ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ LEBESGUE

(ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ)

Γ.Α. ΣΤΑΥΡΑΚΑΣ

ΑΘΗΝΑ 2008

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Η έννοια του μέτρου στο επίπεδο. Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^2$ 1
2. Άλγεβρες και σ-άλγεβρες συνόλων. Σύνολα Borel. Μονότονες κλάσεις συνόλων 19
3. Εξωτερικά μέτρα. Μετρήσιμα σύνολα. Χώροι μέτρου. Κατασκευή μέτρου από ένα εξωτερικό μέτρο. Πλήρωση χώρου 29
4. Μετρήσιμες συναρτήσεις. Απλές συναρτήσεις. Αλγεβρικές πράξεις με μετρήσιμες συναρτήσεις. Προσέγγιση $\mathscr{A}$-μετρησίμων συναρτήσεων 68
5. Το Ολοκλήρωμα Lebesgue 86
6. Τρόποι συγκλίσεως ακολουθιών 125
7. Διαφόριση και ολοκλήρωση 148
8. Μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue - Stieltjes 179
9. Το γινόμενο δύο μετρησίμων χώρων 194
10. Θεώρημα Fubini 220
11. Οι χώροι Lebesgue L^p 252
12. Δυϊκοί χώροι των L^p 305
13. Προσημασμένα μέτρα. Ανάλυση κατά Hahn μετρησίμου χώρου. Ανάλυση κατά Jordan προσημασμένου μέτρου 319
14. Μιγαδικά μέτρα 336
15. Το θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym για πεπερασμένους και σ-πεπερασμένους χώρους μέτρου 348

16. Θεώρημα Riesz 375
17. Αναλύσιμοι χώροι μέτρου 381
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Οι Ανισότητες Hölder και Minkowski σε μετρήσιμους χώρους 398
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 413
ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ 415

Εισαγωγή

Ο Κ. Καραθεοδωρή (φωτογραφία του 1935).

Η, πολύ γνωστή από τον Απειροστικό Λογισμό, έννοια του ολοκληρώματος Riemann, εφαρμόζεται για συναρτήσεις που είτε είναι συνεχείς ή δεν έχουν «πολλά» σημεία ασυνέχειας. Το ολοκλήρωμα Riemann δεν μπορεί να ορισθεί για μια τυχούσα συνάρτηση f. Αν η f είναι συνάρτηση παντού ασυνεχής ή η f είναι ορισμένη σ' ένα τυχαίο σύνολο και δεν είναι συνεχής τότε, υπάρχει μια άλλη έννοια ολοκληρώματος που οφείλεται στον H. Lebesgue (1875-1941) και με την οποία επιτυγχάνονται εφαρμογές εκεί που η ολοκλήρωση κατά Riemann δεν επιτυγχάνει.

Η ολοκλήρωση κατά Lebesgue είναι μια σημαντική συμβολή στην νεώτερη μαθηματική ανάλυση, που αναπτύχθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα.

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό διάστημα [a, b] του άξονα των x. Για να σχηματίσωμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα Riemann διαιρούμε το [a, b] σε μεγάλο αριθμό υποδιαστημάτων και κατασκευάζωμε το λεγόμενο «ενδιάμεσο άθροισμα». Στη θεωρία του ολοκληρώματος Lebesgue (1902) η βασική ιδέα είναι η διαμέριση του πεδίου τιμών της f. Αυτό μας επιτρέπει να επεκτείνωμε την έννοια του ολοκληρώματος σε μεγάλη κλάση συναρτήσεων.

Άλλο μεγάλο πλεονέκτημα του ολοκληρώματος Lebesgue είναι ότι κατασκευάζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, είτε όταν πρόκειται για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού έναν αφηρημένο χώρο μέτρου είτε για συναρτήσεις που ορίζονται στην $\mathbb{R}$. Αυτή είναι και η διαφορά του από το ολοκλήρωμα Riemann. Το ολοκλήρωμα Riemann αρχικά ορίστηκε για συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, επεκτάθηκε σε συναρτήσεις πολλών πραγματικών μεταβλητών, αλλά **δεν** έχει έννοια για συναρτήσεις που ορίζονται σ' ένα τυχαίο χώρο μέτρου.

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν «επέκταση» σημειώσεων που **διδάχθηκαν στους φοιτητές του 4ου εξαμήνου**, στο χειμερινό εξάμηνο του Ακαδημαϊκού Έτους 1992 - 1993, στα πλαίσια του μαθήματος «Πραγματική Ανάλυση».

Θα ήθελα να ευχαριστήσω (i) τον Καθηγητή R. Tiffen, (University of London, Birkbeck College) που με δίδαξε Θεωρία Μέτρου και Ολοκληρώσεως σε τοπικά συμπαγείς χώρους, κατά το Ακαδημαϊκό έτος 1982 - 1983.

(ii) Τους φοιτητές που παρακολούθησαν το μάθημα στο χειμερινό εξάμηνο του 1992 - 1993 και οι οποίοι με τις εύστοχες ερωτήσεις τους συνέβαλαν στην σημερινή διαμόρφωση αυτών των σημειώσεων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τις κυρίες Ψιμούλη Φαίη και Τασία Σιαλιαρίδου για την άρτια και επαγγελματική παρουσίαση του κειμένου.

