pi(u) = f(z), \pi'(z, u) = y\} = \{y\} \times E_{f(y)}$$

είναι η απεικόνιση

$$f'_y : \{y\} \times E_{f(y)} \longrightarrow E_{f(y)} : (y, u) \mapsto u,$$

που είναι γραμμική.

Γιά την iii) ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi^* : \bar{E} \longrightarrow f^*(E) : u \mapsto \pi^*(u) := (\bar{\pi}(u), g(u)).$$

Η π^* είναι καλά ορισμένη, γιατί, για κάθε $u \in \bar{E}$, είναι $f(\bar{\pi}(u)) = \pi(g(u))$, δηλαδή $(\bar{\pi}(u), g(u)) \in f^*(E)$. Προφανώς $f' \circ \pi^* = g$. Επίσης το ζεύγος

$$(\pi^*, id_Y) : \bar{\ell} \longrightarrow f^*(\ell)$$

είναι μορφισμός. Πράγματι, η μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} \bar{E} & \xrightarrow{\pi^*} & f^*(E) \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi' \\ Y & \xrightarrow{id_Y} & Y \end{array}$$

Διάγραμμα 2.9

είναι προφανής και ο περιορισμός της π^* στο νήμα \bar{E}_y συμπίπτει με την γραμμική απεικόνιση g_y . Για τη διαφορισμότητα της π^* , παρατηρούμε ότι αν (V_i, ψ_i) και (V_i, φ_i) είναι απλοποιούντα ζεύγη των $\bar{\ell}$ και $f^*(\ell)$, αντιστοίχως, τότε αυτή είναι ισοδύναμη (σύμφωνα και με το Διάγραμμα 2.10) με την διαφορισμότητα της $\varphi_i \circ \pi^* \circ \psi_i^{-1}$, για κάθε $i \in I$.

$$\begin{array}{ccccc}
 V_i \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi_i^{-1}} & \bar{\pi}^{-1}(V_i) & \xrightarrow{\pi^*} & \pi'^{-1}(V_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & V_i \times \mathbb{R}^n \\
 & \searrow p_1 & \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi' & \swarrow p_1 & \\
 & & V_i & \xrightarrow{id} & V_i & &
 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.10

Όμως, για $(y, h) \in V_i \times \mathbb{R}^m$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \varphi_i \circ \pi^* \circ \psi_i^{-1}(y, h) &= \varphi_i \circ \pi^*(u := \psi_i^{-1}(y, h)) = \varphi_i(y = \bar{\pi}(u), g(u)) \\
 &= (y, \tau_{i f(y)} \circ g(u)) = (y, p_2 \circ \tau_i \circ g \circ \psi_i^{-1}(y, h)),
 \end{aligned}$$

που είναι διαφορισμη. Αυτό κλείνει την απόδειξη. \square

2.5 Οι ιδιότητες της κατηγορίας $VB(X)$

Σ' ολόκληρη την παράγραφο αυτή σταθεροποιούμε μια πολλαπλότητα $X \equiv (X, \mathcal{A})$ και θεωρούμε τις διαφορίσιμες διανυσματικές δέσμες με βάση X και μορφισμούς της μορφής (f, id_X) , δηλαδή περιοριζόμαστε στην κατηγορία $VB(X)$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αν συμβολίσουμε με \mathcal{O} την τετριμμένηδέσμη

$$\mathcal{O} := (X \times \{0\}, p_1, X)$$

που έχει νήματα τύπου $\{0\}$, τότε, για κάθε $\ell \in VB(X)$, τα σύνολα των μορφισμών $Mor(\mathcal{O}, \ell)$ και $Mor(\ell, \mathcal{O})$ είναι μονοσύνολα. Η δέσμη \mathcal{O} είναι η μοναδική με αυτήν την ιδιότητα. Λέμε ότι η \mathcal{O} είναι **μηδενικό αντικείμενο** της κατηγορίας $VB(X)$.

Σχετικά με τα σύνολα των μορφισμών $Mor(\ell_1, \ell_2)$, για τυχαίες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$, έχουμε την επόμενη

2.5.1 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f, g : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφοισμοί. Τότε η απεικόνιση

$$f + g : E_1 \longrightarrow E_2 : u \mapsto f(u) + g(u)$$

είναι μορφοισμός και η αντιστοιχία

$$(f, g) \longmapsto f + g$$

ορίζει μία πράξη στο σύνολο $Mor(\ell_1, \ell_2)$, τέτοια ώστε:

- i) $(Mor(\ell_1, \ell_2), +)$ είναι αβελιανή ομάδα.
- ii) Για κάθε $\ell_3 \in VB(X)$, η σύνθεση

$$Mor(\ell_1, \ell_2) \times Mor(\ell_2, \ell_3) \longrightarrow Mor(\ell_1, \ell_3) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

είναι επιμεριστική, δηλαδή

$$\begin{aligned} g \circ (f_1 + f_2) &= g \circ f_1 + g \circ f_2, \\ (g_1 + g_2) \circ f &= g_1 \circ f + g_2 \circ f, \end{aligned}$$

για κάθε $f, f_1, f_2 \in Mor(\ell_1, \ell_2)$ και $g, g_1, g_2 \in Mor(\ell_2, \ell_3)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνον ότι $f + g$ είναι μορφοισμός. Εστω $(U, \tau_1), (U, \tau_2)$ απλοποιούντα ζεύγη των ℓ_1, ℓ_2 . Αρκεί να δείξουμε ότι $\tau_2 \circ (f + g) \circ \tau_1^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Αν $\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}$ είναι οι τύποι των νημάτων των ℓ_1, ℓ_2 , αντιστοίχως, τότε η

$$\tau_2 \circ (f + g) \circ \tau_1^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n(2)},$$

υπολογισμένη σε ένα $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)}$ με $\tau_1^{-1}(x, h) = u$, δίνει

$$\begin{aligned} \tau_2 \circ (f + g) \circ \tau_1^{-1}(x, h) &= \tau_2(f(u) + g(u)) = \\ &= (x, \tau_{2x} \circ f_x \circ \tau_{1x}^{-1}(h) + \tau_{2x} \circ g_x \circ \tau_{1x}^{-1}(h)) = \\ &= (p_1, p_2 \circ \tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1} + p_2 \circ \tau_2 \circ g \circ \tau_1^{-1})(x, h), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη. Οι υπόλοιπες ιδιότητες ελέγχονται αμέσως. \square

2.5.2 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $\ell = (E, \pi, X)$ το άθροισμα Whitney των ℓ_1, ℓ_2 . Εστω

$$P_k : E \longrightarrow E_k : (u_1, u_2) \mapsto u_k.$$

Τότε $P_k \in Mor(\ell, \ell_k)$ και η τριάδα (ℓ, P_1, P_2) έχει την επόμενη καθολική ιδιότητα του γινομένου: για κάθε $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in VB(X)$ και κάθε ζεύγος μορφοισμών $f_k : \bar{\ell} \rightarrow \ell_k$ ($k = 1, 2$), υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός $f : \bar{\ell} \rightarrow \ell$ με την ιδιότητα

$$P_k \circ f = f_k, \quad k = 1, 2.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη (U, τ_k) των ℓ_k ($k = 1, 2$), και το αντίστοιχο (U, τ) της ℓ (βλ. Παράδειγμα 2.3.3). Για την διαφορισιμότητα της P_k αρκεί να δείξουμε ότι η

$$\tau_k \circ P_k \circ \tau^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(k)}$$

είναι διαφορίσιμη. Ομως, σε κάθε $(x, h_1, h_2) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$ είναι

$$\begin{aligned} \tau_k \circ P_k \circ \tau^{-1}(x, h_1, h_2) &= \tau_k \circ P_k(\tau_1^{-1}(x, h_1), \tau_2^{-1}(x, h_2)) \\ &= \tau_k(\tau_k^{-1})(x, h_k) = (x, h_k), \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη. Η σχέση $\pi_k \circ P_k = \pi$ είναι προφανής, όπως και η γραμμικότητα της P_k στα νήματα. Άρα $P_k \in Mor(\ell, \ell_k)$.

Εστω τώρα $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in VB(X)$ με νήματα τύπου \mathbb{R}^m και $f_k \in Mor(\bar{\ell}, \bar{\ell}_k)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f : \bar{E} \longrightarrow E = E_1 \oplus E_2 : u \mapsto (f_1(u), f_2(u)).$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη, θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη $(U, \bar{\tau})$ της $\bar{\ell}$ και (U, τ) της ℓ (που αντιστοιχεί στα (U, τ_1) , (U, τ_2)) και την απεικόνιση

$$\tau \circ f \circ \bar{\tau}^{-1} : U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}.$$

Αρκεί να δείξουμε τη διαφορισιμότητα της τελευταίας. Πράγματι, για κάθε $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^m$ με $u := \bar{\tau}^{-1}(x, h)$ είναι

$$\begin{aligned} \tau \circ f \circ \bar{\tau}^{-1}(x, h) &= \tau \circ f(u) = \tau(f_1(u), f_2(u)) = \\ &= (x, \tau_{1x} \circ f_1(u), \tau_{2x} \circ f_2(u)) = \\ &= (x, p_2 \circ \tau_1 \circ f_1 \circ \bar{\tau}^{-1}(x, h), p_2 \circ \tau_2 \circ f_2 \circ \bar{\tau}^{-1}(x, h)) \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη. Η σχέση $\pi \circ f = \bar{\pi}$ και η γραμμικότητα της f στα νήματα είναι άμεσες. Η μοναδικότητα της f είναι αποτέλεσμα των σχέσεων $P_k \circ f = f_k$, που προφανώς ισχύουν. \square

2.5.3 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $\ell = (E, \pi, X)$ το άθροισμα Whitney των ℓ_1, ℓ_2 . Εστω

$$I_1 : E_1 \longrightarrow E : u \mapsto (u, 0) \text{ και } I_2 : E_2 \longrightarrow E : u \mapsto (0, u).$$

Τότε $I_k \in Mor(\ell_k, \ell)$ και η τριάδα (ℓ, I_1, I_2) έχει την ακόλουθη καθολική ιδιότητα του συγγνώμενου: για κάθε $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in VB(X)$ και κάθε ζεύγος μορφισμών $f_k : \ell_k \rightarrow \bar{\ell}$ ($k = 1, 2$), υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f : \ell \rightarrow \bar{\ell}$ με την ιδιότητα

$$f \circ I_k = f_k.$$

Απόδειξη. Όπως στην προηγούμενη πρόταση, θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη (U, τ_k) των ℓ_k και το αντίστοιχο (U, τ) της ℓ . Η απεικόνιση

$$\tau \circ I_1 \circ \tau_1^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)},$$

σε κάθε $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)}$, δίνει ότι

$$\tau \circ I_1 \circ \tau_1^{-1}(x, h) = \tau(\tau_1^{-1}(x, h), 0) = (x, \tau_{1x}(\tau_{1x}^{-1}(h)), \tau_{2x}(0)) = (x, h, 0),$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη και συνεπάγεται την διαφορίσιμότητα της I_1 . Ανάλογα για την I_2 . Η σχέση $\pi \circ I_k = \pi_k$ και η γραμμικότητα στα νήματα είναι προφανείς. Άρα $I_k \in Mor(\ell_k, \ell)$.

Εστω τώρα $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in VB(X)$ με νήματα τύπου \mathbb{R}^m και $f_k \in Mor(\ell_k, \bar{\ell})$. Ορίζουμε την

$$f : \ell \longrightarrow \bar{\ell} : (u_1, u_2) \mapsto f(u_1, u_2) := (f_1(u_1), f_2(u_2)).$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη, θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη (U, τ) της ℓ και $(U, \bar{\tau})$ της $\bar{\ell}$, καθώς και την απεικόνιση

$$\bar{\tau} \circ f \circ \tau^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m.$$

Για κάθε $(x, h_1, h_2) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$, είναι

$$\begin{aligned} \bar{\tau} \circ f \circ \tau^{-1}(x, h_1, h_2) &= \bar{\tau} \circ f(\tau_{1x}^{-1}(h_1), \tau_{2x}^{-1}(h_2)) \\ &= \bar{\tau}(f_1 \circ \tau_{1x}^{-1}(h_1) + f_2 \circ \tau_{2x}^{-1}(h_2)) \\ &= (x, \bar{\tau}_x \circ f_{1x} \circ \tau_{1x}^{-1}(h_1) + \bar{\tau}_x \circ f_{2x} \circ \tau_{2x}^{-1}(h_2)) \\ &= (x, p_2 \circ \bar{\tau} \circ f_1 \circ \tau_1^{-1}(x, h_1) + p_2 \circ \bar{\tau} \circ f_2 \circ \tau_2^{-1}(x, h_2)), \end{aligned}$$

απ' όπου συνάγεται η διαφορίσιμότητα της f . Η σχέση $\bar{\pi} = f \circ \pi$ και η γραμμικότητα στα νήματα είναι άμεσες. Η μοναδικότητα της f είναι αποτέλεσμα των σχέσεων $f \circ I_k = f_k$, που προφανώς ισχύουν. \square

Η ύπαρξη του μηδενικού αντικειμένου \mathcal{O} , η αλγεβρική δομή αβελιανής ομάδας των συνόλων $Mor(\ell_1, \ell_2)$ και η ύπαρξη του αθροίσματος Whitney για κάθε ζεύγος δεσμών, που ικανοποιεί τις καθολικές ιδιότητες του γινομένου και του συνγινομένου, σημαίνουν ότι η $VB(X)$ είναι **προσθετική κατηγορία**, για κάθε διαφορική πολλαπλότητα X .

Όπως θα δούμε στην Παράγραφο 2.6, οι πυρήνες των μορφισμών δεν δέχονται πάντα δομή διανυσματικής δέσμης. Εχουμε όμως την επόμενη

2.5.4 Πρόταση. Εστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $p : \ell \rightarrow \ell$ ένας προβολέας, δηλαδή ένας μορφισμός με $p^2 = p$. Τότε η τριάδα

$$(\ker p := \bigcup_{x \in X} \ker p_x, \pi|_{\ker p}, X),$$

δέχεται δομή διαφορίσιμης διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η κανονική εμφύτευση $i : \ker p \rightarrow E$ να είναι μορφισμός στην $VB(X)$.

Απόδειξη. Εστω ότι η ℓ έχει νήματα τύπου \mathbb{R}^n . Εστω $x_o \in X$ και (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ με $x_o \in U$. Τότε η απεικόνιση

$$P := \tau \circ p \circ \tau^{-1} : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

έχει την ιδιότητα $P^2 = P$, δηλαδή η P είναι προβολέας της τετριμμένης δέσμης $(U \times \mathbb{R}^n, p_1, U)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto f(x) := id_{\mathbb{R}^n} - P_x - P_{x_o} + 2P_{x_o} \circ P_x,$$

που είναι διαφορίσιμη (βλ. Πρόταση 2.2.4 και Λήμμα 2.2.3), και θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, f(x)(h)),$$

που είναι επίσης διαφορίσιμη (Λήμμα 2.2.3.). Ακόμη, στην τετριμμένη δέσμη $(U \times \mathbb{R}^n, p_1, U)$ ορίζουμε τον μορφισμό

$$P_o : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, P_{x_o}(h)).$$

Διαπιστώνεται αμέσως ότι $(U \times \ker P_{x_o}, p_1, U)$ είναι επίσης τετριμμένη δέσμη και η κανονική εμφύτευση

$$I_o : U \times \ker P_o \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, h)$$

είναι μορφισμός δεσμών.

Θεωρούμε τώρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} \bigcup_{x \in U} \ker P_x & \xrightarrow{I} & U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P} & U \times \mathbb{R}^n \\ & & \downarrow F & & \downarrow F \\ F|_{\bigcup_{x \in U} \ker P_x} & \downarrow & U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P_o} & U \times \mathbb{R}^n \\ & & \downarrow I_o & & \\ U \times \ker P_{x_o} & \xrightarrow{I_o} & U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P_o} & U \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 2.11

Το δεξιά τετράγωνο είναι μεταθετικό. Πράγματι, για κάθε $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^n$, είναι

$$\begin{aligned} F \circ P(x, h) &= F(x, P_x(h)) = (x, f(x)(P_x(h))) \\ &= (x, id_{\mathbb{R}^n}(P_x(h)) - P_x(P_x(h)) - P_{x_o}(P_x(h)) + \\ &\quad + 2P_{x_o}(P_x(P_x(h)))) \\ &= (x, P_x(h) - P_x(h) - P_{x_o}(P_x(h)) + 2P_{x_o}(P_x(h))) \\ &= (x, P_{x_o}(P_x(h))), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} P_o \circ F(x, h) &= P_o(x, id_{\mathbb{R}^n}(h) - P_x(h) - P_{x_o}(h) + 2P_{x_o}(P_x(h))) = \\ &= (x, P_{x_o}(h - P_x(h) - P_{x_o}(h) + 2P_{x_o}(P_x(h)))) = \\ &= (x, P_{x_o}(h) - P_{x_o}(P_x(h)) - P_{x_o}(h) + 2P_{x_o}(P_x(h))) = \\ &= (x, P_{x_o}(P_x(h))). \end{aligned}$$

Άρα, σε κάθε νήμα, $F_x(\ker P_x) \leq \ker P_{x_o}$, οπότε και το αριστερό τετράγωνο του ανωτέρω διαγράμματος είναι μεταθετικό, όπου

$$I : \bigcup_{x \in U} \ker P_x \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

είναι η κανονική εμφύτευση.

Παρατηρούμε τώρα ότι $f(x_o) = id_{\mathbb{R}^n}$, άρα, λόγω και της Πρότασης 2.2.4, υπάρχει ανοικτή περιοχή $V_o \subseteq U$ του x_o , τέτοια ώστε, για κάθε $x \in V_o$, η απεικόνιση $f(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ να είναι ισομορφισμός, δηλαδή $f(x) \in GL(n, \mathbb{R})$. Άρα μπορεί να οριστεί η διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\alpha \circ f : V_o \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) : x \mapsto (f(x))^{-1},$$

και εξ αυτής η διαφορίσιμη απεικόνιση

$$F^{-1} : V_o \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V_o \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, f(x)^{-1}(h)).$$

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο των ζευγών που κατασκευάζονται όπως το (V_o, F) είναι μιά απλοποιούσα κάλυψη του $(\bigcup_{x \in U} \ker P_x, p_1, U)$. Ελέγχεται αμέσως ότι ο περιορισμός

$$F : \bigcup_{x \in V_o} \ker P_x \longrightarrow V_o \times \ker P_{x_o}$$

είναι αμφιδιαφόριση, καθώς και ότι κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{x \in V_o} \ker P_x & \xrightarrow{F} & V_o \times \ker P_{x_o} \\ & \searrow P_1 & \swarrow P_1 \\ & & V_o \end{array}$$

Διάγραμμα 2.12

Εστω τώρα $x_1 \in U$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto g(x) := id_{\mathbb{R}^n} - P_x - P_{x_1} + 2P_{x_1} \circ P_x, \\ G : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, g(x)(h)), \\ P_1 : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, P_{x_1}(h)). \end{aligned}$$

Όπως προηγουμένως, υπάρχει ανοιχτό $V_1 \subseteq U$ με $x_1 \in V_1$, έτσι ώστε ο περιορισμός $G|_{V_1 \times \mathbb{R}^n}$ να είναι αμφιδιαφόριση. Αν $V_o \cap V_1 \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση

$$\begin{array}{ccccc} (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_1} & \xrightarrow{I_1} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P_1} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n \\ \uparrow G & & \uparrow G & & \uparrow G \\ \bigcup_{x \in V_o \cap V_1} \ker P_x & \xrightarrow{I} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F \\ (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_o} & \xrightarrow{I_o} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P_o} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 2.13

(βλ. και το προηγούμενο διάγραμμα)

$$G \circ F^{-1} : (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n$$

είναι αμφιδιαφόριση, άρα και ο περιορισμός-της

$$G \circ F^{-1} : (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_o} \longrightarrow (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_1}.$$

Εξάλλου, ο περιορισμός της $G \circ F^{-1}$ σε ένα νήμα $\{x\} \times \ker P_{x_0}$, με $x_0 \in V_0 \cap V_1$, συμπίπτει με τον ισομορφισμό $g(x) \circ f(x)^{-1}$. Άρα το σύνολο των ζευγών (V_0, F) είναι απλοποιούσα κάλυψη του

$$\left(\bigcup_{x \in U} \ker P_{x, p_1}, U \right).$$

Τώρα είναι άμεσον ότι τα ζεύγη $(V_0, F \circ \tau)$ αποτελούν απλοποιούσα κάλυψη του $(\ker p, \pi, X)$, και η εμφύτευση $i : \ker p \rightarrow E$ είναι μορφισμός στην $VB(X)$. \square

Εφόσον η $VB(X)$ είναι προσθετική κατηγορία και κάθε προβολέας έχει πυρήνα μέσα στην $VB(X)$, αυτό σημαίνει ότι η $VB(X)$ είναι επιπλέον **ψευδοαβελιανή κατηγορία**.

2.6 Ακριβείς ακολουθίες - Διασπάσεις

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι, υπό ορισμένες προϋποθέσεις (Πρόταση 2.5.4), ο πυρήνας ενός μορφισμού έχει δομή διανυσματικής δέσμης. Όμως ο πυρήνας (και η εικόνα) ενός τυχαίου μορφισμού δεν δέχονται γενικά δομή διανυσματικής δέσμης. Π.χ., αν $X = I = [0, 1]$ και $\ell = (I \times \mathbb{R}, p_1, I)$, τότε η απεικόνιση

$$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x, xy)$$

είναι μορφισμός δεσμών. Όμως ο πυρήνας της f έχει νήμα διάστασης 0 σε κάθε $x \neq 0$ και διάστασης 1 στο $x = 0$, άρα δεν είναι τοπικά τετριμμένος. Ανάλογα και η εικόνα.

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν δομή διανυσματικής δέσμης στην εικόνα ή τον πυρήνα ενός μορφισμού. Μία σημαντική εφαρμογή της παραγράφου αυτής βρίσκεται στο Κεφάλαιο 5.

2.6.1 Ορισμός. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2, 3$, με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(k)}$ και $f_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$ μορφισμοί διανυσματικών δεσμών. Μία ακολουθία της μορφής

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f_1} \ell_2$$

καλείται **ακριβής**, εαν $n(1) \leq n(2)$ και υπάρχουν απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in I}$, $k = 1, 2$, πάνω από την ίδια ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X , έτσι

ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f_1} & \pi_2^{-1}(U_i) \\ \tau_{1i} \downarrow & & \downarrow \tau_{2i} \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} & \xrightarrow{I} & U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.14

για κάθε $i \in I$. Εδώ η

$$I : U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} : (x, h) \mapsto (x, h, 0)$$

συμβολίζει την κανονική εμφύτευση.

Ανάλογα, λέμε ότι η ακολουθία

$$l_2 \xrightarrow{f_2} l_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι **ακριβής**, εαν $n(2) \geq n(3)$ και υπάρχουν απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in I}$, $k = 2, 3$, έτσι ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \pi_2^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f_2} & \pi_3^{-1}(U_i) \\ \tau_{2i} \downarrow & & \downarrow \tau_{3i} \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} & \xrightarrow{P} & U_i \times \mathbb{R}^{n(3)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.15

για κάθε $i \in I$, όπου

$$P : U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(3)} : (x, h, k) \mapsto (x, h)$$

είναι η κανονική προβολή.

Τέλος, λέμε ότι η η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow l_1 \xrightarrow{f_1} l_2 \xrightarrow{f_2} l_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι **ακριβής**, ή και ότι είναι μια **σύντομη ακριβής ακολουθία**, αν οι ακολουθίες

$$\mathcal{O} \longrightarrow l_1 \xrightarrow{f_1} l_2 \quad \text{και} \quad l_2 \xrightarrow{f_2} l_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβείς και $\text{Im } f_1 = \ker f_2$.

2.6.2 Παράδειγμα. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X)$, $k = 1, 2$, διανυσματικές δέσμες. Αν ℓ είναι το άθροισμα Whitney των ℓ_1, ℓ_2 (βλ. εδάφιο 2.3.3), $P_k : \ell \rightarrow \ell_k$ η κανονική προβολή (Πρόταση 2.5.2) και $I_k : \ell_k \rightarrow \ell$ η κανονική εμφύτευση (Πρόταση 2.5.3), τότε, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι ακολουθίες

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{I_1} \ell \xrightarrow{P_2} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}, \\ \mathcal{O} &\longrightarrow \ell_2 \xrightarrow{I_2} \ell \xrightarrow{P_1} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O} \end{aligned}$$

είναι σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

2.6.3 Ορισμός. Εστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $S \subseteq E$. Λέμε ότι η τριάδα $(S, \pi|_S, X)$ είναι **υποδέσμη** της ℓ , αν δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η κανονική εμφύτευση $i : S \rightarrow E$ να είναι μορφισμός στην $VB(X)$.

2.6.4 Παράδειγμα. Στο Παράδειγμα 2.6.2 οι τριάδες $(I_k(E_k), \pi|_{I_k(E_k)}, X)$ είναι υποδέσμες της ℓ .

Γενικότερα, έχουμε την επόμενη

2.6.5 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, εάν και μόνον εάν η f είναι 1-1.

Απόδειξη. Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο θεωρούμε $a \in X$ και αντίστοιχα απλοποιούντα ζεύγη (U, τ_k) , $k = 1, 2$, των ℓ_k με $a \in U$. Σχηματίζουμε την "τοπική παράσταση"

$$F = \tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(2)}$$

της f μέσω των τ_1, τ_2 , και τον περιορισμό

$$F_a := \tau_{2a} \circ f_a \circ \tau_{1a}^{-1} : \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n(2)}.$$

Από την υπόθεση, κάθε f_x , $x \in X$, είναι 1-1, άρα και η F_a είναι 1-1. Επομένως, το $F_a(\mathbb{R}^{n(1)})$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n(2)}$ διάστασης $n(1)$. Εστω V ένα συμπλήρωμα του $F_a(\mathbb{R}^{n(1)})$ στο $\mathbb{R}^{n(2)}$, δηλαδή ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n(2)}$ διάστασης $n(2) - n(1)$ με $\mathbb{R}^{n(2)} = F_a(\mathbb{R}^{n(1)}) \times V$. Θέτουμε

$$\bar{\tau}_2 := (id_U \times F_a^{-1} \times id_V) \circ \tau_2 : \pi_2^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V.$$

Η απεικόνιση

$$id_U \times F_a^{-1} \times id_V : U \times F_a(\mathbb{R}^{n(1)}) \times V \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V$$

είναι αμφιδιαφόριση και ο περιορισμός της σε κάθε νήμα είναι ο ισομορφισμός $F_a^{-1} \times id_V$, άρα το $(U, \bar{\tau}_2)$ είναι απλοποιούν ζεύγος της ℓ_2 συμβιβαστό με τη δομή της. Ας συμβολίσουμε τώρα με \bar{F} την τοπική παράσταση

$$\bar{F} := \bar{\tau}_2 \circ f \circ \tau_1^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V.$$

Διάγραμμα 2.16

Η \bar{F} μπορεί να πάρει την μορφή

$$\bar{F} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V : (x, h) \mapsto (x, f_1(x)(h), f_2(x)(h)),$$

όπου οι απεικονίσεις

$$f_1 : U \rightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}) \quad \text{και} \quad f_2 : U \rightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, V)$$

είναι διαφορίσιμες. Εστω η απεικόνιση

$$H : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)} \times V, \mathbb{R}^{n(1)} \times V) : x \mapsto H(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ f_2(x) & id_V \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, η H είναι διαφορίσιμη, άρα και η

$$\bar{H} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V : (x, h, k) \mapsto (x, H(x) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix})$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Παρατηρούμε τώρα ότι, στο $a \in U$,

$$\begin{aligned}\bar{F}(a, h) &= (id_U \times F_a^{-1} \times id_V)(F(a, h)) \\ &= (id_U \times F_a^{-1} \times id_V)(a, F_a(h), 0) \\ &= (a, h, 0),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$f_1(a) = id_{\mathbb{R}^{n(1)}} \quad \text{και} \quad f_2(a) = 0,$$

επομένως

$$H(a) = \begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^{n(1)}} & 0 \\ 0 & id_V \end{pmatrix} \in GL(n(2), \mathbb{R}) \subseteq L(\mathbb{R}^{n(1)} \times V, \mathbb{R}^{n(1)} \times V).$$

Αρα υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_o του a , με $U_o \subseteq U$, και $H(x)$ αντιστρέψιμο, για κάθε $x \in U_o$. Τότε όμως η απεικόνιση

$$H^{-1} : U_o \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)} \times V, \mathbb{R}^{n(1)} \times V) : x \mapsto H(x)^{-1}$$

είναι διαφορίσιμη, άρα και η

$$\bar{H}^{-1} : U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V \longrightarrow U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V : (x, h, k) \mapsto (x, H(x)^{-1} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix})$$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U_o) & \xrightarrow{f} & \pi_2^{-1}(U_o) & & \\ \downarrow \tau_1 & & \downarrow \bar{\tau}_2 & \searrow \bar{H}^{-1} \circ \bar{\tau} & \\ U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} & \xrightarrow{\bar{F}} & U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V & \xrightarrow{\bar{H}^{-1}} & U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V \\ & \nearrow \bar{F} & & \nearrow I & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.17

είναι αμφιδιαφόριση (με αντίστροφη την \bar{H}) και ο περιορισμός-της στο νήμα του x , $x \in U_o$, είναι ο ισομορφισμός $H(x)^{-1}$. Αρα το η τριάδα $(U_o, \bar{H}^{-1} \circ \bar{\tau}_2)$ είναι απλοποιούν ζεύγος της ℓ_2 συμβιβαστό με τη δομή-της.

Στο νέο Διάγραμμα 2.17, για κάθε $(x, h) \in U_o \times \mathbb{R}^{n(1)}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{H}^{-1} \circ \bar{\tau}_2 \circ f \circ \tau_1^{-1}(x, h) \bar{h}^{-1} \circ \bar{F}(x, h) &= \\ &= \bar{H}^{-1}(x, f_1(x)(h), f_2(x)(h)) \\ &= \bar{H}^{-1}(x, H(x) \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &= \bar{H}^{-1}(\bar{H}(x, h, 0)) = (x, h, 0) \end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει η συνθήκη του Ορισμού 2.6.1. \square

Παρατηρούμε ότι, λόγω της Πρότασης 2.6.5, ο Ορισμός 2.6.1 για την ακρίβεια της ακολουθίας

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

ισοδυναμεί με την απλούστατη συνθήκη ότι η f είναι 1-1, ή, ισοδύναμα, ότι κάθε f_x είναι 1-1. Η απαίτηση όμως που διατυπώνεται στον Ορισμό 2.6.1 είναι πιά "λειτουργική" και μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την σχέση των δομών των ℓ_1, ℓ_2 . Εξάλλου είναι η συνθήκη που χρησιμοποιείται σαν ορισμός της ακρίβειας στις διανυσματικές δέσμες άπειρης διάστασης, όπου το 1-1 της f στα νήματα είναι *ασθενέστερο* και δεν αρκεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Ανάλογα με την Πρόταση 2.6.5, έχει κανείς την επόμενη

2.6.6 Πρόταση. *Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Η ακολουθία*

$$\ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής, εάν και μόνον εάν η f είναι επί. \square

Η ακρίβεια της ακολουθίας

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

και η έννοια της υποδέσμης συνδέονται, όπως δείχνει η επόμενη

2.6.7 Πρόταση. *i) Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν η ακολουθία*

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, τότε $(\text{Im } f, \pi_2|_{\text{Im } f}, X)$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 .

ii) Εστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $S \subseteq E$. Αν $\ell_S := (S, \pi|_S, X)$ είναι υποδέσμη της ℓ , τότε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_S \xrightarrow{i} \ell$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του i) υποθέτουμε ότι ο τύπος νήματος της ℓ_k είναι $\mathbb{R}^{n(k)}$. Από την ακρίβεια της ακολουθίας $\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$, έχουμε ότι υπάρχουν απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in I}$ των ℓ_k , έτσι ώστε, για κάθε $i \in I$, το τετράγωνο του επόμενου διαγράμματος να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f} & \pi_2^{-1}(U_i) & & \\ \tau_{1i} \downarrow & & \tau_{2i} \downarrow & \searrow & \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} & \xrightarrow{I} & U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{P} & U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.18

Παρατηρούμε ότι, για $u \in \pi_2^{-1}(U_i)$, έχουμε

$$u \in \text{Im } f \Leftrightarrow \tau_{2i}(u) \in U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \{0\}.$$

Αρα η απεικόνιση

$$\bar{\tau}_{2i} := \tau_{2i}|_{\pi_2^{-1}(U_i) \cap \text{Im } f} : \pi_2^{-1}(U_i) \cap \text{Im } f \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \{0\}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Το ίδιο και η απεικόνιση

$$P \circ \bar{\tau}_{2i} : \pi_2^{-1}(U_i) \cap \text{Im } f \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(1)}.$$

Θα δείξουμε ότι τα ζεύγη $(U_i, P \circ \bar{\tau}_{2i})$ σχηματίζουν απλοποιούσα κάλυψη του $(\text{Im } f, \pi_2|_{\text{Im } f}, X)$. Πράγματι, αν $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση

$$(P \circ \bar{\tau}_{2j}) \circ (P \circ \bar{\tau}_{2i})^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n(1)}$$

είναι η απεικόνιση

$$P \circ \bar{\tau}_{2j} \circ \bar{\tau}_{2i}^{-1} \circ I = P \circ (\tau_{2j} \circ \tau_{2i}^{-1}) \circ I,$$

άρα είναι (αμφι)διαφορίσιμη, και οι περιορισμοί της στα νήματα είναι οι απεικονίσεις $P_x \circ (\tau_{2jx} \circ \tau_{2ix}^{-1}) \circ I_x$, δηλαδή είναι ισομορφισμοί. Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5, και $(\text{Im } f, \pi_2|_{\text{Im } f}, X)$ δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης.

Για την απεικόνιση $i : \text{Im } f \rightarrow E_2$ είναι, προφανώς, $\pi_2 \circ i = \pi_2|_{\text{Im } f}$ και οι περιορισμοί i_x στα νήματα είναι γραμμικοί. Για την διαφορισιμότητα της i , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η τοπική της παράσταση, μέσω των απλοποιήσεων (U_i, τ_{2i}) και $(U, P \circ \bar{\tau}_{2i})$, είναι η

$$\tau_{2i} \circ i \circ (P \circ \bar{\tau}_{2i})^{-1} = \tau_{2i} \circ \tau_{2i}^{-1} \circ I = I,$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη.

Η απόδειξη του ii) είναι προφανής από την Πρόταση 2.6.5. \square

2.6.8 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν η ακολουθία

$$\ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \rightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής, τότε ο $\ker f$ δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \rightarrow \ker f \xrightarrow{i} \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \rightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής.

Απόδειξη. Εστω ότι $\mathbb{R}^{n(1)} = \mathbb{R}^{n(2)} \times \mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^{n(2)}$ είναι οι τύποι των νημάτων, και $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in I}$ οι απλοποιούσες καλύψεις των ℓ_k που ικανοποιούν τον ορισμό.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U_i) \cap \ker f & \subseteq & \pi_1^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f} & \pi_2^{-1}(U_i) \\ \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i} \downarrow & & \downarrow \tau_{1i} & & \downarrow \tau_{2i} \\ U_i \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\hat{P}} & U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{P} & U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.19

Για ένα $u \in \pi_1^{-1}(U_i)$, παρατηρούμε ότι

$$u \in \ker f \Leftrightarrow \tau_{1i}(u) \in U_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^m.$$

Εστω

$$\hat{P} : U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \times \mathbb{R}^m \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} : (x, h, k) \mapsto (x, k)$$

η κανονική 1-3-προβολή και

$$\bar{\tau}_{1i} := \tau_{1i}|_{\ker f \cap \pi_1^{-1}(U_i)} : \pi_1^{-1}(U_i) \cap \ker f \longrightarrow U_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^m.$$

Τότε η απεικόνιση $\hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i}$ είναι 1-1 και επί και $p_1 \circ \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i} = \pi_1|_{\ker f}$.

Θα δείξουμε ότι τα ζεύγη $(U_i, \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i})$ αποτελούν απλοποιούσα κάλυψη του $\ker f$. Πράγματι, αν $(U_j, \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1j})$ είναι ένα άλλο τέτοιο ζεύγος με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε

$$(\hat{P} \circ \bar{\tau}_{1j}) \circ (\hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i})^{-1} = \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1j} \circ \tau_{1i}^{-1} \circ \hat{I},$$

όπου

$$\hat{I} : U_i \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n(2) \times \mathbb{R}^m : (x, k) \mapsto (x, 0, k),$$

άρα είναι (αμφι)διαφορίσιμη. Προφανώς ο περιορισμός σε κάθε νήμα είναι γραμμικός (ισο)μορφισμός, άρα ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5.

Η ακρίβεια της ακολουθίας

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ker f \xrightarrow{i} \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι αποτέλεσμα της Πρότασης 2.6.7(ii) και του Ορισμού 2.6.1. □

Ανάλογα με την Πρόταση 2.6.8, έχουμε και την

2.6.9 Πρόταση. *Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν η ακολουθία*

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, τότε η τριάδα $\ell_2/\text{Im } f = (E_2/\text{Im } f, \pi, X)$, όπου

$$E_2/\text{Im } f = \bigcup_{x \in X} E_{2x}/\text{Im } f_x$$

και $\pi : E_2/\text{Im } f \rightarrow X$ η φυσική προβολή, δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \xrightarrow{p} \ell_2/\text{Im } f \longrightarrow \mathcal{O},$$

όπου

$$p : E_2 \longrightarrow E_2/\text{Im } f : u \mapsto u + f_x(E_{1x}), \quad u \in E_{2x},$$

είναι ακριβής.

2.6.10 Ορισμός. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2, 3$, και $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$, $g : \ell_2 \rightarrow \ell_3$ μορφοισμοί, τέτοιοι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \xrightarrow{g} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής. Λέμε ότι η ανωτέρω ακριβής ακολουθία **διασπάται** αν υπάρχουν μορφοισμοί $g' : \ell_3 \rightarrow \ell_2$ και $f' : \ell_2 \rightarrow \ell_1$, τέτοιοι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_3 \xrightarrow{g'} \ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής και

$$g \circ g' = id_{E_3} \quad \text{και} \quad f' \circ f = id_{E_1}$$

Πριν αποδείξουμε την ύπαρξη διάσπασης μιάς ακριβούς ακολουθίας, χρειαζόμαστε το επόμενο

2.6.11 Λήμμα. Αν $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφοισμός, και $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση, τότε η απεικόνιση

$$\psi \cdot f : E_1 \longrightarrow E_2 : u \mapsto \psi(\pi(u)) \cdot f(u)$$

ορίζει μορφοισμό διανυσματικών δεσμών στην $VB(X)$.

Απόδειξη. Προφανώς $\pi_2 \circ (\psi \cdot f) = \pi_1$ και οι περιορισμοί $(\psi \cdot f)_x$ στα νήματα είναι γραμμικές απεικονίσεις. Για την διαφορισμότητά της, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν (U, τ_1) , (U, τ_2) είναι απλοποιούντα ζεύγη των ℓ_1 , ℓ_2 , αντιστοίχως, τότε η τοπική παράσταση

$$\tau_2 \circ (\psi \cdot f) \circ \tau_1^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(2)}$$

υπολογισμένη σε ένα $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)}$ είναι

$$\begin{aligned} \tau_2 \circ (\psi \cdot f) \circ \tau_1^{-1}(x, h) &= \tau_2(\psi(\pi_1(\tau_1^{-1}(x, h))) \cdot f(\tau_1^{-1}(x, h))) \\ &= \tau_2((\psi(p_1(x, h))) \cdot f(\tau_1^{-1}(x, h))) \\ &= \tau_2(\psi(x) \cdot f(\tau_1^{-1}(x, h))) \\ &= (x, p_2 \circ \tau_2(\psi(x) \cdot f(\tau_1^{-1}(x, h)))) \\ &= (x, \psi(x) \cdot (p_2 \circ \tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1}(x, h))), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη. □

2.6.12 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και μορφισμός $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$. Εστω ακόμη ότι η βάση X δέχεται διαφορίσιμες διαμερίσεις της μονάδας. Αν η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, τότε υπάρχει μορφισμός $f' : \ell_2 \rightarrow \ell_1$, τέτοιος ώστε η ακολουθία

$$\ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής και $f' \circ f = id_{E_1}$.

Απόδειξη. Εστω $\mathbb{R}^{n(1)}$, $\mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^m$ οι τύποι των νημάτων των ℓ_1 , ℓ_2 και οι τοπικά πεπερασμένες απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in I}$, που ικανοποιούν τη συνθήκη του Ορισμού 2.6.1. Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$f'_i := \tau_{1i}^{-1} \circ P \circ \tau_{2i} : \pi_2^{-1}(U_i) \longrightarrow \pi_1^{-1}(U_i).$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f'_i} \end{array} & \pi_2^{-1}(U_i) \\ \tau_{1i} \downarrow & & \downarrow \tau_{2i} \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} & \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \xleftarrow{P} \end{array} & U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Διάγραμμα 2.20

Η f'_i είναι μορφισμός τετριμμένων δεσμών και

$$f' \circ f = \tau_{1i}^{-1} \circ P \circ \tau_{2i} \circ f = \tau_{1i}^{-1} \circ P \circ \tau_{1i} = \tau_{1i}^{-1} \circ \tau_{1i} = id_{\pi_1^{-1}(U_i)}.$$

Εστω τώρα $\{\psi_i\}_{i \in I}$ μία διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας υποκειμένη στην κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X . Το γινόμενο $\psi_i f'_i : \pi_2^{-1}(U_i) \rightarrow \pi_1^{-1}(U_i)$ είναι μορφισμός, που επεκτείνεται σε μορφισμό $\psi_i f'_i : E_2 \rightarrow E_1$ μέσω του τύπου

$$\psi_i f'_i(u) := \begin{cases} \psi_i(\pi_2(u)) \cdot f'_i(u), & \forall u \in \pi_2^{-1}(U_i), \\ 0, & \forall u \notin \pi_2^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Θέτουμε τώρα

$$f' := \sum_i \psi_i \cdot f'_i : E_2 \longrightarrow E_1.$$

Η f' είναι μορφομορφισμός ως άθροισμα μορφομορφισμών (Πρόταση 2.5.1) και

$$f' \circ f = \left(\sum_i \psi_i \cdot f'_i \right) \circ f = \sum_i \psi_i \cdot (f'_i \circ f) = \sum_i \psi_i \cdot id_{\pi_1^{-1}(U_i)} = id_{E_1}.$$

Από τη σχέση $f' \circ f = id_{E_1}$ έπεται ότι η f' είναι επί, άρα και η ακρίβεια της ακολουθίας

$$\ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}. \quad \square$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η

2.6.13 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και μορφομορφισμός $g : \ell_1 \rightarrow \ell_2$. Εστω ακόμη ότι η βάση X είναι παρασυμπαγής. Αν η ακολουθία

$$\ell_1 \xrightarrow{g} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής, τότε υπάρχει μορφομορφισμός $g' : \ell_2 \rightarrow \ell_1$, τέτοιος ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_2 \xrightarrow{g'} \ell_1$$

να είναι ακριβής και $g \circ g' = id_{E_2}$.

2.6.14 Θεώρημα. Εστω X παρασυμπαγής πολλαπλότητα. τότε κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία στην $VB(X)$ διασπάται.

Απόδειξη. Εστω

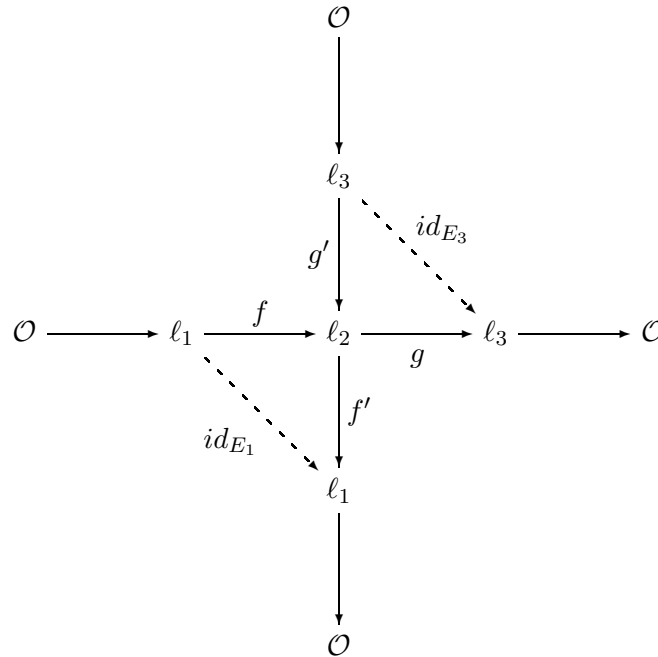
$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \xrightarrow{g} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

μιά σύντομη ακριβής ακολουθία στην κατηγορία $VB(X)$. Θεωρούμε ένα μορφομορφισμό $f' : \ell_2 \rightarrow \ell_1$, για τον οποίον $f' \circ f = id_{E_1}$ και η ακολουθία

$$\ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής (Πρόταση 2.6.12). Τότε $\ker f'$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 [βλ. Προτάσεις 2.6.8 και 2.6.7(ii)]. Εξάλλου, για κάθε $x \in X$, αποδεικνύεται εύκολα ότι $E_{2x} = \text{Im } f_x \oplus \ker f'_x$. Επειδή και η $\text{Im } f$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 , έχουμε ότι

$$E_2 = \text{Im } f \oplus \ker f'.$$



Διάγραμμα 2.21

Επίσης, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί κανείς ότι $g|_{\ker f'} : \ker f' \rightarrow E_3$ είναι απεικόνιση 1-1 και επί. Ορίζουμε τώρα την

$$g' := i \circ (g|_{\ker f'})^{-1} : E_3 \rightarrow E_2,$$

όπου $i : \ker f' \rightarrow E_2$ είναι η κανονική εμφύτευση. Τότε η g' είναι η ζητούμενη για να συμπληρωθεί η ακριβής ακολουθία

$$O \rightarrow l_3 \xrightarrow{g'} l_2 \xrightarrow{f'} l_1 \rightarrow O. \quad \square$$

Ένα παραπροϊόν της προηγούμενης απόδειξης είναι το

2.6.15 Πρόρισμα. *Αν η σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$O \rightarrow l_1 \xrightarrow{f} l_2 \xrightarrow{g} l_3 \rightarrow O$$

διασπάται, τότε

$$l_2 \cong l_1 \oplus l_3.$$

2.7 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

1. Αν $\ell = (E, \pi, X)$ είναι διανυσματική δέσμη, δείξτε ότι η $\pi : E \rightarrow X$ είναι εμβάπτιση.
2. Δείξτε ότι σε κάθε συνεκτική συνιστώσα της βάσης μιας διανυσματικής δέσμης τα νήματα είναι σταθερού τύπου.
3. Δείξτε ότι κάθε νήμα E_x μιας διανυσματικής δέσμης $\ell = (E, \pi, X)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της E , άρα έχει διαφορική δομή. Επίσης έχει διαφορική δομή ως διανυσματικός χώρος. Δείξτε ότι οι δύο διαφορικές δομές συμπίπτουν.
4. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2$, είναι διανυσματικές δέσμες, να δείξετε ότι $\ell_1 \times \ell_2 := (E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, X_1 \times X_2)$ είναι διανυσματική δέσμη.
5. Έστω $(f, g) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έτσι ώστε οι f, g να είναι αμφιδιαφορίσεις. Δείξτε ότι το ζεύγος $(f^{-1}, g^{-1}) : \ell_2 \rightarrow \ell_1$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.
6. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X)$ είναι διανυσματικές δέσμες πάνω από την ίδια βάση X ($i = 1, 2$), να εξετάσετε αν η απεικόνιση

$$EV : L(E_1, E_2) \oplus E_1 \longrightarrow E_2 : (f, u) \longrightarrow f(u)$$

είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.

7. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X) \in VB(X)$, $i = 1, 2, 3$, να εξετάσετε αν η απεικόνιση

$$COM : L(E_1, E_2) \oplus L(E_2, E_3) \longrightarrow L(E_1, E_3) : (f, g) \longrightarrow f \circ g$$

είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.

8. Αν $\ell = (E, \pi, X)$ είναι διανυσματική δέσμη και $f : E \rightarrow E$ μορφισμός στην $VB(X)$, τέτοιος ώστε η f να είναι 1-1 και επί, δείξτε ότι f είναι ισομορφισμός στην $VB(X)$.
9. Δείξτε ότι το σύνολο $\text{Lis}(E, E)$ των ισομορφισμών $f : E \rightarrow E$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του ολικού χώρου $L(E, E)$ (βλ. Παράδειγμα 2.3.4).
10. Έστω $\ell_1 \oplus \ell_2 = (E_1 \oplus E_2, \pi, X)$ το άθροισμα Whitney των διανυσματικών δεσμών $\ell_i = (E_i, \pi_i, X)$, $i = 1, 2$. Δείξτε ότι οι κανονικές προβολές

$$P_i : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_i$$

είναι εμβαπτίσεις και οι κανονικές εμφυτεύσεις

$$I_i : E_i \longrightarrow E_1 \oplus E_2, \quad i = 1, 2,$$

είναι εμφυτεύσεις.

11. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη. Δείξτε ότι οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} + : E \oplus E &\longrightarrow E : (u, v) \mapsto u + v \\ \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E : (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u \equiv \lambda u \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμες. Μπορείτε να τις ερμηνεύσετε ως μορφισμούς διανυσματικών δεσμών;

12. Θεωρείστε την διανυσματική δέσμη $\ell_1 \times \ell_2$ (βλ. Άσκηση 4), όπου $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2$, είναι διανυσματικές δέσμες. Δείξτε ότι τα ζεύγη

$$(P_i, p_i) : \ell_1 \times \ell_2 \longrightarrow \ell_i,$$

όπου $P_i : E_1 \times E_2 \rightarrow E_i$ και $p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ οι συνήθεις προβολές, είναι μορφισμοί διανυσματικών δεσμών. Να εξετάσετε αν η τριάδα

$$(\ell_1 \times \ell_2, (P_1, p_1), (P_2, p_2))$$

ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του γινομένου στην κατηγορία VB .

13. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του X και $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$ δύο σύγκυκλοι πάνω από την κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ με τιμές στο $GL(n, \mathbb{R})$. Οι δύο σύγκυκλοι λέγονται **ισοδύναμοι** αν υπάρχουν διαφορίσιμες απεικονίσεις $h_i : U_i \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, τέτοιες ώστε

$$g'_{ji}(x) = h_j(x)^{-1} \circ g_{ji}(x) \circ h_i(x),$$

για κάθε $i, j \in I$, και $x \in U_i \cap U_j$.

Να αποδείξετε ότι οι δύο σύγκυκλοι $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$ ορίζουν ισόμορφες διανυσματικές δέσμες πάνω από το X (Θεώρημα 2.2.6), εάν και μόνον εάν είναι ισοδύναμοι.

14. Έστω $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ ένας μορφισμός δεσμών στην $VB(X)$. Δείξτε ότι οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- i) $\text{Im} f$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 .
- ii) $\text{ker} f$ είναι υποδέσμη της ℓ_1

- iii*) Οι διαστάσεις των νημάτων του $\text{Im} f$ είναι τοπικά σταθερές.
 - iv*) Οι διαστάσεις των νημάτων του $\text{ker} f$ είναι τοπικά σταθερές.
15. Πως πρέπει να διατυπωθεί η Πρόταση 2.2.5, αν κάθε E_x έχει γραμμική δομή που θέλουμε να διατηρηθεί;
16. Δείξτε ότι μια διανυσματική δέσμη είναι τετριμμένη, εάν και μόνον εάν η δομική της ομάδα ανάγεται στην $\{id_{\mathbb{R}^n}\}$.

Πρωτεύουσες Δέσμες

Principal bundles constitute, in a certain sense, a geometric generalization of the notion of Lie group. In fact ... a principal bundle looks like a collection of copies of the structural group G , sitting over the base manifold M ...

C. VON WESTENHOLZ [28, p. 131]

Οι πρωτεύουσες δέσμες έχουν δομή συνθετότερη από αυτήν των διανυσματικών δεσμών καθ' όσον τα νήματά τους είναι ισόμορφα με μία ομάδα Lie, αντί ενός γραμμικού χώρου, όπως συμβαίνει στις διανυσματικές δέσμες. Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις θεμελιώδεις ιδιότητες των πρωτευουσών δεσμών, τους μορφισμούς, τις συναρτήσεις μεταφοράς, μέσω των οποίων (ανα)κατασκευάζεται μία πρωτεύουσα δέσμη, καθώς και την αντίστροφη εικόνα (pull-back) μιάς πρωτεύ-

ουσας δέσμης μέσω διαφορίσιμης απεικόνισης.

3.1 Διαφορίσιμες δράσεις

Επειδή η δομή μιάς πρωτεύουσας δέσμης σχετίζεται με τις ομάδες Lie και τις διαφορίσιμες δράσεις, στην παράγραφο αυτή θυμίζουμε μερικά βασικά συμπεράσματα από την θεωρία των τελευταίων, τις οποίες θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στις (προπτυχιακές) Σημειώσεις μας [2].

3.1.1 Ορισμός. Έστω M C^∞ -πολλαπλότητα και G ομάδα Lie. Μια C^∞ -**δράση** της G επί της M **από τα δεξιά** (ή **δεξιά δράση**) είναι μια C^∞ -απεικόνιση

$$\delta: M \times G \longrightarrow M : (x, g) \mapsto \delta(x, g)$$

η οποία έχει τις ιδιότητες

$$(\Delta. 1) \quad \delta(x, e) = x, \quad \forall x \in M$$

$$(\Delta. 2) \quad \delta(\delta(x, g_1), g_2) = \delta(x, g_1 \cdot g_2); \quad \forall x \in M \text{ και } g_1, g_2 \in G.$$

Πολλές φορές, για διευκόλυνση, θέτουμε

$$(3.1.1) \quad \delta(x, g) = x \cdot g.$$

Φυσικά, το δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας δεν συμβολίζει κάποιο πολλαπλασιασμό.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της (3.1.1) οι ιδιότητες (Δ. 1) και (Δ. 2) γράφονται αντίστοιχα με τη μορφή:

$$x \cdot e = x$$

$$(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 \cdot g_2)$$

Οι ιδιότητες αυτές σημαίνουν ότι:

1) Η δράση με το ουδέτερο στοιχείο του G αφήνει αμετάβλητα τα στοιχεία του X , και

2) η δράση, επί ενός $x \in M$, διαδοχικά με τα στοιχεία g_1 και g_2 έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τη δράση του $(g_1 \cdot g_2)$ επί του x .

Ανάλογα προς τη δεξιά δράση ορίζεται και η **αριστερή δράση** $G \times M \longrightarrow M$.

Τη μερική απεικόνιση $\delta_g: M \longrightarrow M : x \mapsto \delta_g(x) = x \cdot g$ συμβολίζουμε συχνά και με R_g και την καλούμε **δεξιά μετατόπιση** του X κατά $g \in G$. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι δεν πρόκειται για τη δεξιά μετατόπιση μιας ομάδας Lie, παρ' όλο που χρησιμοποιούμε ίδιο συμβολισμό και ορολογία. Η R_g είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη την $R_{g^{-1}}$.

3.1.2 Ορισμός. Μια δράση (όπως στον ορισμό 3.1.1) λέγεται **ελεύθερη** όταν ισχύει η συνθήκη

$$\text{αν } \delta(x, g) = x, \text{ για κάποιο } x \in M \text{ και } g \in G, \text{ τότε } g = e.$$

Επίσης, η δ λέγεται **μεταβατική** (αντίστοιχα **γνήσια μεταβατική**) αν

$$\forall (x, y) \in M \times M \quad \exists \text{ (αντίστοιχα } \exists!) g \in G : y = x \cdot g = \delta(x, g).$$

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση R_g , η συνθήκη για να είναι η δ ελεύθερη διατυπώνεται και ως εξής:

Αν η R_g διαθέτει κάποιο σταθερό σημείο (δηλαδή $\exists x \in M : R_g(x) = x$), τότε $g = e$. Με άλλα λόγια, μόνον η $R_e = id_M$ διαθέτει σταθερά σημεία.

Παρόμοια, συμβολίζοντας με δ_x την μερική απεικόνιση(της δ)

$$\delta_x : G \longrightarrow M : g \mapsto \delta_x(g) := \delta(x, g) = x \cdot g,$$

διαπιστώνουμε ότι:

Η δ είναι μεταβατική τότε και μόνον τότε αν $\forall x \in M$, η δ_x είναι απεικόνιση επί. Ιδιαίτερα, αν η δ είναι γνήσια μεταβατική, τότε η δ_x είναι 1-1 και επί, $\forall x \in M$.

3.1.3 Ορισμός. Για μια δράση δ (όπως στον ορισμό 3.1.1), η **τροχιά** \mathcal{O}_x του $x \in M$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{O}_x := \{\delta(x, g) = x \cdot g / g \in G\} := x \cdot G.$$

3.1.4 Πρόταση. Έστω δ μια δράση (όπως στον ορισμό 3.1.1). Ορίζουμε τη σχέση (στο M):

$$x \sim y \Leftrightarrow y = x \cdot g, \text{ για κάποιο } g \in G \text{ [ισοδύναμα: } y \in \mathcal{O}_x]$$

Τότε η " \sim " είναι σχέση ισοδυναμίας και, $\forall x \in M$, είναι $[x] = \mathcal{O}_x$.

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή των ορισμών και των (Δ. 1), (Δ. 2) της δράσης. \square

3.1.5 Πρόρισμα. Αν η πολλαπλότητα M διαθέτει δράση, τότε οι τροχιές ορίζουν μια διαμέριση του M .

3.1.6 Παραδείγματα. 1) Μια ομάδα G δρα φυσιολογικά στον εαυτόν της μέσω του πολλαπλασιασμού της, δηλαδή

$$\delta : G \times G \longrightarrow G : (a, b) \mapsto \delta(a, b) := a \cdot b.$$

2) Έστω ότι M είναι πολλαπλότητα και G ομάδα Lie. Τότε η G δρα επί του $M \times G$ μέσω της απεικόνισης

$$\delta((x, g), g') \equiv (x, g) \cdot g' := (x, g \cdot g').$$

Πριν κλείσουμε τη σύντομη αυτή παράγραφο, ας θυμίσουμε και την έννοια του πεδίου Killing: Αν $X \in \mathcal{L}(G)$, δηλαδή το X είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο C^∞ -διανυσματικό πεδίο της ομάδας Lie G , τότε σ' αυτό αντιστοιχεί (μέσω της δράσης δ), ένα C^∞ -διανυσματικό πεδίο X^* της M [δηλαδή $X^* \in \mathcal{X}(M)$], που ορίζεται από τη σχέση

$$(3.1.2) \quad X^*(x) := T_e \delta_x(X_e) = T_e \delta_x(X(e))$$

Το X^* καλείται **πεδίο Killing**, το οποίον αντιστοιχεί στο X .

3.1.7 Παρατήρηση. Μπορούμε να ορίσουμε τη δράση μιας ομάδας G επί τυχόντος συνόλου $M \neq \emptyset$, όπως και τη δράση μιας τοπολογικής ομάδας επί ενός τοπολογικού χώρου M , και να πάρουμε ανάλογα συμπεράσματα. Στις περιπτώσεις αυτές δεν ορίζεται, φυσικά, η έννοια του πεδίου Killing.

3.1.8 Ασκήσεις.

1. Να διατυπωθούν και να αποδειχθούν τα ανάλογα συμπεράσματα για αριστερές δράσεις.
2. Να δείξετε ότι κάθε δεξιά δράση ορίζει και μία αριστερή δράση και αντίστροφα.
3. Να επαληθευτούν οι ισοδύναμες συνθήκες για την ελεύθερη και τη (γνήσια) μεταβατική δράση, που δίνονται μετά τον ορισμό 3.1.2.
4. Να αποδειχτεί πλήρως η Πρόταση 3.1.4.
5. Να επαληθεύσετε ότι η δ του Παραδείγματος 3.1.6(2) ορίζει πράγματι μία (δεξιά) C^∞ -δράση.
6. Έστω μία δράση $\delta : M \times G \longrightarrow M$. Για ένα $x \in M$, καλούμε **ομάδα ισοτροπίας** του x το σύνολο $G_x = \{g \in G : x \cdot g = x\}$. Να δείξετε ότι:
 - i) Το G_x είναι υποομάδα του G .
 - ii) Αν M είναι πολλαπλότητα Hausdorff, τότε το G_x είναι κλειστή υποομάδα του G .
 - iii) Η δράση είναι ελεύθερη εάν και μόνον εάν $G_x = \{e\}$, $\forall x \in M$.
7. Αν η δράση είναι μεταβατική, τότε το M διαθέτει μόνον μία τροχιά.

8. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε $x \in M$ και $g \in G$, ισχύει η σχέση

$$G_{x \cdot g} = g^{-1} \cdot G_x \cdot g.$$

Ιδιαίτερος, να δείξετε ότι, αν η δράση είναι μεταβατική, τότε οι ομάδες ισοτροπίας είναι μεταξύ τους συζυγείς.

9. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\delta : G \times G \rightarrow G$ (όπου G είναι ομάδα Lie) με

$$\delta(x, \alpha) = \alpha^{-1} \cdot x \cdot \alpha$$

ορίζει μία δεξιά C^∞ -δράση του G επί του εαυτού του.

10. Έστω $\delta : X \times G \rightarrow X$ μία δράση και τυχόν $x \in X$. Ορίζουμε το πηλίκο

$$G/G_x := \{G_x \cdot g \mid g \in G\}$$

Τότε ισχύουν τα επόμενα:

i) Υπάρχει μία απεικόνιση $f : G/G_x \rightarrow X$, τέτοια ώστε $f \circ x = \delta_x$, όπου $x : G \rightarrow G/G_x$ είναι η κανονική απεικόνιση(προβολή).

ii) Η f είναι 1-1 και $f(G/G_x) = \mathcal{O}_x$.

iii) Αν η δ είναι μεταβατική, τότε η f είναι και απεικόνισηεπί, άρα

$$X \cong G/G_x,$$

δηλαδή το X είναι **ομογενής χώρος**.

3.2 Πρωτεύουσες (ή κύριες) δέσμες

3.2.1 Ορισμός. Μία **πρωτεύουσα** ή **κύρια (νηματική) δέσμη** (principal fibre bundle) είναι μία τετράδα $\ell = (P, G, B, \pi)$, όπου P και B είναι C^∞ -πολλαπλότητες, $\pi : P \rightarrow B$ C^∞ -απεικόνιση και G μια ομάδα Lie, που δρα διαφορίσιμα επί της P (από δεξιά), έτσι ώστε να ισχύει η επόμενη συνθήκη:

$\forall x \in B, \exists$ ανοιχτό $U \subset B$ με $x \in U$ και αμφιδιαφόριση

$$\Psi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U),$$

η οποία έχει τις ιδιότητες:

i) Το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\Psi} & x^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

Διάγραμμα 3.1

ii) $\Psi((y, g) \cdot g') = \Psi(y, g \cdot g') = \Psi(y, g) \cdot g', \quad \forall y \in U \text{ και } g, g' \in G.$

3.2.2 Σχόλια. 1) Η αμφιδιαφορισιμότητα της απεικόνισης Ψ , στον προηγούμενο ορισμό, νοείται ως προς τη δομή της πολλαπλότητας που διαθέτει το $U \times G$, και τη δομή της (ανοιχτής) υποπολλαπλότητας που διαθέτει το $\pi^{-1}(U)$, ως ανοιχτό υποσύνολο του P .

2) Στην ιδιότητα ii) η έκφραση $(y, g) \cdot g'$ συμβολίζει τη δράση του g' επί του (y, g) , ως αποτέλεσμα της δράσης $(U \times G) \times G \rightarrow U \times G$, η οποία ορίζεται όπως στο Παράδειγμα 3.1.6(2). Ανάλογα, το $\Psi(y, g) \cdot g'$ είναι το αποτέλεσμα της δράσης της G επί του P . Εδώ η ii) σημαίνει ότι, για οποιοδήποτε $g' \in G$, $\Psi(y, g) \cdot g' = \Psi(y, g \cdot g') \in \pi^{-1}(U)$.

Το Σχόλιο 3.2.2(2) οδηγεί στην

3.2.3 Πρόταση. Αν U είναι το ανοιχτό σύνολο του προηγούμενου ορισμού, τότε για κάθε $p \in \pi^{-1}(U)$ και $g \in G$ είναι $p \cdot g \in \pi^{-1}(U)$.

Απόδειξη. Λόγω του επί της απεικόνισης Ψ , θα υπάρχουν $y \in U$ και $h \in G$, έτσι ώστε $p = \Psi(y, h)$. Άρα, σύμφωνα με την ιδιότητα ii), έχουμε ότι

$$p \cdot g = \Psi(y, h) \cdot g = \Psi((y, h) \cdot g) = \Psi(y, h \cdot g) \in \pi^{-1}(U). \quad \square$$

3.2.4 Πρόσχημα. Αν συμβολίσουμε με $\delta : P \times G \rightarrow P$ τη δράση του G επί του P , τότε η απεικόνιση

$$\delta_U : \pi^{-1}(U) \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U), \quad \text{με } \delta_U(p, g) = \delta(p, g),$$

ορίζει C^∞ -δράση του G επί του $\pi^{-1}(U)$.

Απόδειξη. Η δ_U παίρνει τιμές στο $\pi^{-1}(U)$ σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.3. Επίσης είναι C^∞ , ως περιορισμός διαφορίσιμης απεικόνισης επί ανοικτού υποσυνόλου του πεδίου ορισμού ($\pi^{-1}(U) \times G \subset P \times G$), που παίρνει τιμές σε (ανοιχτή) υποπολλαπλότητα του πεδίου τιμών (βλ. Πρόταση 1.1.12). Η επαλήθευση των ιδιοτήτων της δράσης είναι προφανής, από τον ορισμό της δ_U . \square

3.2.5 Πρόρισμα. Αν, με τους συμβολισμούς του Ορισμού 3.2.1, θέσουμε

$$(3.2.1) \quad \boxed{\Phi := \Psi^{-1}},$$

τότε ισχύει η σχέση

$$(3.2.2) \quad \Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g, \quad \forall p \in \pi^{-1}(U) \text{ και } g \in G.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $p \in \pi^{-1}(U)$. Λόγω του επί της απεικόνισης Ψ , θα υπάρχει $(y, h) \in U \times G$, έτσι ώστε $p = \Psi(y, h)$. Άρα για οποιοδήποτε $g \in G$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Phi(p \cdot g) &= \Phi(\Psi(y, h) \cdot g) = \Phi(\Psi(y, h \cdot g)) = (\Phi \circ \Psi)(y, h \cdot g) \\ &= (y, h \cdot g) = (y, h) \cdot g = \Psi^{-1}(p) \cdot g = \Phi(p) \cdot g. \end{aligned} \quad \square$$

3.2.6 Ορολογία. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ μία κύρια δέσμη. Τότε το P καλείται **ολικός χώρος**, το G **δομική ομάδα**, το B **βάση** και η απεικόνιση π **προβολή**. Επίσης, το $P_x := \pi^{-1}(x)$ καλείται **νήμα** (πάνω από το x). Κάθε ζεύγος (U, Φ) ή (U, Ψ) καλείται **απλοποιούν ζεύγος**. Η ιδιότητα ii) του Ορισμού 3.2.1 και η (3.2.2) χαρακτηρίζουν τις Ψ και Φ , αντιστοίχως, ως G -**ισομεταβλητές** (ως προς τις αντίστοιχες δράσεις του G επί των πεδίων ορισμού και τιμών των απεικονίσεων αυτών). Τέλος, η ιδιότητα i) του Ορισμού 3.2.1 χαρακτηρίζει τη δέσμη ως **τοπικώς τετριμμένη**. Αυτό θα κατανοηθεί καλλίτερα αφού ορίσουμε την έννοια του μορφισμού μεταξύ πρωτευουσών δεσμών.

Σημειώνουμε εδώ ότι τα πεδία ορισμού των απλοποιούντων ζευγών αποτελούν, προφανώς, ανοιχτή κάλυψη της βάσης B .

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο συμπέρασμα θυμίζουμε ότι μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ καλείται **εμβάπτιση στο $x \in X$** αν $T_x f: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$. Αν η f είναι εμβάπτιση σε κάθε $x \in X$, τότε καλείται απλώς **εμβάπτιση**.

3.2.7 Πρόταση. Η προβολή π είναι απεικόνιση επί και εμβάπτιση.

Απόδειξη. i) Έστω τυχόν $x \in B$. Τότε θα υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) με $x \in U$. Τότε, για οποιοδήποτε $g \in G$, το $p := \Psi(x, g)$ έχει την ιδιότητα $\pi(p) = x$ (βλ. μεταθετικό Διάγραμμα 3.1), άρα η π είναι απεικόνιση επί.

ii) Αν τώρα $p \in P$ είναι τυχόν σημείο με $\pi(p) = x$ και θεωρήσουμε το ίδιο μεταθετικό Διάγραμμα 3.1, που προκύπτει από το (U, Ψ) με $x \in U$, θα είναι $\pi = p_1 \circ \Phi$, δηλαδή η π είναι εμβάπτιση ως σύνθεση εμβαπτίσεων [βλ. Άσκηση 1.3.13(1)]. Αλλιώς: Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση, βρίσκουμε ότι

$$(3.2.3) \quad T_p \pi = T_p(p_1 \circ \Phi) = T_{\Phi(p)} p_1 \circ T_p \Phi = (p_1|_{T_x B \times T_x G}) \circ T_p \Phi,$$

αν $\Phi(p) = (x, g)$. Επειδή το δεύτερο μέλος της (3.2.3) είναι απεικόνιση επί, έχουμε τελικά ότι η $T_p\pi$ είναι επί, δηλαδή η π είναι εμβάπτιση στο p και παρόμοια σε κάθε σημείο του P . \square

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.10, αποδεικνύουμε αμέσως το

3.2.8 Πόρισμα. *Τα νήματα μιας πρωτεύουσας δέσμης είναι μη κενές κανονικές υποπολιπλαπλότητες του ολικού χώρου P . Ιδιαίτερα, αν η B είναι χώρος Hausdorff, τότε κάθε νήμα είναι κλειστή υποπολιπλαπλότητα του P .*

3.2.9 Παραδείγματα. 1) Αν M είναι C^∞ -πολλαπλότητα και G ομάδα Lie, τότε η τετράδα $(M \times G, G, M, p_1)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη [εδώ η δράση είναι αυτή του Παραδείγματος 3.1.6(2)]. Η δέσμη αυτή καλείται **η τετριμμένη πρωτεύουσα δέσμη** (με βάση M και δομική ομάδα G).

2) Με τις υποθέσεις του Παραδείγματος 1, αν $U \subset$ ανοιχτό, τότε και η $(U \times G, G, U, p_1)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη (: η τετριμμένη πρωτεύουσα δέσμη με βάση το ανοιχτό U και δομική ομάδα G).

3) Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη, τότε και η

$$(\pi^{-1}(U), G, U, \pi|_{\pi^{-1}(U)})$$

είναι πρωτεύουσα δέσμη, αν U είναι πεδίο ορισμού ενός απλοποιούντος ζεύγους.

4) Αν (P_i, G_i, B_i, π_i) είναι πρωτεύουσες δέσμες ($i = 1, 2$), τότε και η

$$(P_1 \times P_2, G_1 \times G_2, B_1 \times B_2, \pi_1 \times \pi_2)$$

είναι πρωτεύουσα δέσμη.

Σημείωση. Οι πρωτεύουσες δέσμες είναι τοπικά τετριμμένες (βλ. Ορολογία 3.2.6) αλλά όχι πάντοτε και ολικά τετριμμένες. Για ένα παράδειγμα μη τετριμμένης δέσμης πάνω από τον κύκλο S^1 παραπέμπουμε στο [6]. Ένα άλλο παράδειγμα μη τετριμμένης δέσμης είναι η δέσμη των πλαισίων μιας διανυσματικής δέσμης, που θα κατασκευάσουμε πιο κάτω.

3.2.10 Θεώρημα. *Αν $p \in P$ είναι τυχόν σημείο του ολικού χώρου με $\pi(p) = x$, τότε ισχύει η σχέση*

$$\pi^{-1}(x) = \mathcal{O}_p = p \cdot G$$

(βλ. σχετικώς και τον συμβολισμό του Ορισμού 3.1.3).

Απόδειξη. Έστω (U, Φ) ένα απλοποιούν ζεύγος με $x \in U$, όπου

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G.$$

Τότε, για οποιοδήποτε $q \in \mathcal{O}_p$ θα είναι $q = p \cdot g$, για κάποιο $g \in G$. Επειδή $p \in \pi^{-1}(U)$, θα είναι και $q = p \cdot g \in \pi^{-1}(U)$ (βλ. Πρόταση 3.2.3), άρα, κατά το Πόρισμα 3.2.5,

$$\Phi(q) = \Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g.$$

Επομένως (βλ. και Άσκηση 2 στο τέλος της παραγράφου)

$$(\pi(q), p_2(\Phi(q))) = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) \cdot g = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) \cdot g,$$

δηλαδή $\pi(q) = \pi(p) = x$, οπότε $q \in \pi^{-1}(x)$ και $\mathcal{O}_x \subset \pi^{-1}(x)$.

Αντίστροφα, αν $q \in \pi^{-1}(x)$ θα είναι $\pi(q) = x$ και $\Phi(q) = (x, p_2(\Phi(q)))$. Παρόμοια, $\Phi(p) = (x, p_2(\Phi(p)))$. Επειδή $p_2(\Phi(q)), p_2(\Phi(p)) \in G$, υπάρχει (μοναδικό) $g \in G$ έτσι ώστε $p_2(\Phi(q)) = p_2(\Phi(p)) \cdot g$. Επομένως, σύμφωνα με τον συμβολισμό του Πορίσματος 3.2.5,

$$q = \Phi^{-1}(x, p_2(\Phi(q))) = \Psi(x, p_2(\Phi(p)) \cdot g) = \Psi(x, p_2(\Phi(p))) \cdot g = p \cdot g,$$

δηλαδή $q \in \mathcal{O}_p$ και $\pi^{-1}(x) \subset \mathcal{O}_p$, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα. \square

3.2.11 Πόρισμα. Ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

i) Για κάθε $x \in B$, το αντίστοιχο νήμα έχει τη μορφή $\pi^{-1}(x) = p \cdot G$, όπου p είναι τυχόν στοιχείο με $\pi(p) = x$.

ii) Για κάθε $p \in P$ και $g \in G$, είναι $\pi(p \cdot g) = \pi(p)$, δηλαδή $p \cdot g \in \pi^{-1}(x)$, αν $\pi(p) = x$.

iii) Τα νήματα ορίζουν μία διαμέριση του P αφού

$$P = \bigcup_{x \in B} \pi^{-1}(x) = \bigcup_{p \in P} \mathcal{O}_p.$$

Απόδειξη. Η i) είναι αναδιατύπωση του Θεωρήματος 3.2.10.

Για τη ii) παρατηρούμε ότι αν $\pi(p) = x$, τότε $p \in \pi^{-1}(x)$. Συνεπώς

$$p \cdot g \in p \cdot G = \mathcal{O}_x = \pi^{-1}(x) \quad \text{και} \quad \pi(p \cdot g) = x.$$

Η iii) είναι προφανής (βλ. επίσης και το ανάλογο Πόρισμα 3.1.5). \square

3.2.12 Πρόταση. Αν συμβολίσουμε με $\delta : P \times G \rightarrow P$ τη \mathcal{C}^∞ -δράση του G επί του P και, για ένα σταθεροποιημένο $x \in X$, θέσουμε

$$\delta^x(p, g) := \delta(p, g) = p \cdot g, \quad \forall p \in \pi^{-1}(x) \quad \text{και} \quad g \in G,$$

τότε η δ^x ορίζει μία \mathcal{C}^∞ -δράση του G επί του νήματος $\pi^{-1}(x)$.

Απόδειξη. Πρώτα διαπιστώνουμε ότι $\delta^x(p, g) \in \pi^{-1}(x)$, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.11. Άρα παίρνουμε μια απεικόνιση της μορφής $\delta^x : \pi^{-1}(x) \times G \rightarrow \pi^{-1}(x)$. Επειδή $\pi^{-1}(x)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της P , η δ^x είναι \mathcal{C}^∞ ως άμεση συνέπεια της διαφορισιμότητας της δ και των Προτάσεων 1.1.11 και 1.1.12. \square

3.2.13 Σχόλιο. Από την Πρόταση 3.2.12 προκύπτει ότι "η δράση διατηρεί τα νήματα". Αυτό βέβαια συνάγεται και από το Πόρισμα 3.2.8(ii).

3.2.14 Θεώρημα. Έστω (U, Φ) απλοποιούν ζεύγος της πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

- i) $\Phi(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times G$, για κάθε $x \in U$.
- ii) Αν θέσουμε

$$(3.2.4) \quad \boxed{\Phi_x := p_2 \circ \Phi|_{\pi^{-1}(x)}}$$

τότε η Φ_x^* είναι αμφιδιαφόριση και G -ισομεταβλητή ως προς τη δράση του G επί του $\pi^{-1}(x)$ (κατά την Πρόταση 3.2.12) και την δράση του G επί του G [κατά το Παράδειγμα 3.1.6(1)].

Απόδειξη. i) Έστω $p \in \pi^{-1}(x)$. Τότε

$$\Phi(p) = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) = (x, p_2(\Phi(p))) \in \{x\} \times G,$$

δηλαδή $\Phi(\pi^{-1}(x)) \subset \{x\} \times G$.

Αντίστροφα, για τυχόν $(x, g) \in \{x\} \times G \subset U \times G$, λόγω του επί της Φ θα υπάρχει $q \in \pi^{-1}(U)$ με $\Phi(q) = (x, g)$. Επομένως

$$x = p_1(x, g) = (p_1 \circ \Phi)(q) = \pi(q).$$

δηλαδή $q \in \pi^{-1}(x)$. Άρα, $(x, g) = \Phi(q)$ με $q \in \pi^{-1}(x)$, που σημαίνει ότι

$$\{x\} \times G \subset \Phi(\pi^{-1}(x))$$

και οδηγεί, με την αντίστροφη σχέση, στο πρώτο συμπέρασμα.

Για τη ii) ας δείξουμε πρώτα ότι η Φ_x είναι G -ισομεταβλητή. Πράγματι, για κάθε $p \in \pi^{-1}(x)$ και $g \in G$ είναι (βλ. και σχέση (3.2.6))

$$\begin{aligned} \Phi_x(p \cdot g) &= p_2(\Phi(p \cdot g)) = p_2(\Phi(p) \cdot g) = p_2\left(\left(\pi(p), p_2(\Phi(p))\right) \cdot g\right) \\ &= p_2(x, p_2(\Phi(p)) \cdot g) = p_2(\Phi(p)) \cdot g = \Phi_x(p) \cdot g \end{aligned}$$

*Εδώ, προφανώς, η Φ_x δεν είναι μερική απεικόνιση.

Για την απόδειξη της αμφιδιαφορισιμότητας της Φ_x αποδεικνύουμε κατά σειρά τα εξής συμπεράσματα :

α) Η Φ_x είναι 1-1 : Έστω ότι $\Phi_x(p) = \Phi_x(q)$, για δύο $p, q \in \pi^{-1}(x)$. Τότε

$$\Phi(p) = (x, \Phi_x(p)) = (x, \Phi_x(q)) = \Phi(q)$$

από όπου και $p = q$ [βλ. σχετικώς και την Άσκηση 2].

β) Η Φ_x είναι επί: Αν $g \in G$, τότε

$$p := \Psi(x, g) = \Phi^{-1}(x, g) \in \pi^{-1}(U).$$

Αλλά $\pi(p) = (\pi \circ \Psi)(x, g) = x$, άρα $p \in \pi^{-1}(x)$. Συνεπώς,

$$\Phi_x(p) = p_2(\Phi(p)) = p_2(x, g) = g,$$

που αποδεικνύει το επί.

γ) Η Φ_x είναι C^∞ ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων: της $p_2: U \times G \rightarrow G$ και της $\Phi|_{\pi^{-1}(x)}$, που είναι περιορισμός C^∞ -απεικόνισης σε κανονική υποπολλαπλότητα.

δ) Αποδεικνύεται αμέσως (Άσκηση !) ότι

$$\boxed{\Phi_x^{-1}(g) = \Psi(x, g), \quad \forall g \in G,}$$

άρα

$$\Phi_x^{-1} = \Psi \circ (c_x, id_G), \quad \text{όπου } c_x: G \rightarrow U: g \mapsto x \text{ (σταθερά),}$$

οπότε έχουμε και τη διαφορισιμότητα της Φ_x^{-1} , που ολοκληρώνει την απόδειξη της ii) και του Θεωρήματος. \square

3.2.15 Πρόρισμα. Μέσω της Φ_x , κάθε νήμα $\pi^{-1}(x)$ αποκτά τη δομή ομάδας Lie εις τρόπον ώστε η Φ_x να είναι ισομορφισμός ομάδων Lie.

3.2.16 Πρόταση. Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη τότε:

- i) Η δράση της G επί της P είναι ελεύθερη.
- ii) Η δράση της G επί των νημάτων είναι γνήσια μεταβατική.

Απόδειξη. i) Έστω $p \in P$ και $g \in G$ με $p = p \cdot g$. Αν $\pi(p \cdot g) = \pi(p) = x$, θα υπάρξει απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) με $x \in U$. Επομένως, η $p = p \cdot g$ συνεπάγεται την [βλ. και Θεώρημα 3.2.14(ii)]

$$\Phi_x(p) = \Phi_x(p \cdot g) = \Phi_x(p) \cdot g,$$

δηλαδή βρίσκουμε ότι $\Phi_x(p) = \Phi_x(p) \cdot g$ (στην ομάδα G), άρα $g = e$.

ii) Αν πάρουμε τυχόντα $p, q \in \pi^{-1}(x)$, τότε $\Phi_x(p), \Phi_x(q) \in G$ άρα υπάρχει $g \in G$ με

$$\Phi_x(q) = \Phi_x(p) \cdot g = \Phi_x(p \cdot g),$$

οπότε (βλ. Θεώρημα 3.2.14) $q = p \cdot g$. Το g είναι μονοσήμαντα ορισμένο γιατί αν είναι $p \cdot g = q = p \cdot g'$, τότε θα είναι και

$$(3.2.5) \quad \Phi_x(p \cdot g) = \Phi_x(p \cdot g') \quad \text{ή} \quad \Phi_x(p) \cdot g = \Phi_x(p) \cdot g'$$

(στην G), άρα $g = g'$. □

3.2.17 Παρατήρηση. Η δράση του G επί του P δεν είναι (γενικά) μεταβατική. Πράγματι, αν πάρουμε δύο τυχόντα $p, q \in P$ με αντίστοιχες προβολές $\pi(p) = x \neq y = \pi(q)$, δηλαδή τα p, q βρίσκονται σε διαφορετικά νήματα. Αν υπήρχε $g \in G$ με $q = p \cdot g$, τότε (σύμφωνα με το Πρόσχημα 3.2.11) θα ήταν

$$y = \pi(q) = \pi(p \cdot g) = \pi(p) = x$$

(δηλαδή αναγκαιώς τα p, q θα έπρεπε να βρίσκονται στο ίδιο νήμα), πράγμα που είναι άτοπο.

Μια άλλη απόδειξη του ii) της Πρότασης 3.2.16.

$$\begin{aligned} p \cdot g = p \cdot g' &\Leftrightarrow (p \cdot g)g^{-1} = (p \cdot g')g^{-1} \\ &\Leftrightarrow p \cdot (g \cdot g^{-1}) = p \cdot (g' \cdot g^{-1}) \\ &\Leftrightarrow p \cdot e = p \cdot (g' \cdot g^{-1}) \\ &\Leftrightarrow p = p \cdot (g' \cdot g^{-1}) \\ (\text{δράση ελεύθερη}) &\Leftrightarrow g' \cdot g^{-1} = e \\ &\Leftrightarrow g' = g. \end{aligned}$$

3.2.18 Παρατήρηση. Ένας άλλος ορισμός της Φ_x είναι και ο επόμενος:

$$\Phi_x = i_x \circ \Phi, \quad \text{όπου } i_x \text{ είναι η αμφιδιαφόριση (!)}$$

$$\{x\} \times G \longrightarrow G: (x, g) \mapsto g.$$

Με αυτόν τον τρόπο, τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 3.2.14 είναι προφανή.

3.2.19 Ασκήσεις.

1. Να επαληθεύσετε ότι τα Παραδείγματα 3.2.9 ορίζουν πραγματικά πρωτεύουσες δέσμες.

2. Να δείξετε ότι $\Phi(p) = (\pi(p), p_2(\Phi(p)))$ και κατά συνέπεια, αν $\pi(p) = x$, τότε $\Phi(p) = (x, \Phi_x(p))$.
3. Να δείξετε ότι η συνθήκη του Ορισμού 3.2.1 ισοδυναμεί με την επόμενη:
Για κάθε $x \in B$, $\exists U \subset B$ ανοιχτό με $x \in U$ και αμφιδιαφόριση

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G,$$

με τις ιδιότητες:

i) Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times G \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

Διάγραμμα 3.2

είναι μεταθετικό.

ii) $\forall p \in \pi^{-1}(U)$ και $g \in G$ είναι $p \cdot g \in \pi^{-1}(U)$ και ισχύει η σχέση

$$\Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g$$

4. Να δείξετε ότι $\Phi_x^{-1}(g) = \Phi^{-1}(x, g) = \Psi(x, g)$.
5. Αν $x \neq y$, τότε $\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(y) = \emptyset$
6. Στον ολικό χώρο P μιας πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$ ορίζουμε τη σχέση

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G : q = p \cdot g.$$

Να δείξετε ότι:

i) Η " \sim " είναι σχέση ισοδυναμίας.

ii) Αν P/G είναι ο αντίστοιχος χώρος-πηλίκο, τότε το P/G βρίσκεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τη βάση B . Πως ερμηνεύονται οι κλάσεις ισοδυναμίας και το P/G ;

iii) Το P/G εφοδιάζεται με τη δομή πολλαπλότητας, αμφιδιαφορικής προς τη B , της οποίας η κανονική τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία πηλίκου.

7. Να αποδειχτεί το Πρόσιμα 3.2.15.
8. Να αποδειχτεί ότι η προβολή π μιας πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι εμπάπτιση χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ii) του Λήμματος 1.3.2 και τη συνθήκη iii) του Θεωρήματος 1.3.3.
9. Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη και $A \subset B$ ανοιχτό, τότε και η τετράδα $(P|_A, G, B, \pi')$, όπου

$$P|_A := \pi^{-1}(A) \text{ και } \pi' = \pi|_{\pi^{-1}(A)},$$

είναι επίσης πρωτεύουσα δέσμη.

3.3 Οι τομές μιας πρωτεύουσας δέσμης

Στη συνέχεια θεωρούμε μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$. Συχνά λέμε και γράφουμε η δέσμη ℓ ή P υπονοώντας ολόκληρη την προηγούμενη τετράδα και εφ' όσον βέβαια δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σε ότι αφορά και τα υπόλοιπα στοιχεία της δέσμης.

Είδαμε στην Πρόταση 3.2.7 ότι η π είναι εμπάπτιση, άρα κατά το Θεώρημα 1.3.3(iii) και τον Ορισμό 1.3.4, η π διαθέτει τοπικές τομές και μάλιστα με δοσμένες αρχικές συνθήκες. Γενικώς τις τομές τις π θα τις λέμε και τομές της δέσμης, όπως τυπικά θα ορίσουμε και πιο κάτω. Η σχετικώς απλή τοπική δομή της δέσμης και οι ιδιότητες της προηγούμενης Παραγράφου 3.2 επιτρέπουν να βρούμε εύκολα τις τομές της δέσμης, με δοσμένες αρχικές συνθήκες, χωρίς προσφυγή στη γενική θεωρία των εμπάπτισεων.

3.3.1 Ορισμός. Μία C^∞ -**(τοπική) τομή** της πρωτεύουσας δέσμης είναι μία C^∞ -απεικόνιση $s : U \rightarrow P$, όπου $U \subset B$ ανοιχτό, τέτοια ώστε $\pi \circ s = id_U$. Δηλαδή το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc}
 B \supset U & \xrightarrow{s} & P \\
 & \searrow id_U & \downarrow \pi \\
 & & U
 \end{array}$$

Διάγραμμα 3.3

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει αμέσως ότι

$$(3.3.1) \quad s(U) \subset \pi^{-1}(U) \quad \text{και} \quad s(x) \in \pi^{-1}(x).$$

Συμβολίζουμε με

$$(3.3.2) \quad \Gamma(U, P)$$

το σύνολο των C^∞ τομών της δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$ με πεδίο ορισμού το $U \subset B$. Αν $U = X$, τότε η s καλείται **ολική τομή**.

Όπως σχολιάσαμε και πριν την Πρόταση 3.2.7, αν θεωρήσουμε όλα τα απλοποιούντα ζεύγη, σύμφωνα με τη συνθήκη του Ορισμού 3.2.1, παίρνουμε μία ανοιχτή κάλυψη της βάσης. Για διευκόλυνση, ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία οικογένεια απλοποιούντων ζευγών

$$(3.3.3) \quad \mathcal{C} = \{(U_i, \Psi_i) : i \in I\},$$

την οποίαν καλούμε **(απλοποιούσα κάλυψη)**.

3.3.2 Ορισμός. Οι **φυσικές τομές** της δέσμης ℓ (ως προς την απλοποιούσα κάλυψη \mathcal{C}) είναι οι απεικονίσεις

$$(3.3.4) \quad s_i : U_i \longrightarrow P \quad \text{με} \quad s_i(x) = \Psi_i(x, e) \quad \forall x \in U_i.$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει αμέσως ότι πραγματικά οι s_i είναι C^∞ -τομές της ℓ , δηλαδή [κατά τον συμβολισμό (3.3.2)] $s_i \in \Gamma(U_i, P)$.

3.3.3 Λήμμα. Αν $s \in \Gamma(U, P)$ και $g \in G$, τότε και $s \cdot g \in \Gamma(U, P)$, όπου

$$(3.3.5) \quad (s \cdot g)(x) := s(x) \cdot g = \delta(s(x), g), \quad \forall x \in U,$$

όπου $\delta : P \times G \rightarrow P$ η δράση της δομικής ομάδας στον ολικό χώρο της δέσμης.

Απόδειξη. Από την (3.3.5) προκύπτει ότι $s \cdot g = \delta \circ (s, c_g)$, όπου c_g η σταθερή απεικόνιση

$$U \longrightarrow G: x \mapsto c_g(x) = g,$$

άρα η $s \cdot g$ είναι C^∞ -απεικόνιση. Από το άλλο μέρος, για κάθε $x \in U$, είναι [βλ. Πρόταση 3.2.11(ii)]

$$\pi((s \cdot g)(x)) = \pi(s(x) \cdot g) = \pi(s(x)) = x,$$

δηλαδή $\pi \circ (s \cdot g) = id_U$, που δείχνει ότι η $s \cdot g$ είναι τομή της P . □

3.3.4 Πρόταση. Έστω τυχόν $p_o \in P$ με $\pi(p_o) = x_o$. Τότε υπάρχει $s \in \Gamma(U, P)$, για κάποιο $U \subset B$ ανοιχτό, με $s(x_o) = p_o$.

Απόδειξη. Έστω $(U_i, \Psi_i) \in \mathcal{C}$ απλοποιούν ζεύγος με $x_o \in U_i$ και $s_i \in \Gamma(U_i, P)$ η αντίστοιχη τοπική τομή της P . Επειδή p_o και $s_i(x_o)$ είναι στοιχεία του ίδιου νήματος $\pi^{-1}(x_o)$ [βλ. σχέσεις (3.3.1)], υπάρχει (μοναδικό)

$$g_o \in G \quad \text{με} \quad p_o = s_i(x_o) \cdot g_o$$

[βλ. επίσης και Πρόταση 3.2.16(ii)]. Συνεπώς, για $U = U_i$, βάσει του Λήμματος 3.3.3, έχουμε ότι

$$s := s_i \cdot g_o \in \Gamma(U, P) \quad \text{και} \quad s(x_o) = p_o. \quad \square$$

Είδαμε πριν ότι κάθε απλοποιούν ζεύγος προσδιορίζει μια (φυσική) τομή s_i και απ' αυτήν (με "πολλαπλασιασμό", δηλαδή μεσω δράσης με στοιχεία της G) παράγονται και άλλες τομές (βλ. Λήμμα 3.3.3 και Άσκηση 4 αυτής της Παραγράφου). Θα δούμε τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή οι τομές ορίζουν απλοποιούντα ζεύγη. Πριν απ' αυτό χρειαζόμαστε το επόμενο βασικό συμπέρασμα, για την ορολογία του οποίου παραπέμπουμε στον Ορισμό 1.4.6.