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ. ΜΕΤΡΟ LEBESGUE ΣΤΟ $\mathbb{R}^2$

Οι πρώτοι ορισμοί του μέτρου επί ενός τυχαίου συνόλου εν $\mathbb{R}^n$, έχουν διατυπωθεί από τόν G. Cantor (1883), O. Stolz (1884) καί A. Harnach (1885). Αργότερα οι προηγούμενοι ορισμοί βελτιώθηκαν από τόν G. Peano (1887) και C. Jordan (1892). Χρησιμοποιώντας την έννοια του μέτρου ο G. Peano, προσδιόρισε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μιά μή αρνητική φραγμένη συνάρτηση, επί ενός κλειστού και φραγμένου διαστήματος της $\mathbb{R}$, να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Το 1898 ο E. Borel στο σύγγραμά του Leçons sur la Théorie des Fonctions, σχηματοποίησε τά ακόλουθα αξιώματα για να ορίσει μέτρα επί συνόλων.

(1) Ένα μέτρο είναι πάντοτε θετικό

(2) Το μέτρο μιάς πεπερασμένης ενώσεως ξένων συνόλων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων

(3) Το μέτρο της διαφοράς δύο συνόλων (το ένα να είναι υποσύνολο του άλλου) είναι ίσο με την διαφορά των μέτρων.

(4) Κάθε σύνολο που το μέτρο του δεν είναι 0 είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο H. Lebesgue (Ann. Mat. Pura Appl. 7(3), 231-359 (1902)) παρουσίασε μια μαθηματική περιγραφή της κλάσεως των συνόλων στην οποία ορίζεται μέτρο που ικανοποιεί τα αξιώματα του Borel. Αυτό το μέτρο είναι γνωστό σαν μέτρο Lebesgue επί του $\mathbb{R}^n$.

Η έννοια του μέτρου ενός συνόλου E, $\mu(E)$, είναι η φυσική γενίκευση π.χ. των ακολούθων εννοιών

(i) του μήκους $\ell(\Delta)$ ενός διαστήματος $\Delta \subset \mathbb{R}$.

(ii) του εμβαδού $A(F)$ ενός $F \subset \mathbb{R}^2$.

(iii) του όγκου $V(G)$ ενός $G \subset \mathbb{R}^3$.

«Μέτρο» είναι η αριθμητική τιμή που αντιστοιχεί σε ορισμένα σύνολα ενός συστήματος συνόλων. Το πρώτο λογικό βήμα για να αναπτύξωμε αυτή τήν θεωρία είναι να εφωδιάσωμε το καθολικό σύνολο με μια δομή που αποτελείται από κατάλληλα επιλεγμένα σύνολα τα οποία λέγονται «μετρήσιμα».

Αν και η έννοια του μέτρου άρχισε από την θεωρία συναρτήσεων μιας μεταβλητής σήμερα αποτελεί ουσιώδες τμήμα της συναρτησιακής αναλύσεως καί της θεωρίας πιθανοτήτων.

Στήν §1 περιγράφωμε στοιχειώδεις έννοιες της θεωρίας του μέτρου Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$. Ορίζομε τις έννοιες του ορθογωνίου και του στοιχειώδους συνόλου γιατί αποτελούν τα πρώτα βήματα για τον ορισμό του μέτρου Lebesgue σε τυχόν υπόσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Περιγράφωμε σχέσεις προσθετικότητος και υποπροσθετικότητος του μέτρου στα εν λόγω σύνολα, καθώς και τα μέτρα ενώσεως τομής και διαφοράς συνόλων στο $\mathbb{R}^2$.

1.1 Θεωρούμε το σύστημα $\mathcal{S}$ όλων των συνόλων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, των οποίων τα σημεία ορίζονται από τις ανισότητες,

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a < x \leqslant b, \quad a \leqslant x < b, \quad a < x < b$$

και

$$c \leqslant y \leqslant d, \quad c < y \leqslant d, \quad c \leqslant y < d, \quad c < y < d$$

όπου τα a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα σύνολα εν $\mathcal{S}$ λέγονται **ορθογώνια (rectangles)**. Το κλειστό ορθογώνιο ορίζεται από τις ανισότητες

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

και είναι ορθογώνιο κατά τήν συνήθη έννοια, περιλαμβάνει δε και το σύνορό του.

Το ανοικτό ορθογώνιο

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

είναι ορθογώνιο (κατά τήν συνήθη έννοια), χωρίς το σύνορό του.

Ορισμοί 1.1.1. (i) Το μέτρο του $\varnothing$ είναι το 0.

(ii) Το μέτρο ενός ορθογωνίου $\neq \varnothing$ (κλειστού, ανοικτού ή ημι-ανοικτού) πού ορίζεται από τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d είναι (b-a)(d-c).

(iii) Σε κάθε $P \in \mathcal{S}$ αντιστοιχούμε τόν αριθμό m(P) που λέγεται **μέτρο (measure)** και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

(1) $m(P) \geqslant 0$.

(2) Η ποσότητα m(P) είναι προσθετική κατά την ακόλουθη έννοια,

$$\text{αν} \quad P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, \; P_k \cap P_\ell = \varnothing, \; k \neq \ell \; \text{ τότε, } \; m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

Το πρόβλημά μας είναι να ορίσωμε την έννοια του μέτρου για σύνολα πιο γενικά από τα «ορθογώνια» διατηρώντας τις ιδιότητες (1) και (2). Το πρώτο βήμα είναι να ορίσωμε το μέτρο στα λεγόμενα **«στοιχειώδη σύνολα» (elementary sets)**.

Ένα σύνολο λέγεται **στοιχειώδες** αν παρίσταται σαν **πεπερασμένη** ένωση ξένων ανά δύο ορθογωνίων συνόλων.

Πρώτα αποδεικνύομε το

Θεώρημα 1.1.2. Αν A, B είναι στοιχειώδη σύνολα, η $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ καθώς και η συμμετρική διαφορά,

$$A \triangle B \underset{\text{ορσ.}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

είναι στοιχειώδη σύνολα.

Απόδ.: Αν τα

$$A = \bigcup_{k} P_k, \; B = \bigcup_{\ell} Q_\ell$$

είναι στοιχειώδη σύνολα τότε η

$$A \cap B = \bigcup_{k,\ell} (P_k \cap Q_\ell)$$

είναι στοιχειώδες σύνολο, γιατί κάθε $P_k \cap Q_\ell$ είναι είτε ορθογώνιο ή κενό σύνολο. Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι η διαφορά δύο ορθογωνίων είναι στοιχειώδες σύνολο. Η ένωση δύο ορθογωνίων είναι στοιχειώδες σύνολο. Πράγματι έστω P το ορθογώνιο που τα περιέχει, τέτοιο ορθογώνιο πάντοτε υπάρχει.

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cup (P \setminus B)]$$

και είναι στοιχειώδες σύνολο αφού η τομή και η διαφορά ορθογωνίων είναι στοιχειώδες σύνολο. Προφανώς η συμμετρική διαφορά

$$A \triangle B \underset{\text{ορσ.}}{=\!=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

είναι στοιχειώδες σύνολο.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $A = \bigcup\limits_k P_k$, στοιχειώδες σύνολο, όπου τα $(P_k)_k$ είναι ορθογώνια ανά δύο ξένα. Με τον όρο **μέτρο (measure)** του A εννοούμε τον αριθμό

$$\widetilde{m}(A) \underset{\text{ορσ.}}{=\!=} \sum_k m(P_k) \tag{1}$$

όπου τα $m(P_k)$ είναι το μέτρο του ορθογωνίου P_k.

Προφανώς $\widetilde{m}(A) \geqslant 0$. Επιπλέον, το μέτρο $\widetilde{m}$ είναι προσθετικό κατά την προηγούμενη έννοια. Το άθροισμα (1) είναι ανεξάρτητο της επιλογής των ορθογωνίων, για τον ορισμό του στοιχειώδους συνόλου, δηλαδή το άθροισμα είναι ανεξάρτητο της μή μονοσήμαντης αναλύσεως του A. Πράγματι, υποθέτομε ότι,

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_\ell Q_\ell$$

όπου τα P_k και Q_ℓ είναι ορθογώνια:

$$P_i \cap P_j = \varnothing\,, \quad Q_i \cap Q_j = \varnothing \qquad i \neq j$$

Επειδή, δείξαμε ότι η τομή $P_k \cap Q_\ell$ δύο ορθογωνίων είναι ορθογώνιο από την προσθετικότητα του μέτρου των ορθογωνίων, έπεται ότι

$$\sum_k m(P_k) = \sum_k \sum_\ell m(P_k \cap Q_\ell) = \sum_\ell m(Q_\ell)$$

Διατυπώνομε το **θεώρημα Heine-Borel** σαν λήμμα για την απόδειξη του θεωρήματος 1.1.4.

Θεώρημα Heine-Borel: Έστω A κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε κάθε ανοικτή κάλυψη το A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Θεώρημα 1.1.4. Αν το A είναι στοιχειώδες σύνολο και το (A_n) είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύστημα στοιχειωδών συνόλων:

$$A \subseteq \bigcup_n A_n \tag{1}$$

τότε,

$$\widetilde{m}(A) \leqslant \sum_n \widetilde{m}(A_n)$$

Απόδ.: Για δοθέν ε > 0 υπάρχει κλειστό στοιχειώδες σύνολο

$$\overline{A} \subseteq A: \ \widetilde{m}(\overline{A}) \geqslant \widetilde{m}(A) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Για κάθε A_n, υπάρχει ανοικτό στοιχειώδες σύνολο $\widehat{A}_n$,

$$\widehat{A}_n \supseteq A_n: \ \widetilde{m}(\widehat{A}_n) \geqslant \widetilde{m}(A_n)$$

ή

$$\widetilde{m}(\widehat{A}_n) \leqslant \widetilde{m}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Προφανώς $\overline{A} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{A}_n$, (πρβλ. (1) και (2)). Από το θεώρημα Heine-Borel κάθε κάλυψη του $\overline{A}$ από σύστημα ανοικτών συνόλων έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή, υπάρχουν $\widehat{A}_{n_1} \dots \widehat{A}_{n_s}$:

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{s} \widehat{A}_{n_i}$$

$$\tilde{m}(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \tilde{m}(\widehat{A}_{n_i}) \tag{3}$$

γιατί διαφορετικά, το $\overline{A}$ θα μπορούσε να καλυφθεί από ορθογώνια των οποίων το ολικό εμβαδόν θα ήταν μικρότερο του $\tilde{m}(\overline{A})$, πράγμα αδύνατον.
Οπότε,

$$\tilde{m}(A) \leqslant \tilde{m}(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} \tilde{m}(\widehat{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(πρβλ. (2)) (πρβλ. (3))

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \right) \leqslant \sum_{n} \tilde{m}(A_n) + \sum_{n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n} \tilde{m}(A_n) + \varepsilon$$

Επειδή ο $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετα μικρός, $\tilde{m}(A) \leqslant \sum_{n} \tilde{m}(A_n)$.