3.3.5 Λήμμα. Θεωρούμε το νηματικό γινόμενο

$$P \times_B P = \{(p, q) \in P \times P : \pi(p) = \pi(q)\},$$

και ορίζουμε την απεικόνιση

$$k : P \times_B P \longrightarrow G$$

με $k(p, q) \in G$ το μοναδικό [βάσει της Πρότασης 3.2.16 (ii)] στοιχείο του G με την ιδιότητα $q = p \cdot k(p, q)$. Τότε η k είναι C^∞ -απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $(p_o, q_o) \in P \times_B P$ και $x_o := \pi(p_o) = \pi(q_o)$. Αν (U, Φ) είναι ένα απλοποιούν ζεύγος με $x_o \in U$, τότε θεωρούμε τον περιορισμό της k επί του $\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)$, που είναι ανοιχτό υποσύνολο του $P \times_B P$ επειδή Δ_U είναι ανοιχτό υποσύνολο του Δ_B (αφού $\Delta_U = \Delta_B \cap (U \times U)$) και

$$\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U) = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_U) \subset (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_B) = P \times_B P.$$

(Εδώ θυμίζουμε ότι το $P \times_B P$ είναι C^∞ -πολλαπλότητα σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4.7, ή το Θεώρημα A.4 στο Παράρτημα A). Τότε, για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)$, η $q = p \cdot k(p, q)$ συνεπάγεται ότι [βλ. και τη σχέση (3.2.6)]

$$\Phi(q) = \Phi(p \cdot k(p, q)) = \Phi(p) \cdot k(p, q),$$

ή, σύμφωνα με την Άσκηση 2 της Παραγράφου 3.2,

$$(\pi(q), p_2(\Phi(q))) = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) \cdot k(p, q) = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) \cdot k(p, q),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$p_2(\Phi(q)) = p_2(\Phi(p)) \cdot k(p, q),$$

ή (επειδή βρισκόμαστε στο G)

$$(3.3.6) \quad k(p, q) = (p_2(\Phi(p)))^{-1} \cdot p_2(\Phi(q)).$$

Ουσιαστικά η τελευταία αποδεικνύει τη διαφορισμότητα της k στο (p_o, q_o) (ακριβέστερα σε ολόκληρο το $\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)$), και ανάλογα και σε κάθε άλλο σημείο του $P \times_B P$. Πράγματι η (3.3.6) γράφεται τυπικά με τη μορφή

$$k = \gamma \circ ((\alpha \circ p_2 \circ \Phi) \times (p_2 \circ \Phi)) \Big|_{\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)},$$

όπου γ και α είναι οι απεικονίσεις γινόμενο και αντιστροφή της ομάδας G , άρα έχουμε το συμπέρασμα. \square

3.3.6 Πρόταση. Έστω $s \in \Gamma(\bar{U}, P)$ τυχούσα C^∞ -τομή της P , για ένα οποιοδήποτε ανοιχτό $\bar{U} \subset B$. Τότε η s ορίζει ένα απλοποιούν ζεύγος $(\bar{U}, \bar{\Psi})$ ως προς το οποίο η s είναι η αντίστοιχη φυσική τομή.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\Psi}: \bar{U} \times G \longrightarrow \pi^{-1}(\bar{U}) : (x, g) \mapsto \bar{\Psi}(x, g) = s(x) \cdot g, \quad \forall (x, g) \in \bar{U} \times G.$$

Πραγματικά, η $\bar{\Psi}$ παίρνει τιμές στο $\pi^{-1}(\bar{U})$ επειδή

$$\pi(\bar{\Psi}(x, g)) = \pi(s(x) \cdot g) = \pi(s(x)) = x \in \bar{U},$$

και είναι C^∞ επειδή

$$\bar{\Psi}(x, g) = \delta(s(x), g) = (\delta_{\bar{U}} \circ (s \times id_G))(x, g),$$

δηλαδή η $\bar{\Psi}$ είναι σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων. Θυμίζουμε ότι $\delta_{\bar{U}}$ ορίζεται στο Πόρισμα 3.2.4.

Η $\bar{\Psi}$ είναι απεικόνιση 1-1 επειδή

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x, g) = \bar{\Psi}(x', g') &\Leftrightarrow \\ s(x) \cdot g = s(x') \cdot g' &\Leftrightarrow \\ \pi(s(x) \cdot g) = \pi(s(x') \cdot g') & \end{aligned}$$

άρα $x = x'$. Εξάλλου, η ίδια υπόθεση συνεπάγεται ότι

$$s(x) \cdot g = s(x') \cdot g' = s(x) \cdot g',$$

ή, ισοδύναμα,

$$s(x) = (s(x') \cdot g') \cdot g^{-1} = s(x) \cdot (g \cdot g^{-1}),$$

απ' όπου προκύπτει ότι και $g = g'$ (αφού η δράση είναι ελεύθερη κατά την Πρόταση 3.2.16). Επομένως καταλήγουμε στο ότι $(x, g) = (x', g')$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό για το 1-1.

Η $\bar{\Psi}$ είναι απεικόνιση επί: Έστω τυχόν $p \in \pi^{-1}(\bar{U})$. Αναζητούμε ένα ζεύγος $(x, g) \in \bar{U} \times G$ τέτοιο ώστε

$$(3.3.7) \quad p = \bar{\Psi}(x, g) = s(x) \cdot g.$$

Αν υπάρχει τέτοιο (x, g) , θα πρέπει $\pi(p) = x$. Συνεπώς το ζητούμενο x είναι ακριβώς το $\pi(p)$. Απ' το άλλο μέρος, επειδή $p, s(x) \in \pi^{-1}(x)$ και η δράση στα νήματα είναι γνήσια μεταβατική (βλ. Πρόταση 3.2.16), το g είναι το μοναδικό στοιχείο του G που ικανοποιεί την (3.3.7), συνεπώς το g προσδιορίζεται από την

$$(3.3.8) \quad g = k(s(x), p) = k(s(\pi(p)), p).$$

Οι προηγούμενοι συλλογισμοί ουσιαστικά προσδιορίζουν και την $\bar{\Phi} = \bar{\Psi}^{-1}$:

$$\bar{\Phi}(p) = (\pi(p), k(s(\pi(p)), p)).$$

Ελέγχουμε στοιχειωδώς ότι πραγματικά η $\bar{\Phi}$ είναι η αντίστροφη της $\bar{\Psi}$, ενώ η διαφορισμότητα της προκύπτει (βάσει του ορισμού της) από τη σχέση

$$\bar{\Phi} = (\pi, k \circ (s \circ \pi, id_{\pi^{-1}(\bar{U})})),$$

που είναι συνδυασμός C^∞ -απεικονίσεων. Άρα, τελικά, η $\bar{\Psi}$ είναι αμφιδιαφόριση. Επιπλέον, έχει τις ιδιότητες

$$(\pi \circ \bar{\Psi})(x, g) = \pi(s(x) \cdot g) = \pi(s(x)) = x, \quad \forall (x, g) \in \bar{U} \times G,$$

δηλαδή $\pi \circ \bar{\Psi} = p_1|_{\bar{U} \times G} : \bar{U} \times G \rightarrow \bar{U}$, και

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}((x, g) \cdot g') &= \bar{\Psi}(x, g \cdot g') = s(x) \cdot (g \cdot g') \\ &= (s(x) \cdot g) \cdot g' = \bar{\Psi}(x, g) \cdot g', \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η $\bar{\Psi}$ είναι G -ισομεταβλητή. Επομένως το $(\bar{U}, \bar{\Psi})$ είναι απλοποιούν ζεύγος. Τέλος, αν συμβολίσουμε με \bar{s} την φυσική τομή ως προς το $(\bar{U}, \bar{\Psi})$, τότε (βλ. Ορισμό 3.3.2)

$$\bar{s}(x) = \bar{\Psi}(x, e) := s(x) \cdot e = s(x), \quad \forall x \in \bar{U},$$

η οποία αποδεικνύει και τον τελευταίο ισχυρισμό. (Για μιά παραλλαγή της απόδειξης βλ. επίσης και το εδάφιο A.3 του Παραρτήματος A.) \square

Τα προηγούμενα συνοψίζονται στο

3.3.7 Θεώρημα. Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των απλοποιούντων ζευγών της ℓ και του συνόλου των C^∞ τομών της ℓ .

3.3.8 Πορίσμα. *i)* Η τετριμμένηδέσμη $(B \times G, G, B, p_1)$ διαθέτει ολικές τομές.
ii) Αν μία τυχούσα πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ διαθέτει ολική C^∞ -τομή $s \in \Gamma(B, P)$, τότε υπάρχει απλοποιούν ζεύγος της μορφής (B, Ψ) με

$$\Psi : B \times G \xrightarrow{\cong} P.$$

Απόδειξη. Η *i)* είναι προφανής. Για την *ii)* εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.6 □

3.3.9 Παρατήρηση. Η *ii)* του Πορίσματος 3.3.8 αποδεικνύει ότι η ℓ είναι (ολικά) τετριμμένηδέσμη, σύμφωνα με την ορολογία της επόμενης παραγράφου. Θα επανέλθουμε επ' αυτού στα Σχόλια 3.4.9 και στο Θεώρημα 3.4.10.

3.3.10 Ασκήσεις.

1. Να επαληθευτούν οι σχέσεις (3.3.1).
2. Να επαληθευτεί ότι οι φυσικές τομές s_i είναι πράγματι C^∞ -τομές της ℓ .
3. Αν (U_i, Ψ_i) είναι απλοποιούν ζεύγος και s_i η αντίστοιχη φυσική τομή, τότε κάθε άλλη τομή $s \in \Gamma(U_i, P)$ προκύπτει από την s_i και μάλιστα κατά τρόπο μονοσήμαντο.
4. Αν $s \in \Gamma(U, P)$ και $g \in C^\infty(U, P)$, όπου $U \subset B$ ανοιχτό, τότε και η απεικόνιση

$$s \cdot g : U \longrightarrow P \quad \text{με} \quad (s \cdot g)(x) = s(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in U,$$
 ορίζει επίσης ένα στοιχείο του $\Gamma(U, G)$.
5. Αν $s, s' \in \Gamma(U, P)$ και $U \subset B$ ανοιχτό, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση $g \in C^\infty(U, G)$ έτσι ώστε $s' = s \cdot g$.
6. Να αποδειχτεί πλήρως το Θεώρημα 3.3.7 και να συμπληρωθεί η απόδειξη του Πορίσματος 3.3.8.
7. Ποιές είναι οι φυσικές τομές της τετριμμένης δέσμης;
8. Να δείξετε ότι, αν $U \subset B$ είναι ανοιχτό, το $C^\infty(U, G)$ είναι ομάδα, η οποία δρα (από τα δεξιά) επί του $\Gamma(U, P)$. Είναι η προηγούμενη δράση γνήσια μεταβατική;
9. Να δείξετε ότι το απλοποιούν ζεύγος της Πρότασης 3.3.6 είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

3.4 Μορφισμοί πρωτευουσών δεσμών

Ένας μορφισμός μεταξύ πρωτευουσών δεσμών πρέπει (σύμφωνα με την γενική θεωρία κατηγοριών) να περιγράφεται από μια ή περισσότερες απεικονίσεις, που θα αντανakλούν την ιδιαίτερη ιδιότητα των αντικειμένων της κατηγορίας αυτής, δηλαδή των πρωτευουσών δεσμών. Επομένως, ο ακόλουθος ορισμός είναι απολύτως φυσιολογικός.

3.4.1 Ορισμός. Ένας **μορφισμός** μεταξύ των πρωτευουσών δεσμών

$$\ell_1 = (P_1, G_1, B_1, \pi_1) \quad \text{και} \quad \ell_2 = (P_2, G_2, B_2, \pi_2)$$

είναι μια τριάδα (f, φ, h) όπου

$$f: P_1 \longrightarrow P_2 \quad \text{και} \quad h: B_1 \longrightarrow B_2$$

είναι \mathcal{C}^∞ -απεικονίσεις και $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ μορφισμός ομάδων Lie, εις τρόπον ώστε να ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

(ΜΠΔ. 1)
$$\pi_2 \circ f = h \circ \pi_1$$

δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{h} & B_2 \end{array}$$

Διάγραμμα 3.4

είναι μεταθετικό, και

(ΜΠΔ. 2)
$$f(p \cdot g) = f(p) \cdot \varphi(g), \quad \forall (p, g) \in P_1 \times G_1.$$

3.4.2 Παρατηρήσεις. 1) Η (ΜΠΔ. 1) συνεπάγεται ότι η f **διατηρεί τα νήματα** δηλαδή, για οποιοδήποτε $x \in B_1$, ισχύει η σχέση

(3.4.1)
$$f(\pi_1^{-1}(x)) \subseteq \pi_2^{-1}(h(x)).$$

2) Η (ΜΠΔ. 2) σημαίνει ότι η f **διατηρεί τις δράσεις**.

Η απεικόνιση $h : B_1 \rightarrow B_2$ ορίζεται πλήρως από τις f και g , όπως προκύπτει από τα επόμενο:

3.4.3 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $\ell_i = (P_i, G_i, B_i, \pi_i)$, $i = 1, 2$, είναι πρωτεύουσες δέσμες, $f : P_1 \rightarrow P_2$ C^∞ -απεικόνιση και $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ μορφοισμός ομάδων Lie, έτσι ώστε να ισχύει η (ΜΠΔ. 2). Τότε υπάρχει μοναδική C^∞ -απεικόνιση $h : B_1 \rightarrow B_2$ εις τρόπον ώστε η τριάδα (f, φ, h) να είναι μορφοισμός της πρωτεύουσας δέσμης ℓ_1 στην ℓ_2 .

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση h μέσω της σχέσης

$$(3.4.2) \quad h(x) := \pi_2(f(p)), \quad x \in B_1$$

όπου p είναι τυχόν σημείο της P_1 με $\pi_1(p) = x$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι η h είναι καλά ορισμένη. Πραγματικά, αν πάρουμε τυχόν $q \in P_1$ με $\pi_1(q) = x$, τότε, κατά την Πρόταση 3.2.16(ii), θα είναι $q = p \cdot g$ ($g \in G$). Άρα, λόγω της (ΜΠΔ. 2) και του Πορίσματος 3.2.11(ii), έχουμε ότι

$$\pi_2(f(q)) = \pi_2(f(p \cdot g)) = \pi_2(f(p) \cdot \varphi(g)) = \pi_2(f(p)),$$

που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό.

Η διαφορισιμότητα της h ελέγχεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε τυχόν απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) και καλέσουμε s_U την αντίστοιχη φυσική τομή (βλ. Ορισμό 3.3.2), τότε η (3.4.2), μαζί με τα σχόλια για το καλώς ορισμένο της h , οδηγούν στην

$$h(x) = \pi_2(f(s_U(x))), \quad \forall x \in U,$$

δηλαδή $h_U = \pi_2 \circ f \circ s_U$, που σημαίνει ότι η h_U είναι C^∞ -απεικόνιση. Επειδή αυτό συμβαίνει για όλα τα απλοποιούντα ζεύγη και τα πεδία ορισμού τους καλύπτουν ολόκληρη τη βάση B , καταλήγουμε στην ολική διαφορισιμότητα της απεικόνισης h .

Η (3.4.2) τώρα αμέσως συνεπάγεται την (ΜΠΔ. 1), άρα η τριάδα (f, φ, h) είναι πραγματικά μορφοισμός μεταξύ των ℓ_1 και ℓ_2 .

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη C^∞ -απεικόνιση $h' : B_1 \rightarrow B_2$, έτσι ώστε και η τριάδα (f, φ, h') να είναι μορφοισμός της ℓ_1 στην ℓ_2 . Τότε από την (ΜΠΔ. 1), και για της δύο προηγούμενες τριάδες, προκύπτει ότι

$$(3.4.3) \quad h \circ \pi_1 = h' \circ \pi_1.$$

Επομένως, αν $x \in B_1$ είναι τυχόν σημείο, θα υπάρχει $p \in P$ με $\pi(p) = x$ (βλ. Πρόταση 3.2.7) και βάσει της (3.4.3)

$$h(x) = h(\pi_1(p)) = h'(\pi_1(p)) = h'(x).$$

Δηλαδή καταλήγουμε στην $h = h'$, που ολοκληρώνει και την απόδειξη. \square

3.4.4 Πρόρισμα. Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία από το σύνολο των μορφισμών μεταξύ των πρωτευουσών δεσμών ℓ_1 και ℓ_2 επί του συνόλου των ζευγών (f, φ) όπως στο Θεώρημα 3.4.3.

3.4.5 Ορισμός. Ένας μορφισμός (f, φ, h) μεταξύ των ℓ_1 και ℓ_2 λέγεται **ισομορφισμός** αν οι f, h είναι αμφιδιαφορίσεις και η φ είναι ισομορφισμός ομάδων Lie. Επίσης, αν $B_1 = B_2 = B$ και $h = id_B$, ο μορφισμός (f, φ, id_B) , λέγεται **B-μορφισμός**. Αν $G_1 = G_2 = G$ και $\varphi = id_G$, ο (f, id_G, h) λέγεται **G-μορφισμός**. Τέλος αν $B_1 = B_2 = B$, $G_1 = G_2 = G$, $h = id_B$ και $\varphi = id_G$, ο μορφισμός (f, id_G, id_B) λέγεται **G-B-μορφισμός**.

3.4.6 Θεώρημα. Κάθε G-B-μορφισμός (f, id_G, id_B) της $\ell_1 = (P_1, G, B, \pi_1)$ στην $\ell_2 = (P_2, G, B, \pi_2)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.4.5 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι αμφιδιαφορίση. Προς τούτο αποδεικνύουμε πρώτα τα επόμενα συμπεράσματα:

i) Η f είναι απεικόνιση 1-1. Πραγματικά, αν p και q είναι τυχόντα σημεία του P_1 με $f(p) = f(q)$, τότε η (ΜΠΔ. 1) συνεπάγεται ότι

$$\pi_1(p) = \pi_2(f(p)) = \pi_2(f(q)) = \pi_1(q),$$

δηλαδή τα p, q ανήκουν στο ίδιο νήμα. Επειδή η δράση στα νήματα είναι γνήσια μεταβατική (Πρόταση 3.2.16), υπάρχει (μοναδικό) $g \in G$ έτσι ώστε $q = p \cdot g$. Επομένως, η (ΜΠΔ. 2) οδηγεί στην

$$f(p) = f(q) = f(p \cdot g) = f(p) \cdot g,$$

απ' όπου, επειδή η δράση είναι ελεύθερη (Πρόταση 3.2.15), $g = e$. Άρα $p = q$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

ii) Η f είναι επί: Έστω τυχόν $q \in P_2$ με $\pi_2(q) =: x$. Επειδή ισχύει η (3.4.1), για τυχόν $p_o \in \pi_2^{-1}(x)$ είναι $f(p_o), q \in \pi_2^{-1}(x)$. Άρα υπάρχει (μοναδικό) $g \in G$ με

$$q = f(p_o) \cdot g = f(p_o \cdot g).$$

Επομένως, το $p = p_o \cdot g$ είναι σημείο της P_1 με $f(p) = q$, δηλαδή η f είναι επί.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι υπάρχει f^{-1} . Θα δείξουμε ότι είναι C^∞ δείχνοντας ότι είναι C^∞ σε τυχόν $q_o \in P_2$. Αν $\pi_2(q_o) = x_o$, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) της P_1 με $x_o \in U$ και συμβολίζουμε με s_U τη φυσική τομή της P_1 πάνω από το U . Η προηγούμενη μέθοδος απόδειξης του επί της f ουσιαστικά μας επιτρέπει να εκφράσουμε με βολικό τρόπο την $f^{-1}|_{\pi_2^{-1}(U)}$. Πριν απ' αυτό παρατηρούμε ότι η έκφραση

$$f^{-1}(q_o) = p_o \cdot g$$

(που προκύπτει από την κατασκευή του επί της f), όπου $p_o \in \pi_1^{-1}(x_o)$ και $g \in G$ προσδιορίζεται από τη σχέση $q_o = f(p_o) \cdot g$ μπορεί να αντικατασταθεί από την

$$(3.4.4) \quad f^{-1}(q_o) = s_U(x_o) \cdot g'$$

(αφού το p_o είναι αυθαίρετο), όπου τώρα όμως το καινούργιο g' προσδιορίζεται από την

$$(3.4.5) \quad q_o = f(s_U(x_o)) \cdot g'.$$

Εάν λοιπόν συμβολίσουμε με k_2 την απεικόνιση του Λήμματος 3.3.5 για την δέσμη ℓ_2 , οι (3.4.4) και (3.4.5) οδηγούν στην

$$f^{-1}(q_o) = s_U(x_o) \cdot k_2(f(s_U(x_o)), q_o), \quad \text{με } x_o = \pi_2(q_o).$$

Την ίδια διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε και για οποιοδήποτε $q \in \pi_2^{-1}(U)$, οπότε καταλήγουμε στην ανάλογη έκφραση

$$\begin{aligned} f^{-1}(q) &= s_U(\pi_2(q)) \cdot k_2(f(s_U(\pi_2(q))), q) \\ &= \delta_1(s_U(\pi_2(q)), k_2(f(s_U(\pi_2(q))), q)), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(3.4.6) \quad f^{-1}|_{\pi_2^{-1}(U)} = \delta_1 \circ (s_U \circ \pi_2, k_2 \circ (f \circ s_U \circ \pi_2, id_{P_2}))|_{\pi_2^{-1}(U)}$$

όπου $\delta_1 : P_1 \times G \rightarrow P_1$ η δράση του G στην P_1 . Η (3.4.6) είναι C^∞ -απεικόνιση, άρα η f^{-1} είναι C^∞ στο q_o . Παρόμοια αποδεικνύεται η διαφορισμότητα της f^{-1} σε κάθε σημείο της P_2 , οπότε κλείνει η απόδειξη. \square

3.4.7 Παραδείγματα. 1) Η τριάδα (id_P, id_G, id_B) είναι G - B - (ισο) -μορφισμός της (P, G, B, π) στον εαυτόν της.

2) Αν $\ell_i = (P_i, G_i, B_i, \pi_i)$, $i = 1, 2, 3$, είναι πρωτεύουσες δέσμες και

$$(f_i, \varphi_i, h_i) : \ell_i \longrightarrow \ell_{i+1} \quad (i = 1, 2)$$

μορφισμοί πρωτεύουσών δεσμών, τότε η τριάδα

$$(f_2 \circ f_1, \varphi_2 \circ \varphi_1, h_2 \circ h_1)$$

είναι μορφισμός της ℓ_1 στην ℓ_3 .

3) Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη και (U, Ψ) απλοποιούν ζεύγος, τότε η τριάδα (Ψ, id_G, id_U) είναι G - U -μορφισμός της τετριμμένης δέσμης $(U \times G, G, U, p_1)$ στην πρωτεύουσα δέσμη $(\pi^{-1}(U), G, U, \pi|_{\pi^{-1}(U)})$ [βλ. σχετικώς

και τα Παραδείγματα 3.2.9(2) και 3.2.9(3)]. Προφανώς εδώ έχουμε ισομορφισμό με αντίστροφο μορφοισμό των (Φ, id_G, id_U) .

4) Ας υποθέσουμε ότι μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ διαθέτει **ολικό** απλοποιούν ζεύγος (B, Ψ) , δηλαδή η $\Psi: B \times G \xrightarrow{\cong} P$ είναι αμφιδιαφόριση με $\pi \circ \Psi = p_1$ και Ψ είναι G -ισομεταβλητή (όπως, π.χ, στην περίπτωση του Πορίσματος 3.3.8). Τότε η τριάδα (Ψ, id_G, id_B) είναι G - B -(ισο)-μορφοισμός της (ολικής) τετριμμένης δέσμης $(B \times G, G, B, p_1)$ στην $\ell = (P, G, B, \pi)$. Για το αντίστροφο βλ. Άσκηση 7.

3.4.8 Ορισμός. Μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ λέγεται **τετριμμένη** αν είναι G - B -ισόμορφη με την τετριμμένη δέσμη $(B \times G, G, B, p_1)$.

3.4.9 Σχόλια. Η προηγούμενη ορολογία και τα πιο πάνω παραδείγματα ξεκαθαρίζουν πλήρως τώρα την Ορολογία 3.2.6. Ακριβέστερα, οι συνθήκες i) και ii) του Ορισμού 3.2.1 σημαίνουν [όπως δείχνει και το Παράδειγμα 3.4.7(3)] ότι η $(\pi^{-1}(U), G, U, \pi|_{\pi^{-1}(U)})$ είναι τετριμμένη δέσμη, άρα η $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι τοπικά τετριμμένη, δηλαδή στο "τιμήμα" της πάνω από το U του απλοποιούντος ζεύγους. Και παρόμοια για όλα τα πεδία ορισμού των απλοποιούντων ζευγών. Συνεπώς, η βάση B διαθέτει μίαν ανοιχτή κάλυψη, πάνω από τα ανοιχτά σύνολα της οποίας η δέσμη είναι (τοπικά) τετριμμένη.

Αντίθετα, η περίπτωση να είναι μία πρωτεύουσα δέσμη τετριμμένη(ολικά) δεν απαντάται συχνά, παρ' όλο που κάτι τέτοιο θα ήταν πολύ επιθυμητό, αφού στην περίπτωση αυτή θα είχαμε μία πολύ απλή δομή για τη δέσμη (βλ. και Άσκηση 7). Φυσικά μία τέτοια περίπτωση εξασφαλίζει η ύπαρξη ολικών τομών.

Για την πληρότητα (και για την επεξήγηση της Παρατήρησης 3.3.9) συμπληρώνουμε το Πόρισμα 3.3.8 με το επόμενο:

3.4.10 Θεώρημα. *Μια πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι τετριμμένη τότε και μόνον τότε αν διαθέτει C^∞ ολικές τομές.*

Απόδειξη. Αν η δέσμη είναι τετριμμένη, τότε υπάρχει G - B -ισομορφοισμός (f, id_G, id_B) της δέσμης στην τετριμμένη δέσμη $(B \times G, G, B, p_1)$. Επομένως, αν $s_o: B \rightarrow B \times G$ είναι η φυσική τομή της τελευταίας, δηλαδή $s_o := (x, e)$, τότε $f \circ s_o \in \Gamma(B, P)$. [Φυσικά μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλες ολικές τομές (!)]

Αντίστροφα, αν υπάρχει ολική τομή, τότε ορίζεται απλοποιούν ζεύγος (B, Ψ) όπως στο Πόρισμα 3.3.8(ii). Επομένως η τριάδα (Ψ, id_G, id_B) είναι G - B -ισομορφοισμός της τετριμμένης δέσμης επί της $\ell = (P, G, B, \pi)$. \square

3.4.11 Παρατήρηση. Εδώ ο αναγνώστης μπορεί να θυμηθεί ότι ένα παρόμοιο αποτέλεσμα δεν ισχύει για διανυσματικές δέσμες. Όλες οι διανυσματικές δέσμες

διαθέτουν μια ολική τομή, την *μηδενική τομή*, αλλά φυσικά όλες οι δέσμες αυτής της κατηγορίας δεν είναι και απαραίτητα ολικά τετριμμένες. Ένα κλασσικό παράδειγμα μη τετριμμένης διανυσματικής δέσμης είναι η ταινία του Μόβιους.

3.4.12 Ασκήσεις.

1. Αν (f, φ, h) είναι ισομορφισμός πρωτευουσών δεσμών, να επαληθευτεί ότι και $(f^{-1}, \varphi^{-1}, h^{-1})$ είναι (ισο)μορφισμός.
2. Να δοθεί μία άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3 με την εξής διαδικασία: για κάθε απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) της ℓ_1 , με αντίστοιχη φυσική τομή s_U , ορίζουμε την απεικόνιση $h_U := \pi_2 \circ f \circ s_U$. Δείξτε ότι η h κατασκευάζεται ακριβώς από τις h_U .
3. Να επαληθεύσετε τη σχέση (3.4.1).
4. Αν (f, φ, h) είναι μορφισμός πρωτευουσών δεσμών με φ ισομορφισμό ομάδων Lie και h αμφιδιαφόριση, τότε η f είναι αμφιδιαφόριση και η (f, φ, h) ισομορφισμός.
5. Αν (f, φ, id_B) μορφισμός μεταξύ των πρωτευουσών δεσμών $\ell = (P, G, B, \pi)$ και $\ell' = (P', G', B', \pi')$, τότε για κάθε $s \in \Gamma(U, P)$ συνάγεται ότι $f \circ s \in \Gamma(U, P')$, όπου U τυχόν ανοιχτό υποσύνολο του E .
6. Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 5 και την υπόθεση ότι U είναι πεδίο ορισμού απλοποιούντων ζευγών για τις P και P' , να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική $g \in \mathcal{C}^\infty(U, G')$ με την ιδιότητα $f \circ s_U = s'_U \cdot g$, όπου s_U και s'_U οι φυσικές τομές των P και P' υπεράνω του U .
7. Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη, $U \subset B$ ανοιχτό και

$$f : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

απεικόνιση τέτοια ώστε η τριάδα (f, id_G, id_U) να είναι μορφισμός πρωτευουσών δεσμών (ποιών;), τότε το ζεύγος (U, f) είναι απλοποιούν ζεύγος. Γενικότερα, πότε και πώς μπορούμε να πάρουμε ένα **ολικό** απλοποιούν ζεύγος (B, f) ;

8. Έστω (f, id_G, id_B) ένας αυτομορφισμός της $\ell = (P, G, B, \pi)$. Δείξτε ότι στον (f, id_G, id_B) αντιστοιχεί κατα τρόπον αμφιμονοσήμαντο μία \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση $F : P \rightarrow G$, που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} F(p \cdot g) &= g^{-1} \cdot F(p) \cdot g, & \forall (p, g) \in P \times G, \\ f(p) &= p \cdot f(p), & \forall p \in P. \end{aligned}$$

και αντίστροφα. [Ένας τέτοιος αυτομορφισμός λέγεται **μετασχηματισμός βαθμίδας** (gauge transformation) και έχει ιδιαίτερη σημασία για τη σύγχρονη Θεωρητική Φυσική]

9. Αν (f, g, h) είναι μορφισμός μεταξύ των πρωτεύουσών δεσμών $\ell = (P, G, B, \pi)$ και $\ell' = (P', G', B', \pi')$, τότε ισχύει η σχέση

$$\varphi \circ h = h' \circ (f \circ f|_{P \times_B P}).$$

3.5 Η αντίστροφη εικόνα μιάς πρωτεύουσας δέσμης

Όπως και στην περίπτωση των διανυσματικών δεσμών (Παράγραφος 1.4), ξεκινώντας από μια δοσμένη πρωτεύουσα δέσμη με βάση B θα κατασκευάσουμε μια νέα δέσμη με βάση B' , όταν η τελευταία συνδέεται με τη B μέσω μιάς C^∞ -απεικόνισης. Η βασική αυτή κατασκευή ικανοποιεί μιά καθολική ιδιότητα και έχει σημαντικές εφαρμογές.

Θεωρούμε μιά πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ και υποθέτουμε ότι δίνεται μιά C^∞ -απεικόνιση $h : B' \rightarrow B$. Θεωρούμε, επίσης το νηματικό γινόμενο

$$h^*(P) := B' \times_B P := \{(x', p) \in B' \times P : h(x') = \pi(p)\}$$

και τις αντίστοιχες απεικονίσεις (προβολές)

$$\pi^* := p_1|_{h^*(P)} : h^*(P) \longrightarrow B', \quad h^* := p_2|_{h^*(P)} : h^*(P) \longrightarrow P$$

(βλ. Ορισμό 1.4.6). Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4.7, η $h^*(P)$ είναι C^∞ -πολλαπλότητα, και οι π^*, h^* C^∞ -απεικονίσεις.

Επί της $h^*(P)$ ορίζεται η δράση

$$\delta^* : h^*(P) \times G \longrightarrow h^*(P) : ((b', p), g) \mapsto (b', p \cdot g)$$

η οποία είναι C^∞ , αφού

$$\delta^* = (pr_1, \delta \circ (pr_2, pr_3)).$$

3.5.1 Ορισμός. Η τετράδα $h^*(\ell) \equiv \ell^* := (h^*(P), G, B', \pi^*)$ καλείται **αντίστροφη εικόνα** (inverse image) ή **ανάκρουση** (pull-back) της ℓ μέσω της h .

3.5.2 Θεώρημα. *Ισχύουν τα επόμενα:*

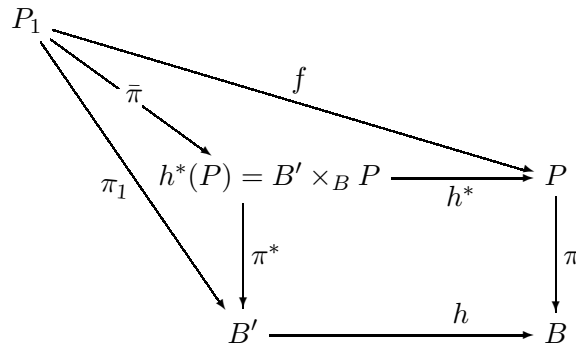
- i) Η ℓ^* είναι πρωτεύουσα δέσμη με νήματα ισόμορφα προς τα νήματα της ℓ .
- ii) Η τριάδα (h^*, id_G, h) είναι G -μορφισμός της ℓ^* στην ℓ .

iii) Η ℓ^* ικανοποιεί την επόμενη **καθολική ιδιότητα** (universal property): Αν $\ell_1 = (P_1, G, B', \pi_1)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη και $(f, id_G, h) : \ell_1 \rightarrow \ell$ μορφισμός πρωτεύουσών δεσμών, τότε υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος G - B' - (ισο)μορφισμός

$$(\bar{\pi}, id_G, id_{B'}) : \ell_1 \longrightarrow \ell^*,$$

τέτοιος ώστε $f = h^* \circ \bar{\pi}$.

Το τελευταίο συμπέρασμα συνοψίζεται στο διάγραμμα:



Διάγραμμα 3.5

Απόδειξη. i) Κατασκευάζουμε τα απλοποιούντα ζεύγη της ℓ^* ως εξής: αν $x' \in B'$ είναι τυχόν σημείο της B' με $h(x') = x$, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος $(U, \Psi) \equiv (U, \Phi)$ της ℓ με $x \in U$. Θέτοντας $V := h^{-1}(U)$, διαπιστώνουμε ότι $\pi^{*-1}(V) = V \times_U \pi^{-1}(U)$, οπότε ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Psi' : V \times G \longrightarrow \pi^{*-1}(V) : (y, g) \mapsto \Psi'(y, g) := (y, \Psi(h(y), g))$$

Η Ψ' είναι \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση επειδή παίρνει τη μορφή

$$\Psi' = (p_1|_{V \times G}, \Psi \circ (h \times id_G)|_{V \times G}).$$

Επιπλέον, όπως ελέγχουμε στοιχειδώς, έχει ως αντίστροφη την \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση

$$\Phi' : \pi^{*-1}(V) \longrightarrow V \times G : \Phi'(y, p) := (y, (p_2 \circ \Phi)(p)), \quad \forall (y, p) \in \pi^{*-1}(V).$$

Συνεπώς η Ψ' είναι αμφιδιαφόριση και ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Ορισμού 3.2.1, δηλαδή είναι G -ισομεταβλητή και $\pi^* \circ \Psi' = p_1|_{V \times G}$ (τα τελευταία αποτελέσματα είναι άμεσα).

Για το τυχόν $x'_o \in B'$, με $h(x'_o) = x_o \in B$, το αντίστοιχο νήμα είναι:

$$\begin{aligned}\pi^{*-1}(x'_o) &= \{(y, p) \in h^*(P) : \pi^*(y, p) = x'_o\} \\ &= \{(x'_o, p) \in B' \times P : h(x'_o) = x_o = \pi(p)\} \\ &= \{x'_o\} \times \pi^{-1}(x_o)\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\pi^{*-1}(x'_o) \cong \pi^{-1}(x_o) = \pi^{-1}(h(x'_o))$, άρα αποδεικνύεται η το πρώτο συμπέρασμα.

ii) Για τυχόν $(y, p) \in h^*(P) = B' \times_B P$ είναι $h(y) = \pi(p)$, άρα

$$(\pi \circ h^*)(y, p) = \pi(p) = h(y) = (h \circ \pi^*)(y, p)$$

δηλαδή $\pi \circ h^* = h \circ \pi^*$. Επίσης,

$$h^*((y, p) \cdot g) = h^*(y, p \cdot g) = p \cdot g = h^*(y, p) \cdot g,$$

δηλαδή η h^* είναι G -ισομεταβλητή, όποτε καταλήγουμε στον Ορισμό 3.4.1 και αποδεικνύεται το δεύτερο συμπέρασμα.

iii) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\pi} : P_1 \longrightarrow h^*(P) = B' \times_B P : p_1 \mapsto \bar{\pi}(p_1) := (\pi_1(p_1), f(p_1))$$

Επομένως, η $\bar{\pi}$ είναι μία C^∞ -απεικόνιση, τέτοια ώστε $f = h^* \circ \bar{\pi}$. Επιπλέον, από τον ίδιο ορισμό, έχδουμε ότι

$$\pi^* \circ \bar{\pi} = \pi_1 \equiv id_{B'} \circ \pi_1$$

και, για κάθε $(p_1, g) \in P_1 \times G$,

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(p_1 \cdot g) &= (\pi_1(p_1 \cdot g), f(p_1 \cdot g)) = (\pi_1(p_1), f(p_1) \cdot g) \\ &= (\pi_1(p_1), f(p_1)) \cdot g = \bar{\pi}(p_1) \cdot g,\end{aligned}$$

δηλαδή διαπιστώνουμε ότι $(\bar{\pi}, id_G, id_{B'})$ είναι πράγματι G - B -ισομορφισμός.

Ας υποθέσουμε τέλος, ότι υπάρχει και μία άλλη απεικόνιση $\tilde{\pi} : P_1 \rightarrow h^*(P)$ με τις ιδιότητες, δηλαδή $f = h^* \circ \tilde{\pi}$ και $(\tilde{\pi}, id_G, id_{B'})$ να είναι μορφισμός, πράγμα που συνεπάγεται ότι $\pi^* \circ \tilde{\pi} = \pi_1$. Επειδή μπορούμε να γράψουμε ότι $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$ και $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$, όπου $\tilde{\pi}_i = p_i|_{h^*(P)} \circ \tilde{\pi}$ και $\bar{\pi}_i = p_i|_{h^*(P)} \circ \bar{\pi}$ ($i = 1, 2$), ο ορισμός των π^* και h^* , σε συνδυασμό με τις υποθέσεις για την $\tilde{\pi}$ (και τις ανάλογες της $\bar{\pi}$) οδηγεί στις σχέσεις

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1 &= p_1|_{h^*(P)} \circ \tilde{\pi} = \pi^* \circ \tilde{\pi} = \pi_1 = \pi^* \circ \bar{\pi} = p_1|_{h^*(P)} \circ \bar{\pi} = \bar{\pi}_1, \\ \tilde{\pi}_2 &= p_2|_{h^*(P)} \circ \tilde{\pi} = h^* \circ \tilde{\pi} = f = h^* \circ \bar{\pi} = p_2|_{h^*(P)} \circ \bar{\pi} = \bar{\pi}_2,\end{aligned}$$

απ' όπου καταλήγουμε στην

$$\tilde{\pi} = (\pi_1, f) = \bar{\pi},$$

με την οποίαν και ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

3.5.3 Παρατηρήσεις. 1) Στο προηγούμενο θεώρημα, η ύπαρξη του G - B' -μορφισμού $(\bar{\pi}, id_G, id_{B'})$ συνεπάγεται ότι οι δέσμες ℓ_1 και $h^*(P)$ είναι ισόμορφες. Δηλαδή, αν δοθούν η δέσμη ℓ και η βάση B' , ο μορφισμός $h : B' \rightarrow B$ καθορίζει μονοσήμαντα, ως προς έναν ισομορφισμό, και την δέσμη $h^*(\ell)$ και τον μορφισμό $(h^*, id_G, h) : h^*(\ell) \rightarrow \ell$.

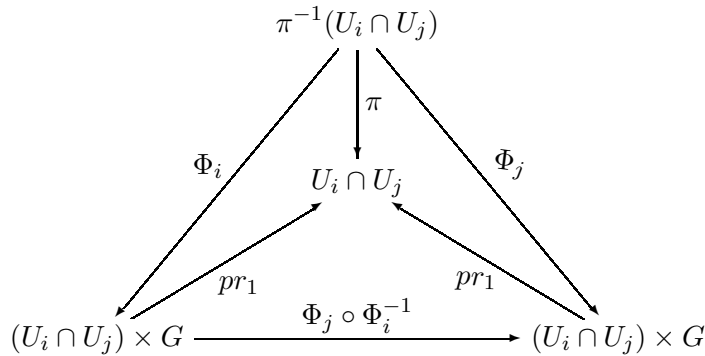
2) Για μία αυτοτελή απόδειξη βασισμένη στην τοπική δομή της πρωτεύουσας δέσμης (και χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος 1.4.7), παραπέμπουμε στο εδάφιο Α.6 του Παραρτήματος Α.

3.6 Οι απεικονίσεις μεταφοράς

Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη και $\mathcal{C} = \{(U_i, \Psi_i) : i \in I\}$ απλοποιούσα κάλυψη αυτής. Θυμίζουμε ότι $\Phi := \Psi_i^{-1}$.

Για $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ορίζεται η απεικόνιση

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times G$$



Διάγραμμα 3.6

Αν $(b, g) \in (U_i \cap U_j) \times G$, θέτουμε $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b', g')$, οπότε, μέσω και του προηγούμενου μεταθετικού διαγράμματος, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} b' &= p_1 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) \\ &= \pi \circ \Phi_i^{-1}(b, g) \\ &= p_1(b, g) = b \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} g' &= p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) \\ &= p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_{ib}^{-1}(g) \\ &= \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(g). \end{aligned}$$

Δηλαδή, καταλήγουμε στη σχέση

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b, \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(g)).$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή οι $\Phi_{jb}, \Phi_{ib}^{-1}$ είναι G -ισομεταβλητές,

$$\Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(g) = (\Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1})(e) \cdot g = (p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, e)) \cdot g.$$

Ορίζουμε τώρα τις απεικονίσεις

$$g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow G : b \mapsto \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(e),$$

για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Οι απεικονίσεις αυτές είναι διαφορίσιμες, αφού

$$g_{ji}(b) = p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} \circ (id_{U_i \cap U_j}, c_e)(b),$$

όπου $c_e(b) = e$, για κάθε $b \in U_i \cap U_j$. Επίσης οι g_{ji} συνδέονται με τις απλοποιούσες απεικονίσεις Φ_i μέσω του τύπου

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b, g_{ji}(b) \cdot g).$$

3.6.1 Ορισμός. Οι παραπάνω απεικονίσεις $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ καλούνται **απεικονίσεις μεταφοράς** (transition functions) της ℓ , ως προς την απλοποιούσα κάλυψη \mathcal{C} .

3.6.2 Πρόταση. Οι απεικονίσεις μεταφοράς αποτελούν **σύγκυκλο**, δηλαδή

$$g_{ki}(b) = g_{kj}(b) \cdot g_{ji}(b),$$

για κάθε $i, j, k \in I$ και $b \in U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Αν $b \in U_i \cap U_j \cap U_k$ τότε

$$\begin{aligned} g_{ki}(b) &= \Phi_{kb} \circ \Phi_{jb}^{-1}(e) = \Phi_{kb} \circ \Phi_{jb}^{-1} \circ \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(e) \\ &= (\Phi_{kb} \circ \Phi_{jb}^{-1})(g_{ji}(b)) = (\Phi_{kb} \circ \Phi_{jb}^{-1})(e) \cdot g_{ji}(b) \\ &= g_{kj}(b) \cdot g_{ji}(b) \end{aligned} \quad \square$$

3.6.3 Πρόρισμα. Οι απεικονίσεις μεταφοράς ικανοποιούν τις σχέσεις:

- i) $g_{ii}(b) = e, \quad \forall b \in U_i \text{ και } i \in I.$
- ii) $g_{ij}(b) = (g_{ji}(b))^{-1}, \quad \forall i, j \in I \text{ και } b \in U_i \cap U_j.$

Θα συνδέσουμε τώρα τις απεικονίσεις μεταφοράς με τις φυσικές τομές της δέσμης πάνω από την ίδια απλοποιούσα κάλυψη \mathcal{C} (βλ. Ορισμό 3.3.2). Θυμίζουμε ότι, για κάθε $i \in I$, η αντίστοιχη φυσική τομή είναι η

$$s_i : U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) : b \mapsto \Phi_i^{-1}(b, e) = \Psi_i(b, e).$$

Αν τώρα $b \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η $s_i(b) = \Phi_i^{-1}(b, e)$ συνεπάγεται ότι

$$\Phi_{jb}(s_i(b)) = \Phi_{jb} \circ \Phi_i^{-1}(b, e) = g_{ji}(b),$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$s_i(b) = \Phi_{jb}^{-1}(g_{ji}(b)) = \Phi_{jb}^{-1}(e) \cdot g_{ji}(b) = s_j(b) \cdot g_{ji}(b).$$

Επομένως, οι φυσικές τομές και οι απεικονίσεις μεταφοράς συνδέονται με τη σχέση

$$s_j(b) = s_i(b) \cdot g_{ij}(b), \quad b \in U_i \cap U_j,$$

για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

3.6.4 Θεώρημα. Έστω B C^∞ -ποληλαπλήτητα, G ομάδα Lie, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του B και $\{g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}_{i, j \in I}$ σύγκυκλος της B ως προς την προηγούμενη κάλυψη, με τιμές στην ομάδα G . Τότε υπάρχει μοναδική, ως προς ισομορφισμό, $\ell = (P, G, B, \pi)$ με απεικονίσεις μεταφοράς τις δοθείσες $\{g_{ji}\}$.

Απόδειξη. Έστω το σύνολο

$$E := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times U_i \times G).$$

Στο E ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(i, b, g) \sim (j, b', g') \Leftrightarrow b = b' \text{ και } g' = g_{ji}(b) \cdot g.$$

Συμβολίζουμε με $P := E / \sim$ τον αντίστοιχο χώρο πηλίκου. Ο E ως διακεκριμένη ένωση τοπολογικών χώρων, είναι τοπολογικός χώρος, άρα το P εφοδιάζεται με την τοπολογία-πηλίκου. Επίσης, συμβολίζουμε με ϱ την κανονική απεικόνιση

$$\varrho : E \longrightarrow P : (i, b, g) \mapsto [(i, b, g)].$$

Θεωρούμε ακόμη και την απεικόνιση (προβολή)

$$\pi : P \longrightarrow B : [(i, b, g)] \mapsto b.$$

Είναι άμεσο ότι η π είναι καλά ορισμένη. Εξάλλου, από τις ιδιότητες της τοπολογίας-πηλίκου, η π είναι συνεχής τότε και μόνον τότε αν η $\pi \circ \varrho$ είναι συνεχής. Η τελευταία όμως έχει τη μορφή $\pi \circ \varrho : E \rightarrow B : (i, b, g) \mapsto b$, που είναι πραγματικά συνεχής. Επομένως, η π είναι συνεχής.

Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G : [(j, b, g)] \mapsto (b, g_{ij}(b) \cdot g),$$

για την οποίαν ισχύουν τα εξής:

Η Φ_i είναι καλά ορισμένη: Πράγματι, αν $[(j, b, g)] = [(k, b', g')]$, τότε $b = b'$ και $g' = g_{kj}(b) \cdot g$, οπότε

$$\begin{aligned} \Phi_i([(j, b, g)]) &= (b, g_{ij}(b) \cdot g) \\ &= (b', g_{ik}(b) \cdot g_{kj}(b) \cdot g) \\ &= (b', g_{ik}(b) \cdot g') \\ &= \Phi_i([(k, b', g')]). \end{aligned}$$

Η Φ_i είναι 1-1 :

$$\begin{aligned} \Phi_i([(j, b', g')]) = \Phi_i([(k, b', g')]) &\Rightarrow \\ (b, g_{ij}(b) \cdot g) = (b', g_{ij}(b') \cdot g') = (b, g_{ij}(b) \cdot g_{ik}(b) \cdot g') &\Rightarrow \\ b = b' \text{ και } g = g_{jk}(b) \cdot g' &\Rightarrow \\ [(j, b, g)] = [(k, b', g')]. \end{aligned}$$

Η Φ_i είναι επί: Πράγματι, για κάθε $(b, g) \in U_i \times G$, ισχύει ότι

$$\Phi_i([(i, b, g)]) = (b, g_{ii}(b) \cdot g) = (b, g).$$

Άρα κάθε $\pi^{-1}(U_i)$ εφοδιάζεται μέσω της Φ_i με δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας, αμφιδιαφορικής προς το $U_i \times G$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Το $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα και της $\pi^{-1}(U_i)$ και της $\pi^{-1}(U_j)$. Για να δείξουμε ότι οι δύο διαφορετικές δομές του $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ συμπίπτουν, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times G : (b, g) \mapsto (b, g_{ji}(b) \cdot g)$$

είναι αμφιδιαφόριση, πράγμα που προφανώς ισχύει. Άρα υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη διαφορική δομή στο P έτσι ώστε η Φ_i να είναι αμφιδιαφόριση, για κάθε $i \in I$ (βλ. σχετικώς το Σχόλιο 3.6.6 στο τέλος της παραγράφου).

Η μεταθετικότητα τώρα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times G \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U_i \end{array}$$

Διάγραμμα 3.7

για κάθε $i \in I$, μας εξασφαλίζει την διαφορισιμότητα της π .

Απ' το άλλο μέρος, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η G δρά διαφορίσιμα επί της P . Πράγματι, η απεικόνιση

$$\delta : P \times G \longrightarrow P : [(i, b, g), g'] \mapsto [(i, b, gg')]$$

είναι καλά ορισμένη, επειδή

$$\begin{aligned} [(i, b, g)] = [(j, b', g')] &\Rightarrow b = b' \text{ και } g' = g_{ji}(b) \cdot g \\ &\Rightarrow [(i, b, gg'')] = [(j, b', g'g'')], \end{aligned}$$

για κάθε $g'' \in G$. Επίσης ορίζει μία δράση (άμεση απόδειξη) και, τέλος, είναι διαφορίσιμη, αφού πάνω από ένα $\pi^{-1}(U_i)$ παίρνει τη μορφή

$$\delta = \Phi_i^{-1} \circ \delta_i \circ (\Phi_i \times id_G),$$

όπου $\delta_i : U_i \times G \rightarrow U_i$ η φυσιολογική δράση, δηλαδή η δ είναι σύνθεση διαφορισμών.

Ακόμη, κάθε Φ_i είναι G -ισομεταβλητή:

$$\begin{aligned} \Phi_i([(j, b, g)]g') &= \Phi_i([(j, b, gg')]) = (b, g_{ij}(b)gg') \\ &= (b, g_{ij}(b)g) \cdot g' = \Phi_i([(j, b, g)]) \cdot g'. \end{aligned}$$

Αποδείχτηκε λοιπόν ότι η $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη με απλοποιούντα ζεύγη τα (U_i, Φ_i) , $i \in I$.

Για τις απεικονίσεις μεταφοράς G_{ji} αυτής της δέσμης διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} G_{ji}(b) &= \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(e) = p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, e) \\ &= p_2 \circ \Phi_j([(i, b, e)]) = p_2(b, g_{ji}(b) \cdot e) = g_{ji}(b). \end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα ότι η $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι μοναδική ως προς ισομορφισμό. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη με απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \Psi_i)\}_{i \in I}$ και απεικονίσεις μεταφοράς τις g_{ij} . Τότε, για κάθε $i \in I$, όπως και στο επόμενο διαγράμμα,

$$\begin{array}{ccc} \pi'^{-1}(U_i) & \overset{f_i}{\dashrightarrow} & \pi^{-1}(U_i) \\ & \searrow \Phi'_i & \downarrow \Phi_i \\ & & U_i \times G \end{array}$$

Διάγραμμα 3.8

ορίζουμε την διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f_i := \Phi_i^{-1} \circ \Phi'_i : \pi'^{-1}(U_i) \longrightarrow \pi^{-1}(U_i).$$

Παρατηρούμε ότι, αν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε

$$(3.6.1) \quad f_i|_{\pi'^{-1}(U_i \cap U_j)} = f_j|_{\pi'^{-1}(U_i \cap U_j)}.$$

Πράγματι, η (3.6.1) ισοδυναμεί με την

$$(3.6.2) \quad \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}|_{(U_i \cap U_j) \times G} = \Phi'_j \circ \Phi'_i^{-1}|_{(U_i \cap U_j) \times G}.$$

Όμως, για κάθε $(b, g) \in (U_i \cap U_j) \times G$ είναι

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b, g_{ji}(b) \cdot g)$$

και ανάλογα

$$\Phi'_j \circ \Phi'_i^{-1}(b, g) = (b, g_{ji}(b) \cdot g)$$

(βλ. Ορισμό των απεικονίσεων μεταφοράς), από τις οποίες προκύπτει η (3.6.2).

Άρα ορίζεται μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f' : P' \longrightarrow P$$

θέτοντας

$$f|_{\pi'^{-1}(U_i)} := f_i, \quad \forall i \in I.$$

Θα δείξουμε ότι η τριάδα (f, id_G, id_B) ορίζει έναν G - B -(ισο)μορφισμό της μορφής

$$(P', G, B, \pi') \longrightarrow (P, G, B, \pi).$$

Για τον σκοπό αυτό ελέγχουμε ότι το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{f} & P \\ & \searrow \pi' & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

Διάγραμμα 3.9

είναι μεταθετικό, αφού για κάθε $i \in I$, τα τρίγωνα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccccc} \pi'^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi'_i} & U_i \times G & \xrightarrow{\Phi_i^{-1}} & \pi'^{-1}(U_i) \\ & \searrow \pi' & \downarrow p_1 & \swarrow \pi & \\ & & U_i & & \end{array}$$

Διάγραμμα 3.10

είναι μεταθετικά.

Τέλος, για οποιαδήποτε $p' \in P'$ και $g \in G$, θα υπάρχει κάποιο $i \in I$ έτσι ώστε $\pi'(p'g) = \pi'(p') \in U_i$, οπότε η G -ισομεταβλητότητα των Φ_i^{-1} και Ψ_i οδηγεί στην

$$f(p'g) = (\Phi_i^{-1} \circ \Phi_i)(p'g) = (\Phi_i^{-1} \circ \Psi_i)(p') \cdot g = f(p) \cdot g.$$

Επομένως οι (P', G, B, π') και (P, G, B, π) είναι ισόμορφες κύριες δέσμες, και η απόδειξη είναι τώρα πλήρης. \square

3.6.5 Παράδειγμα. Η δέσμη των πλαισίων μιας πολλαπλότητας.

Θεωρούμε την διαφορική πολλαπλότητα $M \equiv (M, \mathcal{A})$. Για κάθε $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} g_{ji} : U_i \cap U_j &\longrightarrow G := GL(m, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)). \end{aligned}$$

Κάθε g_{ji} είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση των διαφορισίμων $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ και φ_i . Επίσης, οι απεικονίσεις g_{ji} αποτελούν σύγκυκλο. Πράγματι, αν $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$,

τότε

$$\begin{aligned}
 g_{ki}(x) &= D(\varphi_k \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) \\
 &= D(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) \\
 &= D(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(x)) \circ D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) \\
 &= g_{kj}(x) \circ g_{ji}(x),
 \end{aligned}$$

όπου βέβαια η σύνθεση είναι η πράξη της ομάδας $\text{Lie } G = GL(m, \mathbb{R})$.

Συνεπώς, βάσει του Θεωρήματος 3.6.4, υπάρχει μία μοναδική πρωτεύουσα δέσμη $(P, GL(m, \mathbb{R}), M, \pi)$ με απεικονίσεις μεταφοράς τις g_{ji} . Η δέσμη αυτή λέγεται **δέσμη των πλαισίων** (frame bundle) της πολλαπλότητας M .

3.6.6 Σχόλιο. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6.4 δείξαμε ότι κάθε $\pi^{-1}(U_i)$ διαθέτει δομή πολλαπλότητας και πιο κάτω ότι το $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ ως ανοιχτή υποπολλαπλότητα της $\pi^{-1}(U_i)$ έχει την ίδια δομή με αυτήν της ανοιχτής υποπολλαπλότητας της $\pi^{-1}(U_j)$. Επομένως ισχύουν οι συνθήκες του παρακάτω Λήμματος της Συγκόλλησης, οπότε το

$$P = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

εφοδιάζεται με τη δομή C^∞ -πολλαπλότητας

3.6.7 Λήμμα (της Συγκόλλησης). Έστω X τυχόν σύνολο με

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

όπου $X_i \subset X$ με τις εξής ιδιότητες:

i) Κάθε X_i είναι C^∞ -πολλαπλότητα.

ii) $\forall i, j \in I$, το $X_i \cap X_j$ είναι ανοιχτό υποσύνολο των X_i και X_j .

iii) Η διαφορική δομή του $X_i \cap X_j$, ως ανοιχτής υποπολλαπλότητας της X_i , συμπίπτει με τη διαφορική δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας της X_j .

Τότε το X είναι C^∞ -πολλαπλότητα και κάθε X_i είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του X .

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο Παράρτημα Α.

3.6.8 Βασική άσκηση. Έστω (M, \mathcal{A}) διαφορική πολλαπλότητα. Για κάθε $x \in M$ θεωρούμε το σύνολο B_x των βάσεων του εφαπτόμενου χώρου $T_x M$ και την διακεκομμένη ένωσή τους

$$B := \bigcup_{x \in M} B_x.$$

Θεωρούμε τη φυσική προβολή

$$\hat{\pi} : B \longrightarrow M : \{v_1, \dots, v_m\} \longmapsto x := \pi(v_1) = \dots = \pi(v_m),$$

και, για κάθε χάρτη $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$, ορίζουμε το ζεύγος $(\hat{\pi}^{-1}(U_i), \hat{\Phi}_i)$, με

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_i : \hat{\pi}^{-1}(U_i) &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \times GL(m, \mathbb{R}) : \\ \{v_1, \dots, v_n\} &\longmapsto (\varphi_i(\pi(v_1)), (\lambda_{kj})), \end{aligned}$$

όπου (λ_{kj}) είναι ο αντιστρεπτός πίνακας, ο οποίος προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\bar{\varphi}_i(v_k) = \sum_{j=1}^m \lambda_{kj} e_j.$$

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς και υποθέσεις, να αποδειχθούν τα εξής:

- i) Κάθε ζεύγος $(\hat{\pi}^{-1}(U_i), \hat{\Phi}_i)$ είναι χάρτης του B .
- ii) Αν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, οι χάρτες

$$(\hat{\pi}^{-1}(U_i), \hat{\Phi}_i) \quad \text{και} \quad (\hat{\pi}^{-1}(U_j), \hat{\Phi}_j)$$

είναι διαφορίσιμα συμβίβαστοι.

- iii) Αν \mathcal{B} είναι ο μέγιστος άτλαντας που αντιστοιχεί στο B , τότε η απεικόνιση $\hat{\pi} : (B, \mathcal{B}) \rightarrow (M, \mathcal{A})$ είναι C^∞ .
- iv) Η ομάδα Lie $GL(m, \mathbb{R})$ δρα διαφορίσιμα επί της B .
- v) Η τετράδα $(B, GL(m, \mathbb{R}), M, \hat{\pi})$ είναι πρωτεύουσα δέσμη με απλοποιούσα κάλυψη την

$$\{(\hat{\pi}^{-1}(U_i), (\varphi_i^{-1} \times id_{GL(m, \mathbb{R})}) \circ \hat{\Phi}_i) \mid (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}\}.$$

- vi) Οι απεικονίσεις μεταφοράς G_{ji} της προηγούμενης δέσμης είναι οι

$$G_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(m, \mathbb{R}) : x \mapsto D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)).$$

Συγκρίνετε τις G_{ji} με τις g_{ji} του Παραδείγματος 3.6.5. Τι συμπέρασμα προκύπτει από αυτή τη σύγκριση;

Συνοχές σε Πρωτεύουσες Δέσμες

To the uninitiated, it would seem that the use of fiber bundles and connections to describe the basic forces of nature is a half-baked scheme devised by some clique of mathematicians bent on producing an application for their work. However, physicists themselves found these notions forced upon them by their own perception of nature.

D. BLEECKER [6, p. xiii]

Το κεφάλαιο αυτό, όπως δηλώνει και ο τίτλος του, είναι αφιερωμένο στις συνοχές σε πρωτεύουσες δέσμες. Οι συνοχές αυτές οφείλονται στον Ch. Ehresmann και αποτελούν γενίκευση της έννοιας της (γραμμικής) συνοχής σε μία διαφορική πολλαπλότητα ή, γενικότερα, σε μία διανυσματική δέσμη. Η τελευταία περίπτω-

ση εξετάζεται στο Κεφάλαιο 6. Οι συνοχές σε πρωτεύουσες δέσμες είναι θεμελιώδεις για τη μελέτη της Θεωρίας Βαθμίδος (Gauge theory), η οποία —από την άποψη της Φυσικής— οδηγεί στη Θεωρία Yang-Mills, με στόχο τη Θεωρία του Ενοποιημένου Πεδίου. Εδώ περιοριζόμαστε στις βασικές ιδιότητες της συνοχής, σε μερικούς ισοδύναμους ορισμούς και την έννοια της παράλληλης μετατόπισης. Άλλα σημαντικά θέματα, όπως η μορφή καμπυλότητας, η σύνδεση γραμμικών συνοχών και συνοχών σε πρωτεύουσες δέσμες, το Θεώρημα της Ολονομίας και η Θεωρία Chern-Weil θα συμπληρωθούν σε μελλοντικό στάδιο.

4.1 Βασικοί ορισμοί

4.1.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη. Για ένα σταθερό $g \in G$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$R_g: P \longrightarrow P : p \mapsto R_g(p) := pg.$$

Η R_g καλείται **δεξιά μεταφορά** ή **μετατόπιση** της P (κατά g).

Η R_g είναι αμφιδιαφόριση. Πράγματι, αν δ είναι η (δεξιά) δράση της G επί της P , η R_g είναι ακριβώς η μερική απεικόνιση δ_g , η οποία είναι 1-1, επί και C^∞ . Ελέγχουμε αμέσως ότι η αντίστροφη της R_g είναι η $R_{g^{-1}}$, που είναι επίσης απεικονίσεις C^∞ .

4.1.2 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη και $p \in P$ ένα σταθερό σημείο. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$(4.1.1) \quad \bar{p}: G \longrightarrow \pi^{-1}(b) : g \mapsto \bar{p}(g) := pg,$$

όπου $b := \pi(p)$.

Επειδή $\bar{p} = \delta_p$, διαπιστώνουμε ότι η προηγούμενη απεικόνιση 1-1, επί (άρα έχει αντίστροφη) και διαφορίσιμη. Για την διαφορισιμότητα της αντίστροφης, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) με $b \in U$. Αν $q \in \pi^{-1}(b)$, ορίζουμε το στοιχείο

$$g := (p_2 \circ \Phi(p))^{-1} \cdot (p_2 \circ \Phi(q)) \in G.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \Phi(pg) &= \Phi(p) \cdot (p_2 \circ \Phi(p))^{-1} \cdot (p_2 \circ \Phi(q)) \\ &= (b, p \circ \Phi(q)) = \Phi(q), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $pg = q$ και $g = \bar{p}^{-1}(q)$. Επομένως,

$$\bar{p}^{-1}(q) = (p_2 \circ \Phi(p))^{-1} \cdot (p_2 \circ \Phi(q)),$$

που είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

4.1.3 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη και $X \in \mathfrak{L}(G)$ ένα δεδομένο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο του G . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$(4.1.2) \quad X^* : P \longrightarrow TP : p \mapsto X^*(p) := T_e \bar{p}(X_e).$$

Το X^* καλείται **πεδίο Killing** ή **θεμελιώδες διανυσματικό πεδίο** (που αντιστοιχεί στο X μέσω της δράσης δ).

Σχετικώς με την προηγούμενη ορολογία παραπέμπουμε στο εδάφιο που προηγείται της Παρατήρησης 3.1.7 καθώς και τα παρακάτω σχόλια.

Το X^* είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της P : Πρώτα βλέπουμε ότι, για κάθε $p \in P$ με $\pi(p) = b$, είναι

$$T_e \bar{p}(X_e) \in T_{\bar{p}(e)}(\pi^{-1}(b)) = T_p(\pi^{-1}(b)) \leq T_p P,$$

δηλαδή το X^* είναι διανυσματικό πεδίο του P .

Για τη διαφορισιμότητα του X^* παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} X^*(p) &= T_e \bar{p}(X_e) = T_e \delta_p(X_e) + T_p \delta_e(O_p) \\ &= T_{(p,e)} \delta(O_p, X_e) = T \delta \circ (\Omega, c)(p), \end{aligned}$$

όπου

$$\Omega : P \rightarrow TP : p \mapsto O_p$$

είναι το μηδενικό διανυσματικό πεδίο του P και c η σταθερή απεικόνιση

$$c : P \longrightarrow T_e G : p \mapsto X_e.$$

Άρα το X^* είναι \mathcal{C}^∞ ως σύνθεση \mathcal{C}^∞ -απεικονίσεων.

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{X}(P) : X \mapsto X^*$$

είναι μονομορφισμός αλγεβρών Lie.

Πριν προχωρήσουμε, να υπενθυμίσουμε ότι η άλγεβρα Lie $\mathcal{L}(G)$ των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων μιάς ομάδας Lie G ταυτίζεται με τον εφαιπτόμενο χώρο $T_e G$ (e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας) μέσω του γραμμικού ισομορφισμού

$$\mathcal{L}(G) \ni X \xrightarrow{\cong} X_e \in T_e G.$$

Η προηγούμενη ισομορφία εφοδιάζει τον $T_e G$ με τη δομή άλγεβρας Lie (οπότε και ο παραπάνω ισομορφισμός είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie). Την τελευταία

άλγεβρα Lie συμβολίζουμε με \mathcal{G} . Επομένως έχουμε τις ταυτίσεις (μέσω ισομορφισμών)

$$(4.1.3) \quad \mathcal{L}(G) \equiv T_e G \equiv \mathcal{G}.$$

Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη. Επειδή η π είναι εμβάπτιση, για κάθε $b \in B$ το αντίστοιχο νήμα $\pi^{-1}(b)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της P και (βλ. Θεώρημα 1.3.10 και Πρόσιμα 1.3.11)

$$T_p(\pi^{-1}(b)) = \ker(T_p\pi), \quad \forall p \in \pi^{-1}(b).$$

4.1.4 Ορισμός. Ο χώρος $T_p(\pi^{-1}(b))$ καλείται **κάθετο υπόχωρος** του $T_p P$ και συμβολίζεται ιδιαίτερος με $V_p P$. Άρα

$$V_p P := T_p(\pi^{-1}(b)) = \ker(T_p\pi).$$

Από τους Ορισμούς 4.1.3. και 4.1.4 προκύπτει ότι, για κάθε $X \in \mathfrak{L}(G)$ και για κάθε $p \in P$, το $X^*(p)$ είναι **κάθετο διάνυσμα**, δηλαδή

$$X^*(p) \in V_p P.$$

4.1.5 Ορισμός. Έστω G ομάδα Lie. Για ένα $g \in G$ ορίζουμε τον αντίστοιχο **εσωτερικό αυτομορφισμό του G**

$$I_g : G \longrightarrow G : a \mapsto I_g(a) := gag^{-1}.$$

Επειδή, όπως διαπιστώνουμε αμέσως,

$$I_g = r_{g^{-1}} \circ \ell_g = \ell_g \circ r_{g^{-1}},$$

όπου r_g και ℓ_g είναι αντιστοίχως η δεξιά και αριστερή μετατόπιση (μεταφορά) της ομάδας G κατά g , δηλαδή

$$r_g : G \longrightarrow G : a \mapsto ag, \quad \ell_g : G \longrightarrow G : a \mapsto ga,$$

έχουμε ότι η I_g είναι αμφιδιαφόριση.

Ορίζουμε επίσης την απεικόνιση.

$$Ad g := T_e I_g : T_e G \longrightarrow T_e G.$$

Προφανώς η $Ad g$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, οπότε ορίζεται και η απεικόνιση

$$Ad : G \longrightarrow Aut(T_e G) \equiv Aut(\mathcal{G}) : g \mapsto Ad g.$$

Η Ad λέγεται **συζυγής παράσταση της G** και είναι μορφισμός ομάδων Lie. Ιδιαίτερος, παρατηρούμε ότι, αν $n = \dim G$, τότε $Aut(T_e G) \cong GL(n, \mathbb{R})$.

Υπενθυμίζοντας την ταύτιση (4.1.3) έχουμε τώρα και τις επόμενες χρήσιμες έννοιες.

4.1.6 Ορισμός. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και G ομάδα Lie με άλγεβρα Lie \mathcal{G} . Μια **διαφορική 1-μορφή επί της M με τιμές στην \mathcal{G}** είναι μια τομή της δέσμης των γραμμικών απεικονίσεων $L(TM, \mathcal{G})$ από την δέσμη TM στην τετριμμένη δέσμη $M \times \mathcal{G}$. Δηλαδή

$$\omega : M \longrightarrow L(TM, \mathcal{G}) \quad \text{με} \quad \bar{\pi} \circ \omega = id_X,$$

αν $\bar{\pi}$ είναι η προβολή της $L(TM, \mathcal{G})$. Αναλυτικότερα, για κάθε $x \in M$, $\omega(x) := \omega_x$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $\omega_x : T_x M \rightarrow \mathcal{G}$. Προφανώς, η δέσμη $L(TM, \mathcal{G})$ αποτελεί γενίκευση του Παραδείγματος (κατασκευής της δέσμης γραμμικών μορφών) 2.4.1 για $E = TM$.

Γενικότερα, μια **διαφορική k -μορφή επί της M με τιμές στην \mathcal{G}** ($k \in \mathbb{N}$) είναι μια τομή της δέσμης των k -γραμμικών απεικονίσεων από την δέσμη TM στη δέσμη $M \times \mathcal{G}$ (βλ. την ανάλογη κατασκευή στο Παράδειγμα 2.3.2), έτσι ώστε κάθε

$$\omega_x : T_x M \times \cdots \times T_x M \longrightarrow \mathcal{G}$$

να είναι αντισυμμετρική k -γραμμική απεικόνιση. Συμβολικά γράφουμε ότι $\omega \in \Lambda^k(M, \mathcal{G})$.

Μπορεί να δείξει κανείς ότι μια $\omega \in \Lambda^k(M, \mathcal{G})$ είναι C^∞ τότε και μόνον τότε αν, για κάθε $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, η απεικόνιση

$$(4.1.4) \quad \omega(X_1, \dots, X_k) : M \longrightarrow \mathcal{G} : x \mapsto \omega_x(X_1(x), \dots, X_k(x))$$

είναι διαφορίσιμη (C^∞).

4.1.7 Ορισμός. Θεωρούμε δύο διαφορικές 1-μορφές α, β επί της πολλαπλότητας M με τιμές στην άλγεβρα Lie \mathcal{G} μιας ομάδας Lie G , δηλαδή $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M, \mathcal{G})$. Ονομάζουμε **εξωτερικό γινόμενο** των α, β τη διαφορική 2-μορφή $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2(M, \mathcal{G})$, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$(4.1.5) \quad (\alpha \wedge \beta)_x(u, v) := [\alpha_x(u), \beta_x(v)] - [\alpha_x(v), \beta_x(u)],$$

για κάθε $u, v \in T_x M$.

Επίσης, αν $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathcal{G})$, το **εξωτερικό διαφορικό** της α είναι η διαφορική 2-μορφή $d\alpha \in \Lambda^2(M, \mathcal{G})$, που ορίζεται από τη σχέση

$$(4.1.6) \quad (d\alpha)(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]),$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Αποδεικνύεται ότι η dx είναι καλά ορισμένη διαφορική 2-μορφή, γιατί η τιμή της σε ένα σημείο $x \in M$, δηλαδή η διγραμμική αντισυμμετρική απεικόνιση $(d\alpha)_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathcal{G}$ εξαρτάται μόνο από την τιμή των X, Y στο x , δηλαδή από τα διανύσματα X_x και Y_x .

Για την πληρότητα, ας θυμήσουμε εδώ τι σημαίνει μια έκφραση της μορφής $X(\alpha(Y))$. Σύμφωνα με την (4.1.4) και τον ορισμό μιάς συνάρτησης της μορφής $X(f)$, η παραπάνω έκφραση αποτελεί μία διαφορίσιμη απεικόνιση από την M στην \mathcal{G} , με

$$(X(\alpha(Y)))(x) = X_x((\alpha(Y))(x)) = X_x(\alpha_x(Y_x)),$$

για κάθε $x \in M$.

4.1.8 Ορισμός. Έστω $f: M \rightarrow N$ μία C^∞ -απεικόνιση και μια διαφορική 1-μορφή $\omega \in \Lambda^1(N, \mathcal{G})$. Ονομάζουμε **αντίστροφη εικόνα** (pull-back, image inverse) της ω μέσω της f τη διαφορική 1-μορφή $f^* \in \Lambda^1(M, \mathcal{G})$, που δίνεται από την σχέση

$$(f^*\omega)_x(u) := \omega_{f(x)}(T_x f(u)),$$

για κάθε $x \in M$ και $u \in T_x M$. Ανάλογα ισχύουν και για k -μορφές.

4.2 Συνοχές

4.2.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη. Μια **συνοχή** (connection - connexion) είναι μία C^∞ -διαφορική 1-μορφή επί της P με τιμές στην άλγεβρα Lie \mathcal{G} της ομάδας Lie G , δηλαδή $\omega \in \Lambda^1(P, \mathcal{G})$, η οποία ικανοποιεί και της επόμενες δύο συνθήκες:

$$(\omega. 1) \quad \omega(X^*) = X, \quad \forall X \in \mathcal{L}(G),$$

$$(\omega. 2) \quad R_g^* \omega = (Ad g^{-1})\omega, \quad \forall g \in G.$$

Η πρώτη σχέση σημαίνει ότι

$$\omega_p(X_p^*) = X = (\text{σταθερά}), \quad \forall p \in P,$$

ένώ η δεύτερη δίνει ότι

$$(R_g^* \omega)_p(u) = (Ad g^{-1})(\omega_p(u)), \quad \forall p \in P, g \in G, u \in T_p P$$

Η ω λέγεται επίσης και **μορφή συνοχής** (connection form). Ο λόγος της διπλής (ισοδύναμης) ορολογίας θα εξηγηθεί πιό κάτω (βλ. Παρατήρηση 4.2.8).

Στη συνέχεια θα θεωρούμε μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$, την οποίαν θα συμβολίζουμε (για ευκολία και εφ' όσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης) απλώς με ℓ .

4.2.2 Ορισμός. Έστω ω μια συνοχή επί της ℓ . Για κάθε $p \in P$ ονομάζουμε **οριζόντιο υπόχωρο** του $T_p P$ τον

$$H_p P := \ker \omega_p \leq T_p P.$$

4.2.3 Πρόταση. Έστω ℓ πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με συνοχή ω . Τότε για κάθε $p \in P$, ισχύει η σχέση

$$T_p P = H_p P \oplus V_p P$$

Απόδειξη. Οι $H_p P$ και $V_p P$ είναι εξ ορισμού υπόχωροι του $T_p P$. Έστω τώρα ότι υπάρχει $u \in H_p P \cap V_p P$. Τότε

$$\omega_p(u) = 0 \quad \text{και} \quad u \in V_p = \ker T_p \pi = T_p \pi^{-1}(b)$$

(βλ. Ορισμό 4.1.4). Εξ άλλου, αφού η απεικόνιση $\bar{p} : G \rightarrow \pi^{-1}(b)$ είναι αμφιδιαφόριση (βλ. Ορισμό 4.1.2 και τα σχόλιά του), το αντίστοιχο διαφορικό $T_e \bar{p} : T_e G \rightarrow T_p \pi^{-1}(b)$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, άρα

$$\exists! v \in T_e G \equiv \mathcal{G} \quad \text{με} \quad T_e \bar{p}(v) = u.$$

Αν $X \in \mathcal{L}(G)$ είναι το μονοσήμαντα ορισμένο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της G με $X_e = v$, λόγω της $(\omega, 1)$ έχουμε ότι

$$\omega_p(X_p^*) = \omega_p(T_e \bar{p}(v)) = \omega_p(u) = 0,$$

επομένως

$$X_e = v = 0 \quad \text{και} \quad u = T_e \bar{p}(v) = 0,$$

που σημαίνει ότι $H_p P \cap V_p P = \emptyset$.

Ας πάρουμε τώρα τυχόν $u \in T_p P$ και ας θέσουμε $\omega_p(u) = X \in \mathcal{L}(G) \equiv \mathcal{G}$. Λόγω της $(\omega, 1)$ θα έχουμε ότι

$$\omega_p(X_p^*) = X = \omega_p(u),$$

οπότε $u - X_p^* \in \ker \omega_p = H_p P$. Όμως $X_p^* \in V_p P$ (βλ. τα σχόλια μετά τον Ορισμό 4.1.4). Άρα η ισότητα

$$u = X_p^* + (u - X_p^*)$$

δίνει τη ζητούμενη ανάλυση του u , οπότε $T_p P \subseteq H_p P \oplus V_p P$, με την οποίαν κλείνει η απόδειξη. \square

4.2.4 Πόρισμα. Με τις υποθέσεις της Πρότασης 4.2.3, κάθε $u \in TP$ δέχεται μια μονοσήμαντα ορισμένη ανάλυση

$$u = u^h + u^v,$$

όπου $u^h \in H_pP$ και $u^v \in V_pP$ είναι αντιστοίχως η οριζόντια και κάθετη συνιστώσα του u . Ανάλογα, κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{X}(P)$ έχει τη μονοσήμαντα ορισμένη ανάλυση

$$X = X^h + X^v,$$

όπου X^h, X^v είναι τα διανυσματικά πεδία του P με $X^h(p) = X_p^h \in H_pP$ και $X^v(p) = X_p^v \in V_pP$, για κάθε $p \in P$.

Στην Πρόταση 4.2.7 θα δείξουμε ότι τα X^h, X^v είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία.

4.2.5 Πόρισμα. Με τις ίδιες υποθέσεις, η απεικόνιση

$$T_p\pi|_{H_pP} : H_pP \longrightarrow T_p\pi^{-1}(b)$$

είναι ισομορφισμός, για κάθε $b \in B$ και $p \in \pi^{-1}(b)$.

4.2.6 Πρόταση. Οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους οριζόντιους υποχώρους της συνοχής ω , δηλαδή

$$T_p R_g (H_pP) = H_{pg} P,$$

για κάθε $p \in P$ και $g \in G$.

Απόδειξη. Έστω $u \in H_pP$, οπότε $\omega_p(u) = 0$. Για να δείξουμε ότι $T_p R_g(u) \in H_{pg}P$, αρκεί να δείξουμε ότι $\omega_{pg}(T_p R_g(u)) = 0$. Πράγματι,

$$\omega_{pg}(T_p R_g(u)) = (R_g^* \omega)_p(u) = (Ad g^{-1})(\omega_p(u)) = (Ad g^{-1})(0) = 0,$$

από την οποίαν προκύπτει η

$$(4.2.1) \quad T_p R_g (H_pP) \subset H_{pg} P.$$

Βάσει της τελευταίας έχουμε και την $T_{pg} R_{g^{-1}} (H_{pg} P) \subset H_p P$, που ισοδυναμεί με την

$$(4.2.2) \quad H_{pg} P \subset (T_{pg} R_{g^{-1}})^{-1}(H_p P) = T_p R_g (H_p P).$$

Οι σχέσεις (4.2.1) και (4.2.2) αποδεικνύουν την πρόταση. \square

4.2.7 Πρόταση. Έστω ℓ πρωτεύουσα δέσμη με συνοχή ω και $X : P \rightarrow TP$ διανυσματικό πεδίο του P . Τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$X \in \mathfrak{X}(P) \Leftrightarrow X^h \in \mathfrak{X}(P) \text{ και } X^v \in \mathfrak{X}(P).$$

Απόδειξη. Προφανώς, αν $X^h, X^v \in \mathfrak{X}(P)$, τότε και $X \in \mathfrak{X}(P)$.

Αντιστρόφως, έστω $X \in \mathfrak{X}(P)$ και $p \in P$. Αν θέσουμε $Y := \omega_p(X_p) \in \mathcal{G}$, τότε, λόγω της $(\omega.1)$, έχουμε ότι $\omega_p(Y_p^*) = Y = \omega_p(X_p)$, από την οποίαν προκύπτει ότι $X_p - Y_p^* \in \ker \omega_p = H_p P$. Άρα καταλήγουμε στις σχέσεις

$$X_p^v = Y_p^* \text{ και } X_p^v = X_p - Y_p^*.$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$\begin{aligned} X_p^v &= Y_p^* = T_e \bar{p}(Y_e) = T_e \delta_p(\omega_p(X_p)) \\ &= T_e \delta_p(\omega(X)(p)) + T_p \delta_e(O_p) \\ &= T\delta(O_p, \omega(X)(p)) = T\delta \circ (\Omega, \omega(X))(p), \end{aligned}$$

όπου $\Omega : P \rightarrow TP$ το μηδενικό διανυσματικό πεδίο της P . Άρα το X^v είναι \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση ως σύνθεση \mathcal{C}^∞ -απεικονίσεων, επομένως και

$$X^h = X - X^v$$

είναι επίσης \mathcal{C}^∞ -απεικονίσεις. □

4.2.8 Παρατήρηση. Είδαμε στα προηγούμενα ότι όταν μια πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ εφοδιάζεται με μια συνοχή ω , τότε κάθε εφαπτόμενος χώρος $T_p P$ διασπάται σε ένα άθροισμα υποχώρων $H_p P \oplus V_p P$ (Πρόταση 4.2.3), έτσι ώστε οι οριζόντιοι υπόχωροι να διατηρούνται από τις δεξιές μετατοπίσεις (ακριβέστερα, από τα διαφορικά τους), όπως στην Πρόταση 4.2.6, και η αντίστοιχη διάσπαση των διανυσματικών πεδίων να δίνει διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία (Πρόταση 4.2.7).

Πιο κάτω (βλ. Πρόταση 4.2.10) θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο: αν υπάρχει μια απεικόνιση (διανομή - distribution), που σε κάθε $p \in P$ αντιστοιχεί έναν (οριζόντιο) υπόχωρο $H_p P$ του $T_p P$, έτσι ώστε να ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, δηλαδή $T_p P = H_p P \oplus V_p P$, οι συνιστώσες X^h, X^v κάθε διανυσματικού πεδίου $X \in \mathfrak{X}(P)$ να είναι διαφορίσιμες, και οι $H_p P$ να παραμένουν αναλλοίωτοι από τα διαφορικά των R_g , τότε υπάρχει μορφή συνοχής ω για την οποία ισχύει ότι

$$\ker \omega_p = H_p P, \quad \forall p \in P.$$

Ακριβώς μιά τέτοια διανομή οριζοντίων χώρων καλείται **συνοχή**, ενώ η αντίστοιχη ω καλείται **μορφή συνοχής**. Λόγω όμως της αμφίδρομης διαδικασίας που

περιγράψαμε δεν κάνουμε διάκριση ανάμεσα στις συνοχές και τις αντίστοιχες μορφές τους και χρησιμοποιούμε αδιακρίτως και τους δύο όρους.

Ανάλογα προς την Πρόταση 4.2.6 έχουμε και την διατήρηση των καθέτων υποχώρων, μέσω των δεξιών μετατοπίσεων. Όμως εδώ δεν χρειάζεται η ύπαρξη συνοχής, αφού οι κάθετοι υπόχωροι ορίζονται ανεξάρτητα απ' αυτήν. Ακριβέστερα έχουμε την

4.2.9 Πρόταση. Σε οποιαδήποτε πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$, οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους κάθετους υποχώρους, δηλαδή

$$T_p R_g(V_p P) = V_{pg} P, \quad \forall p \in P, g \in G.$$

Απόδειξη. Έστω $u \in V_p P$. Επειδή, για κάθε $p \in P$, είναι $(\pi \circ R_g)(p) = \pi(pg) = \pi(p)$, δηλαδή $\pi \circ R_g = \pi$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_p R_g(u) \in V_{pg} P &\Leftrightarrow T_{pg} \pi \circ T_p R_g(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow T_p(\pi \circ R_g)(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow T_p \pi(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow u \in V_p P, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

4.2.10 Πρόταση. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη και $(H_p P)_{p \in P}$ μια οικογένεια υποχώρων των $T_p P$ με τις ιδιότητες:

- i) $T_p P = H_p P \oplus V_p P, \quad \forall p \in P.$
- ii) Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(P)$, οι μονοσήμαντα ορισμένες συνιστώσες-του ξ^v και ξ^h , που προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\xi = \xi^v + \xi^h \quad \text{και} \quad \xi_p^v \in V_p P, \quad \xi_p^h \in H_p P, \quad \forall p \in P,$$

ορίζουν διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία.

- iii) Οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους υποχώρους $H_p P$.

Τότε υπάρχει συνοχή ω τέτοια ώστε $H_p P = \ker \omega_p$, για κάθε $p \in P$

Απόδειξη. Έστω $p \in P$ και $u \in T_p P$. Αν ω είναι η ζητούμενη συνοχή, τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\omega_p(u) = X_e \in T_e G.$$

Όμως, το $X_e \in T_e G$ αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό $X \in \mathcal{L}(G)$ και αυτό με τη σειρά του ορίζει ένα (θεμελιώδες) πεδίο Killing $X^* \in \mathfrak{X}(P)$. Επομένως,

$$\omega_p(X_p^*) = X_e = \omega_p(u),$$

οπότε

$$u - X_p^* \in \ker \omega_p = H_p P \quad \text{και} \quad X_p^* \in V_p P,$$

άρα

$$u - X_p^* = u^h \quad \text{και} \quad X_p^* = u^v.$$

Αλλά η διάσπαση $u = u^h + u^v$ είναι γνωστή, αφού είναι γνωστοί οι υπόχωροι $V_p P$, $H_p P$. Άρα είναι γνωστό το $u^v = X_p^*$. Για να προσδιορίσουμε το $X_e \equiv X$ [που ορίζει και την $\omega_p(u)$], αρκεί να θεωρήσουμε την

$$u^v = X_p^* = T_e \bar{p}(X_e),$$

από την οποίαν έχουμε ότι

$$\omega_p(u) = X_e = (T_e \bar{p})^{-1}(u^v).$$

Βάσει της αμφιδιαφορισιμότητας της $\bar{p} : G \rightarrow \pi^{-1}(b)$ (βλ. Ορισμό 4.1.2) και του Λήμματος 2.3.5, διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{p}^{-1}(q) = g &\Leftrightarrow \bar{p}(g) = q \\ &\Leftrightarrow pg = q \\ &\Leftrightarrow k(p, q) = g \\ &\Leftrightarrow k_p(q) = g, \end{aligned}$$

για οποιοδήποτε $q \in p^{-1}(b)$, άρα

$$\bar{p}^{-1} = k_p \quad \text{και} \quad (T_e \bar{p})^{-1} = T_p \bar{p}^{-1} = T_p k_p,$$

οπότε καταλήγουμε στην έκφραση

$$(4.2.3) \quad \omega_p(u) = T_p k_p(u^v) = T_p \bar{p}^{-1}, \quad \forall u \in T_p P.$$

Είναι προφανές ότι κάθε $\omega_p : T_p P \rightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Για τη διαφορισιμότητα της ω θεωρούμε τυχόν $\xi \in \mathfrak{X}(P)$ και διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \omega(\xi)(p) &= \omega_p(\xi_p) = T_p k_p(\xi_p^v) \\ &= T_p k_p(\xi_p^v) + T_p k_p(O_p) \\ &= Tk(O_p, \xi_p^v) = Tk \circ (\Omega, \xi^v)(p), \end{aligned}$$

άρα $\omega(\xi) = Tk \circ (\Omega, \xi^v)$, που αποδεικνύει τη διαφορισιμότητα (σύνθεση διαφορισίμων απεικονίσεων).

Απόδειξη της (ω.1): Έστω τυχόν $X \in \mathcal{L}(G)$ και $X^* \in \mathfrak{X}(P)$ το αντίστοιχο πεδίο Killing. Τότε

$$\omega_p(X_p^*) = (T_e \bar{p})^{-1}(T_e \bar{p}(X_e)) = X_e \equiv X.$$

Απόδειξη της (ω.2): Για τυχόντα $p \in P$, $u \in T_p P$ και $g \in G$, οι Προτάσεις 4.2.6 και 4.2.9 και η (4.2.3) συνεπάγονται την

$$\begin{aligned} (R_g^* \omega)_p(u) &= \omega_{R_g(p)}(T_p R_g(u^v + u^h)) \\ &= \omega_{pg}(T_p R_g(u^v)) + \omega_{pg}(T_p R_g(u^h)) \\ &= \omega_{pg}(T_p R_g(u^v)) + 0 \\ &= T_{pg} k_{pg}(T_p R_g(u^v)) \\ &= T_p(K_{pg} \circ R_g)(u^v). \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} (k_{pg} \circ R_g)(q) &= k(pg, qg) = g' \\ &\Leftrightarrow pgg' = qg \Leftrightarrow pgg'g^{-1} = q \\ &\Leftrightarrow p \cdot I_g(g') = q \Leftrightarrow k(p, q) = I_g(g') \\ &\Leftrightarrow (I_g^{-1} \circ k)(p, q) = g' \\ &\Leftrightarrow I_{g^{-1}} \circ k_p(q) = g' = (k_{pg} \circ R_g)(q), \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην

$$k_{pg} \circ R_g = I_{g^{-1}} \circ k_p,$$

μέσω της οποίας βρίσκουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} (R_g^* \omega)_p(u) &= T_p(I_{g^{-1}} \circ k_p)(u^v) \\ &= (T_{K_p(p)} I_{g^{-1}} \circ T_p K_p)(u^v) \\ &= T_e I_{g^{-1}} (T_e \bar{p})^{-1}(u^v) \\ &= (Ad g^{-1})(\omega_p(u)), \end{aligned}$$

με την οποίαν ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Οι Προτάσεις 4.2.3, 4.2.6, 4.2.10 συνοψίζονται τώρα στο επόμενο βασικό αποτέλεσμα.

4.2.11 Θεώρημα. Έστω μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$. Η ℓ διαθέτει συνοχή ω , εάν και μόνον εάν υπάρχει μια οικογένεια $(H_p P)_{p \in P}$ υποχώρων των $T_p P$ (διανομή) με τις ιδιότητες:

i) $T_p P = H_p P \oplus V_p P$ για κάθε $p \in P$.

ii) Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(P)$, οι μονοσήμαντα ορισμένες συνιστώσες-του ξ^v και ξ^h , που προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\xi = \xi^v + \xi^h \quad \text{και} \quad \xi_p^v \in V_p P, \quad \xi_p^h \in H_p P, \quad \forall p \in P,$$

ορίζουν διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία.

iii) Οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους υποχώρους $H_p P$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι κάτω από ορισμένες υποθέσεις, μια πρωτεύουσα δέσμη μπορεί να εφοδιαστεί με συνοχή. Πριν από αυτό θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα απλών πρωτευουσών δεσμών, οι οποίες εφοδιάζονται με αντίστοιχες χαρακτηριστικές συνοχές.

4.2.12 Παράδειγμα. Η φυσική συνοχή της τετριμμένης δέσμης.

Έστω B C^∞ -πολλαπλότητα και G ομάδα Lie. Θεωρούμε την τετριμμένη δέσμη $\ell_o = (B \times G, G, B, pr_1)$, όπου η G δρα στην $B \times G$ μέσω της απεικόνισης

$$\delta : (B \times G) \times G \longrightarrow B \times G : ((b, g), g') \mapsto (b, gg').$$

Με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.1.5, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\omega : B \times G \longrightarrow L(T(B \times G), \mathcal{G}),$$

που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\omega_{(b,g)} : T_b B \times T_g G \longrightarrow T_e G \equiv \mathcal{G} : (u, v) \mapsto T_g \ell_{g^{-1}}(v),$$

και θα δείξουμε ότι είναι συνοχή της ℓ_o .

Είναι φανερόν ότι η ω είναι διαφορική 1-μορφή της $B \times G$ με τιμές στην \mathcal{G} . Για τον έλεγχο της διαφορισιμότητάς της θεωρούμε τυχόν $X \in \mathfrak{X}(B \times G)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι $X = (X_1, X_2)$, όπου [μετά την ταύτιση $T(B \times G) \equiv TB \times TG$] $X_1 = p_1 \circ X : B \times G \rightarrow TB$ και $X_2 = p_2 \circ X : B \times G \rightarrow TG$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις (p_1, p_2 είναι οι αντίστοιχες προβολές του $TB \times TG$). Επομένως, η $\omega(X)$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \omega(X)(b, g) &= \omega_{(b,g)}(X_1(b, g), X_2(b, g)) \\ &= T_g \ell_{g^{-1}}(X_2(b, g)) + 0 \\ &= T_g \ell_{g^{-1}}(X_2(b, g)) + T_{g^{-1}} r_g(O_{g^{-1}}) \\ &= T_{(g, g^{-1})} \gamma(X_2(b, g), \Omega \circ \alpha(g)) \\ &= (T\gamma \circ (X_2, \Omega \circ \alpha \circ pr_2))(b, g), \end{aligned}$$

όπου γ η πράξη της G , α η αντίστροφη της και Ω το μηδενικό διανυσματικό πεδίο. Οι τελευταίες σχέσεις αποδεικνύουν ότι η $\omega(X)$ είναι C^∞ -απεικόνιση, άρα και η ω .