1.2 Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^2$

Όπως τα ορθογώνια, έτσι και τα στοιχειώδη σύνολα, δεν εκφράζουν την γενική μορφή ενός συνόλου στο $\mathbb{R}^2$. Επομένως, εμφανίζεται το πρόβλημα να γενικευτεί η έννοια του μέτρου (με την διατήρηση των βασικών του ιδιοτήτων) σε γενικώτερα σύνολα από εκείνα που αποτελούνται από πεπερασμένες ενώσεις ορθογωνίων με άξονες παράλληλους προς τους άξονες των συντεταγμένων. Το πρόβλημα είναι πλήρως λυμένο από την θεωρία μέτρου Lebesgue. Για να αποφύγωμε σύνολα «απείρου μέτρου» περιοριζόμαστε σε σύνολα του κλειστού μοναδιαίου τετραγώνου E που ορίζεται από τις ανισότητες, $0 \leqslant x \leqslant 1$ και $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Ορισμός 1.2.1. Έστω $A \subset E$. Ο αριθμός

$$\mu^*(A) \underset{\text{ορσ.}}{=} \inf_{A \subset P_k} \sum_k m(P_k)$$

όπου το infimum λαμβάνεται επί όλων των καλύψεων του A, που αποτελούνται από πεπερασμένα ή αριθμησίμου πλήθους ορθογώνια P_k, λέγεται **εξωτερικό μέτρο (outer measure)**.

Ορισμός 1.2.2. Σαν **εσωτερικό μέτρο (inner measure)** του $A \subset E$ θεωρούμε τον

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A)$$

Θεώρημα 1.2.3. Για κάθε $A \subset E$, $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$.

Απόδ.: Έστω $\mu_*(A) > \mu^*(A)$, από τον ορισμό 1.2.2.

$$1 - \mu^*(E \setminus A) > \mu^*(A) \quad \text{ή}$$

$$1 > \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(A) \quad \text{ή} \quad \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) < 1$$

Αν οι $\{P_j\}$ και $\{Q_k\}$ αποτελούν καλύψεις του A και του $E \setminus A$ αντιστοίχως

$$\inf \sum_j m(P_j) + \inf \sum_k m(Q_k) < 1 \quad \text{ή}$$

$$\inf \left(\sum_j m(P_j) + \sum_k m(Q_k) \right) < 1 \;\; \text{ή} \;\; \sum_j m(P_j) + \sum_k m(Q_k) < 1 = m(E)$$

Έστω $\{R_\ell\}$ η ένωση των συστημάτων $\{P_j\}$ και $\{Q_k\}$. Τότε, $E \subset \bigcup_\ell R_\ell$

ενώ $m(E) > \sum_\ell m(R_\ell)$. Αποτέλεσμα αντίθετο εκείνου του προηγούμενου θεωρήματος 1.1.4.

Ορισμός 1.2.4. (i) Ένα υποσύνολο $A \subset E$ είναι **μετρήσιμο (measurable)** αν και μόνο αν

$$\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = m(E)$$

(ii) Ένα σύνολο A λέγεται μετρήσιμο κατά Lebesgue αν

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$$

Αν το σύνολο A είναι μετρήσιμο, μετρήσιμο είναι και το $E \setminus A$.

Θεώρημα 1.2.5. Αν A σύνολο και $\{A_n\}$ πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύστημα: $A \subset \bigcup_n A_n$ τότε

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)$$

Απόδ. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, για κάθε A_n υπάρχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύστημα ορθογωνίων $\{P_{n_k}\}$:

$$A_n \subset \bigcup_k P_{n_k} \quad \text{και} \quad \sum_k m(P_{n_k}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

γιατί αν

$$\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \sum_k m(P_{n_k})$$

τότε

$$\inf_k \sum_k m(P_{n_k}) \geqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

άτοπο γιατί,

$$\mu^*(A_n) \underset{\text{ορσ.}}{=} \inf \sum_k m(P_{n_k})$$

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{n_k}, \ \mu^*(A) \leqslant \sum_n \sum_k m(P_{n_k}) < \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

Επειδή ο $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετα μικρός

$$\mu^*(A) < \sum_n \mu^*(A_n)$$

Πόρισμα 1.2.6. Αν το A είναι σύνολο μετρήσιμο κατά Lebesgue και $\{A_n\}$ πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύστημα μετρήσιμων συνόλων: $A \subset \bigcup_n A_n$, τότε

$$\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$$

Απόδ. Αφού το σύνολο Α είναι μετρήσιμο

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$$

και το αποτέλεσμα είναι προφανές.

Θεώρημα 1.2.7. Ένα σύνολο Α είναι μετρήσιμο $\Leftrightarrow$ για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα στοιχειώδες σύνολο Β:

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

Για την απόδειξη του 1.2.7 διατυπώνομε και αποδεικνύομε το παρακάτω.

Λήμμα 1.2.8. Για κάθε δύο σύνολα Α και Β

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| < \mu^*(A \triangle B)$$

Απόδ.

$$A \triangle B \underset{\text{ορσ.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$A = (A \setminus B) \cup B \subset B \cup (A \triangle B)$

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A \triangle B) \qquad (1)$$

$B = (B \setminus A) \cup A \subset A \cup (A \triangle B)$

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu^*(B) - \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \triangle B) \qquad (2)$$

άρα από τις (1) και (2)

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

Απόδειξη του 1.2.7. Έστω ότι για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα στοιχειώδες σύνολο Β: $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Θα δείξωμε ότι το Α είναι μετρήσιμο.