Για την απόδειξη της (ω.1) παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $X \in \mathcal{L}(G)$ και για κάθε $p = (b, g) \in B \times G$, είναι

$$\bar{p} : G \longrightarrow \pi^{-1}(b) = pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times G : g' \mapsto (b, g)g' = (b, gg'),$$

δηλαδή $\bar{p}(g') = (c, \ell_g)(g')$, όπου $c(g') = b$, για κάθε $g' \in G$, άρα

$$X_p^* = T_e \bar{p}(X_e) = T_e(c, \ell_g)(X_e) = (0, T_e \ell_g(X_e)).$$

Επομένως

$$\omega_p(X_p^*) = \omega_p(0, T_e \ell_g(X_e)) = T_g \ell_{g^{-1}}(T_e \ell_g(X_e)) = X_e \equiv X,$$

δηλαδή καταλήγουμε στην $\omega(X^*) = X$, $\forall X \in \mathcal{L}(G)$, όπως ζητούσαμε.

Για την (ω.2) παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $g' \in G$, είναι

$$R_{g'}(b, g) = (b, g)g' = (b, gg') = (id_B \times r_{g'})(b, g).$$

Άρα, και για κάθε $u = (u_1, u_2) \in T(b, g)(B \times G) \equiv T_b B \times T_g G$,

$$\begin{aligned} (R_{g'}^* \omega)_{(b, g)}(u) &= \omega_{R_{g'}(b, g)}(T_{(b, g)} R_{g'}(u)) \\ &= \omega_{(b, gg')}(T_{(b, g)}(id_B \times r_{g'})(u_1, u_2)) \\ &= \omega_{(b, gg')}(u, T_g r_{g'}(u_2)) \\ &= T_{gg'} \ell_{(gg')^{-1}}(T_g r_{g'}(u_2)) \\ &= T_g(\ell_{g'^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}} \circ r_{g'})(u_2) \\ &= T_g(r_{g'} \circ \ell_{g'^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}})(u_2) \\ &= T_e(r_{g'} \circ \ell_{g'^{-1}})(T_g \ell_{g^{-1}}(u_2)) \\ &= T_e I_{g'^{-1}}(\omega_{(b, g)}(u)) \\ &= (Ad g'^{-1})(\omega_{(b, g)}(u)), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την (ω.2).

4.2.13 Παράδειγμα. Η αντίστροφη εικόνα συνοχής μέσω ενός G - B -ισομορφισμού.

Έστω $\ell_i = (P_i, G, B, \pi_i)$ ($i = 1, 2$) κύριες δέσμες και ω μία συνοχή της ℓ_2 . Αν $(f, id_G, id_B) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι ένας G - B -ισομορφισμός, θέτουμε

$$\omega' = f^* \omega.$$

Προφανώς η ω' είναι διαφορική 1-μορφή της P_1 . Η διαφορισιμότητά της ελέγχεται ως εξής: αν $X \in \mathfrak{X}(P_1)$, τότε $Y = Tf \circ X \circ f^{-1} \in \mathfrak{X}(P_2)$ και

$$\begin{aligned}\omega'(X)(p) &= \omega'_p(X_p) = \omega_{f(p)}(T_p f(X_p)) \\ &= \omega_{f(p)}(Tf \circ X \circ f^{-1})(f(p)) \\ &= \omega_{f(p)}(Y_{f(p)}) = (\omega(Y) \circ f)(p),\end{aligned}$$

οπότε η $\omega'(X)$, ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων, είναι διαφορίσιμη, άρα και ω .

Για τις υπόλοιπες ιδιότητες της συνοχής προχωρούμε ως ακολούθως:

($\omega.1$): Έστω $X \in \mathcal{L}(G)$. Τότε υπάρχουν τα αντίστοιχα πεδία Killing $X_1^* \in \mathfrak{X}(P_1)$ και $X_2^* \in \mathfrak{X}(P_2)$, αφού η G δρα και στις δύο πολλαπλότητες P_1 και P_2 . Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\omega'(X_1^*) = X$. Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $p \in P$, είναι

$$(f \circ \bar{p})(g) = f(pg) = f(p) \cdot g = \overline{f(p)}(g), \quad \forall g \in G.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\omega'_p(X_{1p}^*) &:= \omega_{f(p)}(T_p f(X_{1p}^*)) = \omega_{f(p)}(T_p f(T_e \bar{p}(X_e))) \\ &= \omega_{f(p)}(T_e(f \circ \bar{p})(X_e)) = \omega_{f(p)}(T_e \overline{f(p)}(X_e)) \\ &= \omega_{f(p)}(X_{2,f(p)}^*) = X.\end{aligned}$$

($\omega.2$): Ας συμβολίσουμε με R_g^1 και R_g^2 τις δεξιές μετατοπίσεις των P_1 και P_2 (κατά $g \in G$) αντιστοίχως. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$R_g^{1*} \omega' = (Ad g^{-1}) \omega', \quad \forall g \in G.$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι $f \circ R_g^1 = R_g^2 \circ f$, για κάθε $g \in G$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}(R_g^{1*} \omega')_p(u) &= \omega'_{R_g^1(p)}(T_p R_g^1(u)) = \omega'_{pg}(T_p R_g^1(u)) \\ &= \omega'_{f(pg)}(T_{pg} f \circ T_p R_g^1(u)) \\ &= \omega'_{f(pg)}(T_p(f \circ R_g^1)(u)) \\ &= \omega'_{f(pg)}(T_p(R_g^2 \circ f)(u)) \\ &= \omega'_{f(pg)}(T_{f(p)} R_g^2 \circ T_p f(u)) \\ &= \omega'_{R_g^2(f(pg))}(T_{f(p)} R_g^2(T_p f(u))) \\ &= (R_g^{2*} \omega)_{f(p)}(T_p f(u)) \\ &= (Ad g^{-1})(\omega'_{f(p)}(T_p f(u))) \\ &= (Ad g^{-1})(\omega'_p(u)).\end{aligned}$$

Πριν προχωρήσουμε χρειαζόμαστε μερικές προκαταρκτικές έννοιες:

Αν X είναι τοπολογικός χώρος, μια οικογένεια $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ λέγεται **διαμέριση της μονάδας** αν $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι ανοιχτή τοπικά πεπερασμένη κάλυψη του X και $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$ συνεχής με

$$\overline{\{x \in X : \psi_i(x) \neq 0\}} \subset U_i, \quad \forall i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1, \quad \forall x \in X.$$

Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται **παρασυμπαγής** αν είναι Hausdorff και κάθε ανοιχτή κάλυψη του X δέχεται τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση. Σχετικώς θα δεχτούμε χωρίς απόδειξη και το επόμενο αποτέλεσμα:

Αν X είναι παρασυμπαγής C^∞ -πολληαπλότητα, τότε για κάθε ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X υπάρχει C^∞ -διαμέριση της μονάδας $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in J}$ υποκειμένη στην $\{U_i\}$, δηλαδή υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in J}$, έτσι ώστε να είναι $J \subset I$, $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$ C^∞ -απεικόνιση και $V_i \subset U_i$, για κάθε $i \in J$.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο βασικό θεώρημα ύπαρξης συνοχής σε μία γενική πρωτεύουσα δέσμη.

4.2.14 Θεώρημα. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη με της οποίας η βάση B είναι παρασυμπαγής πολληαπλότητα. Τότε η ℓ εφοδιάζεται με συνοχή ω .

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Είναι φανερόν ότι κάθε

$$\ell_i = (\pi^{-1}(U_i), G, U_i, \pi|_{\pi^{-1}(U_i)}) \quad i \in I,$$

είναι πρωτεύουσα δέσμη και κάθε τριάδα

$$(\Phi_i, id_G, id_{U_i}) : \ell_i \longrightarrow (U_i \times G, G, U_i, pr_1) =: \ell_i^o$$

είναι G - U_i -ισομορφισμός από την ℓ_i στην τετριμμένη δέσμη ℓ_i^o . Αν ω_i συμβολίζει τη φυσική συνοχή της ℓ_i^o (βλ. Παράδειγμα 4.2.9), τότε η

$$\omega'_i = \Phi_i^* \omega_i$$

είναι συνοχή της ℓ_i (βλ. Παράδειγμα 4.2.10).

Έστω τώρα $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in J}$ μια C^∞ -διαμέριση της μονάδας υποκειμένη στην ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του B . Θέτουμε

$$\omega := \sum_{i \in J} (\psi_i \circ \pi) \cdot \omega'_i.$$

Είναι προφανές ότι η ω είναι διαφορική 1-μορφή ως γραμμικός συνδυασμός διαφορικών 1-μορφών. Επίσης είναι διαφορίσιμη: αν $X \in \mathfrak{X}(P)$, τότε, για κάθε $p \in P$, είναι

$$\begin{aligned}\omega(X)(p) &= \omega_p(X_p) = \\ &= \sum \psi_i(\pi(p)) \cdot \omega'_{ip}(X_p) = \left(\sum (\psi_i \circ \pi) \cdot \omega'_i(X) \right)(p),\end{aligned}$$

απ' όπου και η ζητούμενη διαφορισιμότητα.

Αποδεικνύουμε τώρα τις ιδιότητες της συνοχής.

(ω . 1): Για τυχόν $X \in \mathcal{L}(G)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\omega_p(X_p^*) &= \sum \psi_i(\pi(p)) \cdot \omega'_{ip}(X_p^*) = \\ &= \sum \psi_i(\pi(p)) \cdot X = \left(\sum \psi_i(\pi(p)) \right) \cdot X = 1 \cdot X = X.\end{aligned}$$

(ω . 2): Έστω $g \in G$. Τότε, για κάθε $p \in P$ και $u \in T_p P$ είναι

$$\begin{aligned}(R_g^* \omega)_p(u) &= \omega_{pg}(T_p R_g(u)) \\ &= \sum (\psi_i \circ \pi)(pg) \cdot \omega'_{ipg}(T_p R_g(u)) \\ &= \sum \psi_i(\pi(pg)) \cdot (R_g^* \omega'_i)_p(u) \\ &= \sum \psi_i(\pi(p)) \cdot (Ad g^{-1})(\omega'_{ip}(u)) \\ &= (Ad g^{-1}) \left(\sum (\psi_i \circ \pi)(p) \cdot \omega'_{ip}(u) \right) \\ &= (Ad g^{-1})(\omega_p(u)).\end{aligned}$$

□

4.3 Παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης

Υποθέτουμε ότι $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με μία συνοχή ω . Έισάγουμε τις επόμενες χρήσιμες έννοιες.

Αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι κλειστό διάστημα, μια καμπύλη $\alpha : I \rightarrow B$ θα λέγεται **(C^∞)-διαφορίσιμη**, αν υπάρχει $J \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα με $I \subset J$, και C^∞ -καμπύλη $\tilde{\alpha} : J \rightarrow B$, τέτοια ώστε $\tilde{\alpha}|_I = \alpha$.

Έστω τώρα $I = [0, 1]$ και $\alpha : I \rightarrow B$ συνεχής καμπύλη. Η α λέγεται **κατά τμήματα διαφορίσιμη** (βραχυγραφικά, **κ.τ.** C^∞) αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $t_i \in [0, 1]$ ($i = 0, \dots, k$) με $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, έτσι ώστε $\alpha : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow B$ να είναι διαφορίσιμη, για κάθε $i = 0, \dots, k-1$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με μία συνοχή ω . Μια κ.τ. C^∞ -καμπύλη $\hat{\alpha} : I = [0, 1] \rightarrow P$ θα λέγεται

οριζόντια ανύψωση της $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$, αν ικανοποιούνται οι συνθήκες:

- (i) $\pi \circ \hat{\alpha},$
- (ii) $\dot{\hat{\alpha}}(t) = (T_t \hat{\alpha}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in H_{\hat{\alpha}(t)},$

για κάθε $t \in (t_i, t_{i+1})$ και $i = 0, \dots, k-1$.

Για λόγους τυπογραφικής ευκολίας, το βασικό διανυσματικό πεδίο $\frac{d}{dt}$ του \mathbb{R} συμβολίζεται με ∂ , οπότε

$$(4.3.1) \quad \partial_t = \partial(t) = \frac{d}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_t,$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

4.3.1 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με μία συνοχή ω , και $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow B$ κ.τ. C^∞ -καμπύλη. Τότε, για κάθε $p_o \in \pi^{-1}(\alpha(o))$, υπάρχει μια μοναδική οριζόντια ανύψωση $\hat{\alpha}$ της α με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}(0) = p_o$.

Απόδειξη. Περίπτωση i): Ας υποθέσουμε πρώτα ότι υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) της ℓ , τέτοιο ώστε $\alpha(I) \subset U$. Θέτουμε $\Phi(p_o) = (b_o, g_o)$ [προφανώς $b_o = \alpha(0)$] και θεωρούμε την κ.τ. C^∞ -καμπύλη

$$\gamma : I \longrightarrow P : t \mapsto \gamma(t) := \Phi^{-1}(\alpha(t), g_o).$$

Επειδή

$$\gamma(0) = \Phi^{-1}(\alpha(0), g_o) = \Phi^{-1}(b_o, g_o) = p_o$$

και

$$\pi \circ \gamma(t) = \pi \circ \Phi^{-1}(\alpha(t), g_o) = pr_1(\alpha(t), g_o) = \alpha(t),$$

η γ είναι ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\gamma(0) = p_o$. Όμως η γ δεν είναι απαραίτητως οριζόντια. Ας συμβολίσουμε λοιπόν με $\hat{\alpha}$ την ζητούμενη οριζόντια ανύψωση. Αλλά, για κάθε $t \in [0, 1]$, τα $\hat{\alpha}(t)$ και $\gamma(t)$ είναι σημεία του ίδιου νήματος $\pi^{-1}(\alpha(t))$, άρα θα υπάρχει μοναδικό $g(t) \in G$ έτσι ώστε $\hat{\alpha}(t) = \gamma(t)g(t)$ (βλ. Πρόταση 2.2.16). Επομένως, ορίζεται μία καμπύλη $g : I \rightarrow G$, η οποία είναι κ.τ. C^∞ , αφού

$$g(t) = (pr_2 \circ \Phi \circ \gamma(t))^{-1} \cdot (pr_2 \circ \Phi \circ \hat{\alpha}(t)).$$

Επίσης $g(0) = e$, αφού $\hat{\alpha}(0) = \gamma(0)$.

Προφανώς, αν μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την καμπύλη g , θα έχουμε άμέσως και την $\hat{\alpha}(t)$, αφού η γ είναι ήδη γνωστή.

Ας δούμε τώρα τι προκύπτει από την απαίτηση η $\hat{\alpha}$ να είναι οριζόντια. Διαφορίζοντας την ισότητα $\hat{\alpha} = \delta \circ (\gamma, g)$ (που προκύπτει από τη σχέση των $\hat{\alpha}$ και γ), βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}(t) &= (T_t \hat{\alpha})(\partial_t) = T_t(\delta \circ (\gamma, g))(\partial_t) \\
 &= T_{(\gamma(t), g(t))} \delta (T_t \gamma(\partial_t), T_t g(\partial_t)) \\
 &= T_{\gamma(t)} \delta_{g(t)} (\dot{\gamma}(t)) + T_{g(t)} \delta_{\gamma(t)} (\dot{g}(t)) \\
 (4.3.2) \quad &= T_{\gamma(t)} R_{g(t)} (\dot{\gamma}(t)) + T_{g(t)} \overline{\gamma(t)} (\dot{g}(t)).
 \end{aligned}$$

Εξάλλου, το $\dot{\gamma}(t) \in T_{g(t)}G$ συνεπάγεται ότι $A_e := T_{g(t)}\ell_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)) \in T_eG$, άρα υπάρχει αντίστοιχο (του A_e) πεδίο $A \in \mathcal{L}(G)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 T_{g(t)} \overline{\gamma(t)} (\dot{g}(t)) &= T_{g(t)} \overline{\gamma(t)} \circ T_e \ell_{g(t)} (A_e) \\
 &= T_e \overline{\gamma(t)g(t)} (A_e) \\
 &= A_{\gamma(t)g(t)}^* = A_{\hat{\alpha}(t)}^*,
 \end{aligned}$$

άρα η (4.3.2) μετασχηματίζεται στην

$$\hat{\alpha}(t) = T_{\gamma(t)} R_{g(t)} (\dot{\gamma}(t)) + A_{\hat{\alpha}(t)}^*.$$

Υπολογίζοντας τη μορφή συνοχής στο τελευταίο διάνυσμα βρίσκουμε την

$$(4.3.3) \quad \omega_{\hat{\alpha}(t)}(\hat{\alpha}(t)) = \omega_{\hat{\alpha}(t)}(T_{\gamma(t)} R_{g(t)} (\dot{\gamma}(t))) + \omega_{\hat{\alpha}(t)}(A_{\hat{\alpha}(t)}^*).$$

Έχουμε όμως ότι

$$\hat{\alpha}(t) \in H_{\alpha(t)}P \quad \text{και} \quad \omega_{\hat{\alpha}(t)}(A_{\hat{\alpha}(t)}^*) = A \equiv A_e,$$

άρα η (4.3.3) οδηγεί στην

$$\omega_{\hat{\alpha}(t)}(T_{\gamma(t)} R_{g(t)} (\dot{\gamma}(t))) + A_e = 0,$$

και, ισοδύναμα, στην

$$\begin{aligned}
 -A_e &= \omega_{\gamma(t)g(t)}(T_{\gamma(t)} R_{g(t)} (\dot{\gamma}(t))) \\
 &= (R_{g(t)}^* \omega)_{\gamma(t)} (\dot{\gamma}(t)) \\
 &= (Ad g(t)^{-1})(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) \\
 &= T_e I_{g(t)^{-1}}(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) \\
 &= T_e(\ell_{g(t)^{-1}} \circ r_{g(t)})(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) \\
 &= T_{g(t)} \ell_{g(t)^{-1}} \circ T_e r_{g(t)}(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))).
 \end{aligned}$$

Επειδή θέσαμε $A_e = T_{g(t)}\ell_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t))$ και η $T_{g(t)}\ell_{g(t)^{-1}}$ είναι ισομορφισμός, από την παραπάνω σειρά μετασχηματισμών προκύπτει η

$$(4.3.4) \quad -T_{g(t)}r_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)) = \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)),$$

δηλαδή καταλήγουμε σε μία διαφορική εξίσωση όπου η άγνωστη συνάρτηση είναι η $g(t)$. Η (4.3.4) είναι μία **εξίσωση με ολικό διαφορικό**, η οποία επιλύεται μονοσήμαντα για δεδομένη αρχική συνθήκη, οπότε υπολογίζεται η g και, όπως εξηγήσαμε, και η οριζόντια ανύψωση $\hat{\alpha}$, για την περίπτωση i).

Περίπτωση ii): Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εικόνα $\alpha(I)$ δεν περιέχεται σε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) . Στην περίπτωση αυτή, για κάθε $b \in \alpha(I)$, υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U_b, Φ_b) με $b \in U_b$, οπότε

$$\alpha(I) \subset \bigcup_{b \in \alpha(I)} U_b.$$

Αφού όμως το $\alpha(I)$ είναι συμπαγές, η ανοιχτή κάλυψη $\{U_b\}_{b \in \alpha(I)}$ δέχεται πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_i := U_{b_i}\}_{i=1, \dots, k}$. Τότε υπάρχουν

$$t_0 = 0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k = 1 \in [0, 1] \quad \text{με} \quad t_i < t_{i+1},$$

$$\text{έτσι ώστε} \quad \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i, \quad \forall i = 0, \dots, k-1.$$

Όπως στην περίπτωση i), βρίσκουμε οριζόντια ανύψωση $\hat{\alpha}_o$ της καμπύλης (περιορισμού) $\alpha_o := \alpha|_{[t_0, t_1]}$, με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_o(0) = p_o$. Συνεχίζοντας διαδοχικά βρίσκουμε οριζόντια ανύψωση της κάθε $\alpha_i := \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_i(t_i) = \hat{\alpha}_{i-1}(t_i)$. Η ένωση των καμπυλών $\hat{\alpha}_i$ είναι κατα τμήματα διαφορίσιμη οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}(0) = p_o$. \square

4.3.2 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη με συνοχή ω και κ.τ. C^∞ -καμπύλη $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow B$ με $\alpha(0) = b_o$ και $\alpha(1) = b_1$. Για κάθε $p \in \pi^{-1}(b_o)$ συμβολίζουμε με $\hat{\alpha}_p$ τη μοναδική οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_p(0) = p$. Η απεικόνιση

$$\tau_\alpha : \pi^{-1}(b_o) \longrightarrow \pi^{-1}(b_1) : p \mapsto \hat{\alpha}_p(1)$$

καλείται **παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος της α** .

4.3.3 Λήμμα. Η παράλληλη μετατόπιση τ_α ικανοποιεί τη σχέση

$$\tau_\alpha \circ R_g = R_g \circ \tau_\alpha,$$

για κάθε $g \in G$.

Απόδειξη. Έστω $g \in G$ και $p \in \pi^{-1}(b_o)$. Τότε έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}(\tau_\alpha \circ R_g)(p) &= \tau_\alpha(pg) = \widehat{\alpha}_{pg}(1), \\ (R_g \circ \tau_\alpha)(p) &= R_g(\widehat{\alpha}_p(1)) = \widehat{\alpha}_p(1) \cdot g.\end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\widehat{\alpha}_{pg}(1) = \widehat{\alpha}_p(1) \cdot g$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η $\widehat{\alpha}_{pg}(t) = \widehat{\alpha}_p(t) \cdot g$, για κάθε $t \in [0, 1]$. Όμως $\widehat{\alpha}_{pg}$ είναι η μοναδική οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\widehat{\alpha}_{pg}(0) = pg$. Άρα, για να δείξουμε την ισότητα των απεικονίσεων $\widehat{\alpha}_{pg}$ και $\widehat{\alpha}_p(\cdot)g$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\widehat{\alpha}_p(\cdot)g$ είναι οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\widehat{\alpha}_p(0)g = pg$.

Η αρχική συνθήκη προφανώς είναι η ζητούμενη. Επίσης, η $\widehat{\alpha}_p(\cdot)g$ είναι ανύψωση της α , αφού

$$\pi(\widehat{\alpha}_p(t)g) = \pi(\widehat{\alpha}_p(t)) = \alpha(t),$$

επειδή $\pi(pg) = \pi(p)$, για κάθε $p \in P$ και $g \in G$. Τέλος, δείχνουμε ότι είναι οριζόντια καμπύλη επειδή [βλ. και σχέση (4.3.1)]:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_p(\cdot)g \quad (t) &= \widehat{R_g \circ \widehat{\alpha}_p} \quad (t) = T_t(R_g \circ \widehat{\alpha}_p)(\partial|_t) \\ &= (T_{\widehat{\alpha}_p(t)}R_g \circ T_t\widehat{\alpha}_p)(\partial_t) \\ &= T_{\widehat{\alpha}_p(t)}R_g(\dot{\widehat{\alpha}}_p(t)) \in \\ &\in T_{\widehat{\alpha}_p(t)}R_g(H_pP) = H_{\widehat{\alpha}_p(t)g}P.\end{aligned} \quad \square$$

4.3.4 Λήμμα. Με τις υποθέσεις του Ορισμού 4.3.2, η

$$\tau : \pi^{-1}(\alpha(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(\alpha(1))$$

είναι C^∞ -απεικόνιση.

Απόδειξη. Ας σταθεροποιήσουμε ένα σταθερό $p_o \in \pi^{-1}(\alpha(0))$. Θέτουμε

$$q_o := \tau_\alpha(p_o) \in \pi^{-1}(\alpha(1)).$$

Για κάθε $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$, υπάρχει ένα μοναδικό $g \in G$, τέτοιο ώστε $p = p_o g$. Επομένως, $g = k(p_o, p) = k_{p_o}(p)$ (βλ. απόδειξη του Λήμματος 4.1.9), όπου η k_{p_o} είναι C^∞ -απεικόνιση. Εξάλλου

$$\begin{aligned}\tau_\alpha(p) &= \tau_\alpha(p_o g) = \tau_\alpha(R_g(p_o)) = R_g(\tau_\alpha(p_o)) \\ &= R_g(q_o) = q_o g = (\overline{q_o} \circ k_{p_o})(p),\end{aligned}$$

δηλαδή $\tau_\alpha = \overline{q_o} \circ k_{p_o}$, η οποία είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. □

Επειδή σκοπός μας, στη συνέχεια, είναι να δείξουμε ότι η τ_α είναι αμφι-διαφορίση, χρειαζόμαστε πρώτα την έννοια της **αντίθετης καμπύλης** α^{-1} μιάς καμπύλης $\alpha : I \rightarrow X$. Ακριβέστερα, είναι

$$(4.3.5) \quad \alpha^{-1} : I \longrightarrow X : t \mapsto \alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t).$$

Προφανώς

$$\alpha^{-1} = \alpha \circ \mu,$$

όπου

$$\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto 1-t$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, και

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha.$$

Από τα προηγούμενα συνάγεται αμέσως ότι η α είναι (κ.τ)- \mathcal{C}^n -καμπύλη ($0 \leq n \leq \infty$), εάν και μόνον εάν η α^{-1} είναι (κ.τ)- \mathcal{C}^n -καμπύλη αντιστοίχως. Επίσης, αν α είναι (κ.τ)- \mathcal{C}^n -καμπύλη, η α^{-1} ορίζει την αντίστοιχη παράλληλη μετατόπιση

$$\tau_{\alpha^{-1}} : \pi^{-1}(\alpha^{-1}(0)) = \pi^{-1}(\alpha(1)) \longrightarrow \pi^{-1}(\alpha^{-1}(1)) = \pi^{-1}(\alpha(0)).$$

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς αποδεικνύεται το

4.3.5 Λήμμα. Για κάθε (κ.τ)- \mathcal{C}^∞ -καμπύλη α , ισχύει η σχέση

$$\tau_{\alpha^{-1}} = \tau_\alpha^{-1}.$$

Απόδειξη. Έστω $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$ και $\hat{\alpha}_p$ η οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη p . Θεωρούμε την (αντίθετη) καμπύλη $(\hat{\alpha}_p)^{-1}$, για την οποίαν παρατηρούμε ότι:

i) Είναι ανύψωση της α^{-1} , επειδή

$$\pi \circ (\hat{\alpha}_p)^{-1} = \pi \circ \hat{\alpha}_p \circ \mu = \alpha \circ \mu = \alpha^{-1}.$$

ii) Είναι οριζόντια, διότι

$$\begin{aligned} \widehat{(\hat{\alpha}_p)^{-1}}(t) &= T_t(\hat{\alpha}_p)^{-1}(\partial|_t) \\ &= T_t(\hat{\alpha}_p \circ \mu)(\partial|_t) \\ &= T_{\mu(t)} \hat{\alpha}_p(\mu'(t) \cdot \partial|_{\mu(t)}) \\ &= T_{\mu(t)} \hat{\alpha}_p((-1) \cdot \partial|_{\mu(t)}) \\ &= -T_{1-t} \hat{\alpha}_p(\partial|_{1-t}) \\ &= -\dot{\hat{\alpha}}_p(1-t) \in H_{\hat{\alpha}_p(1-t)}P. \end{aligned}$$

iii) Τέλος έχει αρχική συνθήκη

$$(\widehat{\alpha}_p)^{-1}(0) = \widehat{\alpha}_p(1) = \tau_\alpha(p).$$

Επομένως, η $\widehat{\alpha}_p^{-1}$ είναι οριζόντια ανύψωση της α^{-1} με αρχική συνθήκη $\widehat{\alpha}_p(1)$, οπότε (σύμφωνα με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.3.2) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(4.3.6) \quad (\widehat{\alpha}_p)^{-1} = (\widehat{\alpha^{-1}})_{\widehat{\alpha}_p(1)},$$

μέσω της οποίας βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} (\tau_{\alpha^{-1}} \circ \tau_\alpha)(p) &= \tau_{\alpha^{-1}}(\widehat{\alpha}_p(1)) = \\ &= (\widehat{\alpha^{-1}})_{\widehat{\alpha}_p(1)}(1) = (\widehat{\alpha}_p)^{-1}(1) = \widehat{\alpha}_p(0) = p, \end{aligned}$$

για κάθε $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$, δηλαδή καταλήγουμε στη σχέση

$$(4.3.7) \quad \tau_{\alpha^{-1}} \circ \tau_\alpha = id_{\pi^{-1}(\alpha(0))}.$$

Επειδή $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι

$$\tau_\alpha \circ \tau_{\alpha^{-1}}(q) = q, \quad \forall q \in \pi^{-1}(\alpha(1)),$$

δηλαδή

$$(4.3.8) \quad \tau_\alpha \circ \tau_{\alpha^{-1}} = id_{\pi^{-1}(\alpha(1))}.$$

Οι (4.3.7) και (4.3.8) κλείνουν την απόδειξη. \square

Τα δύο τελευταία λήμματα αποδεικνύουν ουσιαστικά το επόμενο βασικό συμπέρασμα:

4.3.6 Θεώρημα. Για κάθε (κ.τ)- C^∞ -καμπύλη $\alpha: I \rightarrow B$, η παράλληλη μετατόπιση $\tau_\alpha: \pi^{-1}(\alpha(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\alpha(1))$ είναι αμφιδιαφόριση (μεταξύ των νημάτων).

4.3.7 Σχόλιο. Είδαμε ότι η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος μιας καμπύλης α ορίζει μια ισομορφία μεταξύ των νημάτων $\pi^{-1}(\alpha(0))$ και $\pi^{-1}(\alpha(1))$, που είναι ανεξάρτητη της χρησιμοποιούμενης απλοποιούσας κάλυψης, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι η ισομορφία αυτή είναι μία **εσωτερική** (intrinsic) ιδιότητα της δέσμης, η οποία εξαρτάται μόνον από την ύπαρξη της συνοχής.

Ο Συναρτητής Τομή

When the basic concepts of category, functor, natural transformation and natural equivalence were first formulated by Eilenberg and MacLane they served immediately to provide the appropriate framework for describing the way in which algebraic tools were used, and could be used, in the study of topology.

I. BUCUR – A. DELEANU [9, p. vi]

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε ιδιαίτερος την αλγεβρική δομή των διαφορισίμων (ολικών) τομών μίας διανυσματικής δέσμης. Οι τελευταίες αποτελούν ένα πρότυπο (module) υπεράνω της άλγεβρας των διαφορισίμων συναρτήσεων \mathbb{A}_X στη βάση X της δέσμης. Απ' το άλλο μέρος, οι τομές εισάγουν ένα συναρτητή ανάμε-

σα στην κατηγορία των διαφορίσιμων διανυσματικών δεσμών $VB(X)$ και στην κατηγορία των \mathbb{A}_X -προτύπων.

Το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου συνοψίζεται στο περιώνυμο θεώρημα Serre-Swan, το οποίον –περιγραφικά– αποδεικνύει ότι η κατηγορία των διανυσματικών δεσμών υπεράνω μιάς συμπαγούς πολλαπλότητας X είναι ισοδύναμη (με την κατηγορική έννοια) με την κατηγορία των προβολικών πεπερασμένως παραγομένων προτύπων υπεράνω του \mathbb{A}_X .

Η προηγούμενη ισοδυναμία αποτελεί ένα από τα πιο ωραία παραδείγματα κατηγορικής ισοδυναμίας ανάμεσα σε μία διαφορο-τοπολογική και μία αλγεβρική δομή.

5.1 Οι τομές μιας διανυσματικής δέσμης.

Στα επόμενα θεωρούμε μια διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ με νήματα τύπου \mathbb{R}^n και $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ μία απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Θα συμβολίζουμε με \mathbb{A} την άλγεβρα των C^∞ -συναρτήσεων επί του X με πραγματικές τιμές, δηλαδή

$$\mathbb{A}_X := C^\infty(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ διαφορίσιμη}\}$$

5.1.1 Ορισμός. Μια **τοπική τομή της** ℓ είναι μια απεικόνιση $\sigma : A \rightarrow E$ με $A \subseteq X$ και $\pi \circ \sigma = id_A$. Μια **ολική τομή** της ℓ είναι μια $\sigma : X \rightarrow E$ με $\pi \circ \sigma = id_X$.

Παρακάτω θα αναφερόμαστε πάντοτε σε διαφορίσιμες τομές πάνω από ανοιχτά υποσύνολα του X . Το σύνολο των διαφορίσιμων τομών πάνω από ένα ανοιχτό $U \subseteq X$, θα το συμβολίζουμε με $\Gamma(U, E)$.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι μια τομή της ℓ είναι μια τομή της εμβάπτισης π . Αυτή η παρατήρηση εξασφαλίζει την ύπαρξη τοπικών τομών (και μάλιστα με ορισμένη αρχική συνθήκη), δηλαδή ότι, για κάθε $x \in X$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x , έτσι ώστε $\Gamma(U, E) \neq \emptyset$. Η δομή διανυσματικού χώρου στα νήματα όμως μας εξασφαλίζει την ύπαρξη διαφορίσιμης τομής σε οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το

5.1.2 Λήμμα. Για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό, είναι $\Gamma(U, E) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση

$$\Omega : U \rightarrow E : x \mapsto O_x,$$

όπου O_x είναι το μηδέν του E_x , είναι διαφορίσιμη τομή. Για την διαφορισιμότητα της σε ένα σημείο $x \in U$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει απλοποιούν

ζεύγος (V, τ) της ℓ με $x \in U \cap V$. Η Ω είναι διαφορίσιμη στο $U \cap V$ εάν και μόνον εάν η $\tau \circ \Omega : U \cap V \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη (βλ. και το επόμενο διάγραμμα)

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\tau} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\ \uparrow \Omega & \nearrow (id_{U \cap V}, c) & \\ U \cap V & & \end{array}$$

Διάγραμμα 5.1

Όμως, για κάθε $y \in U \cap V$, είναι

$$\tau \circ \Omega(y) = \tau(O_y) = (y, \tau(O_y)) = (y, 0) = (id, c)(y),$$

όπου $c(y) = 0$, σταθερά. □

Γενικεύοντας την απόδειξη για την διαφορισιμότητα της Ω , έχουμε το επόμενο

5.1.3 Λήμμα. Η διαφορισιμότητα μιας τομής σ πάνω από το πεδίο ορισμού U ενός απλοποιούντος ζεύγους (U, τ) είναι ισοδύναμη με την διαφορισιμότητα της δεύτερης προβολής της σύνθεσης $\tau \circ \sigma$, δηλαδή της

$$\bar{\sigma}_\tau := p_2 \circ \tau \circ \sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

5.1.4 Πρόταση. Για κάθε ανοιχτό υποσύνολο U του X , το σύνολο $\Gamma(U, E)$ είναι \mathbb{A}_U -πρότυπο, με τις κατά σημείον πράξεις.

Απόδειξη. Προφανώς, για κάθε $s, \sigma \in \Gamma(U, E)$ και $f \in \mathbb{A}_U$ η απεικόνιση

$$fs + \sigma : U \rightarrow E : x \mapsto f(x)s(x) + \sigma(x)$$

είναι τομή. Επίσης, τα αξιώματα του \mathbb{A}_U -προτύπου ελέγχονται αμέσως.

Αποδεικνύουμε την διαφορισιμότητα της $fs + \sigma$ πάνω από ένα απλοποιούν ζεύγος (V, τ) , με $U \cap V \neq \emptyset$: εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.3, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} p_2 \circ \tau \circ (fs + \sigma)(x) &= \tau_x(f(x)s(x) + \sigma(x)) \\ &= f(x)\tau_x(s(x)) + \tau_x(\sigma(x)) \\ &= (f \cdot \bar{\sigma}_\tau + \bar{\sigma}_\tau)(x). \end{aligned}$$

□

Παρακάτω θα συμβολίσουμε με $\Gamma(\ell)$ το σύνολο των *διαφορισίμων ολικών τομών* της ℓ , δηλαδή

$$\Gamma(\ell) := \Gamma(X, E).$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το $\Gamma(\ell)$ είναι \mathbb{A}_X -πρότυπο.

5.1.5 Πρόταση. *Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X) \in VB(X)$, $i = 1, 2, 3$, και*

$$\begin{aligned} Mor(\ell_1, \ell_2) &:= \{f : \ell_1 \rightarrow \ell_2 : \text{μορφισμός εν } VB(X)\}, \\ Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)) &:= \{f : \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2) : \text{μορφισμός προτύπων}\}, \end{aligned}$$

τότε η ισότητα

$$\Gamma(f)(s) = f \circ s, \quad f \in Mor(\ell_1, \ell_2), \quad s \in \Gamma(\ell_1),$$

ορίζει μια αντιστοιχία

$$\Gamma(f) : \Gamma(\ell_1) \longrightarrow \Gamma(\ell_2),$$

η οποία έχει τις ιδιότητες

$$(5.1.1) \quad \Gamma(id_{\ell_1}) = id_{\Gamma(\ell_1)},$$

$$(5.1.2) \quad \Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f), \quad \forall f \in Mor(\ell_1, \ell_2), \quad g \in Mor(\ell_2, \ell_3).$$

Επιπλέον, η Γ είναι μορφισμός \mathbb{A}_X -προτύπων.

Θυμίζουμε ότι \mathbb{A}_X συμβολίζει την άλγεβρα των διαφορισίμων συναρτήσεων (με τιμές στο \mathbb{R}) επί της X .

Απόδειξη. Το $Mor(\ell_1, \ell_2)$ είναι \mathbb{A}_X -πρότυπο (βλ. Πρόταση 2.5.1 και Λήμμα 2.6.11). Εξάλλου είναι γνωστόν ότι και το $Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$ είναι \mathbb{A}_X -πρότυπο.

Παρατηρούμε τώρα ότι $\Gamma(f) \in Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$, για κάθε $f \in Mor(\ell_1, \ell_2)$. Πράγματι, αν $s, \sigma \in \Gamma(\ell_1)$ και $a \in \mathbb{A}_X$, τότε

$$\begin{aligned} \Gamma(f)(as + \sigma)(x) &= f \circ (as + \sigma)(x) \\ &= f_x(a(x) \cdot s(x) + \sigma(x)) \\ &= a(x) \cdot f_x(s(x)) + f_x(\sigma(x)) \\ &= (a \cdot (f \circ s) + (f \circ \sigma))(x), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή

$$\Gamma(f)(as + \sigma) = a(f \circ s) + (f \circ \sigma) = a \cdot \Gamma(f)(s) + \Gamma(f)(\sigma),$$

που αποδεικνύει το καλά ορισμένο της Γ .

Οι σχέσεις (5.1.1) και (5.1.2) είναι προφανείς. Επιπλέον η Γ είναι μορφισμός \mathbb{A}_X -προτύπων, δηλαδή

$$\Gamma(af + g) = a\Gamma(f) + \Gamma(g),$$

για κάθε $a \in \mathbb{A}_X$ και $f, g \in \text{Mor}(\ell_1, \ell_2)$. Πράγματι, για κάθε $s \in \Gamma(\ell_1)$ και $x \in X$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Gamma(af + g)(s)(x) &= (af + g)(s(x)) \\ &= a(x)(f \circ s)(x) + (g \circ s)(x) \\ &= (a \cdot \Gamma(f)(s) + \Gamma(g)(s))(x) \\ &= (a\Gamma(f) + \Gamma(g))(s)(x), \end{aligned}$$

□

Τέλος, οι αντιστοιχίες

$$\ell \rightsquigarrow \Gamma(\ell),$$

$$\text{Mor}(\ell_1, \ell_2) \ni f \rightsquigarrow \Gamma(f) \in \text{Mor}(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)),$$

έχοντας τις ιδιότητες (5.1.1) και (5.1.2), ορίζουν ένα **συναλλοίωτο συναρτητή** από την κατηγορία $VB(X)$ των διανυσματικών δεσμών, πάνω από σταθερή βάση X , στην κατηγορία $\text{Mod}(\mathbb{A}_X)$ των \mathbb{A}_X -προτύπων.

5.1.6 Πρόταση. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X) \in VB(X)$, $i = 1, 2$, τότε

$$\Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2) = \Gamma(\ell_1) \oplus \Gamma(\ell_2)$$

(μέσω ισομορφίας).

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$F : \Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2) \longrightarrow \Gamma(\ell_1) \oplus \Gamma(\ell_2) : s \mapsto (\Gamma(P_1)(s), \Gamma(P_2)(s)),$$

όπου $P_i : \ell_1 \oplus \ell_2 \rightarrow \ell_i$ είναι η κανονική προβολή (βλ. Πρόταση 2.5.2). Ελέγχεται εύκολα ότι η F είναι ισομορφισμός \mathbb{A}_X -προτύπων. □

Οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2) &= \Gamma(\ell_1) \oplus \Gamma(\ell_2), \\ \Gamma(f + g) &= \Gamma(f) + \Gamma(g), \end{aligned}$$

σημαίνουν ότι ο συναρτητής

$$\Gamma : VB(X) \longrightarrow \text{Mod}(\mathbb{A}_X)$$

είναι **προσθετικός**.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι (U, τ) είναι απλοποιούν ζεύγος της ℓ . Θεωρούμε την n -άδα των απεικονίσεων

$$\sigma_i : U \longrightarrow \pi^{-1}(U) : x \mapsto \tau^{-1}(x, e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Προφανώς αυτές είναι διαφορίσιμες τοπικές τομές πάνω από το U , δηλαδή

$$\sigma_i \in \Gamma(U, E); \quad i = 1, \dots, n.$$

Επίσης, για κάθε $x \in U$, η οικογένεια

$$\{\sigma_i(x) := \tau_x^{-1}(e_i)\}_{1 \leq i \leq n}$$

είναι **βάση του** E_x .

Έστω $\sigma \in \Gamma(U, E)$. Επειδή $\sigma(x) \in E_x$, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x) \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \cdot \sigma_i(x).$$

Ορίζεται λοιπόν μια n -άδα απεικονίσεων $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$(5.1.3) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i.$$

Οι α_i είναι διαφορίσιμες. Πράγματι, επειδή η σ είναι διαφορίσιμη, κατά το Λήμμα 5.1.3 θα είναι διαφορίσιμη και η

$$\bar{\sigma}_\tau := p_2 \circ \tau \circ \sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Οπότε η

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\tau(x) &= p_2 \circ \tau(\sigma(x)) = \tau_x(\sigma(x)) \\ &= \tau_x\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \cdot \sigma_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i \\ &= (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμη. Δηλαδή, για κάθε $\sigma \in \Gamma(U, E)$, υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη n -άδα $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{A}_U$, ώστε να ισχύει η (5.1.3). Με άλλα λόγια, η $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ είναι βάση του \mathbb{A}_U -προτύπου $\Gamma(U, E)$ ή, ισοδύναμα,

$$\Gamma(U, E) \cong \mathbb{A}_U^n.$$

Αντικαθιστώντας το U με X παίρνουμε το

5.1.7 Θεώρημα. Αν η $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ είναι τετριμμένη, τότε το $\Gamma(\ell)$ είναι ένα ελεύθερο, πεπερασμένως παραγόμενο \mathbb{A}_X -πρότυπο. Ειδικότερα, αν η ℓ έχει νήματα τύπου \mathbb{R}^n , τότε

$$\Gamma(\ell) \cong \mathbb{A}_X^n.$$

5.2 Η ισομορφία των $MOR(\ell_1, \ell_2)$ και $MOR(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$

Θα μελετήσουμε τώρα αναλυτικότερα την αντιστοιχία

$$(5.2.1) \quad \Gamma : MOR(\ell_1, \ell_2) \longrightarrow MOR(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)),$$

για δύο δεδομένες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$. Γνωρίζουμε ήδη ότι η Γ είναι \mathbb{A}_X -γραμμική απεικόνιση (Πρόταση 5.1.5). Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός \mathbb{A}_X -προτύπων.

5.2.1 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \Gamma(U, E)$. Τότε, για κάθε $x_o \in U$, υπάρχει ανοιχτό $U_o \subseteq U$ με $x_o \in U_o$ και $\tilde{s} \in \Gamma(U_o, E)$, έτσι ώστε

$$\tilde{s}(x) = s(x), \quad \forall x \in U_o.$$

Απόδειξη. Έστω $x_o \in U$ και ανοιχτά U_o, V με $x_o \in U_o \subseteq \bar{U}_o \subseteq V \subseteq \bar{V} \subset U$, καθώς και διαφορίσιμη συνάρτηση $a \in \mathbb{A}_X$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} 1 &\geq a(x) \geq 0, & \forall x \in X, \\ a(\bar{U}_o) &= 1 & \text{ και } a(V^c) = 0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση $\tilde{s} : X \rightarrow E$:

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} a(x) \cdot s(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

Είναι άμεσον ότι η \tilde{s} είναι η ζητούμενη τομή. □

5.2.2 Λήμμα. Η απεικόνιση (5.2.1) είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in MOR(\ell_1, \ell_2)$ με $\Gamma(f) = \Gamma(g)$. Θα δείξουμε ότι για τυχόν $u_o \in E_1$, είναι $f(u_o) = g(u_o)$: Έστω $x_o := \pi(u_o)$ και (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ με $x_o \in U$. Τότε υπάρχει $s \in \Gamma(U, E)$ με $s(x_o) = u_o$. Πράγματι, αν $h_o = \tau_{x_o}(u_o) \in \mathbb{R}^n$, τότε η

$$s : U \longrightarrow E : x \mapsto \tau^{-1}(x, h_o)$$

ικανοποιεί τις απαιτήσεις. Αν θεωρήσουμε και μίαν αντίστοιχη ολική τομή όπως στο Λήμμα 5.2.1, διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \gamma(f) = \Gamma(g) &\Rightarrow \Gamma(f)(\tilde{s}) = \Gamma(g)(\tilde{s}) \\ &\Rightarrow f \circ \tilde{s} = g \circ \tilde{s} \\ &\Rightarrow (f \circ \tilde{s})(x_o) = (g \circ \tilde{s})(x_o) \\ &\Rightarrow f(u_o) = g(u_o), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει ότι $f = g$. □

5.2.3 Λήμμα. Έστω $s \in \Gamma(\ell)$ και $x_o \in X$ με $s(x_o) = 0$. Τότε υπάρχει $s_i \in \Gamma(\ell)$ και $a_i \in \mathbb{A}_X$ ($i = 1, \dots, k$) με $a_i(x_o) = 0$ και

$$s = \sum_{i=1}^k a_i s_i.$$

Απόδειξη. Έστω (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ με $x_o \in U$. Για τον περιορισμό $s|_U$ υπάρχουν $b_i \in \mathbb{A}_U$, $i = 1, \dots, n$, έτσι ώστε

$$s|_U = \sum_{i=1}^n b_i s_i,$$

όπου $\{s_i\}_{1 \leq i \leq n}$ βάση του $\Gamma(U, E)$. Έστω τώρα U_o, V και a όπως στην απόδειξη του Λήμματος 5.2.1. Θέτουμε

$$\tilde{b}_i(x) := \begin{cases} a(x) \cdot b_i(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

και

$$\tilde{s}_i(x) := \begin{cases} a(x) \cdot s_i(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

Τότε $\tilde{b}_i \in \mathbb{A}_X$, $\tilde{s}_i \in \Gamma(\ell)$, $\tilde{b}_i(x_o) = 0$ [γιατί $b_i(x_o) = 0$] και

$$(5.2.2) \quad s(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x),$$

για κάθε $x \in U_o$. Ονομάζουμε s' την διαφορά

$$(5.2.3) \quad s' := s - \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \cdot \tilde{s}_i.$$

Θεωρούμε ανοιχτή περιοχή W του x_o με $\overline{W} \subset U_o$, και $b \in \mathbb{A}_X$ με $b(x_o) = 0$, $b(W^c) = 1$. Τότε, για κάθε $x \in W \subset U_o$, είναι

$$\begin{aligned} s(x) &= b(x) \cdot s'(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x) \\ &= b(x) \cdot 0 + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x), \end{aligned}$$

λόγω της (5.2.2), ενώ, για κάθε $x \in W^c$,

$$\begin{aligned} s(x) &= b(x) \cdot s'(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x) \\ &= 1 \cdot s'(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x), \end{aligned}$$

λόγω της (5.2.3). Άρα

$$s = bs' + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \cdot \tilde{s}_i,$$

με $b(x_o) = \tilde{b}_i(x_o) = 0$. □

5.2.4 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $x \in X$. Θέτουμε

$$M_x := \{s \in \Gamma(\ell) : s(x) = 0\}.$$

Τότε το M_x είναι \mathbb{A}_X - υποπρότυπο του $\Gamma(\ell)$ και

$$\Gamma(\ell)/M_x \cong E_x.$$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι M_x έχει δομή \mathbb{A}_X - προτύπου. Η απεικόνιση

$$\Phi : \Gamma(\ell) \longrightarrow E_x : s \mapsto s(x)$$

είναι επιμορφισμός διανυσματικών χώρων (για το επί εφαρμόζεται το Λήμμα 5.2.1) επομένως $E_x \cong \Gamma(\ell)/\ker \Phi$. Όμως, $\ker \Phi = M_x$, οπότε έχουμε το αποτέλεσμα. □

5.2.5 Λήμμα. Η απεικόνιση Γ , που δίνεται από την (5.2.1), είναι επί.

Απόδειξη. Έστω $F : \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2)$ ένας μορφισμός \mathbb{A}_X -προτύπων. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός στην $VB(X)$, τέτοιος ώστε $\Gamma(f) = F$.

Παρατηρούμε ότι αν, για κάθε $x \in X$,

$$M_x^i = \{s \in \Gamma(\ell_i) : s(x) = 0\}, \quad i = 1, 2,$$

τότε

$$(5.2.4) \quad F(M_x^1) \subseteq M_x^2.$$

Πράγματι, αν $s \in M_x^1$, από το Λήμμα 5.2.3 προκύπτει ότι $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i$, με $\alpha_i(x) = 0$. Επομένως,

$$F(s) = \sum_{i=1}^k \alpha_i F(s_i), \quad \text{με} \quad \alpha_i(x) = 0.$$

Άρα $F(s)(x) = 0$ και $F(s) \in M_x^2$. Η σχέση (5.2.4) σημαίνει ότι η F , για κάθε $x \in X$, επάγεται ένα μορφισμό διανυσματικών χώρων (\mathbb{R} -γραμμική απεικόνιση)

$$\hat{f}_x : \Gamma(\ell_1)/M_x^1 \longrightarrow \Gamma(\ell_2)/M_x^2 : s + M_x^1 \mapsto F(s) + M_x^2.$$

Η (5.2.4) επίσης εξασφαλίζει ότι η \hat{f}_x είναι καλά ορισμένη.

Αν συμβολίσουμε με f_x τον αντίστοιχο μορφισμό στα αντίστοιχα ισόμορφα νήματα (βλ. Λήμμα 5.2.4), δηλαδή τον

$$f_x : E_{1x} \longrightarrow E_{2x},$$

παίρνουμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\ell_1)/M_x^1 & \xrightarrow{\hat{f}_x} & \Gamma(\ell_2)/M_x^2 \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ E_{1x} & \xrightarrow{f_x} & E_{2x} \end{array}$$

Διάγραμμα 5.2

Ένα $u \in E_{1x}$ αντιστοιχεί μέσω του ισομορφισμού $\Gamma(\ell_1)/M_x^1 \cong E_{1x}$ στην κλάση $s + M_x^1$, όπου $s \in \Gamma(\ell_1)$ τυχούσα τομή με $s(x) = u$. Η \hat{f}_x απεικονίζει το $s + M_x^1$ στο $F(s) + M_x^2$ που αντιστοιχεί, μέσω του ισομορφισμού $\Gamma(\ell_2)/M_x^2 \cong E_{2x}$, στο $F(s)(x)$. Δηλαδή

$$f_x(u) = F(s)(x).$$

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$f := \bigcup_{x \in X} f_x: E_1 \longrightarrow E_2.$$

Προφανώς $\pi_2 \circ f = \pi_1$ και οι περιορισμοί της f στα νήματα, δηλαδή οι απεικονίσεις f_x , είναι γραμμικές.

Για την διαφορισιμότητα της f προχωρούμε ως εξής: Έστω $u_o \in E_{1x_o} \subseteq E_1$. Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σε μια περιοχή του u_o . Αν $x_o := \pi_1(u_o)$, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, τ) της ℓ_1 με $x_o \in U$, τις βασικές τομές $\{\sigma_i\}_{i=1, \dots, n(1)}$ της ℓ πάνω από το U , και τις ολικές επεκτάσεις τους $\tilde{\sigma}_i$ με $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i|_{U_o}$, $x_o \in U_o \subseteq U$ (βλ. Λήμμα 5.2.1). Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο U_o , δείχνοντας ότι $f \circ \tau^{-1}$ είναι διαφορίσιμη στο $U_o \times \mathbb{R}^{n(1)}$. Πράγματι, για $(x, h) \in U_o \times \mathbb{R}^{n(1)}$, είναι

$$\begin{aligned} f \circ \tau^{-1}(x, h) &= f_x(\tau_x^{-1}(h)) = f_x\left(\sum_i h_i \tau_x^{-1}(e_i)\right) \\ &= f_x\left(\sum_i h_i \sigma_i(x)\right) = \sum_i h_i f_x(\tilde{\sigma}_i(x)) \\ &= \sum_i h_i F(\tilde{\sigma}_i)(x), \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη έκφραση των x, h .

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι $\Gamma(f) = F$: για κάθε $s \in \Gamma(\ell_1)$ και $x \in X$ είναι

$$\Gamma(f)(s)(x) = (f \circ s)(x) = f_x(u = s(x)) = F(s)(x),$$

με την οποίαν κλείνει η απόδειξη. \square

Έχουμε αποδείξει επομένως το επόμενο βασικό αποτέλεσμα:

5.2.6 Θεώρημα. Η απεικόνιση

$$\Gamma: Mor(\ell_1, \ell_2) \longrightarrow Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)): f \mapsto \Gamma(f)$$

είναι ισομορφισμός \mathbb{A}_X -προτύπων, για κάθε $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$.

Σύμφωνα με την κατηγορική ορολογία, το Θεώρημα 5.2.6 σημαίνει ότι ο συναρτητής $\Gamma: VB(X) \rightarrow Mod(\mathbb{A}_X)$ είναι **πλήρως πιστός**.

Όπως συμβαίνει και με κάθε άλλο συναρτητή, αν οι δέσμες ℓ_1, ℓ_2 είναι ισομορφες, τότε και οι εικόνες τους $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)$ είναι ισομορφες. Πράγματι, αν

$$f: \ell_1 \longrightarrow \ell_2 \quad \text{και} \quad g: \ell_2 \longrightarrow \ell_1$$

είναι μορφοισμοί εν $VB(X)$ με

$$g \circ f = id_{\ell_1} \quad \text{και} \quad f \circ g = id_{\ell_2},$$

τότε, λόγω των (5.1.1) και (5.1.2), είναι

$$\Gamma(g) \circ \Gamma(f) = \Gamma(g \circ f) = \Gamma(id_{\ell_1}) = id_{\Gamma(\ell_1)}$$

και, ανάλογα,

$$\Gamma(f) \circ \Gamma(g) = id_{\Gamma(\ell_2)},$$

δηλαδή ο $\Gamma(f) : \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2)$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον $\Gamma(g)$.

Το αντίστροφο, από ισομορφες δηλαδή εικόνες να συνεπάγεται ότι είναι ισομορφα τα αρχικά αντικείμενα, δεν συμβαίνει για κάθε συναρτητή. Συμβαίνει όμως, όπως εδώ, όταν ο συναρτητής είναι πλήρως πιστός. Πράγματι, έστω $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$ με $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)$ ισομορφα εν $Mod(\mathbb{A}_X)$, και έστω $F : \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2)$ ο ισομορφισμός και $G : \Gamma(\ell_2) \rightarrow \Gamma(\ell_1)$ αντίστροφός του. Από το επί της (5.2.1) (βλ. Λήμμα 5.2.5), υπάρχουν μορφοισμοί $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ και $g : \ell_2 \rightarrow \ell_1$ με $\Gamma(f) = F$, $\Gamma(g) = G$. Τότε

$$\Gamma(f \circ g) = \Gamma(f) \circ \Gamma(g) = F \circ G = id_{\Gamma(\ell_2)} = \Gamma(id_{\ell_2})$$

και από το 1-1 της (5.2.1) (βλ. Λήμμα 5.2.2), $f \circ g = id_{\ell_2}$. Ανάλογα $g \circ f = id_{\ell_1}$, άρα οι ℓ_1, ℓ_2 είναι ισομορφες διανυσματικές δέσμες.

Επομένως, καταλήγουμε στα επόμενα συμπεράσματα :

5.2.7 Πρόρισμα. *Οι δέσμες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$ είναι ισομορφες, εάν και μόνον εάν τα αντίστοιχα πρότυπα $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2) \in Mod(\mathbb{A}_X)$ είναι ισομορφα.*

5.2.8 Πρόρισμα. *Η δέσμη $\ell \in VB(X)$ είναι τετριμμένη εάν και μόνον εάν το $\Gamma(\ell_1)$ είναι εφειδύερο πεπερασμένως παραγόμενο \mathbb{A}_X -πρότυπο.*

5.3 Το Θεώρημα Serre-Swan.

Το αναφερόμενο στον τίτλο της παραγράφου θεώρημα αποδείχτηκε από τον J.P. Serre το 1955, για αλγεβρικές διανυσματικές δέσμες πάνω από μια συσχετισμένη πολλαπλότητα (algebraic vector bundles over an affine variety) και γενικεύθηκε από τον R. Swan το 1961 για τοπολογικές διανυσματικές δέσμες πάνω από μια συμπαγή, Hausdorff βάση. Σήμερα είναι γνωστές διάφορες γενικεύσεις του για τοπολογικές και διαφορικές δέσμες με νήματα χώρους Banach, πρότυπα πάνω από μια τοπολογική άλγεβρα, ένα τοπολογικό δακτύλιο κλπ.

Σε όλη την παράγραφο, η βάση της δέσμης υποτίθεται *συμπαγής*.

5.3.1 Θεώρημα. Έστω X συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα και $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Τότε υπάρχει $\ell' = (E', \pi', X) \in VB(X)$, έτσι ώστε δέσμη $\ell \oplus \ell'$ να είναι τετριμμένη.

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \tau_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ μια πεπερασμένη απλοποιούσα κάλυψη της ℓ και $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq k}$ μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας. Αν \mathbb{R}^n είναι ο τύπος νήματος της ℓ , θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : E \longrightarrow X \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n : \\ u \mapsto (x := \pi(u), \psi_1(x) \cdot \tau_{1x}(u), \dots, \psi_k(x) \cdot \tau_{kx}(u)).$$

Η f είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών και 1-1. Πράγματι, $p_1 \circ f = \pi$ και ο περιορισμός της στο νήμα E_x είναι η k -άδα γραμμικών απεικονίσεων

$$(\psi_1(x) \cdot \tau_{1x}, \dots, \psi_k(x) \cdot \tau_{kx}).$$

Επίσης είναι διαφορίσιμη αφού κάθε συντεταγμένη της

$$u \mapsto (\psi_i \circ \pi)(u) \cdot \tau_i(u) = ((\psi_i \circ \pi) \cdot \tau_i)(u)$$

(βλ. Λήμμα 2.6.11) είναι διαφορίσιμη.

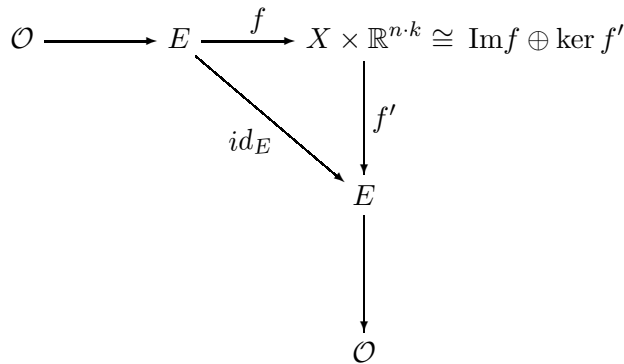
Για το 1-1, παρατηρούμε ότι η $f(u) = f(v)$ συνεπάγεται ότι

$$\pi(u) = \pi(v) =: x,$$

και

$$\psi_i(x) \cdot \tau_{ix}(u) = \psi_i(x) \cdot \tau_{ix}(v), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Η σχέση $\sum_{i=1}^k \psi_i(x) = 1$ σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα $\psi_i(x)$ είναι μη μηδενικό, και γι' αυτό το i , $\tau_{ix}(u) = \tau_{ix}(v)$, απ' όπου έπεται ότι $u = v$.



Διάγραμμα 5.3

Έστω $f' : X \times \mathbb{R}^{n-k}$ μορφοισμός επί, έτσι ώστε $f' \circ f = id_E$. Η ύπαρξη ενός τέτοιου μορφοισμού εξασφαλίζεται από την Πρόταση 2.6.12. Τότε $\text{Im } f$ και $\ker f'$ είναι υποδέσμες της $X \times \mathbb{R}^{n-k}$ (βλ. Προτάσεις 2.6.7(i) και 2.6.8) και $\text{Im } f \oplus \ker f' = X \times \mathbb{R}^{n-k}$, αφού ελέγχεται ότι η ισότητα ισχύει στα νήματα. Θέτοντας $\ell' = (\ker f', \pi', X)$ έχουμε το ζητούμενο. \square

5.3.2 Πρόρισμα. Έστω X συμπαγής διαφορική πολυπλοπότητα. Τότε, για κάθε $\ell \in VB(X)$, το $\Gamma(\ell)$ είναι προβολικό πεπερασμένως παραγόμενο \mathbb{A}_X -πρότυπο.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν $\ell', \ell_o \in VB(X)$, έτσι ώστε η $\ell' \oplus \ell_o$ να είναι τετριμμένη, με νήματα τύπου, έστω, \mathbb{R}^n . Η προσθετικότητα του συναρτητή Γ μας δίνει την

$$\Gamma(\ell) \oplus \Gamma(\ell') = \Gamma(\ell_o)$$

(βλ. Πρόταση 5.1.6). Όμως, κατά το Θεώρημα 5.1.7, $\Gamma(\ell_o) \cong \mathbb{A}_X^n$. Άρα

$$\Gamma(\ell) \oplus \Gamma(\ell') = \mathbb{A}_X^n,$$

δηλαδή το $\Gamma(\ell)$ είναι ευθύς προσθεταίος ενός ελεύθερου πεπερασμένως παραγόμενου \mathbb{A}_X -πρότυπου, συνεπώς, εξ ορισμού, είναι προβολικό πεπερασμένως παραγόμενο. \square

Αν λοιπόν η βάση X είναι συμπαγής, ο συναρτητής Γ παίρνει τις τιμές του στην υποκατηγορία $\mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$ των προβολικών πεπερασμένως παραγόμενων \mathbb{A}_X -προτύπων. Δηλαδή

$$\Gamma : VB(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A}_X) \subseteq \text{Mod}(\mathbb{A}_X).$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο Γ είναι επί του $\mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το

5.3.3 Θεώρημα. Αν X είναι συμπαγής διαφορική πολυπλοπότητα, τότε για ένα $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$ υπάρχει $\ell \in VB(X)$, έτσι ώστε $\Gamma(\ell) = M$.

Απόδειξη. Αφού $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$, υπάρχει ελεύθερο πεπερασμένως παραγόμενο \mathbb{A}_X -πρότυπο \mathbb{A}_X^m και προβολέας $P : \mathbb{A}_X^m \rightarrow \mathbb{A}_X^m$ με $\text{Im } P = M$ (βλ. Παράρτημα Γ). Τότε $M \oplus N = \mathbb{A}_X^m$, όπου $N = \ker P$. Έστω ℓ_o η τετριμμένη δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^m . Επειδή $\mathbb{A}_X^m = \Gamma(\ell_o)$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός $p : \ell_o \rightarrow \ell$ με $\Gamma(p) = P$ (βλ. Θεώρημα 5.2.6). Επειδή

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(p \circ p) = \Gamma(p)^2 = P^2 = P = \Gamma(p),$$

το 1-1 της Γ συνεπάγεται ότι ο p είναι προβολέας, άρα και ο $1 - p : \ell_o \rightarrow \ell_o$ είναι προβολέας. Θέτουμε

$$\ell := \ker(1 - p) \quad \text{και} \quad \ell' := \text{Ker } p.$$

Τότε οι ℓ και ℓ' είναι υποδέσμες της ℓ_o (βλ. Πρόταση 2.5.4) και $\ell \oplus \ell' = \ell_o$. Ισχυριζόμαστε ότι $\Gamma(\ell) = M$. Πράγματι (βλ. και Άσκηση 1, στο τέλος της παραγράφου),

$$\begin{aligned} s \in M &\Leftrightarrow \exists \tilde{s} \in \mathbb{A}_X^m : P(\tilde{s}) = s \\ &\Leftrightarrow \exists \tilde{s} \in \Gamma(\ell_o) : \Gamma(p)(\tilde{s}) = s \\ &\Leftrightarrow \exists \tilde{s} \in \Gamma(\ell_o) : p \circ \tilde{s} = s \\ &\Leftrightarrow s \in \Gamma(\ell). \end{aligned} \quad \square$$

Τα συμπεράσματα αυτής της παραγράφου συνοψίζονται πλέον στο

5.3.4 Θεώρημα (Serre-Swan). Έστω X συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα. Τότε οι κατηγορίες $VB(X)$ και $\mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$ είναι ισοδύναμες. Η ισοδυναμία τους εισάγεται από τον συναρτητή

$$\Gamma : VB(X) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(\mathbb{A}_X).$$

5.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

1. Θεωρούμε τις δέσμες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$ και το άθροισμα Whitney $\ell_1 \oplus \ell_2$. Αν $P_k : \ell_1 \oplus \ell_2 \rightarrow \ell_k$ είναι οι κανονικές προβολές και $I_k : \ell_k \rightarrow \ell_1 \oplus \ell_2$ οι κανονικές εμφυτεύσεις, να δείξετε ότι η τριάδα

$$(\Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2), \Gamma(P_1), \Gamma(P_2))$$

ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του γινομένου και η τριάδα

$$(\Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2), \Gamma(I_1), \Gamma(I_2))$$

ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του συνγινομένου των $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)$ στην κατηγορία $Mod(\mathbb{A}_X)$.

2. Δείξτε ότι τα \mathbb{A}_X -πρότυπα $Mor(\ell_1, \ell_2)$ και $\Gamma(X, L(E_1, E_2))$ (βλ. Παράδειγμα 2.3.4) είναι ισόμορφα.

3. Έστω X παρασυμπαγής διαφορική πολλαπλότητα, $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$, $U \subset X$ ανοιχτό, και $f : \ell_1|_U \rightarrow \ell_2|_U$ μορφισμός διανυσματικών δεσμών, όπου

$$\ell_k|_U := (\pi_k^{-1}(U), \pi_k|_{\pi_k^{-1}(U)}, U), \quad k = 1, 2.$$

Να δειχθεί ότι, για κάθε $x \in U$, υπάρχει μορφισμός $\tilde{f} : \ell_1 \rightarrow \ell_2$, τέτοιος ώστε $f = \tilde{f}$ τοπικά στο x .

Δομή Riemann και Συνοχές

Dedekind tells us that Gauss sat at the [Riemann's inaugural] lecture [Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry)], which surpassed all his expectations, in the greatest astonishment, and on the way back from the faculty meeting he spoke to Wilhelm Weber, with the greatest astonishment, and with an excitement rare for him, about the depth of the ideas presented by Riemann.

M. SPIVAC [25, p. 134]

Η πρώτη παράγραφος του κεφαλαίου αναφέρεται με συντομία στη δομή Riemann, βασική έννοια για τη μελέτη της Γεωμετρίας Riemann. Στη δεύτερη παράγραφο μελετάμε τις (γραμμικές) συνοχές σε μια διανυσματική δέσμη, τη συναλλοίωτη παραγωγή (που ισοδυναμεί με μία συνοχή), και την ύπαρξη συνοχής συμβιβαστής με μία δομή Riemann.

6.1 Δομή Riemann

6.1.1 Ορισμός. Έστω διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Θεωρούμε τη διανυσματική δέσμη $(L_2(E, \mathbb{R}), \tilde{\pi}, X)$ των διγραμμικών μορφών της ℓ (βλ. Παράδειγμα 2.3.2). Ονομάζουμε **(διαφορίσιμη) δομή Riemann** της ℓ κάθε (διαφορίσιμη) τομή

$$g : X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}),$$

τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$, η απεικόνιση

$$g_x := g(x) : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{R},$$

να είναι *εσωτερικό γινόμενο*.

Με άλλα λόγια, μια δομή Riemann είναι μια οικογένεια εσωτερικών γινομένων $\{g_x\}_{x \in X}$ ορισμένων στα νήματα της ℓ . Η διαφορισιμότητα αυτής της οικογένειας ορίζεται εδώ ως διαφορισιμότητα της τομής

$$X \ni x \longmapsto g_x \in L_2(E, \mathbb{R}).$$

Στην κλασική γεωμετρία (της εφαπτόμενης δέσμης), η διαφορισιμότητα αυτή εκφράζονταν με έναν άλλο τρόπο. Στην Πρόταση 6.1.4 θα δείξουμε ότι οι δύο προσεγγίσεις της διαφορισιμότητας είναι ισοδύναμες. Όμως, προηγουμένως χρειαζόμαστε τα επόμενα δύο λήμματα.

6.1.2 Λήμμα. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα, $U \subseteq X$ ανοιχτό και μια απεικόνιση

$$b : U \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Η b είναι διαφορίσιμη, εάν και μόνον εάν, για κάθε ζεύγος διαφορίσιμων απεικονίσεων $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, η απεικόνιση

$$b_{fg} : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto b_{fg}(x) := b(x)(f(x), g(x))$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Για το ευθύ, παρατηρούμε ότι

$$b(x)(f(x), g(x)) = ev \circ (b, f, g)(x),$$

όπου η απεικόνιση

$$ev : L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (u, h, k) \mapsto u(h, k)$$

είναι διαφορίσιμη ως τριγραμμική.

Για το αντίστροφο, παρατηρούμε ότι, λόγω του ισομορφισμού

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : u \mapsto (u_{ij}) := (u(e_i, e_j)),$$

η διαφορισμότητα της b είναι ισοδύναμη με τη διαφορισμότητα της

$$x \mapsto b_{ij}(x) = b(x)(e_i, e_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Όμως

$$b_{ij}(x) = b_{fg}(x),$$

όπου τώρα $f(x) = e_i$ και $g(x) = e_j$ (σταθερές). Άρα κάθε b_{ij} είναι διαφορίσιμη. \square

6.1.3 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Αν H είναι ο ολικός χώρος του αθροίσματος Whitney $L_2(E, \mathbb{R}) \oplus E \oplus E$, τότε η απεικόνιση

$$Ev : H \longrightarrow \mathbb{R} : (b, u, v) \mapsto b(u, v)$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^n και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Πάνω από κάθε U_i , η $L_2(E, \mathbb{R}) \oplus E \oplus E$ έχει μια απλοποίηση της μορφής

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i : \tilde{\pi}^{-1}(U_i) &:= \bigcup_{x \in U_i} L_2(E_x, \mathbb{R}) \oplus E_x \oplus E_x \longrightarrow U_i \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \\ (b, u, v) &\mapsto \tilde{\tau}_i(b, u, v) := (x, b \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}), \tau_{ix}(u), \tau_{ix}(v)), \end{aligned}$$

για κάθε $(b, u, v) \in L_2(E_x, \mathbb{R}) \oplus E_x \oplus E_x$. Η Ev είναι διαφορίσιμη στο $\tilde{\pi}^{-1}(U_i)$ εάν και μόνον εάν $Ev \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Όμως

$$\begin{aligned} Ev \circ \tilde{\tau}_i^{-1} : U_i \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} : \\ Ev \circ \tilde{\tau}_i^{-1}(x, u, h, k) &= Ev(u \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}), \tau_{ix}^{-1}(h), \tau_{ix}^{-1}(k)) \\ &= u(h, k) = ev(u, h, k), \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη ως τριγραμμική (βλ. και απόδειξη του προηγούμενου λήμματος). \square

6.1.4 Πρόταση. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $g : X \rightarrow L_2(E, \mathbb{R})$ μια δομή Riemann. Τότε η g είναι διαφορίσιμη εάν και μόνον εάν, για κάθε $s, \sigma \in \Gamma(X, E)$, η απεικόνιση

$$G_{s, \sigma} : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g_x(s(x), \sigma(x))$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Για το ευθύ, παρατηρούμε ότι

$$g_x(s(x), \sigma(x)) = Ev \circ (g, s, \sigma)(x),$$

άρα είναι διαφορίσιμη, για κάθε $s, \sigma \in \Gamma(X, E)$ (βλ. Λήμμα 6.1.3).

Για το αντίστροφο, θεωρούμε τον περιορισμό της g σε ένα απλοποιούν ζεύγος $(U, \tilde{\tau})$ και δείχνουμε ότι $\tilde{\tau} \circ g$ (όπως στο Διάγραμμα 6.1) είναι διαφορίσιμη.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & U \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ \uparrow g & \nearrow & \\ U & & \end{array}$$

Διάγραμμα 6.1

Επειδή

$$\tilde{\tau} \circ g(x) = (x, g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1})), \quad \forall x \in U,$$

προφανώς η $\tilde{\tau} \circ g$ είναι διαφορίσιμη, αν είναι διαφορίσιμη η

$$(6.1.1) \quad U \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : x \mapsto g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1}).$$

Θεωρούμε $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμες και την απεικόνιση

$$U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1})(f(x), g(x)).$$

Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} s : U &\longrightarrow \pi^{-1}(U) : x \mapsto \tau_x^{-1}(f(x)) = \tau^{-1}(x, f(x)), \\ \sigma : U &\longrightarrow \pi^{-1}(U) : x \mapsto \tau_x^{-1}(g(x)) = \tau^{-1}(x, g(x)) \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμες τοπικές τομές της ℓ , άρα και η

$$g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1})(f(x), g(x)) = g_x(s(x), \sigma(x)) = G_{s,\sigma}(x)$$

είναι διαφορίσιμη από την υπόθεση, οπότε η (6.1.1) είναι διαφορίσιμη (βλ. Λήμμα 6.1.2), και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Μια ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει την ύπαρξη διαφορίσιμης δομής Riemann σε μια δέσμη είναι η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας στη βάση της δέσμης. Συγκεκριμένα, έχουμε το

6.1.5 Θεώρημα. Αν X είναι παρασυμπαγής διαφορική πολλαπλότητα, τότε κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ εφοδιάζεται με διαφορίσιμη δομή Riemann.

Απόδειξη. Έστω ότι η ℓ έχει νήματα τύπου \mathbb{R}^n . Έστω ακόμη ότι $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ είναι μια τοπικά πεπερασμένη απλοποιούσα κάλυψη της ℓ και $\{\psi_i\}_{i \in I}$ μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας. Θεωρούμε ένα εσωτερικό γινόμενο α του \mathbb{R}^n και, για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την τοπική τομή της $L_2(E, \mathbb{R})$

$$g_i : U_i \longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U_i) : x \mapsto g_i(x) := \tilde{\tau}_i^{-1}(x, \alpha).$$

Η g_i προφανώς είναι μια τοπική διαφορίσιμη δομή Riemann. Θέτουμε

$$g = \sum_i \psi_i \cdot g_i : X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}).$$

Η g είναι ολική διαφορίσιμη τομή της $L_2(E, \mathbb{R})$. Επίσης, ελέγχεται αμέσως ότι, για κάθε $x \in X$, το g_x είναι εσωτερικό γινόμενο. \square

Η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη διαφορίσιμης δομής Riemann. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη δίνεται από το παρακάτω Θεώρημα 6.1.7. Προηγουμένως όμως χρειαζόμαστε τον επόμενο ορισμό.

6.1.6 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ μια διαφορίσιμη διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου \mathbb{R}^n , και α ένα εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^n . Έστω ακόμη $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$ η υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$ που διατηρεί το α , δηλαδή

$$(GL(n, \mathbb{R}), \alpha) = \{f \in GL(n, \mathbb{R}) : \alpha(f(x), f(y)) = \alpha(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Λέμε ότι η **δομική ομάδα** $GL(n, \mathbb{R})$ της ℓ **ανάγεται** στην $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$, αν υπάρχει απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ της ℓ , τέτοια ώστε

$$T_{ji}(x) \in (GL(n, \mathbb{R}), \alpha), \quad \forall i, j \in I \text{ και } x \in U_i \cap U_j.$$

Η προηγούμενη σχέση ισοδυναμεί με την

$$(6.1.2) \quad \alpha(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(h), \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k)) = \alpha(h, k),$$

για κάθε $i, j \in I$, $x \in U_i \cap U_j$, και $h, k \in \mathbb{R}^n$.

6.1.7 Θεώρημα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ με νήματα τύπου \mathbb{R}^n . Η ℓ δέχεται μια διαφορίσιμη δομή Riemann εάν και μόνον εάν η δομική ομάδα της ανάγεται στην $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$, για κάποιο εσωτερικό γινόμενο α του \mathbb{R}^n .

Απόδειξη. Έστω ότι α είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^n και $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ μια απλοποιούσα κάλυψη της ℓ , ώστε να ισχύει η (6.1.2). Έστω $x \in X$. Θεωρούμε ένα $i \in I$ με $x \in U_i$ και θέτουμε

$$g(x) := \alpha \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}).$$

Το $g(x)$ είναι εσωτερικό γινόμενο του E_x . Επίσης είναι ανεξάρτητο του $i \in I$. Πράγματι, αν $x \in U_j$, $j \in I$, τότε η σχέση (6.1.2) δίνει ότι

$$\alpha \circ (\tau_{jx} \times \tau_{jx}) = \alpha \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}), \quad \forall i, j \in I : x \in U_i \cap U_j.$$

Άρα η απεικόνιση

$$g : X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}) : x \mapsto g(x)$$

είναι μια καλά ορισμένη δομή Riemann. Είναι και διαφορίσιμη, αφού ο περιορισμός της σε κάθε U_i είναι η

$$g(x) = \alpha \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}) = \tilde{\tau}_i^{-1}(x, \alpha),$$

που είναι διαφορίσιμη τομή.

Αντίστροφα, έστω g μια διαφορίσιμη δομή Riemann της ℓ , και $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ τυχαία απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U_i, τ_i) . Για κάθε $x \in U_i$, η απεικόνιση

$$(6.1.3) \quad g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^n . Συμβολίζουμε με \langle, \rangle το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^n . Τότε, αν M_{ix} είναι ο πίνακας του (6.1.3), για κάθε $x \in U_i$ και $h, k \in \mathbb{R}^n$, είναι

$$\begin{aligned} g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(h, k) &= h M_{ix} k^t = \\ &= h M_{ix}^{1/2} \cdot (M_{ix}^{1/2})^t k^t = (h M_{ix}^{1/2})(k M_{ix}^{1/2})^t. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$f_{ix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : h \mapsto f_{ix}(h) := h \cdot M_{ix}^{1/2},$$

οπότε διαπιστώνουμε ότι

$$(6.1.4) \quad \begin{aligned} g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(h, k) &= f_{ix}(h) \cdot (f_{ix}(k))^t \\ &= \langle f_{ix}(h), f_{ix}(k) \rangle. \end{aligned}$$

Δηλαδή, βρίσκουμε ότι

$$(6.1.5) \quad g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(f_{ix}^{-1} \times f_{ix}^{-1}) = \langle , \rangle, \quad \forall x \in U_i.$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$U_i \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : x \mapsto g_x \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})$$

είναι διαφορίσιμη, γιατί

$$(6.1.6) \quad g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}) = p_2 \circ \tilde{\tau}_i \circ g(x)$$

Επειδή η αντιστοιχία

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : b \mapsto (b_{ij}) := (b(e_i, e_j))$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός, η διαφορισιμότητα της (6.1.6) είναι ισοδύναμη με την διαφορισιμότητα της

$$U_i \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : x \mapsto M_{ix},$$

άρα και της

$$U_i \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : x \mapsto M_{ix}^{1/2},$$

επομένως και της

$$U_i \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto f_{ix},$$

αφού και η αντιστοιχία

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : f \mapsto (f_{ij}) := (pr_j(f(e_i)))$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Εξάλλου, οι πίνακες M_{ix} , $M_{ix}^{1/2}$ είναι αντιστρέψιμοι, δηλαδή ο f_{ix} είναι γραμμικός ισομορφισμός. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f_{ix} : U_i \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, f_{ix}(h)).$$

Βάσει του Λήμματος 2.2.3, έχουμε ότι η f_{ix} είναι ισομορφισμός τετριμμένων δεσμών. Άρα το $(U_i, f_i \circ \tau_i)$ είναι απλοποιούν ζεύγος. Θεωρούμε τώρα την απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, f_i \circ \tau_i)\}_{i \in I}$. Αυτή υλοποιεί την αναγωγή της δομικής ομάδας της ℓ στην $(GL(n, \mathbb{R}), \langle , \rangle)$. Πράγματι, για κάθε $h, k \in \mathbb{R}^n$, είναι:

$$\begin{aligned} & \langle (f_{jx} \circ \tau_{jx}) \circ (f_{ix} \circ \tau_{ix})^{-1}(h), (f_{jx} \circ \tau_{jx}) \circ (f_{ix} \circ \tau_{ix})^{-1}(k) \rangle \\ &= \langle f_{jx}(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(h)), f_{jx}(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(k)) \rangle \\ & \stackrel{(6.1.4)}{=} g_x \circ (\tau_{jx}^{-1} \times \tau_{jx}^{-1})(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(h), \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(k)) \\ &= g_x \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(f_{ix}^{-1}(h), f_{ix}^{-1}(k)) \stackrel{(6.1.4)}{=} \langle h, k \rangle. \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν \hat{T}_{ji} είναι οι απεικονίσεις μεταφοράς της νέας απλοποιούσας κάλυψης $\{(U_i, f_i \circ \tau_i)\}_{i \in I}$, βρήκαμε ότι

$$\langle \hat{T}_{ji}(x)(h), \hat{T}_{ji}(x)(k) \rangle = \langle h, k \rangle, \quad \forall h, k \in \mathbb{R}^n,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

6.2 Συνοχές και συναλλοιώτη παραγώγιση

6.2.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Θεωρούμε και την δέσμη

$$L(\ell_X, \ell) = (L(TX, E), \pi_L, X)$$

των γραμμικών απεικονίσεων από την εφαπτόμενη δέσμη $\ell_X = (TX, \pi_X, X)$ στην δέσμη ℓ (βλ. Παράδειγμα 2.3.4). Ονομάζουμε (γραμμική) **συνοχή** της ℓ μία γραμμική απεικόνιση

$$\mathcal{D} : \Gamma(X, E) \rightarrow \Gamma(X, L(TX, E)),$$

η οποία ικανοποιεί τη **συνθήκη Leibniz**

$$\mathcal{D}(fs) = (df) \cdot s + f \cdot \mathcal{D}s,$$

για κάθε $s \in \Gamma(X, E)$ και $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$.

Στην τελευταία σχέση, $(df) \cdot s$ συμβολίζει την τομή με

$$((df) \cdot s)(x)(v) = v(f) \cdot s(x),$$

για κάθε $x \in X$ και $v \in T(X, x)$.

6.2.2 Θεώρημα. Έστω X παρασυμπαγής διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Τότε κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ διαθέτει συνοχή \mathcal{D} .

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ μια τοπικά πεπερασμένη απλοποιούσα κάλυψη της ℓ και $\{\psi_i\}_{i \in I}$ μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας. Για κάθε $i \in I$ θεωρούμε τις βασικές τομές

$$\sigma_{ik} : U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) : x \mapsto \tau_i^{-1}(x, e_k),$$

$k = 1, \dots, n$, όπου n είναι η τάξη της δέσμης (: διάσταση του νήματος). Τότε, κάθε τοπική τομή $\sigma \in \Gamma(U_i, E)$ γράφεται μονοσήμαντα με τη μορφή

$$\sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik}.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i : \Gamma(U_i, E) &\longrightarrow \Gamma(U_i, L(TU_i, E)) : \\ \sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik} &\longmapsto \mathcal{D}_i(\sigma) := \sum_k (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}. \end{aligned}$$

Η \mathcal{D}_i είναι καλά ορισμένη, επειδή, για κάθε $x \in U_i$ και $v \in T(X, x)$, είναι

$$(\mathcal{D}_i \sigma)(x)(v) = \sum_k v(\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}(x),$$

δηλαδή η $(\mathcal{D}_i \sigma)(x) : T(X, x) \rightarrow E_x$ είναι γραμμική απεικόνιση και μεταβάλλεται διαφορίσιμα ως προς x .

Επίσης, η \mathcal{D}_i είναι γραμμική. Πράγματι, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και οποιεσδήποτε τομές

$$\sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik}, \quad s = \sum_k b_k \sigma_{ik} \in \Gamma(U_i, E),$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(\lambda\sigma + \mu s) &= \mathcal{D}_i\left(\sum_k (\lambda\alpha_k + \mu b_k) \sigma_{ik}\right) \\ &= \sum_k d(\lambda\alpha_k + \mu b_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= \lambda \sum_k (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik} + \mu \sum_k (db_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= \lambda \mathcal{D}_i(\sigma) + \mu \mathcal{D}_i(s). \end{aligned}$$

Τέλος, η \mathcal{D}_i ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz: αν $\sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik} \in \Gamma(U_i, E)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \mathbb{R})$, τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(f\sigma) &= \mathcal{D}_i\left(\sum_k f \alpha_k \sigma_{ik}\right) = \sum_k d(f \alpha_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= \sum_k f (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik} + \sum_k (df) \alpha_k \cdot \sigma_{ik} \\ &= f \sum_k (d\alpha_k) \sigma_{ik} + (df) \sum_k \alpha_k \sigma_{ik} \\ &= f \mathcal{D}_i \sigma + (df) \cdot \sigma. \end{aligned}$$

Άρα, κάθε \mathcal{D}_i είναι συνοχή της $(\pi^{-1}(U_i), \pi, U_i)$, οπότε η

$$\mathcal{D} := \sum_i \psi_i \mathcal{D}_i,$$

είναι συνοχή της ℓ , όπως ελέγχεται αμέσως. □

6.2.3 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$, εφοδιασμένη με δομή Riemann g και συνοχή \mathcal{D} . Λέμε ότι η \mathcal{D} είναι **συμβιβαστή** με τη δομή g αν (βλ. και συμβολισμό της Πρότασης 6.1.4)

$$g_x(\mathcal{D}s(x)(v), \sigma(x)) + g_x(s(x), \mathcal{D}\sigma(x)(v)) = v(g_x(s(x), \sigma(x))) = v(G_{s,\sigma}),$$

για κάθε $s, \sigma \in \Gamma(X, E)$, $x \in X$ και $v \in T(X, x)$.

6.2.4 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$, εφοδιασμένη με δομή Riemann g και $U \subseteq X$ ανοιχτό. Ένα **ορθοκανονικό πλαίσιο επί του U** είναι μια βάση $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ του $\Gamma(U, E)$, τέτοια ώστε $\{\sigma_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ να είναι ορθοκανονική βάση του (E_x, g_x) , για κάθε $x \in U$.

6.2.5 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$, εφοδιασμένη με δομή Riemann g και $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ μια απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Τότε, πάνω από κάθε U_i , η ℓ δέχεται ορθοκανονικό πλαίσιο.

Απόδειξη. Από την αρχική απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μιά άλλη $\{(U_i, \hat{\tau}_i)\}_{i \in I}$, της οποίας οι περιορισμοί $\hat{\tau}_{ix}$ στα νήματα να έχουν την ιδιότητα

$$g_x \circ (\hat{\tau}_{ix}^{-1} \times \hat{\tau}_{ix}^{-1})(h, k) = \langle h, k \rangle, \quad \forall x \in U_i \cap U_j \text{ και } h, k \in \mathbb{R}^n,$$

όπου \langle, \rangle είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^n (βλ. Απόδειξη Θεωρήματος 6.1.7). Τότε οι τοπικές τομές

$$\sigma_{ik} : U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) : x \mapsto \hat{\tau}_i^{-1}(x, e_k)$$

αποτελούν ορθοκανονικό πλαίσιο επί του U_i . Πράγματι,

$$\begin{aligned} g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{i\ell}(x)) &= g_x(\hat{\tau}_{ix}^{-1}(e_k), \hat{\tau}_{ix}^{-1}(e_\ell)) = \\ &= g_x \circ (\hat{\tau}_{ix}^{-1} \times \hat{\tau}_{ix}^{-1})(e_k, e_\ell) = \langle e_k, e_\ell \rangle = \delta_{k\ell}. \end{aligned} \quad \square$$

6.2.6 Θεώρημα. Έστω X παρασυμπαγής διαφορική πολλαπλότητα, μία διαυσματική δέσμη $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$ και g δομή Riemann της ℓ . Τότε η ℓ δέχεται συνοχή \mathcal{D} συμβιβαστή με την g .

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \hat{\tau}_i)\}_{i \in I}$ η απλοποιούσα κάλυψη της ℓ , η οποία υλοποιεί την αναγωγή της δομικής ομάδας στην $(GL(n, \mathbb{R}), \langle, \rangle)$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι τοπικά πεπερασμένη και υπάρχει μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας $\{\psi_i\}_{i \in I}$. Για κάθε $i \in I$ θεωρούμε τις τοπικές τομές

$$\sigma_{ik} : U_i \longrightarrow E : x \mapsto \sigma_{ik}(x) := \hat{\tau}_i^{-1}(x, e_k).$$

Αυτές (κατά το Λήμμα 6.2.5) αποτελούν ορθοκανονικό πλαίσιο επί του U_i . Θεωρούμε επίσης τις τοπικές συνοχές \mathcal{D}_i που κατασκευάζονται όπως στο Θεώρημα 6.2.2, και το άθροισμα

$$\mathcal{D} := \sum_i \psi_i \mathcal{D}_i.$$

Θα δείξουμε ότι η τελευταία συνοχή είναι συμβιβαστή με την g .

Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε \mathcal{D}_i είναι συμβιβαστή με την $g|_{U_i}$. Πράγματι, αν

$$\sigma, s \in \Gamma(U_i, E) \quad \text{με} \quad \sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik} \quad \text{και} \quad s = \sum_k b_k \sigma_{ik},$$

τότε, για κάθε $x \in U_i$ και $v \in T(X, x)$, είναι

$$\begin{aligned} & g_x(\mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)) + g_x(\sigma(x), \mathcal{D}_i s(x)(v)) \\ &= g_x\left(\mathcal{D}_i\left(\sum_k \alpha_k \sigma_{ik}\right)(x)(v), \left(\sum_k b_k \sigma_{ik}\right)(x)\right) + \\ & \quad + g_x\left(\left(\sum_k \alpha_k \sigma_{ik}\right)(x), \mathcal{D}_i\left(\sum_k b_k \sigma_{ik}\right)(x)(v)\right) \\ &= g_x\left(\left(\sum_k (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}\right)(x)(v), \sum_k b_k(x) \cdot \sigma_{ik}(x)\right) + \\ & \quad + g_x\left(\sum_k \alpha_k(x) \sigma_{ik}(x), \left(\sum_k (db_k) \cdot \sigma_{ik}\right)(x)(v)\right) \\ &= g_x\left(\sum_k v(\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}(x), \sum_j b_j \cdot \sigma_{ij}(x)\right) + \\ & \quad + g_x\left(\sum_k \alpha_k(x) \cdot \sigma_{ik}(x), \sum_j v(b_j) \cdot \sigma_{ij}(x)\right) \\ &= \sum_{k,j} v(\alpha_k) \cdot b_j(x) \cdot g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{ij}(x)) + \\ & \quad + \sum_{k,j} \alpha_k(x) \cdot v(b_j) \cdot g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{ij}(x)) \\ &= \sum_{k,j} v(\alpha_k) \cdot b_j(x) \cdot \delta_{kj} + \sum_{k,j} \alpha_k(x) \cdot v(b_j) \cdot \delta_{kj} \\ &= \sum_k v(\alpha_k) b_k(x) + \sum_k \alpha_k(x) v(b_k) \\ &= \sum_k \left(v(\alpha_k) \cdot b_k(x) + \alpha_k(x) \cdot v(b_k)\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_k v(\alpha_k b_k) = v\left(\sum_k \alpha_k b_k\right).$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G_{\sigma,s}(x) &= g_x(\sigma(x), s(x)) \\ &= g_x\left(\sum_k \alpha_k(x) \sigma_{ik}(x), \sum_j b_j(x) \sigma_{ij}(x)\right) \\ &= \sum_{kj} \alpha_k(x) b_j g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{ij}(x)) \\ &= \sum_{kj} (x) \alpha_k(x) b_j(x) \delta_{kj} = \sum_{kj} (x) \alpha_k(x) b_j(x) \\ &= \left(\sum_k \alpha_k b_k\right)(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, καταλήγουμε στη σχέση

$$\sum_k \alpha_k b_k = G_{\sigma,s},$$

που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι και $\mathcal{D} := \sum_i \psi_i \mathcal{D}_i$ είναι συμβιβαστή με την g . Έστω $\sigma, s \in \Gamma(X, E)$, $x \in X$ και $v \in T(X, x)$. Τότε

$$\begin{aligned} &g_x(\mathcal{D}\sigma(x)(v), s(x)) + g_x(\sigma(x), \mathcal{D}s(x)(v)) \\ &= g_x\left(\sum_i \psi_i(x) \mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)\right) + \\ &\quad + g_x\left(\sigma(x), \sum_i \psi_i(x) \mathcal{D}_i s(x)(v)\right) \\ &= \sum_i \psi_i(x) \cdot g_x(\mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)) + \\ &\quad + \sum_i \psi_i(x) \cdot g_x(\sigma(x), \mathcal{D}_i s(x)(v)) \\ &= \sum_i \psi_i(x) \cdot [g_x(\mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)) + g_x(\sigma(x), \mathcal{D}_i s(x)(v))] \\ &= \sum_i \psi_i(x) \cdot v(G_{\sigma,s}) = \left(\sum_i \psi_i(x)\right) \cdot v(G_{\sigma,s}) \\ &= v(G_{\sigma,s}) \end{aligned}$$

□

6.2.7 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$, $\mathfrak{X}(X)$ ο χώρος των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του X και $\Gamma(X, E)$ οι διαφορίσιμες τομές της ℓ . Καλούμε **συναλλοίωτη παραγωγή** της ℓ μία διγραμμική απεικόνιση

$$\nabla : \mathfrak{X}(X) \times \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, E) : (\xi, \sigma) \mapsto \nabla_{\xi} \sigma$$

που έχει τις ιδιότητες :

$$(i) \nabla_{f\xi} \sigma = \nabla_{\xi} \sigma$$

$$(ii) \nabla_{\xi} f\sigma = f \cdot \nabla_{\xi} \sigma + \xi(f) \cdot \sigma,$$

για κάθε $f \in C^{\infty}(X, \mathbb{R})$, $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\sigma \in \Gamma(X, E)$.