Από το Λήμμα 1.2.8

$$|\mu^* (A) - \mu^* (B)| = |\mu^* (A) - \tilde{m} (B)| < \varepsilon$$

(πρβλ. 1.1.3).
Ανάλογα

$$|\mu^* (E \setminus A) - \tilde{m} (E \setminus B)| < \varepsilon \quad \text{γιατί}$$

$(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B$, (πρβλ. 1.2.8 και 1.2.4).

$$\tilde{m} (B) + \tilde{m} (E \setminus B) = \tilde{m} (E) = 1, \quad \text{(πρβλ. ibid)}$$

$$\tilde{m} (E \setminus B) = 1 - \tilde{m} (B) \quad \text{άρα}$$

$$|\mu^* (E \setminus A) - 1 - \tilde{m} (B)| < \varepsilon \text{ ή } \quad |\mu^* (E \setminus A) + \tilde{m} (B) - 1| < \varepsilon \text{ ή}$$

$$|\tilde{m} (B) - (1 - \mu^* (E \setminus A))| < \varepsilon \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχομε

$$|\mu^* (A) + \mu^* (E \setminus A) - 1| < 2\varepsilon, \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

άρα

$$\mu^* (A) + \mu^* (E \setminus A) = 1$$

Από τον ορισμό 1.2.2. $\mu^* (A) = \mu_* (A)$ άρα το A είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα: Ας υποθέσωμε ότι το A είναι μετρήσιμο, δηλαδή,

$$\mu^* (A) + \mu^* (E \setminus A) = 1$$

τότε υπάρχουν ορθογώνια $\{B_n\}$ και $\{C_n\}$ που καλύπτουν τα A και E\A αντίστοιχα. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου 1.2.1 έχομε

$$\sum_n m (B_n) < \mu^* (A) + \frac{\varepsilon}{3} \quad \sum_n m (C_n) < \mu^* (E \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

Επιπλέον επειδή, $\sum_n m (B_n) < +\infty \quad \exists\ N \in \mathbb{N} : \forall\ n > N$

$$\sum_{n>N} m(B_n) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

Θα δείξωμε τώρα ότι η αποδεικτέα σχέση

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

ισχύει για τα στοιχειώδη σύνολα

$$B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$$

Προφανώς, το σύνολο $P = \bigcup_{n>N} B_n$ περιέχει το $A \setminus B$,

$$P = \bigcup_{n>N} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N} B_n \supseteq A \setminus B$$

και η

$$Q = \bigcup_{n} (B \cap C_n) \tag{3}$$

περιέχει το $B \setminus A$, $B \setminus A \subset \bigcup_n (B \cap C_n)$. Επομένως $A \triangle B \subset P \cup Q$.

Επιπλέον

$$\mu^*(P) < \sum_{n>N} m(B_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

(πρβλ. (1), (2), (3)).
Θα υπολογίσωμε το $\mu^*(Q)$.

$$\left(\bigcup_n B_n\right) \cup \left(\bigcup_n (C_n \setminus B)\right) = E, \quad \sum_k m(B_n) + \sum_k \tilde{m}(C_n \setminus B) = 1 \tag{4}$$

$$\sum_n m(B_n) + \sum_n m(C_n) = 1 + \sum_n \tilde{m}(B)$$

$$\sum_n m(B_n) + \sum_n m(C_n) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) + \frac{2\varepsilon}{3} =$$

$$(\text{πρβλ. } (1)) \qquad = 1 + \frac{2\varepsilon}{3} \tag{5}$$

$$\sum_n m(B_n) + \sum_n m(C_n) \leqslant \sum_n m(B_n) + \sum_n \widetilde{m}(C_n \setminus B) + \frac{2\varepsilon}{3}$$

(πρβλ. (4) και (5)).

$$\sum_n m(C_n) - \sum_n \widetilde{m}(C_n \setminus B) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$$

(πρβλ. 1.1.5),

$$\sum_n \widetilde{m}(C_n \cap B) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} \tag{3}$$

άρα

$$\mu^*(Q) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(P \cup Q) \leqslant \mu^*(P) + \mu^*(Q) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Θεώρημα 1.2.9. Η ένωση και η τομή πεπερασμένου αριθμού μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα.

Απόδ.: Έστω ότι τα A_1, A_2 είναι μετρήσιμα σύνολα. Τότε, από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν στοιχειώδη σύνολα B_1, B_2:

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επειδή,

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

$$\mu^*[(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)] \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$$

Επειδή η $B_1 \cup B_2$ είναι στοιχειώδες σύνολο από το προηγούμενο θεώρημα η $A_1 \cup A_2$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Στη συνέχεια θα αποδείξωμε ότι η $A_1 \cap A_2$ είναι μετρήσιμο σύνολο. Είναι γνωστό ότι αν το A είναι μετρήσιμο, $\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = 1$. Άρα και το $E \setminus A$ είναι μετρήσιμο. Επομένως η μετρησιμότητα του $A_1 \cap A_2$ προκύπτει από την μετρησιμότητα του $A_1 \cup A_2$, επίσης,

$$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)].$$

Πόρισμα 1.2.10. Η διαφορά και η συμμετρική διαφορά μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα.

Απόδ.:
$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (E \setminus A_2)$$
$$A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$$

Θεώρημα 1.2.11. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_N$ είναι ανά δύο ξένα μετρήσιμα σύνολα, τότε,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

Απόδ.: Αρκεί να δείξωμε ότι το θεώρημα ισχύει για $n = 2$. Αν τα A_1, A_2 είναι μετρήσιμα σύνολα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν στοιχειώδη σύνολα B_1, B_2:

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \qquad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon \tag{1}$$

Έστωσαν, $A = A_1 \cup A_2$ και $B = B_1 \cup B_2$.
Το A είναι μετρήσιμο (γιατί η ένωση μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο). Επειδή $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, τότε

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

από τον ορισμό των $A_i \triangle B_i$, $i = 1, 2$.
Επομένως, $\tilde{m}(B_1 \cap B_2) < 2\varepsilon$.
Από το προηγούμενο Λήμμα 1.2.8

$$|\tilde{m}(B_1) - \mu^*(A_1)| < \varepsilon, \quad |\tilde{m}(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \tilde{m}(B_1) - \mu^*(A_1) < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \tilde{m}(B_2) - \mu^*(A_2) < \varepsilon$$

Επειδή το μέτρο είναι προσθετικό επί των στοιχειωδών συνόλων (πρβλ. Ορσ. 1.1.3),

$$\tilde{m}(B) = \tilde{m}(B_1) + \tilde{m}(B_2) - \tilde{m}(B_1 \cap B_2) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon$$

Σημειώνουμε επίσης ότι,

(i) $A \triangle B \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$

(ii) $A \subset B \cup (A \triangle B)$ ή $B \subset A \cup (A \triangle B)$

$$\tilde{m}(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B)$$

$$\mu^*(A) \geqslant \tilde{m}(B) - \mu^*(A \triangle B) \geqslant \tilde{m}(B) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_1) - 6\varepsilon$$

Οπότε,

$$\mu^*(A) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

επειδή ο ε είναι απειροστά μικρός.

Τώρα, αν $A = A_1 \cup A_2$ (πρβλ. 1.2.5)

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

Δηλαδή

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Επειδή, τα A, A_1, A_2 είναι μετρήσιμα $\mu^* = \mu$, δηλ. $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Θεώρημα 1.2.12. Η αριθμήσιμη ένωση και η αριθμήσιμη τομή μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα.

Απόδ. Έστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μετρήσιμα σύνολα και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$A_1' = A_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n = 2, 3$$

(πρβλ. 2.1.3 ...).

Τα A_1', A_2', ..., A_n' είναι σύνολα ξένα ανά δύο και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$. Τα $(A_n')_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μετρήσιμα σύνολα γιατί η πεπερασμένη ένωση (και η τομή) μετρησίμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα.

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n') = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n'\right) \leqslant \mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'\right)$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n')$ είναι συγκλίνουσα επομένως για δοθέν $\varepsilon > 0$ $\exists\, \nu \in \mathbb{N}, \nu > 0$:

$$\sum_{n>\nu} \mu(A_n') < \frac{\varepsilon}{2}$$

Το σύνολο

$$C = \bigcup_{n=1}^{\nu} A_n'$$

είναι μετρήσιμο σαν πεπερασμένη ένωση μετρησίμων συνόλων. Αφού το C είναι μετρήσιμο υπάρχει σύνολο B στοιχειώδες:

$$\mu^*(C \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Επειδή, $$A \triangle B \subset (C \triangle B) \cup \left(\bigcup_{n>\nu} A_n'\right)$$

(πρβλ. 1.2.11.(2)).

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(C \triangle B) + \mu\left(\bigcup_{n \geqslant \nu} A_n'\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Επομένως, το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο. Τώρα, επειδή τα συμπληρωματικά μετρησίμων συνόλων είναι μετρήσιμα η

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n)$$

είναι μετρήσιμο σύνολο.

Θεώρημα 1.2.13. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ είναι ανά δύο ξένα μετρήσιμα σύνολα τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Απόδ.: Έστω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ τότε, $\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$, $\forall N = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) < \mu(A)$$

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Προφανώς

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

άρα

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Η ιδιότητα του μέτρου μ που απεδείχθη προηγουμένως είναι γνωστή σαν **σ-προσθετική** ή **αριθμησίμως προσθετική** (countably additive, σ-additive).

Θεώρημα 1.2.14. Έστω $(A_n) \uparrow$ αύξουσα ακολουθία μετρησίμων συνόλων,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Απόδ.: Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\uparrow)$ αύξουσα ακολουθία συνόλων. Ορίζομε την ακολουθία $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $B_1 = A_1, \dots B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, $k > 1$. Τα σύνολα που κατασκευάσθηκαν είναι ξένα και $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \qquad \text{(πρβλ. 1.2.12 και 2.1.3)}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \underset{1.2.13}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Πόρισμα 1.2.15. Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ φθίνουσα ακολουθία συνόλων, με $\mu(A_n) < +\infty$ τότε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Απόδ.: Η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων πεπερασμένου μέτρου. Έστω $C_k = A_1 \setminus A_k$. Η $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow$ είναι αύξουσα.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)$$

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) = \lim_{k \to \infty} \mu(C_k) \quad \text{ή}$$

$$\mu \left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) \right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_1 \setminus A_k)$$

$$\mu(A_1) \setminus \mu \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \mu(A_1) - \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

δηλ.

$$\mu \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Αν για ένα μέτρο μ ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \quad \text{αν η } (A_n) \uparrow$$

και

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \quad \text{αν η } (A_n) \downarrow$$

τότε το μ είναι «συνεχές».

2. ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΚΑΙ σ-ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ. ΣΥΝΟΛΑ BOREL. ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Οι άλγεβρες και οι σ-άλγεβρες αποτελούν το πεδίο ορισμού της σημαντικής συνολοσυναρτήσεως που καλείται μέτρο. Ο σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να εισάγει τις έννοιες των διαφόρων κλάσεων συνόλων, να γίνει η σύγκρισή τους και να διατυπωθούν σημαντικές τους ιδιότητες. Δοθέντος ενός συνόλου μπορούμε να ορίσωμε τουλάχιστον πέντε τύπους κλάσεων υποσυνόλων του, οι οποίες είναι γνωστές σαν δακτύλιοι, άλγεβρες, σ-δακτύλιοι, σ-άλγεβρες και μονότονες κλάσεις συνόλων.