Στην βιβλιογραφία συναντά κανείς τους όρους συνοχή και συναλλοίωτη παραγωγή να χρησιμοποιούνται αδιακρίτως και για τις δύο απεικονίσεις \mathcal{D} και ∇ των ορισμών 6.2.1 και 6.2.7. Αυτό συμβαίνει γιατί \mathcal{D} και ∇ είναι ουσιαστικά ο ίδιος τελεστής. Για να το δείξουμε αυτό χρειαζόμαστε μια σειρά από βοηθητικά αποτελέσματα.

6.2.8 Λήμμα. Έστω ∇ μια συναλλοίωτη παραγωγή της διανυσματικής δέσμης $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$, $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ και $\sigma \in \Gamma(X, E)$. Αν $A \subseteq X$ ανοιχτό με $\xi|_A = 0$ ή $\sigma|_A = 0$, τότε $\nabla_{\xi} \sigma|_A = 0$.

Απόδειξη. Έστω $x \in A$. Υπάρχει ανοιχτό V , με $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq A$, και διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{\bar{V}} = 1, f|_{A^c} = 0.$$

i) Αν $\xi|_A = 0$, τότε $f\xi = 0$, επομένως

$$\nabla_{f\xi} \sigma = f \nabla_{\xi} \sigma = 0,$$

άρα

$$(\nabla_{f\xi} \sigma)_x = f(x) \cdot (\nabla_{\xi} \sigma)_x = 0.$$

ii) Αν $\sigma|_A = 0$, τότε $f\sigma = 0$, άρα

$$\nabla_{\xi} (f\sigma) = f \nabla_{\xi} \sigma + \xi(f) \cdot \sigma = 0,$$

επομένως

$$(\nabla_{\xi} f\sigma)_x = f(x) \cdot (\nabla_{\xi} \sigma)_x + \xi_x(f) \cdot \sigma(x) = 0.$$

Όμως $f(x) = 1$ και f σταθερή σε μια περιοχή του x , οπότε $\xi_x(f) = 0$. Συνεπώς,

$$(\nabla_{\xi} f\sigma)_x = (\nabla_{\xi} \sigma)_x = 0,$$

που κλείνει την απόδειξη. □

6.2.9 Πρόσμα. Έστω ∇ συναλληλοϊωτη παραγώγιση της $\ell \in VB(X)$ και $A \subseteq X$ ανοιχτό. Αν $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(X)$ με $\xi = \eta|_A$, τότε

$$\nabla_{\xi} \sigma = \nabla_{\eta} \sigma|_A, \quad \forall \sigma \in \Gamma(X, E).$$

Επίσης, αν $\sigma, s \in \Gamma(X, E)$ με $\sigma = s|_A$, τότε

$$\nabla_{\xi} \sigma = \nabla_{\xi} s|_A, \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(X).$$

6.2.10 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ∇ είναι μια συναλληλοϊωτη παραγώγιση της $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$ και $x \in X$. Αν $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(X)$ με $\xi(x) = \eta(x)$, τότε

$$(\nabla_{\xi} \sigma)_x = (\nabla_{\eta} \sigma)_x,$$

για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ με $\xi(x) = 0$, τότε $(\nabla_{\xi} \sigma)_x = 0$, για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$. Έστω λοιπόν (U, φ) χάρτης της βάσης X με $x \in U$. Τότε

$$\xi|_U = \sum_{i=1}^m \xi_i \vartheta_i,$$

όπου $\{\vartheta_i\}_{1 \leq i \leq m}$ τα βασικά διανυσματικά πεδία που ορίζει ο (U, φ) . Θεωρούμε ανοιχτές περιοχές V, W του x με $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ και συνάρτηση $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, τέτοια ώστε $f|_{\overline{V}} = 1$ και $f|_{W^c} = 0$. Θέτουμε

$$\tilde{\xi}_i = f \xi_i \quad \text{και} \quad \tilde{\vartheta}_i = f \vartheta_i.$$

Αν $\tilde{\xi} := \sum_i \tilde{\xi}_i \tilde{\vartheta}_i$, τότε

$$\tilde{\xi} = \xi|_V,$$

άρα, για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$ και $z \in V$, είναι

$$(\nabla_{\xi} \sigma)(z) = (\nabla_{\tilde{\xi}} \sigma)(z) = (\nabla_{\sum_i \tilde{\xi}_i \tilde{\vartheta}_i} \sigma)(z) = \sum_i \tilde{\xi}_i(z) (\nabla_{\tilde{\vartheta}_i} \sigma)(z).$$

Επομένως, για $z = x$, η υπόθεση $\xi(x) = 0$, που συνεπάγεται ότι

$$\tilde{\xi}_i(x) = \xi_i(x) = 0,$$

δίνει ότι

$$(\nabla_{\xi} \sigma)(x) = 0,$$

ολοκληρώντας την απόδειξη. □

6.2.11 Θεώρημα. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$. Η ℓ έχει μια συνοχή \mathcal{D} εάν και μόνον εάν έχει συναλληλοϊώτη παραγωγή ∇ .

Απόδειξη. Έστω \mathcal{D} μια συνοχή της ℓ . Ορίζουμε την

$$\nabla: \mathfrak{X}(X) \times \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, E) : (\xi, \sigma) \mapsto \nabla_\xi \sigma,$$

όπου, για κάθε $x \in X$,

$$(\nabla_\xi \sigma)_x := (\mathcal{D}\sigma)(x)(\xi_x).$$

Ελέγχεται αμέσως ότι ∇ είναι μια καλά ορισμένη συναλλοϊώτη παραγωγή της διανυσματικής δέσμης ℓ .

Αντιστρόφως, αν δίνεται μία ∇ , ορίζουμε την

$$\mathcal{D} : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, L(TX, E)) : \sigma \mapsto \mathcal{D}\sigma,$$

όπου, για κάθε $x \in X$ και $v \in T(X, x)$,

$$(\mathcal{D}\sigma)(x)(v) := (\nabla_\xi \sigma)(x),$$

με ξ τυχαίο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο, για το οποίο $\xi(x) = v$. Η προηγούμενη Πρόταση 6.2.10 εξασφαλίζει ότι η τιμή $(\mathcal{D}\sigma)(x)(v)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του ξ . Άρα η \mathcal{D} είναι καλά ορισμένη. Ελέγχεται εύκολα ότι είναι συνοχή. \square

6.2.12 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$ με δομή Riemann g και συναλλοϊώτη παραγωγή ∇ . Η ∇ καλείται **συμβιβαστή** με την g , αν (βλ. συμβολισμό Πρότασης 6.1.4)

$$g_x(\nabla_\xi \sigma(x), s(x)) + g_x(\sigma(x), \nabla_\xi s(x)) = \xi_x(G_{\sigma, s}),$$

για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\sigma, s \in \Gamma(X, E)$ και $x \in X$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάμεσα στις συνοχές και τις συναλλοϊώτες παραγωγίσεις, αποδεικνύουμε αμέσως την

6.2.13 Πρόταση. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$ εφοδιασμένη με μία δομή Riemann g . Τότε ισχύουν τα επόμενα:

i) Αν \mathcal{D} είναι συνοχή της ℓ συμβιβαστή με την g , η επαγόμενη συναλληλοϊώτη παραγωγή ∇ είναι συμβιβαστή με την g .

ii) Αν ∇ είναι μια συναλληλοϊώτη παραγωγή της ℓ συμβιβαστή με την g , τότε η επαγόμενη συνοχή \mathcal{D} είναι συμβιβαστή με την g .

Θα τελειώσουμε αυτή την παράγραφο (και το κεφάλαιο), εξετάζοντας αναλυτικότερα την *τοπική* μορφή μιας συναλλοίωτης παραγώγισης. Έχουμε πρώτα το επόμενο

6.2.14 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, X, \pi) \in VB(X)$ εφοδιασμένη με μια συναλλοίωτη παραγώγιση ∇ . Τότε, σε κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό, η ∇ ορίζει μια τοπική συναλλοίωτη παραγώγιση

$$\nabla_A : \mathfrak{X}(A) \times \Gamma(A, E) \longrightarrow \Gamma(A, E),$$

έτσι ώστε, για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\sigma \in \Gamma(X, E)$ και $x \in A$, να είναι

$$\nabla_A(\xi|_A, \sigma|_A)(x) = (\nabla_\xi \sigma)(x).$$

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό. Ορίζουμε την

$$\nabla_A : \mathfrak{X}(A) \times \Gamma(A, E) \longrightarrow \Gamma(A, E)$$

ως εξής : Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(A)$, $\sigma \in \Gamma(A, E)$ και $x \in A$. Θεωρούμε ανοιχτό V με $x \in V \subseteq A$ και $\tilde{\xi} \in \mathfrak{X}(X)$, $\tilde{\sigma} \in \Gamma(X, E)$ με $\tilde{\xi} = \xi|_V$ και $\tilde{\sigma} = \sigma|_V$. Τέτοια V , $\tilde{\xi}$ και $\tilde{\sigma}$ πάντοτε υπάρχουν (βλ. Λήμμα 5.2.1). Θέτουμε

$$\nabla_A(\xi, \sigma)(x) := (\nabla_{\tilde{\xi}} \tilde{\sigma})(x).$$

Λόγω του Πορίσματος 6.2.9, η ∇_A είναι καλά ορισμένη, και βέβαια είναι συναλλοίωτη παραγώγιση. \square

Ας θεωρήσουμε τώρα τον περιορισμό μιας συναλλοίωτης παραγώγισης ∇ της $\ell = (E, \pi, X)$ στο ανοιχτό $U \subseteq X$, πάνω από το οποίο ορίζονται ένας χάρτης (U, φ) της X και μία απλοποιούσα κάλυψη (U, τ) της ℓ . Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο ∇ και για τον περιορισμό. Αν $\{\vartheta_i\}_{1 \leq i \leq m}$ και $\{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq n}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathfrak{X}(U)$ και $\Gamma(U, E)$, τότε κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(U)$ και $\sigma \in \Gamma(X, E)$ γράφονται με την αντίστοιχη μορφή

$$\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i \vartheta_i \quad \text{και} \quad \sigma = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_j.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \sigma &= \nabla_\xi \sum_j \alpha_j \sigma_j = \sum_j \nabla_\xi \alpha_j \sigma_j \\ &= \sum_j (\xi(\alpha_j) \cdot \sigma_j + \alpha_j \nabla_\xi \sigma_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_j \xi(\alpha_j) \cdot \sigma_j + \sum_j \alpha_j \nabla_{\sum_i \xi_i \vartheta_i} \sigma_j \\
&= \sum_j \xi(\alpha_j) \cdot \sigma_j + \sum_{ij} \alpha_j \xi_i \nabla_{\vartheta_i} \sigma_j.
\end{aligned}$$

Εφόσον $\nabla_{\vartheta_i} \sigma_j \in \Gamma(U, E)$, θα υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n,$$

έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$(6.2.1) \quad \nabla_{\vartheta_i} \sigma_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \sigma_k.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
(6.2.2) \quad \nabla_{\xi} \sigma &= \sum_k \xi(\alpha_k) \sigma_k + \sum_{ijk} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \sigma_k \\
&= \sum_k \left(\xi(\alpha_k) + \sum_{ij} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k.
\end{aligned}$$

Οι Γ_{ij}^k καλούνται **συναρτήσεις Christoffel** της ∇ πάνω από το U , και ορίζονται από την ∇ μέσω της (6.2.1).

Όμως και αντιστρόφως, κάθε οικογένεια διαφορίσιμων συναρτήσεων

$$\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R} : i = 1, \dots, m; j, k = 1, \dots, n,$$

ορίζει μία τοπική συνοχή μέσω του τύπου (6.2.2). Πράγματι, αν

$$\begin{aligned}
\xi &= \sum_i \xi_i \vartheta_i, \quad \eta = \sum_i \eta_i \vartheta_i \in \mathfrak{X}(U), \\
f, g &\in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}), \quad \sigma = \sum_j \alpha_j \sigma_j \in \Gamma(U, E),
\end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned}
\nabla_{f\xi + g\eta} \sigma &= \sum_k ((f\xi + g\eta)(\alpha_k) + \sum_{ij} (f\xi_i + g\eta_i) \alpha_j \Gamma_{ij}^k) \sigma_k \\
&= f \sum_k \left(\xi(\alpha_k) + \sum_{ij} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k + \\
&\quad + g \sum_k \left(\eta(\alpha_k) + \sum_{ij} \eta_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
&= f \nabla_{\xi} \sigma + g \nabla_{\eta} \sigma,
\end{aligned}$$

δηλαδή, η ∇ είναι $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ -γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή. Απ' το άλλο μέρος, αν

$$\begin{aligned} \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \xi = \sum_i \xi_i \vartheta_i \in \mathfrak{X}(U), \\ \sigma = \sum_j \alpha_j \sigma_j, \quad s = \sum_j b_j \sigma_j \in \Gamma(U, E), \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} \nabla_\xi (\lambda \sigma + \mu s) &= \sum_k (\xi(\lambda \alpha_j + \mu b_j) + \sum_{ij} \xi_i (\lambda \alpha_j + \mu b_j) \Gamma_{ij}^k) \sigma_k \\ &= \lambda \sum_k (\xi(\alpha_j) + \sum_{ij} \xi_i \alpha_j + \sum_{ij} \xi_i (\lambda \alpha_j \Gamma_{ij}^k)) \sigma_k + \\ &\quad + \mu \sum_k (\xi(b_j) + \sum_{ij} \xi_i b_j \Gamma_{ij}^k) \sigma_k \\ &= \lambda \nabla_\xi \sigma + \mu \nabla_\xi s, \end{aligned}$$

δηλαδή η ∇ είναι \mathbb{R} -γραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή της. Τέλος, αν

$$\sigma = \sum_j \alpha_j \sigma_j \in \Gamma(U, E), \quad \xi = \sum_i \xi_i \vartheta_i \in \mathfrak{X}(U), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}),$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \nabla_\xi f \sigma &= \sum_k (\xi(f \alpha_k) + \sum_{ij} \xi_i \cdot f \alpha_j \cdot \Gamma_{ij}^k) \sigma_k \\ &= \sum_k (\xi(f) \cdot \alpha_k + f \xi(\alpha_k) + \sum_{ij} f \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k) \sigma_k \\ &= \sum_k \xi(f) \alpha_k \sigma_k + \sum_k f (\xi(\alpha_k) + \sum_{ij} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k) \sigma_k \\ &= \xi(f) \cdot \sigma + f \nabla_\xi \sigma, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

6.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6.

1. Η ℓ έχει διαφορίσιμη δομή Riemann τότε και μόνον τότε, αν υπάρχει διαφορίσιμη $\alpha : E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η $\alpha_x := \alpha|_{E_x \oplus E_x}$ να είναι εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x \in X$.

2. Αν η δομική ομάδα της ℓ ανάγεται στη $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$, για κάποιο α , τότε ανάγεται στην $(GL(n, \mathbb{R}), \beta)$, για κάθε β .
3. Αν ℓ_i ($i = 1, 2$) έχει δομή Riemann g_i , τότε και η $\ell_1 \oplus \ell_2$ έχει δομή Riemann.
4. Αν ℓ_i ($i = 1, 2$) έχει συνοχή \mathcal{D}_i , τότε έχει συνοχή και η $\ell_1 \oplus \ell_2$.
5. Αν ℓ_i ($i = 1, 2$) έχει δομή Riemann g_i και συνοχή \mathcal{D}_i συμβιβάσιμες, τότε οι επαγόμενες δομές στην $\ell_1 \oplus \ell_2$ είναι συμβιβάσιμες.
6. Αν η g είναι δομή Riemann στην $\ell_1 \oplus \ell_2$, επάγονται δομές Riemann στις ℓ_1, ℓ_2 ;
7. Αν η \mathcal{D} είναι συνοχή της $\ell_1 \oplus \ell_2$, ορίζει συνοχές στις ℓ_1, ℓ_2 ;
8. Αν οι τοπικές συνοχές \mathcal{D} και $\widehat{\mathcal{D}}$, που ορίζονται πάνω από τα ανοιχτά U και \widehat{U} , μέσω των αντιστοιχών συναρτήσεων Christoffel $\{\Gamma_{ij}^k\}$ και $\{\widehat{\Gamma}_{ij}^k\}$, συμπίπτουν στο $U \cap \widehat{U}$, να βρεθεί η σχέση των $\{\Gamma_{ij}^k\}$ με τις $\{\widehat{\Gamma}_{ij}^k\}$.

Παραρτήματα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A'

Συμπληρωματικές Αποδείξεις

Στο παράρτημα αυτό δίνουμε τις αποδείξεις μερικών αποτελεσμάτων, που έχουν παραλειφθεί στην κύρια έκθεση. Παρουσιάζουμε επίσης και κάποιες παραλλαγές αποδείξεων, οι οποίες βασίζονται στην ιδιαίτερη δομή των πρωτευσουσών δεσμών, ενώ στο Κεφάλαιο 3 (όπως και στις αρχικές σημειώσεις μας [3]) στηρίζονταν σε γενικότερα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 1.

A.1 Απόδειξη του Λήμματος 3.6.7 (της Συγκόλλησης).

Έστω \mathcal{A}_i ο άτλαντας που ορίζει την διαφορική δομή του X_i . Θεωρούμε στο X την οικογένεια

$$\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

Θα δείξουμε ότι \mathcal{A} είναι διαφορικός άτλας του X .

Προφανώς το \mathcal{A} αποτελεί κάλυψη του X .

Για να είναι οι χάρτες του \mathcal{A} διαφορικά συμβιβάσιμοι, πρέπει και αρκεί κάθε χάρτης του \mathcal{A}_i να είναι διαφορικά συμβιβάσιμος με κάθε χάρτη του \mathcal{A}_j για κάθε

$i, j \in I$. Έστω $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i$ και $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}_j$. Παρατηρούμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i \subseteq X_i \text{ ανοιχτό} \\ X_i \cap X_j \subseteq X_i \text{ ανοιχτό} \end{array} \right\} \Rightarrow U_i \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \text{ ανοιχτό.}$$

Όμως $X_i \cap X_j \subseteq X_i$ ανοιχτό και $U_i \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \cap X_j$, οπότε

$$U_i \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \cap X_j \text{ ανοιχτό}$$

και, ανάλογα,

$$U_j \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \cap X_j \text{ ανοιχτό}$$

συνεπώς

$$U_i \cap U_j = (U_i \cap U_j) \cap (X_i \cap X_j) \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i \cap X_j \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i.$$

Δηλαδή

$$U_i \cap U_j \subseteq U_i \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i \quad \text{και} \quad U_i \cap U_j \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i.$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $U_i \cap U_j$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του U_i , όπως και το $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, ως εικόνα ανοιχτού συνόλου μέσω του ομοιομορφισμού. Όμοια και το $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτό.

Η απεικόνιση

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

είναι αμφιδιαφόριση, ως τοπική παράσταση της αμφιδιαφόρισης

$$id_{X_i \cap X_j} : (X_i \cap X_j, \mathcal{A}_i|_{X_i \cap X_j}) \longrightarrow (X_i \cap X_j, \mathcal{A}_j|_{X_i \cap X_j}).$$

Είναι προφανές ότι ο περιορισμός του άτλαντα \mathcal{A} σε κάθε X_i δίνει ακριβώς τον άτλαντα \mathcal{A}_i . \square

A.2 Μία ισοδύναμη διατύπωση του Λήμματος της Συγκόλλησης.

Έστω X ένα σύνολο και μία οικογένεια υποσυνόλων $X_i \subseteq X$, $i \in I$, με $X = \bigcup X_i$. Έστω (Y_i, \mathcal{B}_i) διαφορετικές πολλαπλότητες και $f_i: X_i \rightarrow (Y_i, \mathcal{B}_i)$ απεικονίσεις 1-1, επί, μέσω των οποίων ορίζουμε τους άτλαντες \mathcal{A}_i αντιστοίχως στα X_i . Υποθέτουμε ότι

ι) Κάθε $X_i \cap X_j$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X_i και του X_j ,

ii) Η απεικόνιση $f_i \circ f_i^{-1}: Y_i \supseteq f_i(X_i \cap X_j) \longrightarrow f_j(X_i \cap X_j) \subseteq Y_i$ είναι αμφιδιαφόριση για κάθε $i, j \in I$ με $X_i \cap X_j \neq \emptyset$.

Τότε το X δέχεται μια (μοναδική) δομή διαφορικής πολυπλοπότητας, έτσι ώστε η (X_i, \mathcal{A}_i) να είναι ανοιχτή υποπολυπλοπότητα και η $f_i: (X_i, \mathcal{A}_i) \rightarrow (Y_i, \mathcal{B}_i)$ αμφιδιαφόριση, για κάθε $i \in I$.

A.3 Μία παραλλαγή της απόδειξη της Πρότασης 3.3.6.

Έστω $\bar{U} \subseteq B$ ανοιχτό και $s: \bar{U} \rightarrow P$ διαφορίσιμη τομή. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\Psi}: \bar{U} \times B \rightarrow \pi^{-1}(\bar{U}): (x, g) \mapsto s(x) \cdot g,$$

για την οποίαν διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

1) Η $\bar{\Psi}$ είναι καλά ορισμένη, επειδή

$$(x, g) \in \bar{U} \times G \Rightarrow s(x) \in \pi^{-1}(x) \Rightarrow s(x) \cdot g \in \pi^{-1}(x) \subseteq \pi^{-1}(\bar{U}).$$

2) Η $\bar{\Psi}$ είναι διαφορίσιμη, αφού $\bar{\Psi} = \delta \circ (s \times id_G)$.

3) Η $\bar{\Psi}$ είναι 1-1: Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\bar{\Psi}(x, g) = \bar{\Psi}(x', g')$, τότε $s(x) \cdot g = s(x') \cdot g'$. Όμως $s(x) \cdot g \in \pi^{-1}(x)$ και $s(x') \cdot g' \in \pi^{-1}(x')$, τα δε νήματα $\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x')$ ή είναι ξένα, ή συμπίπτουν. Επομένως, $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(x')$ και $x = x'$, οπότε $s(x) \cdot g = s(x) \cdot g'$. Επειδή η δράση είναι γνήσια μεταβατική στα νήματα, η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $g = g'$, άρα και $(x, g) = (x', g')$.

4) Η $\bar{\Psi}$ είναι επί: Έστω $p \in \pi^{-1}(\bar{U})$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x \in \bar{U}$ τέτοιο ώστε $p \in \pi^{-1}(x)$. Εξάλλου, αφού $s(x) \in \pi^{-1}(x)$, θα υπάρχει επίσης ένα μοναδικό $g \in G$ έτσι ώστε

$$p = s(x) \cdot g = \bar{\Psi}(x, g),$$

που αποδεικνύει το επί.

5) Η $\bar{\Psi}$ είναι αμφιδιαφόριση: Έστω $p \in \pi^{-1}(\bar{U})$. Για να δείξουμε ότι η $\bar{\Psi}$ είναι αμφιδιαφορίσιμη στο p , αρκεί να δείξουμε ότι η

$$\Phi \circ \bar{\Psi}: \bar{U} \cap U \times G \rightarrow \bar{U} \cap U \times G$$

είναι αμφιδιαφορίσιμη, όπου (U, Ψ) είναι απλοποιούν ζεύγος με $\pi(p) = x \in U$ και $\Phi^{-1} = \Psi$.

Η $\Phi \circ \bar{\Psi}$ είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση διαφορίσιμων. Παρατηρούμε ότι

$$(\Phi \circ \bar{\Psi})(y, h) = \Phi(s(y) \cdot h) =: (y', h') \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
(p_1 \circ \Phi(s(y) \cdot h), p_2 \circ \Phi(s(y) \cdot h)) &= (y', h') \Leftrightarrow \\
(\pi(s(y) \cdot h), \Phi_y(\pi(s(y)) \cdot h)) &= (y', h') \Leftrightarrow \\
(y, \Phi_y(s(y)) \cdot h) &= (y', h') \Leftrightarrow \\
y = y' \text{ και } \Phi_y(s(y)) \cdot h &= h'.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \bar{\Psi})^{-1}(y', h') &= (y, h) = (y', \Phi_{y'}(s(y'))^{-1} \cdot h') = \\
&= (y', \gamma \circ (\alpha \circ p_2 \circ \Phi \circ s \times id_G)(y', h'))
\end{aligned}$$

δηλαδή η $(\Phi \circ \bar{\Psi})^{-1}$ είναι διαφορίσιμη, οπότε έχουμε και τη ζητούμενη αμφι-διαφοριστικότητα.

6) Η ιδιότητα $\pi \circ \bar{\Psi} = p_1$ είναι προφανής.

7) Η $\bar{\Psi}$ είναι G -ισομεταβλητή, αφού, για κάθε $x \in \bar{U}$ και $g, g' \in G$ έχουμε:

$$\bar{\Psi}(x, gg') = s(x) \cdot gg' = (s(x) \cdot g) \cdot g' = \bar{\Psi}(x, g) \cdot g'.$$

8) Η s είναι φυσική τομή του απλοποιούντος ζεύγους $(\bar{U}, \bar{\Psi})$. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με \bar{s} τη φυσική τομή του ζεύγους αυτού, προκύπτει ότι

$$\bar{s}(x) := \bar{\Psi}(x, e) = s(x) \cdot e = s(x), \quad \forall x \in \bar{U}. \quad \square$$

Στην απόδειξη του Λήμματος 3.3.5, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το νηματικό γινόμενο $P \times_B P$ έχει τη δομή πολλαπλότητας, παραπέμποντας στο γενικότερο αποτέλεσμα Θεώρημα 1.4.7. Λόγω του ότι η P είναι πρωτεύουσα δέσμη, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το προηγούμενο νηματικό γινόμενο έχει δομή πρωτεύουσας δέσμης (άρα και διαφορική δομή), χωρίς να ανατρέξουμε στη γενική θεωρία του Κεφαλαίου 1. Συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο

A.4 Θεώρημα. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ μια κύρια δέσμη. Θεωρούμε το νηματικό γινόμενο

$$P \times_B P := \{(p, q) \in P \times P : \pi(p) = \pi(q)\} = \bigcup_{x \in B} (\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)),$$

την απεικόνιση

$$\hat{\pi} : P \times_B P \longrightarrow B : (p, q) \mapsto \pi(p) = \pi(q),$$

και τη δράση

$$\hat{\delta} : (P \times_B P) \times (G \times G) \longrightarrow P \times_B P : ((p, q), (g, h)) \mapsto (pg, qh).$$

Τότε η τετράδα $(P \times_B P, G \times G, B, \hat{\pi})$ δέχεται δομή πρωτεύουσας δέσμης.

Απόδειξη. Έστω (U, Φ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ . Στο

$$\hat{\pi}^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} (\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)) \subseteq P \times_B P$$

θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} : \hat{\pi}^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \times G : \\ (p, q) &\mapsto (x := \pi(p) = \pi(q), \Phi_x(p), \Phi_x(q)). \end{aligned}$$

Η $\hat{\Phi}$ είναι 1-1 :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(p, q) = \hat{\Phi}(p', q') &\Rightarrow \\ (x := \pi(p), \Phi_x(p), \Phi_x(q)) = (x' := \pi(p'), \Phi_{x'}(p'), \Phi_{x'}(q')) &\Rightarrow \\ x = x', \Phi_x(p) = \Phi_x(p'), \Phi_x(q) = \Phi_x(q') &\Rightarrow \\ p = p', q = q'. \end{aligned}$$

Η $\hat{\Phi}$ είναι επί: αν $(x, g, h) \in U \times G \times G$, επειδή η Φ_x είναι επί, υπάρχουν $p, q \in \pi^{-1}(x)$, τέτοια ώστε $\Phi_x(p) = g$, $\Phi_x(q) = h$, άρα $\hat{\Phi}(p, q) = (x, g, h)$.

Αφού η $\hat{\Phi}$ είναι απεικόνιση 1-1 επί της πολλαπλότητας $U \times G \times G$, η δομή της τελευταίας θα μεταφέρεται στο $\pi^{-1}(U)$, που εφοδιάζεται πλέον με δομή διαφορικής πολλαπλότητας εις τρόπον ώστε η $\hat{\Phi}$ να είναι αμφιδιαφόριση. Επειδή τα απλοποιούντα ζεύγη (U, Φ) καλύπτουν το B , οι αντίστροφες εικόνες τους καλύπτουν το $P \times_B P$. Επιπλέον, αν (U_1, Φ_1) , (U_2, Φ_2) είναι δύο απλοποιούντα ζεύγη της ℓ , με $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, τότε το

$$\hat{\Phi}_1(\hat{\pi}^{-1}(U_1) \cap \hat{\pi}^{-1}(U_2)) = \hat{\Phi}(\hat{\pi}^{-1}(U_1 \cap U_2)) = (U_1 \cap U_2) \times G \times G$$

είναι ανοιχτό στο $U_1 \times G \times G$ οπότε και το $\hat{\pi}^{-1}(U_1 \cap U_2) = \hat{\Phi}_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \times G$ είναι ανοιχτό στο $\hat{\pi}^{-1}(U_1)$, ως εικόνα ανοιχτού μέσω ομοιομορφισμού. Όμοια το $\hat{\pi}^{-1}(U_1 \cap U_2) \subseteq \hat{\pi}^{-1}(U_2)$ είναι ανοιχτό. Επίσης η απεικόνιση

$$\hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1^{-1} : U_1 \cap U_2 \times G \times G \rightarrow U_1 \cap U_2 \times G \times G$$

δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1^{-1}(x, g, h) &= \hat{\Phi}_2(\Phi_{1x}^{-1}(g), \Phi_{1x}^{-1}(h)) \\ &= (x, \Phi_{2x}(\Phi_{1x}^{-1}(g)), \Phi_{2x}(\Phi_{1x}^{-1}(h))) \\ &= (x, p_2 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(x, g), p_2 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(x, h)), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη, άρα και αμφιδιαφορίση. Συνεπώς, κατά το Λήμμα της Συγκόλλησης, υπάρχει στο $P \times_B P$ μοναδική δομή διαφορικής πολλαπλότητας, ως προς την οποίαν οι $\hat{\Phi}$ είναι αμφιδιαφορίσεις.

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τρίγωνα

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & U \times G \times G \\ & \searrow \hat{\pi} & \downarrow p_1 \\ & & U \end{array}$$

Διάγραμμα Α.1

είναι μεταθετικά, απ' όπου προκύπτει ότι η $\hat{\pi}$ τοπικά είναι σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, άρα είναι (ολικά) διαφορίσιμη.

Σχετικά με την δράση $\hat{\delta}$ παρατηρούμε ότι τα τετράγωνα

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}^{-1}(U) \times G \times G & \xrightarrow{\hat{\delta}} & \hat{\pi}^{-1}(U) \\ \hat{\Phi} \times id_{G \times G} \downarrow & & \downarrow \hat{\Phi} \\ (U \times G \times G) \times (G \times G) & \xrightarrow{\delta_o} & U \times G \times G \end{array}$$

Διάγραμμα Α.2

είναι μεταθετικά, όπου δ_o είναι η φυσική δράση $(x, g, g) \cdot (h, h') := (x, gh, g'h')$. Πράγματι, για κάθε $(p, q, g, h) \in \hat{\pi}^{-1}(U) \times G \times G$, είναι

$$\begin{aligned} \delta_o \circ (\hat{\Phi} \times id_{G \times G})(p, q, g, h) &= \delta_o (x = \pi(p), \Phi_x(p), \Phi_x(q), g, h) \\ &= (x, \Phi_x(p)g, \Phi_x(q)h) \\ &= (x, \Phi_x(pg), \Phi_x(qh)) \\ &= \hat{\Phi}(pg, qh) \\ &= \hat{\Phi} \circ \hat{\delta}(p, q, g, h), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται και η (τοπική) διαφορισιμότητα της

$$\hat{\delta} = \hat{\Phi}^{-1} \circ \delta_o \circ (\hat{\Phi} \times id_{G \times G}),$$

άρα και η ολική διαφορισιμότητα, καθώς και η $G \times G$ -ισομεταβλητότητα των απεικονίσεων $\hat{\Phi}$. \square

Με τη βοήθεια της δομής πρωτεύουσας δέσμης επί του νηματικού γινομένου $P \times_B P$, που βρήκαμε προηγουμένως, μπορούμε να δώσουμε και μίαν

A.5 Άλλη απόδειξη του Λήμματος 3.3.5

Αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις (βλ. και το επόμενο διάγραμμα) $k \circ \widehat{\Phi}^{-1} : U \times G \times G \rightarrow G$ είναι διαφορίσιμες.

$$\begin{array}{ccc}
 P \times_B P \supseteq \widehat{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{k} & G \\
 \widehat{\Phi}^{-1} \uparrow & \nearrow k \circ \widehat{\Phi}^{-1} & \\
 U \times G \times G & &
 \end{array}$$

Διάγραμμα A.3

Πράγματι, για τυχόν $(x, g, h) \in U \times G \times G$ θέτουμε

$$\bar{g} := k \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x, g, h) = k(\Phi_x^{-1}(g), \Phi_x^{-1}(h)).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \Phi_x^{-1}(g) \cdot \bar{g} &= \Phi_x^{-1}(h) \Leftrightarrow \\
 \Phi_x(\Phi_x^{-1}(g) \cdot \bar{g}) &= \Phi_x(\Phi_x^{-1}(h)) \Leftrightarrow \\
 \Phi_x(\Phi_x^{-1}(g)) \cdot \bar{g} &= h \Leftrightarrow g\bar{g} = h \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$k(g, h) = \bar{g} = g^{-1}h,$$

άρα η k είναι διαφορίσιμη πάνω από κάθε $\widehat{\pi}^{-1}(U)$, συνεπώς και ολικά διαφορίσιμη. \square

Στο Θεώρημα 3.5.2 ορίσαμε δομή πρωτεύουσας δέσμης επί του νηματικού γινομένου $B' \times_B P$, αφού θεωρήσαμε ότι το τελευταίο είναι διαφορική πολλαπλότητα, σύμφωνα με το γενικό Θεώρημα 1.4.7. Όπως και στο Θεώρημα A.4, θα δείξουμε ότι μπορούμε να παρακάμψουμε τη γενική θεωρία του νηματικού γινομένου, εκμεταλλευόμενοι τη δομή της δέσμης P . Ακριβέστερα, δίνουμε μίαν

A.6 Άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.2.

i) Έστω (U, Φ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ . Θέτουμε $V := h^{-1}(U)$ και στο σύνολο

$$\pi^*(V) = \{(x', p) \in V \times P : h(x') = \pi(p)\}$$

ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi^* : \pi^*(V) \longrightarrow V \times G : (x', p) \mapsto (x', \Phi_{x:=h(x')}(p)).$$

Η Φ^* κάνει το επόμενο τρίγωνο μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{*-1}(V) & \xrightarrow{\Phi^*} & V \times G \\ & \searrow \pi^* & \downarrow p_1 \\ & & V \end{array}$$

Διάγραμμα Α.4

Η Φ^* είναι 1-1: Έστω $(x', p), (y', q) \in \pi^{*-1}(V)$ με $\Phi^*(x', p) = \Phi^*(y', q)$. Τότε

$$\begin{aligned} \Phi^*(x', p) = \Phi^*(y', q) &\Rightarrow (x', \Phi_x(p)) = (y', \Phi_y(q)) \Rightarrow \\ &x' = y', \quad x = h(x') = h(y') = y \\ &\text{και } \Phi_x(p) = \Phi_x(q), \quad \text{άρα } p = q. \end{aligned}$$

Η Φ^* είναι επί: Για τυχόν $(x', g) \in V \times G$, η αντίστοιχη $\Phi_x : \pi^{-1}(x) \rightarrow G$ είναι αμφιδιαφόριση, άρα υπάρχει μοναδικό $p \in \pi^{-1}(x)$ με $\Phi_x(p) = g$. Τότε $(x', p) \in \pi^{*-1}(V)$ και

$$\Phi^*(x', p) = (x', \Phi_x(p)) = (x', g).$$

Βάσει των προηγούμενων, η Φ^* (με μεταφορά της δομής πολλαπλότητας του $V \times G$) εφοδιάζει το $\pi^{*-1}(V)$ με δομή διαφορικής πολλαπλότητας, ως προς την οποία είναι (η Φ^*) αμφιδιαφόριση.

Αν τώρα $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ είναι απλοποιούσα κάλυψη της ℓ , τότε τα σύνολα $\{\pi^{*-1}(V_i)\}_{i \in I}$ καλύπτουν το $B' \times_B P := h^*(P)$. Η τομή

$$\pi^{*-1}(V_i) \cap \pi^{*-1}(V_j) = \pi^{*-1}(V_i \cap V_j) = \Phi_i^{*-1}(V_i \cap V_j \times G)$$

είναι ανοιχτό στο $\pi^{*-1}(V_i)$ ως εικόνα του ανοιχτού $V_i \cap V_j \times G \subseteq V_i \times G$ μέσω της αμφιδιαφόρισης Φ_i^{*-1} . Ομοίως είναι ανοιχτό στο $\pi^{*-1}(V_j)$.

Επιπλέον, η απεικόνιση

$$\Phi_j^* \circ \Phi_i^{*-1} : V_i \cap V_j \times G \longrightarrow V_i \cap V_j \times G$$

είναι αμφιδιαφόριση. Πράγματι, για $(x', g) \in V_i \cap V_j \times G$, είναι

$$\begin{aligned} \Phi_j^* \circ \Phi_i^{*-1}(x', g) &= \Phi_j^*(x', \Phi_{ix}^{-1}(g)) \\ &= (x', \Phi_{jx} \circ \Phi_{ix}^{-1}(g)) \\ &= (x', p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(x, g)) \\ &= (p_1, p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} \circ (h \times id_G))(x', g), \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε διαφορίσιμη απεικόνιση ως σύνθεση διαφορισίμων. Όμοια και η $\Phi_i^* \circ \Phi_j^{*-1}$ είναι διαφορίσιμη. Επομένως, από το Λήμμα της Συγκόλλησης, υπάρχει στο $h^*(P)$ μοναδική δομή διαφορικής πολλαπλότητας, που κάνει τις Φ^* αμφιδιαφορίσεις.

Η μεταθετικότητα του Διαγράμματος Α.4 μας δίνει ότι η π^* είναι τοπικά (άρα και ολικά) διαφορίσιμη, αφού (τοπικά) γράφεται ως σύνθεση διαφορισίμων απεικονίσεων, δηλαδή $\pi^* = p_1 \circ \Phi^*$.

Σχετικά με την δράση δ^* παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα (για όλα τα V)

$$\begin{array}{ccc} \pi^{*-1}(V) \times G & \xrightarrow{\delta^*} & \pi^{*-1}(V) \\ \Phi^* \times id_G \downarrow & & \downarrow \Phi^* \\ (V \times G) \times G & \xrightarrow{\delta_o} & V \times G \end{array}$$

Διάγραμμα Α.5

είναι μεταθετικά: για κάθε $((x', p), g) \in \pi^{*-1}(V) \times G$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta_o(\Phi^* \times id_G((x', p), g)) &= \delta_o(x', \Phi_x(p), g) \\ &= (x', \Phi_x(p) \cdot g) \\ &= (x', \Phi_x(pg)) \\ &= \Phi^*(x', pg) \\ &= \Phi^*(\delta^*((x', p), g)), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η διαφορισιμότητα της δ^* τοπικά (άρα και ολικά), όπως και η G -ισομεταβλητότητα της Φ^* .

Τα προηγούμενα αποδεικνύουν ότι η $\ell^* = (h^*(P), G, B', \pi^*)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη. Κάθε νήμα της έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \pi^{*-1}(x') &= \{(x', p) \in B' \times_B P : \pi(p) = h(x') = x\} \\ &= \{x'\} \times \pi^{-1}(x), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι ισομορφο με το αντίστοιχο $\pi^{-1}(x)$, με $x = h(x')$.

ii) Η απεικόνιση $h^* : h^*(P) \rightarrow P$ είναι διαφορίσιμη, εάν και μόνον εάν κάθε "τοπική παράσταση" $\Phi \circ h^* \circ \Phi^{*-1}$ είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, για κάθε $(x', g) \in V \times V \times G$, είναι (βλ. και το επόμενο διάγραμμα)

$$\begin{array}{ccccc}
 V \times G & \xleftarrow{\Phi^*} & \pi^{*-1}(V) & \xrightarrow{h^*} & \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times G \\
 & \searrow p_1 & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi & & \swarrow p_1 \\
 & & V & \xrightarrow{h} & U & &
 \end{array}$$

Διάγραμμα Α.6

$$\begin{aligned}
 \Phi \circ h^* \circ \Phi^{*-1}(x', g) &= \Phi \circ h^*(x', \Phi_x^{-1}(g)) \\
 &= \Phi(\Phi_x^{-1}(g)) \\
 &= \Phi \circ \Phi^{-1}(x, g) = (x, g) \\
 &= (h \times id_G)(x'g).
 \end{aligned}$$

Εξάλλου, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 h^*(P) & \xrightarrow{h^*} & P \\
 \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi \\
 B' & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

Διάγραμμα Α.7

είναι προφανώς μεταθετικό και η h^* είναι G -ισομεταβλητή, αφού

$$h^*((x', p) \cdot g) = h^*(x', pg) = pg = h^*(x', p) \cdot g,$$

για κάθε $(x'p) \in h^*(P)$ και $g \in G$. Άρα η

$$(h^*, id_G, h) : h^*(\ell) \rightarrow \ell$$

ορίζει μορφισμό πρωτεύουσών δεσμών.

iii) Έστω $\ell_1 = (P_1, G, B', \pi_1)$ πρωτεύουσα δέσμη, και ένας μορφισμός $(f, id_G, h) : \ell_1 \rightarrow \ell$. Εξ ορισμού, έχουμε ότι

$$\pi \circ f = h \circ \pi_1,$$

άρα, για κάθε $p_1 \in P_1$, είναι $\pi(f(p_1)) = h(\pi_1(p_1))$. Αυτό σημαίνει ότι

$$(\pi_1(p_1), f(p_1)) \in B' \times_B P,$$

δηλαδή η απεικόνιση $(\pi_1, f) : P_1 \rightarrow B' \times_B P$ παίρνει τιμές στο $B' \times_B P$.

Θέτουμε τώρα $\bar{\pi} := (\pi_1, f)$. Η $\bar{\pi}$ είναι διαφορίσιμη εάν και μόνον εάν κάθε σύνθεση της μορφής

$$\Phi^* \circ \bar{\pi} : \pi_1^{-1}(V) \rightarrow V \times G$$

είναι διαφορίσιμη. Έχουμε, για κάθε $p_1 \in \pi_1^{-1}(V)$ με $\pi_1(p_1) = x' \in V$:

$$\begin{aligned} \Phi^* \circ \bar{\pi}(p_1) &= \Phi^*(\pi_1(p_1), f(p_1)) \\ &= \Phi^*(x', f(p_1)) \\ &= (x', \Phi_x(f(p_1))) \\ &= (\pi_1, p_2 \circ \Phi \circ f)(p_1), \end{aligned}$$

δηλαδή η $\Phi^* \circ \bar{\pi}$ είναι πράγματι σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, άρα η $\bar{\pi}$ είναι διαφορίσιμη.

Η (προφανής) σχέση $\pi^* \circ \bar{\pi} = \pi_1$ δίνει την μεταθετικότητα του τετραγώνου

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\bar{\pi}} & h^*(P) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi^* \\ B' & \xrightarrow{id_{B'}} & B' \end{array}$$

Διάγραμμα Α.8

ενώ η G -ισομεταβλητότητα της $\bar{\pi}$ ελέγχεται ως εξής: για κάθε $p_1 \in P_1$ και $g \in G$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(p_1 g) &= (\pi_1(p_1 g), f(p_1 g)) = (\pi_1(p_1), f(p_1) \cdot g) \\ &= (\pi_1(p_1), f(p_1)) \cdot g = \bar{\pi}(p_1) \cdot g \end{aligned}$$

Επομένως η τριάδα

$$(\bar{\pi}, id_G, id_{B'}) : \ell_1 \longrightarrow \ell^*$$

είναι G - B' -(ισο)μορφισμός.

Τέλος, αν $\tilde{\pi} : P_1 \rightarrow h^*(P)$ είναι μια άλλη διαφορίσιμη απεικόνιση, τέτοια ώστε η $(\tilde{\pi}, id_G, id_{B'}) : \ell_1 \rightarrow \ell^*$ να είναι μορφισμός με $h^* \circ \tilde{\pi} = f$, η μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc}
 P_1 & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & h^*(P) \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi^* \\
 B' & \xrightarrow{id_{B'}} & B'
 \end{array}$$

Διάγραμμα Α.9

δίνει ότι $\pi^* \circ \tilde{\pi} = \pi_1$, άρα

$$\tilde{\pi} = (p_1 \circ \tilde{\pi}, p_2 \circ \tilde{\pi}) = (\pi^* \circ \tilde{\pi}, h^* \circ \tilde{\pi}) = (\pi_1, f) = \bar{\pi},$$

με την οποίαν και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Κατηγορίες και Συναρτητές

Το παράρτημα αυτό περιέχει μερικές θεμελιώδεις έννοιες από τη Θεωρία των Κατηγοριών, που εμφανίζονται στα προηγούμενα κεφάλαια. Δεν δίνονται αποδείξεις των αναφερομένων αποτελεσμάτων, εκτός από δύο περιπτώσεις, οι οποίες μπορούν να δώσουν μια αμυδρή εικόνα των συλλογισμών και μεθόδων της θεωρίας αυτής. Για λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε μία πλούσια βιβλιογραφία, απ' την οποία επιλέγουμε τα βιβλία [9], [18], [19], [23].

B.1 Ορισμός. Μια **κατηγορία** είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \text{Mor}, \circ)$, όπου

- (i) \mathcal{C} είναι μια κλάση, που τα στοιχεία της ονομάζονται **αντικείμενα**.
- (ii) Mor είναι μια κλάση συνόλων τέτοια ώστε: για κάθε $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο $\text{Mor}(A, B) \in \text{Mor}$, του οποίου τα στοιχεία του λέγονται **μορφισμοί** από το A στο B . Αντί $f \in \text{Mor}(A, B)$ γράφουμε και $f : A \rightarrow B$.
- (iii) Για κάθε $(A, B, C) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, ο κύκλος “ \circ ” ορίζει μια απεικόνιση

$$\circ : \text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f,$$

έτσι ώστε να ισχύουν οι συνθήκες:

(C1) $Mor(A_1, B_1)$ και $Mor(A_2, B_2)$ είναι ξένα σύνολα, εκτός αν $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$.