2.1 Κλάσεις συνόλων

Έστω $X \neq \varnothing$ και $\mathcal{P}(X)$ το σύνολο των υποσυνόλων του X.

Ορισμός 2.1.1. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται **κληρονομική** (hereditary) αν

$$\forall A \in \mathcal{A}, B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{A}$$

Μια οικογένεια $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται **δακτύλιος (ring)** αν

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \in \mathcal{R} \Rightarrow \begin{matrix} \text{(i) } A \cup B \in \mathcal{R} \\ \text{(ii) } A \cap B^c \in \mathcal{R} \end{matrix}$$

Προφανώς

(iii) αν $A \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap A^c \in \mathcal{R} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{R}$

(iv) αν $A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{R}$

Ένας δακτύλιος $\mathcal{R}$ είναι **δ-δακτύλιος** αν και μόνο αν

$$\text{(v) } \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

Ένας δακτύλιος $\mathcal{R}$ λέγεται **σ-δακτύλιος (σ-ring)** αν και μόνο αν

$$\text{(vi)}\ \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

Αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R}$ και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$

$\{A \cap A_n^c : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{R}$ (πρβλ. (ii)) επομένως

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap A_n^c) \in \mathcal{R}, \qquad \text{(πρβλ. (vi))}$$

και

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap A_n^c) \right)^c \underset{\text{(ii)}}{=} \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

Δηλαδή αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε είναι και δ-δακτύλιος (δ-ring).

(vii) Αν ο δακτύλιος $\mathcal{R}$ περιέχει τον χώρο X τότε καλείται άλγεβρα.

(viii) Α ο δ-δακτύλιος $\mathcal{R}$ περιέχει τον χώρο X καλείται δ-άλγεβρα.

(ix) Ο σ-δακτύλιος $\mathcal{R}$ ανάλογα, καλείται σ-άλγεβρα.

(x) Σε κάθε κλάση υποσυνόλων $\mathcal{A}$ αντιστοιχούμε την **κληρονομούμενη** κλάση της $\mathcal{A}$ που επιτυγχάνεται περιλαμβάνοντας και όλα τα υποσύνολα των μελών της κλάσεως $\mathcal{A}$.

(xi) Ένας ημι-δακτύλιος (semiring) $\mathcal{S}$ είναι μία κλάση συνόλων: (a) $\varnothing \in \mathcal{S}$, (b) αν $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$

$$\text{(c)}\ A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

όπου $\{E_1, \dots E_n\}$ είναι πεπερασμένη υποοικογένεια στοιχείων του $\mathcal{S}$, ξένων ανά δύο.

Ορισμοί 2.1.2. Για κάθε κλάση υποσυνόλων $\mathcal{A}$ ο ελάχιστος δακτύλιος (δ-δακτύλιος, σ-δακτύλιος) που περιέχει την $\mathcal{A}$ λέγεται **παραγόμενος δακτύλιος (generated)** και συμβολίζεται με $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Κάθε τέτοιος δακτύλιος, αν υπάρχει, είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Δυστυχώς, δεν υπάρχει μια συγκεκριμένη και απλή μέθοδος για να «παραχθεί» δακτύλιος από μια δοθείσα κλάση υποσυνόλων της $\mathscr{A}$.

Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c\}$ και $\mathscr{A} = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$. Για να βρούμε τον παραγόμενο δακτύλιο $\mathscr{R}(\mathscr{A})$ παίρνομε την ένωση

$$\{a, b\} \cup \{a, c\} = X = \{a, b, c\}$$

την διαφορά

$$\{a, b\} \cap \{a, c\}^c = \{a, b\} \setminus \{a, c\} = \{b\}$$
$$\{a, c\} \cap \{a, b\}^c = \{a, c\} \setminus \{a, b\} = \{c\}$$
$$\{a, b\} \setminus \{a, b\} = \{a, c\} \setminus \{a, c\} = \varnothing$$
$$\{a, b\} \setminus \{b\} = \{a\}$$
$$\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\}$$

$$\mathscr{R}(\mathscr{A}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

που είναι το δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$.

Πρόταση 2.1.3. Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα υποσυνόλων και $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $A_n \in \mathscr{A}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $B_n \in \mathscr{A}$:

$$B_n \cap B_m = \varnothing \qquad \forall\, n \neq m$$

και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Απόδ.: Θέτομε $B_1 = A_1$ και $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ ορίζομε,

$$B_n = A_n \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}\} =$$
$$= A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots A^c{}_{n-1}$$

Επειδή τα συμπληρώματα και οι τομές συνόλων της $\mathscr{A}$ είναι εν $\mathscr{A}$ έχομε ότι κάθε $B_n \in \mathscr{A}$. Επίσης έχομε ότι $B_n \subset A_n$. Έστω B_m και B_n με $m < n$ δύο τέτοια σύνολα.

$$\begin{aligned} B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n &= \\ &= A_m \cap A_n \cap \dots \cap A_m^c \cap \dots = \\ &= (A_m \cap A_m^c) \cap \dots = \\ &= \varnothing \cap \dots = \varnothing \end{aligned}$$

Επειδή $B_n \subset A_n$ έχομε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Έστω $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, το x πρέπει να ανήκει το λιγώτερο σ' ένα από τα A_n. Έστω n ο ελάχιστος δείκτης: $x \in A_n$. Τότε, $x \in B_n$ (λόγω του ορισμού του B_n) άρα $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ επομένως $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2.2 Σύνολα Borel σε μετρικούς χώρους

Έστω <X, d> μ. χώρος και $\mathcal{K}$ η κλάση των ανοικτών υποσυνόλων του X. Έστω $\mathcal{B}$ η **ελαχίστη σ-άλγεβρα** των υποσυνόλων του X:

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{B}.$$

Τα σύνολα που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{B}$ λέγονται **Borel υποσύνολα του X**. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ καλείται **άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του X**.