(C2) Ο κύκλος είναι προσεταιριστικός, δηλαδή, για κάθε $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ και για κάθε $f \in Mor(A, B)$, $g \in Mor(B, C)$ και $h \in Mor(C, D)$, είναι

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(C3) Για κάθε $A \in \mathcal{C}$, υπάρχει $1_A \in Mor(A, A)$, έτσι ώστε:

$$f \circ 1_A = f, \quad \forall f \in Mor(A, B) \text{ και } B \in \mathcal{C},$$

$$1_A \circ g = g, \quad \forall g \in Mor(C, A) \text{ και } C \in \mathcal{C}.$$

B.2 Παραδείγματα. 1) Η κατηγορία \mathcal{S} , με αντικείμενα τα σύνολα, μορφοισμούς τις συνήθειες απεικονίσεις και κύκλο τη συνήθη σύνθεση.

2) Η κατηγορία \mathcal{T} των τοπολογικών χώρων και των συνεχών απεικονίσεων, με την συνήθη σύνθεση.

3) Η κατηγορία των σημειωμένων συνόλων \mathcal{S}_o : αντικείμενά της είναι τα ζεύγη (X, x_o) , όπου $x_o \in X \in \mathcal{S}$, μορφοισμοί $Mor((X, x_o), (Y, y_o))$ τα σύνολα των απεικονίσεων $f : X \rightarrow Y$ με $f(x_o) = y_o$ και κύκλος η συνήθης σύνθεση.

4) Η κατηγορία \mathcal{T}_o των σημειωμένων τοπολογικών χώρων που ορίζεται ανάλογα.

5) Η κατηγορία \mathcal{G} των ομάδων και των ομομορφοισμών τους.

6) Η κατηγορία \mathcal{Ab} των αβελιανών ομάδων και των ομομορφοισμών τους.

7) Η κατηγορία $\mathcal{V}(\mathbb{K})$ των διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα \mathbb{K} και των \mathbb{K} -γραμμικών απεικονίσεων.

8) Η κατηγορία \mathcal{TG} των τοπολογικών ομάδων και των συνεχών ομομορφοισμών.

9) Η κατηγορία \mathcal{Man} των διαφορικών πολλαπλοτήτων (με μοντέλα τους ευκλείδειους χώρους) και μορφοισμούς τις διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων.

10) Η κατηγορία \mathcal{LG} των ομάδων Lie και των διαφορίσιμων μορφοισμών ομάδων.

11) Η κατηγορία \mathcal{B} των χώρων Banach και των φραγμένων τελεστών.

12) Η κατηγορία $\mathcal{TV}(\mathbb{R})$ των τοπολογικών διανυσματικών χώρων πάνω από το \mathbb{R} και των συνεχών \mathbb{R} -γραμμικών απεικονίσεων.

13) Η κατηγορία $\mathcal{Mod}(R)$ των αριστερών R -προτύπων, όπου R ένας δακτύλιος, και των R -γραμμικών απεικονίσεων.

14) Η κατηγορία \mathcal{Alg} των τοπολογικών αλγεβρών και των συνεχών μορφοισμών αλγεβρών.

15) Η κατηγορία \mathcal{R} των δακτυλίων και των μορφοισμών δακτυλίων.

- 16) Η κατηγορία VB των διανυσματικών δεσμών και των μορφοισμών τους.
 17) Η κατηγορία PB των κυρίων δεσμών και των μορφοισμών τους.
 18) Η κατηγορία $VB(X)$ των διανυσματικών δεσμών πάνω από την πολλαπλότητα X και των μορφοισμών πάνω από την id_X .

B.3 Ορισμός. Εστω \mathcal{C} μια κατηγορία, $A, B \in \mathcal{C}$ και $f : A \rightarrow B$. Ο f λέγεται **ισομορφισμός**, αν υπάρχει $g : B \rightarrow A$, έτσι ώστε

$$g \circ f = 1_A \quad \text{και} \quad f \circ g = 1_B.$$

Γράφουμε $g = f^{-1}$.

B.4 Ορισμός. Μια **υποκατηγορία** \mathcal{C}_o μιας κατηγορίας \mathcal{C} είναι μια υποκλάση της \mathcal{C} που είναι κατηγορία με σύνολα μορφοισμών $Mor_o(A, B) \subseteq Mor(A, B)$ για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$, και σύνθεση τον περιορισμό της σύνθεσης της \mathcal{C} .

Μια υποκατηγορία \mathcal{C}_o της \mathcal{C} λέγεται **πλήρης**, αν $Mor_o(A, B) = Mor(A, B)$, για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_o$.

B.5 Ορισμός. Εστω \mathcal{C} μια κατηγορία. Ένα $Z \in \mathcal{C}$ λέγεται **μηδενικό αντικείμενο**, αν $Mor(Z, A)$ και $Mor(A, Z)$ είναι μονοσύνολα, για κάθε $A \in \mathcal{C}$.

Αν μια κατηγορία έχει μηδενικό αντικείμενο, αυτό είναι μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ένα ισομορφισμό.

Αν η \mathcal{C} έχει μηδενικό αντικείμενο Z , τότε, για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός $f \in Mor(X, Y)$ που αναλύεται σε σύνθεση $f = f_2 \circ f_1$, όπου $f_1 \in Mor(X, Z)$ και $f_2 \in Mor(Z, Y)$. Ο f συμβολίζεται με 0_{XY} , και έχει την ιδιότητα

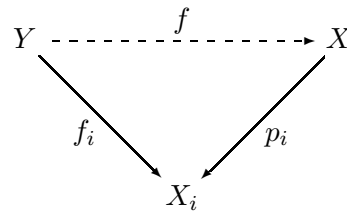
$$\begin{aligned} 0_{XY} \circ g &= 0_{WY} \quad \forall g \in Mor(W, X) \text{ και } W \in \mathcal{C}, \\ h \circ 0_{XY} &= 0_{WY} \quad \forall h \in Mor(Y, W) \text{ και } W \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

B.6 Ορισμός. Εστω \mathcal{C} μια κατηγορία και $\{X_i\}_{i \in I}$ οικογένεια αντικειμένων της \mathcal{C} . Ένα **γινόμενο** της $\{X_i\}_{i \in I}$ είναι ένα ζεύγος $(X, \{p_i\}_{i \in I})$, όπου $X \in \mathcal{C}$, και $p_i : X \rightarrow X_i$ (: **προβολές**), με την εξής **καθολική ιδιότητα**:

Για κάθε $Y \in \mathcal{C}$ και για κάθε οικογένεια μορφοισμών $f_i : Y \rightarrow X_i$, $i \in I$, υπάρχει ακριβώς ένας μορφοισμός $f : Y \rightarrow X$ με $p_i \circ f = f_i$.

Η καθολική ιδιότητα του γινομένου απεικονίζεται στο παρακάτω Διάγραμμα B.1, ενώ η σημασία της φαίνεται και στο επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η

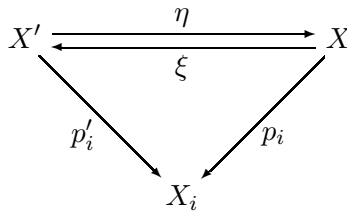
απόδειξη αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα των μεθόδων της Θεωρίας Κατηγοριών.



Διάγραμμα Β.1

Β.7 Θεώρημα. Αν $(X, \{p_i\}_{i \in I})$, $(X', \{p'_i\}_{i \in I})$ είναι γινόμενα της ίδιας οικογένειας $\{X_i\}_{i \in I}$ στην \mathcal{C} , τότε υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός $\xi : X \rightarrow X'$ με $p'_i \circ \xi = p_i$.

Απόδειξη. Η καθολική ιδιότητα του X συνεπάγεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός $\eta : X' \rightarrow X$ με $p'_i = p_i \circ \eta$. Ομοίως, η καθολική ιδιότητα του X' συνεπάγεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός $\xi : X \rightarrow X'$ με $p_i = p'_i \circ \xi$, οπότε $p_i = p_i \circ \eta \circ \xi$.



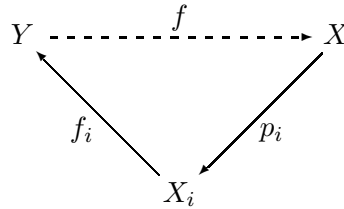
Διάγραμμα Β.2

Ομως, πάλι από την καθολική ιδιότητα του X , υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός, ο 1_X , με $p_i = p_i \circ 1_X$. Αρα, $\eta \circ \xi = 1_X$. Ανάλογα, $\xi \circ \eta = 1_{X'}$, δηλαδή ξ και η είναι ισομορφισμοί με $\eta = \xi^{-1}$. \square

Β.8 Ορισμός. Εστω \mathcal{C} μια κατηγορία και $\{X_i\}_{i \in I}$ οικογένεια αντικειμένων της \mathcal{C} . Ένα **συνγινόμενο** της $\{X_i\}_{i \in I}$ είναι ένα ζεύγος $(X, \{q_i\}_{i \in I})$, όπου $X \in \mathcal{C}$, $q_i : X_i \rightarrow X$ (: **εμφυτεύσεις**), με την εξής **καθολική ιδιότητα**:

Για κάθε $Y \in \mathcal{C}$ και για κάθε οικογένεια μορφοισμών $f_i : X_i \rightarrow Y$, $i \in I$, υπάρχει ακριβώς ένας μορφοισμός $f : X \rightarrow Y$ με $f \circ q_i = f_i$.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε το επόμενο διάγραμμα.



Διάγραμμα Β.3

Ακολουθώντας την ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος Β.7, αποδεικνύουμε και το αντίστοιχο θεώρημα για το συγγινόμενο. Ακριβέστερα, έχουμε το

Β.9 Θεώρημα. *Αν $(X, \{q_i\}_{i \in I})$, $(X', \{q'_i\}_{i \in I})$ είναι συγγινόμενα της ίδιας οικογένειας $\{X_i\}_{i \in I}$ στην \mathcal{C} , τότε υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός $\xi : X \rightarrow X'$ με $f \circ q_i = q'_i \circ \xi$.*

Β.10 Παραδείγματα. 1) Στην κατηγορία \mathcal{S} γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο με τις συνήθεις προβολές και συγγινόμενο η διακεκριμένη ένωση με τις προφανείς εμφυτεύσεις.

2) Στην κατηγορία \mathcal{T} γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο με την τοπολογία-καρτεσιανό-γινόμενο και τις συνήθεις προβολές και συγγινόμενο η διακεκριμένη ένωση με την ένωση των τοπολογιών και τις προφανείς εμφυτεύσεις.

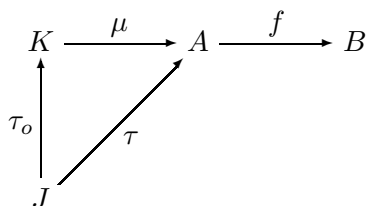
3) Στην κατηγορία \mathcal{G} γινόμενο είναι το “direct product” με τις προβολές και συγγινόμενο το “free product” με τις εμφυτεύσεις.

4) Στην κατηγορία $\text{Mod}(R)$ γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο με τις προβολές και συγγινόμενο το ευθύ άθροισμα με τις εμφυτεύσεις.

Β.11 Ορισμός. Ένας μορφισμός $f : A \rightarrow B$ λέγεται **μονομορφισμός**, αν για κάθε ζεύγος μορφισμών $\alpha, \beta : C \rightarrow A$ με $f \circ \alpha = f \circ \beta$, συνεπάγεται $\alpha = \beta$. Αντιστοίχως, ένας $f : A \rightarrow B$ λέγεται **επιμορφισμός**, αν για κάθε ζεύγος μορφισμών $\alpha, \beta : B \rightarrow C$ με $\alpha \circ f = \beta \circ f$, συνεπάγεται $\alpha = \beta$.

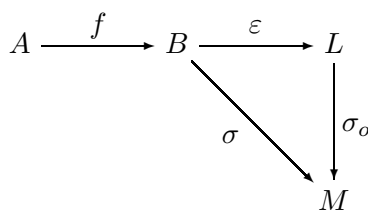
Β.12 Ορισμός. Σε μια κατηγορία \mathcal{C} με μηδενικό αντικείμενο, λέμε ότι ο μορφισμός $\mu : K \rightarrow A$ είναι **πυρήνας** του μορφισμού $f : A \rightarrow B$, αν $f \circ \mu = 0_{KB}$ και, για κάθε μορφισμό $\tau : J \rightarrow A$ με $f \circ \tau = 0_{JB}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\tau_0 : J \rightarrow K$, ώστε $\tau = \mu \circ \tau_0$.

Τα προηγούμενα συνοψίζονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα Β.4

Ανάλογα, λέμε ότι ο μορφισμός $\varepsilon : B \rightarrow L$ είναι **συμπυρήνας** του μορφισμού $f : A \rightarrow B$, αν $\varepsilon \circ f = 0_{AL}$ και, για κάθε μορφισμό $\sigma : B \rightarrow M$ με $\sigma \circ f = 0_{AM}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\sigma_o : L \rightarrow M$, έτσι ώστε $\sigma = \sigma_o \circ \varepsilon$. Επομένως, έχουμε και το



Διάγραμμα Β.5

Β.13 Ορισμός. Μια κατηγορία \mathcal{C} λέγεται **προσθετική**, αν:

- (i) έχει μηδενικό αντικείμενο,
- (ii) κάθε ζεύγος αντικειμένων έχει γινόμενο, και
- (iii) τα σύνολα $Mor(A, B)$ είναι αβελιανές ομάδες, έτσι ώστε η σύνθεση (κύκλος)

$$Mor(A, B) \times Mor(B, C) \rightarrow Mor(A, C)$$

να είναι επιμεριστική, δηλαδή

$$\begin{aligned} g \circ (f_1 + f_2) &= g \circ f_1 + g \circ f_2, \\ (g_1 + g_2) \circ f &= g_1 \circ f + g_2 \circ f, \end{aligned}$$

για κάθε $f, f_1, f_2 \in Mor(A, B)$ και $g, g_1, g_2 \in Mor(B, C)$.

Β.14 Παραδείγματα. Οι κατηγορίες Ab , $\mathcal{V}(\mathbb{K})$, \mathcal{B} , $\mathcal{TV}(\mathbb{R})$, $Mod(R)$ και $VB(X)$ είναι προσθετικές.

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει την ύπαρξη συνγινόμενου. Η απόδειξή του είναι επίσης χαρακτηριστική για τη μεθοδολογία της Θεωρίας των Κατηγοριών, και δίνεται εδώ για να σχηματίσει ο αναγνώστης μια πληρέστερη ιδέα αυτής.

B.15 Θεώρημα. Σε μια προσθετική κατηγορία, για κάθε ζεύγος αντικειμένων υπάρχει συνγινόμενο.

Απόδειξη. Εστω \mathcal{C} μια προσθετική κατηγορία και $A, B \in \mathcal{C}$. Αν $(A \oplus B, p_A, p_B)$ είναι το γινόμενο των A, B , θεωρούμε τους μορφοισμούς $1_A : A \rightarrow A$ και $0_{AB} : A \rightarrow B$. Από την καθολική ιδιότητα του γινομένου, υπάρχει ακριβώς ένας μορφοισμός $i_A : A \rightarrow A \oplus B$ με $p_A \circ i_A = 1_A$ και $p_B \circ i_A = 0_{AB}$.

Θεωρούμε τώρα και τους μορφοισμούς $0_{BA} : B \rightarrow A$ και $1_B : B \rightarrow B$. Πάλι από την καθολική ιδιότητα του γινομένου, υπάρχει ακριβώς ένας μορφοισμός $i_B : B \rightarrow A \oplus B$ με $p_A \circ i_B = 0_{BA}$ και $p_B \circ i_B = 1_B$.

Ισχυριζόμαστε ότι $(A \oplus B, i_A, i_B)$ είναι συνγινόμενο των A, B .

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = 1_{A \oplus B}$. Πράγματι,

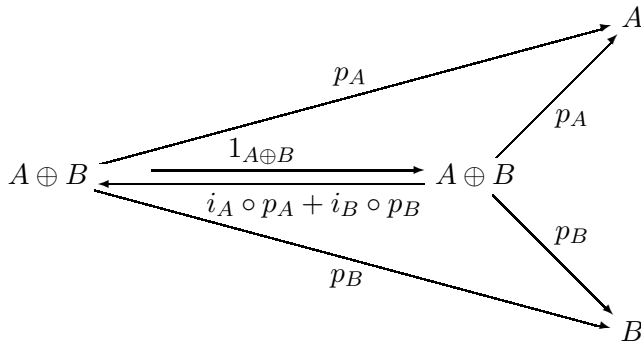
$$\begin{aligned} p_A \circ (i_A \circ p_A + i_B \circ p_B) &= p_A \circ i_A \circ p_A + p_A \circ i_B \circ p_B = \\ &= 1_A \circ p_A + 0_{BA} \circ p_B = p_A + 0_{A \oplus B, A} = p_A \end{aligned}$$

και, ανάλογα,

$$p_B \circ (i_A \circ p_A + i_B \circ p_B) = p_B.$$

Από την καθολική ιδιότητα του γινομένου, προκύπτει ότι

$$i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = 1_{A \oplus B}.$$



Διάγραμμα Β.6

Θα αποδείξουμε τώρα την καθολική ιδιότητα του συνγινόμενου: Εστω $C \in \mathcal{C}$, $\phi_A : A \rightarrow C$ και $\phi_B : B \rightarrow C$. Αν θέσουμε

$$\phi := \phi_A \circ p_A + \phi_B \circ p_B : A \oplus B \rightarrow C,$$

τότε

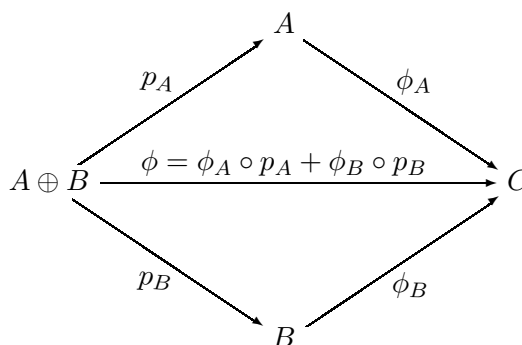
$$\begin{aligned} \phi \circ i_A &= \phi_A \circ p_A \circ i_A + \phi_B \circ p_B \circ i_A = \\ &= \phi_A \circ i_A + \phi_B \circ 0_{AB} = \phi_A + 0_{AC} = \phi_A, \end{aligned}$$

και, ανάλογα,

$$\phi \circ i_B = \phi_B.$$

Σχετικά με το μονοσήμαντο, αν $\theta : A \oplus B \rightarrow C$ είναι μορφισμός τέτοιος ώστε $\theta \circ i_A = \phi_A$ και $\theta \circ i_B = \phi_B$, τότε

$$\begin{aligned} \theta &= \theta \circ (i_A \circ p_A + i_B \circ p_B) \\ &= \theta \circ i_A \circ p_A + \theta \circ i_B \circ p_B \\ &= \phi_A \circ p_A + \phi_B \circ p_B = \phi. \end{aligned}$$



Διάγραμμα Β.7

Η απόδειξη είναι τώρα πλήρης. □

Β.16 Ορισμός. Μια **αβελιανή** κατηγορία είναι μια προσθετική κατηγορία στην οποία

- (i) κάθε μορφισμός έχει πυρήνα και συμπυρήνα,
- (ii) κάθε μονομορφισμός είναι πυρήνας του συμπυρήνα του και κάθε επιμορφισμός είναι συμπυρήνας του πυρήνα του, και

(iii) κάθε μορφοισμός αναλύεται σε ένα επιμορφοισμό, σύνθεση με ένα μονομορφοισμό.

B.17 Παραδείγματα. Οι κατηγορίες $\mathcal{A}b$, $\mathcal{V}(\mathbb{K})$, και $\text{Mod}(R)$ είναι αβελιανές.

B.18 Ορισμός. Εστω \mathcal{C}, \mathcal{D} δύο κατηγορίες. Ένας **συναλλοιώτος συναρτητής** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας "κανόνας" που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο X της \mathcal{C} ένα αντικείμενο $F(X)$ της \mathcal{D} και σε κάθε μορφοισμό $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ένα μορφοισμό $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} f(1_X) &= 1_{F(X)}, \\ F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f), \end{aligned}$$

για κάθε $X \in \mathcal{C}$ και για κάθε ζεύγος μορφοισμών f, g της \mathcal{C} για τους οποίους υπάρχει η $g \circ f$.

Ένας **ανταλλοιώτος συναρτητής** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ αντιστοιχεί σε κάθε X της \mathcal{C} ένα $F(X)$ της \mathcal{D} και σε κάθε $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ένα $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} f(1_X) &= 1_{F(X)}, \\ F(g \circ f) &= F(f) \circ F(g) \end{aligned}$$

για κάθε $X \in \mathcal{C}$ και για κάθε ζεύγος μορφοισμών f, g της \mathcal{C} για τους οποίους υπάρχει η $g \circ f$.

B.19 Παραδείγματα. 1) Εστω Man_o η κατηγορία των σημειωμένων πολλαπλοτήτων και των διαφορίσιμων απεικονίσεων που διατηρούν τα σταθεροποιημένα σημεία. Δηλαδή, ένα αντικείμενο της Man_o είναι ένα ζεύγος της μορφής $((X, \mathcal{A}), x)$, όπου (X, \mathcal{A}) διαφορική πολλαπλότητα και $x \in X$, και ένας μορφοισμός $f \in \text{Mor}(((X, \mathcal{A}), x), ((Y, \mathcal{B}), y))$ είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$, με $f(x) = y$. Τότε η αντιστοιχία

$$\begin{aligned} T : \text{Man}_o &\rightarrow \mathcal{V}(\mathbb{R}) : \\ ((X, \mathcal{A}), x) &\mapsto T(X, x), \\ \text{Mor}(((X, \mathcal{A}), x), ((Y, \mathcal{B}), y)) \ni f &\mapsto T_x f \in L(T(X, x), T(Y, y)) \end{aligned}$$

είναι ένας συναλλοιώτος συναρτητής από την κατηγορία των σημειωμένων πολλαπλοτήτων στην κατηγορία των πραγματικών διανυσματικών χώρων.

2) Αν \mathcal{Man} είναι η κατηγορία των διαφορικών πολλαπλοτήτων και VB η κατηγορία των διαφορίσιμων διανυσματικών δεσμών, η αντιστοιχία

$$T : \mathcal{Man} \rightarrow VB :$$

$$(X, \mathcal{A}) \mapsto (TX, \pi_X, X),$$

$$Mor((X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})) \ni f \mapsto (Tf, f) \in Mor((TX, \pi_X, X), (TY, \pi_Y, Y)),$$

όπου (TX, π_X, X) είναι η εφαπτόμενη δέσμη της (X, \mathcal{A}) και Tf το ολικό διαφορικό της f , είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

B.20 Ασκήσεις.

- 1) Ο μορφισμός 1_A είναι μονοσήμαντα ορισμένος.
- 2) Αν f είναι ισομορφισμός, τότε ο f^{-1} είναι μονοσήμαντα ορισμένος.
- 3) Η σχέση μεταξύ των αντικειμένων μιας κατηγορίας

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists \text{ ισομορφισμός } f : A \rightarrow B$$

είναι σχέση ισοδυναμίας.

- 4) Στα παρακάτω ζεύγη κατηγοριών, να εξετάσετε αν η πρώτη είναι (πλήρης) υποκατηγορία της δεύτερης:

$$(\mathcal{Ab}, \mathcal{G}), (TV(\mathbb{R}), \mathcal{V}(\mathbb{R})), (\mathcal{S}_o, \mathcal{S}), (\mathcal{S}, \mathcal{T}), (\mathcal{TG}, \mathcal{G}), (\mathcal{LG}, \mathcal{TG}).$$

- 5) Ποιές κατηγορίες από τα Παραδείγματα B.2 έχουν μηδενικά αντικείμενα;
- 6) Δείξτε ότι οι προβολές p_j ενός γινομένου είναι επιμορφισμοί και οι εμφυτεύσεις i_j ενός συνγινομένου είναι πάντα μονομορφισμοί.
- 7) Δείξτε ότι αν ϕ, ψ μονομορφισμοί (αντιστ. επιμορφισμοί), τότε και $\psi \circ \phi$ είναι μονομορφισμός (αντιστ. επιμορφισμός). Αν $\psi \circ \phi$ είναι μονομορφισμός (αντιστ. επιμορφισμός), τότε και ϕ είναι μονομορφισμός (αντιστ. ψ είναι επιμορφισμός).
- 8) Κάθε πυρήνας είναι μονομορφισμός και κάθε συμπίρηνας είναι επιμορφισμός.
- 9) Αν \mathcal{C} είναι προσθετική κατηγορία, τότε 0_{AB} είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $Mor(A, B)$.

- 10) Σε μια προσθετική κατηγορία οι μονομορφισμοί χαρακτηρίζονται από το ότι έχουν μηδενικό πυρήνα και οι επιμορφισμοί χαρακτηρίζονται από το ότι έχουν μηδενικό συμπυρήνα.
- 11) Αν μία κατηγορία \mathcal{C} έχει μηδενικό αντικείμενο O , τότε, για κάθε $A \in \mathcal{C}$, η τριάδα $(A, 1_A, 0_{AO})$ είναι γινόμενο του ζεύγους (A, O) .
- 12) Αν $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι συναλλοίωτος συναρτητής και $A, B \in \mathcal{C}$ είναι ισομορφα, τότε $F(A), f(B)$ είναι ισόμορφα στην \mathcal{D} . Ισχύει το αντίστροφο;

Προβολικά Πρότυπα

Στο παρόν παράρτημα συγκεντρώνουμε μερικά βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία των προβολικών προτύπων, που χρειάζονται για την καλλίτερη κατανόηση του Κεφαλαίου 5.

Γ.1 Ορισμός. Εστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Ένα R -πρότυπο (R -module) είναι μία αβελιανή ομάδα $(M, +)$, εφοδιασμένη με έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$R \times M \rightarrow M$$

που έχει τις ιδιότητες:

- (i) $r(sx) = (rs)x, \quad \forall r, s \in R, x \in M.$
- (ii) $(r + s)x = rx + sx, \quad \forall r, s \in R, x \in M.$
- (iii) $r(x + y) = rx + ry, \quad \forall r \in R, x, y \in M.$
- (iv) $1x = x, \quad \forall x \in M.$

Γ.2 Ορισμός. Αν M, N είναι δύο R -πρότυπα, μία απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ λέγεται **R -γραμμική ή μορφισμός R -προτύπων**, αν ικανοποιεί την συνθήκη

$$f(rx + sy) = rf(x) + sf(y),$$

για κάθε $x, y \in M$ και $r, s \in R$.

Γ.3 Ορισμός. Ένα R -πρότυπο F λέγεται **ελεύθερο** αν έχει **βάση**, δηλαδή, αν έχει ένα σύνολο στοιχείων $\{x_i\}_{i \in I}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το F .

Γ.4 Θεώρημα. Ένα R -πρότυπο F είναι ελεύθερο, εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφο με το R^I , όπου I ένα σύνολο δεικτών.

Απόδειξη. Εστω F ελεύθερο και $\{x_i\}_{i \in I}$ βάση. Ορίζουμε την $f : F \rightarrow R^I$ θέτοντας $f(x_i) := e_i$, όπου $e_i(j) = \delta_{ij}$, για κάθε $i, j \in I$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Είναι άμεσο ότι η f είναι R -γραμμικός ισομορφισμός.

Αντίστροφα, το R^I είναι ελεύθερο, γιατί η οικογένεια $\{e_i\}_{i \in I}$ είναι βάση. \square

Γ.5 Σημείωση. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι γιά τα πρότυπα δεν ισχύουν βασικές ιδιότητες των διανυσματικών χώρων:

(1) Δεν είναι όλα τα πρότυπα ελεύθερα, δηλαδή υπάρχουν πρότυπα που δεν έχουν βάση.

(2) Σε ένα ελεύθερο πρότυπο μπορεί να υπάρχουν βάσεις με διαφορετικό πλήθος στοιχείων.

Γ.6 Ορισμός. Ένα R -πρότυπο P λέγεται **προβολικό**, αν για κάθε ακριβή ακολουθία

$$A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

R -προτύπων και R -γραμμικών απεικονίσεων, και κάθε μορφισμό $f : P \rightarrow B$, υπάρχει μορφισμός $h : P \rightarrow A$, τέτοιος ώστε $g \circ h = f$, δηλαδή έχουμε το επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow h & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Διάγραμμα Γ.1

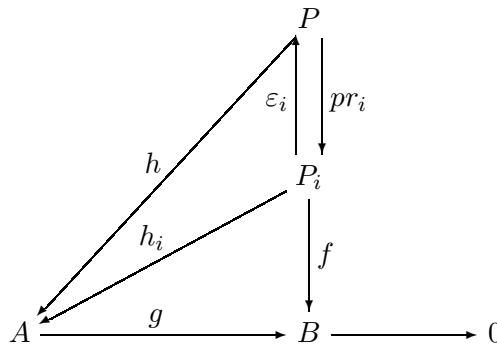
Γ.7 Θεώρημα. Κάθε ελεύθερο R -πρότυπο είναι προβολικό.

Απόδειξη. Εστω F ελεύθερο πρότυπο και $\{x_i\}_{i \in I}$ βάση του. Επειδή η g είναι επί, υπάρχουν $y_i \in A$ με $g(y_i) := f(x_i)$. Ορίζοντας $h(x_i) := y_i$ και επεκτείνοντας γραμμικά, βρίσκουμε τη ζητούμενη h . \square

Γ.8 Θεώρημα. Εστω $\{P_i\}_{i \in I}$ R -πρότυπα και $P := \bigoplus_{i \in I} P_i$. Τότε το P είναι προβολικό εάν και μόνον εάν P_i είναι προβολικό, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με ε_i και pr_i τις κανονικές εμφυτεύσεις και προβολές των P_i , αντιστοίχως.

Για το ευθύ εργαζόμαστε ως εξής: Εστω ότι το P είναι προβολικό πρότυπο. Εστω επίσης $g : A \rightarrow B$ επί και $f : P_i \rightarrow B$ μορφισμός. Τότε (βλ. και το επόμενο διάγραμμα)



Διάγραμμα Γ.2

υπάρχει μορφισμός $h : P \rightarrow A$ με $g \circ h = f \circ pr_i$. Θέτοντας $h_i := h \circ \varepsilon_i$, παίρνουμε

$$g \circ h_i = g \circ h \circ \varepsilon_i = f \circ pr_i \circ \varepsilon_i = f \circ id_{P_i} = f,$$

άρα το P_i είναι προβολικό.

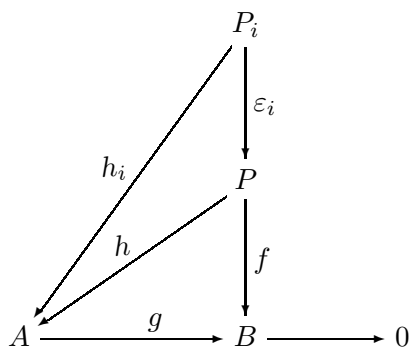
Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι το P_i είναι προβολικό, για κάθε $i \in I$. Εστω επίσης $g : A \rightarrow B$ επί και $f : P_i \rightarrow B$ μορφισμός. Υπάρχει μορφισμός $h_i : P_i \rightarrow A$ με $g \circ h_i = f \circ \varepsilon_i$, για κάθε $i \in I$ (βλ. και το Διάγραμμα Γ.3 στην επόμενη σελίδα). Θέτοντας

$$h : P \rightarrow A : x \mapsto h(x) := \sum_i h_i(x_i),$$

παίρνουμε την

$$g \circ h(x) = \sum_i g \circ h_i(x_i) = \sum_i f \circ \varepsilon_i(x_i) = f\left(\sum_i \varepsilon_i(x_i)\right) = f(x),$$

άρα το P είναι προβολικό πρότυπο. □



Διάγραμμα Γ.3

Γ.8 Θεώρημα. Εστω P ένα R -πρότυπο. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

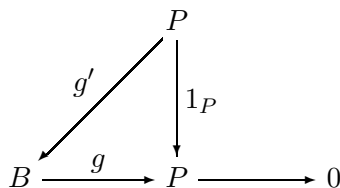
- i) Το P είναι προβολικό.
- ii) Κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

διασπάται.

- iii) Υπάρχει ελεύθερο πρότυπο F και πρότυπο Q με $P \oplus Q \cong F$.
- iv) Υπάρχει ελεύθερο πρότυπο F και προβολέας $p : F \rightarrow P$ με $P = \text{Im} p$.

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii): Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $1_P : P \rightarrow P$. Επειδή το P είναι προβολικό, υπάρχει $g' : P \rightarrow B$, έτσι ώστε $g \circ g' = 1_P$.



Διάγραμμα Γ.4

Τότε $g'(P)$ και $\ker g$ είναι υποπρότυπα του B , και

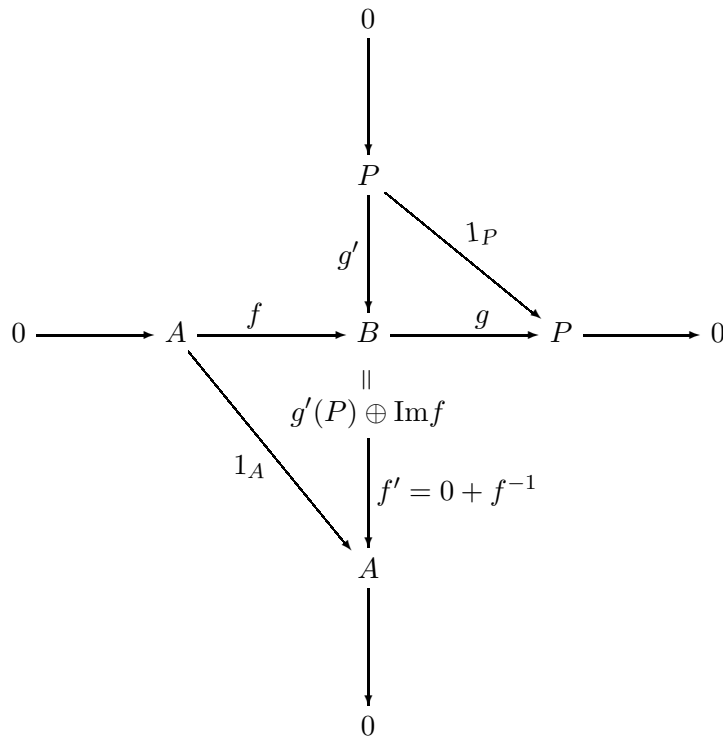
$$g'(P) \oplus \ker g = B.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in B$, $g'(g(x)) \in B$ και

$$g(x - g'(x)) = g(x) - g \circ g' \circ g(x) = g(x) - g(x) = 0,$$

δηλαδή $B \subseteq g'(P) \oplus \ker g$. Εξάλλου, αν $x \in g'(P) \cap \ker g$, τότε $g(x) = 0$ και υπάρχει $y \in P : x = g'(y)$, οπότε $y = g(g'(y)) = g(x) = 0$, άρα $x = g'(y) = 0$.
 Δηλαδή

$$B = g'(P) \oplus \ker g = g'(P) \oplus \text{Im} f.$$



Διάγραμμα Γ.5

Θέτοντας

$$f' : B = g'(P) \oplus \text{Im} f \longrightarrow A : (x, y) \mapsto f^{-1}(y),$$

έχουμε το ζητούμενο.

(ii) \Rightarrow (iii): Εστω $\{e_i\}_{i \in I}$ ένα σύνολο που παράγει το P . Θεωρούμε το ελεύθερο πρότυπο R^I και τον επιμορφισμό

$$g : R^I \longrightarrow P : x = (x_i)_{i \in I} \equiv (x_i e_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i a_i g(x_i) := \sum_i a_i x_i.$$

Λόγω της υπόθεσης, η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \ker g \xrightarrow{i} R^I \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

διασπάζεται, δηλαδή $R^I = \ker g \oplus P$. Θέτοντας $Q = \ker g$, έχουμε το ζητούμενο.

(iii) \Rightarrow (iv): Αν $F = P \oplus Q$, τότε η απεικόνιση

$$p : F \longrightarrow F : (x, y) \mapsto x$$

είναι ο ζητούμενος προβολέας.

(iv) \Rightarrow (iii): Αν $p : F \rightarrow F$ είναι προβολέας και $P = p(F)$, τότε $F = P \oplus \ker p$. Πράγματι, αν $x \in P \cap \ker p$, τότε $x = p(y)$, για κάποιο $y \in F$ και $p(x) = 0$, οπότε

$$x = p(y) = p(p(y)) = p(x) = 0.$$

Εξάλλου, για κάθε $x \in F$,

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0,$$

δηλαδή $F \subseteq P + \ker p$.

(iii) \Rightarrow (i): Προκύπτει αμέσως από τα Θεωρήματα Γ.4 και Γ.8. □

Βιβλιογραφία

- [1] R. ABRAHAM – S.ROBBIN: *Transversal mappings and flows*. W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [2] Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ – Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ: *Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1988.
- [3] Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ – Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ: *Σημειώσεις Μεταπτυχιακής Γεωμετρίας*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1998.
- [4] E. T. BELL: *The Development of Mathematics*. Dover, New York, 1992.
- [5] M. BERGER – B. GOSTIAUX: *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*. Armand Colin, Paris, 1972. English translation: *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*. Springer, New York, 1988.
- [6] D. BLEECKER: *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley, 1981.
- [7] N. BOURBAKI: *Variétés Différentielles et Analytiques*, Fascicule des Résultats, §§1-7. Hermann, Paris, 1967.
- [8] F. BRICKELL – R. S. CLARK: *Differential Manifolds*. Van Nostrand-Reinhold, London, 1970.

- [9] I. BUCUR – A. DELEANU: *Introduction to the Theory of Categories and Functors*. J. Wiley, New York, 1968.
- [10] J. DIEUDONNÉ: *Éléments d'Analyse, Vol. III*. Gauthier-Villards, Paris, 1970. English translation: *Treatise on Analysis, Vol. III*. Academic Press, New York, 1972.
- [11] J. DIEUDONNÉ: *Éléments d'Analyse, Vol. IV*. Gauthier-Villards, Paris, 1970. English translation: *Treatise on Analysis, Vol. IV*. Academic Press, New York, 1974.
- [12] P. FLASCHEL – W. KLINGENBERG: *Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten. Periodische Geodätische*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 282, Springer, Berlin, 1972.
- [13] D. KAHN: *Introduction to Global Analysis*. Academic Press, New York, 1980.
- [14] A. KRIEGL – P. MICHOR: *The Convenient Setting of Global Analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
- [15] S. KOBAYASHI – K. NOMIZU: *Foundations of Differential Geometry I*. Vol. I, Interscience, New York, 1964. New edition by Wiley-Interscience, New York, 1996.
- [16] S. LANG: *Differential Manifolds*. Addison-Wesley, Reading Mass, 1972.
- [17] J. M. LEE: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, 2003.
- [18] S. MAC LANE: *Categories for the Working Mathematician*. Springer, New York, 1971.
- [19] B. MITCHELL: *Theory of Categories*. Academic Press, New York, 1965.
- [20] G. L. NABER: *Topology, Geometry, and Gauge Fields. Foundations*. Springer, New York, 1997.
- [21] G. L. NABER: *Topology, Geometry, and Gauge Fields. Interactions*. Springer, New York, 2000.
- [22] M. NAKAHARA: *Geometry, Topology and Physics*. Adam Hilger, Bristol, 1991.
- [23] B. PAREIGIS: *Categories and Functors*. Academic Press, New York, 1970.

- [24] PHAM MAU QUAN: *Introduction à la Géométrie des Variétés Différentiables*. Dunod, Paris, 1969.
- [25] M. SPIVAC: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. II*. (Second Edition). Publish or Perish Inc., 1979
- [26] R. SULANKE - P. WINTGEN: *Differentialgeometrie und Faserbündel*. Birkhäuser, Basel, 1972.
- [27] F. W. WARNER: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, New York, 1983.
- [28] C. von WESTENHOLZ: *Differential Forms in Mathematical Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

Ευρετήριο

- άθροισμα
- ευθύ, διανυσματικών δεσμών, 58
- Whitney, *βλέπε* ευθύ
- ακριβής ακολουθία, 70, 71
- σύντομη, 71
- ανάκρουση, *βλέπε* αντίστροφη εικόνα
- αναγωγή δομικής ομάδας, 169
- αντίστροφη εικόνα
- διανυσματικής δέσμης, 60
- μορφής, 130
- πρωτεύουσας δέσμης, 112
- συνοχής, 138
- αντίστροφος
- τοπικά αριστερή, 21
- τοπικά δεξιά, 34
- αντικείμενο, 199
- μηδενικό, 63, 201
- απεικόνιση
- *R*-γραμμική, 212
- απεικόνιση εγκάρσια, 35
- απεικονίσεις
- *G*-ισομεταβλητές, 93
- μεταφοράς
- διανυσματικής δέσμης, 51
- πρωτεύουσας δέσμης, 116
- απλοποιούν ζεύγος
- διανυσματικής δέσμης, 46
- πρωτεύουσας δέσμης, 93
- ολικό, 110
- απλοποιούσα κάλυψη, 46, 101
- αρχική συνθήκη τομής, 31
- βάση
- διανυσματικής δέσμης, 46
- προτύπου, 212
- πρωτεύουσας δέσμης, 93
- γινόμενο, 201
- δέσμη
- διανυσματική, 46
- τετριμμένη, 47, 49
- τοπικώς τετριμμένη, 47
- διγραμμικών μορφών, 57
- δυϊκή, 56

- εφαπτόμενη, 47
- γραμμικών απεικονίσεων, 59
- κύρια, *βλέπε* πρωτεύουσα
- πλαισίων, 122
- πρωτεύουσα, 91
 - ολικώς τετριμμένη, 110
 - τετριμμένη (η), 94
 - τοπικώς τετριμμένη, 93
 - συνεφαπτόμενη, 56
- διάσπαση ακριβούς ακολουθίας, 79
- διαφορική 1-μορφή, 129
- διαφορική k -μορφή, 129
- διαμέριση της μονάδας, 140
- διατήρηση
 - δράσεων, 106
 - νημάτων, 106
- δομή Riemann, 166
- δομική ομάδα
 - διανυσματικής δέσμης, 169
 - πρωτεύουσας δέσμης, 93
- δράση
 - αριστερή, 88
 - δεξιά, 88
 - ελεύθερη, 89
 - γνήσια μεταβατική, 89
 - μεταβατική, 89
 - διαφορίσιμη, 88
- εγκάρσια απεικόνιση, 35
- εγκάρσιες υποπολλαπλότητες, 43
- εμβάπτιση, 24
- εμφύτευση, 13
 - φυσική, 2
 - συνγινόμενου, 202
- επιμορφισμός, 203
- εσωτερική ισομορφία, 147
- εσωτερικό αυτομορφισμό του G , 128
- εξίσωση με ολικό διαφορικό, 144
- εξωτερικό γινόμενο 1-μορφών, 129
- ισομορφισμός
 - διανυσματικών δεσμών, 48
 - πρωτεύουσών δεσμών, 108
- κάθετος υπόχωρος, 128
- καθολική ιδιότητα
 - αντίστροφης εικόνας
 - διανυσματικής δέσμης, 60
 - πρωτεύουσας δέσμης, 113
 - γινομένου, 201
 - συνγινόμενου, 202
- καμπύλη
 - C^∞ -διαφορίσιμη, 141
 - αντίθετη, 146
 - κατά τμήματα διαφορίσιμη, 141
- κανονική υποπολλαπλότητα, 2
- κατάκλιση, 23
- κατηγορία, 199
 - διανυσματικών δεσμών, 49
 - αβελιανή, 206
 - πλήρης, 201
 - προσθετική, 66, 204
 - ψευδοαβελιανή, 70
- μεταφορά
 - (δεξιά) πρωτεύουσας δέσμης, 126
- μετασχηματισμός βαθμίδας, 112
- μετατόπιση
 - (δεξιά) ομάδας Lie, 88
 - (δεξιά) πρωτεύουσας δέσμης, 126
- μονομορφισμός, 203
- μορφή συνοχής, 130
- μορφισμός, 199
 - διανυσματικών δεσμών, 48
 - προτύπων, 212
 - πρωτεύουσών δεσμών, 106
 - B , 108
 - G , 108
 - $G-B$, 108
- νήμα

- διανυσματικής δέσμης, 46
- εμβάπτισης, 32
- πρωτεύουσας δέσμης, 93
- τύπου \mathbb{R}^n , 46
- νηματικό γινόμενο, 42
- ολικός χώρος
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - πρωτεύουσας δέσμης, 93
- ομάδα ισοτροπίας, 90
- ομογενής χώρος, 91
- οριζόντια ανύψωση καμπύλης, 142
- οριζόντιος υπόχωρος, 131
- ορθοκανονικό πλαίσιο, 174
- παράλληλη μετατόπιση, 144
- παρασυμπαγής χώρος, 140
- πεδίο
 - θεμελιώδες, 127
 - Killing, 90, 127
- πρότυπο, 211
 - ελεύθερο, 212
 - προβολικό, 212
- προβολέας, 67
- προβολή
 - γινομένου, 201
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - πρωτεύουσας δέσμης, 93
- πυρήνας, 203
- σύγκυκλος, 51, 116
- σύγκυκλοι ισοδύναμοι, 84
- συναλλοίωτη παράγωγος
 - συμβιβαστή με G , 179
- συναλλοίωτη παραγωγή, 177
- συναρτήσεις Christoffel, 181
- συναρτητής
 - ανταλλοίωτος, 207
 - πλήρως πιστός, 159
 - προσθετικός, 154
 - συναλλοίωτος, 153, 207
- συνγινόμενο, 202
- συνθήκη Leibniz, 172
- συνοχή
 - διανυσματικής δέσμης, 172
 - συμβιβαστή με δομή Riemann, 174
 - πρωτεύουσας δέσμης, 130
 - ως διανομή, 133
- συνπυρήνας, 204
- συζυγής παράσταση της G , 128
- τομή
 - (τοπική) εμβάπτισης, 31
 - διανυσματικής δέσμης
 - ολική, 150
 - τοπική, 150
 - πρωτεύουσας δέσμης
 - φυσική, 101
 - ολική, 101
 - τοπική, 100
- τροχιά, 89
- υποδέσμη, 72
- υποκατηγορία, 201
- υποπολλαπλότητα
 - εμφυτευμένη, 23
 - κανονική, 2