Από τον ορισμό κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι Borel. Επίσης κάθε κλειστό σύνολο $A \subset X$ είναι Borel γιατί $A = X \setminus B \in \mathcal{B}$ όπου B ανοικτό $\subset X$
Τα σύνολα $A \subset X$:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \text{ ανοικτά} \subset X \quad \text{και} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \text{ κλειστά} \subset X$$

είναι G_δ και F_σ σύνολα σ' ένα μετρικό χώρο. Από τον ορισμό της σ-άλγεβρας είναι και Borel σύνολα. Προκύπτει από τους κανόνες του de Morgan ότι ένα υποσύνολο $A \subset X$ είναι $G_\delta \Leftrightarrow X \setminus A$ είναι F_σ.

Έστω $Z \subset$ <X, d>. Το Z μπορεί να θεωρηθεί σαν μετρικός χώρος με απόσταση την επαγομένη από την αρχική του (X, d). Έτσι μπορούμε να ορίσωμε σύνολα Borel στον χώρο Z.

Πρόταση 2.2.1. Έστω $Z \subset X$. Το σύνολο A είναι Borel στον μ.χ. Z $\Leftrightarrow A = Z \cap B$, όπου B είναι Borel υποσύνολο του X.

Απόδ.: Έστω $\mathcal{A} = \{B \subset X: Z \cap B \in \mathcal{B}(Z)\}$. Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X, επομένως περιέχει και όλα τα Borel σύνολα του X, γιατί η Borel σ-άλγεβρα είναι η ελαχίστη που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X. Δηλαδή

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$$

Τώρα, η κλάση των συνόλων

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A = Z \cap B,\ B \in \mathcal{B}(X),\ \text{Borel εν } X\}$$

είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Z.
Η $\mathcal{A}$ περιέχει, την κλάση των ανοικτών συνόλων εν Z, επομένως περιέχει και την κλάση των Borel συνόλων εν Z,

$$\mathcal{B}(Z) \subseteq \mathcal{A}$$

Δηλαδή, αν $A \in \mathcal{B}(Z) \Rightarrow A = Z \cap B$, $B \in \mathcal{B}(X)$.

Είναι χρήσιμο να ανακεφαλαιώσωμε τις ιδιότητες μιας σ-άλγεβρας (κλάσεως) Borel συνόλων, έστω $\mathcal{B}$, (πρβλ. 2.2).

Θεώρημα 2.2.2. Έστω η κλάση των Borel συνόλων επί του X. Τότε

(i) $\varnothing \in \mathcal{B}$, $X \in \mathcal{B}$

(ii) Αν $B_k \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{B}$, $B_k^c \in \mathcal{F}$

(iii) Αν $B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B} \Rightarrow B_\alpha \setminus B_\beta \in \mathcal{B}$.

(πρβλ. και ορσ. 2.1.1).

Ένα σύνολο X εφωδιασμένο με μία κλάση Borel συνόλων $\mathcal{B}$ καλείται **χώρος Borel (Borel space)** και συμβολίζεται με το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathcal{B})$.

Αν συγκρίνωμε τους χώρους Borel και τους τοπολογικούς χώρους θα διαπιστώσωμε ότι ο χώρος Borel είναι συγχρόνως έννοια ασθενέστερη και ισχυρότερη της εννοίας του τοπολογικού χώρου. Ένας χώρος Borel **δεν** είναι γενικώς τοπολογικός χώρος, γιατί η τυχούσα ένωση Borel συνόλων δεν ανήκει κατ' ανάγκην στην $\mathcal{B}$, (πρβλ. 2.2.2). Η κλάση των Borel συνόλων έχει μια ιδιότητα γενικώς ισχυρότερη από εκείνην της τυπολογίας τ. Η αριθμήσιμη τομή Borel συνόλων ανήκει στην $\mathcal{B}$. Επιπλέον, το συμπληρωματικό Borel συνόλου ανήκει στην $\mathcal{B}$, ενώ γενικώς, συμπληρωματικά ανοικτών συνόλων δεν ανήκουν στην τοπολογία τ.

2.2.3 Παραδείγματα Borel συνόλων

(i) Έστω $X = \mathbb{R}$ και $[a, b) = \{x: a \leqslant x < b\}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$. **Ορίζομε** την κλάση των Borel συνόλων σαν την **ελαχίστη** κλάση (σ-άλγεβρα) συνόλων που περιέχει τα διαστήματα $[a, b)$. Επειδή είναι κλάση Borel συνόλων, περιέχει και όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις, τομές και συμπληρωματικά αυτών των διαστημάτων. Η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων, περιέχει το $\{x\}$, γιατί $\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[x, x + \frac{1}{k}\right)$.

Επίσης κάθε κλειστό διάστημα είναι Borel σύνολο,

$$[a, b] = [a, b) \cup \{b\}$$

Κάθε ανοικτό διάστημα είναι σύνολο Borel.

$$(a, b) = [a, b) \setminus \{a\}$$

γιατί η διαφορά Borel συνόλων είναι Borel σύνολο.

Επειδή, κάθε ανοικτό σύνολο εν $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων έπεται ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι Borel. Θεωρώντας το συμπληρωματικό του ανοικτού, παρατηρούμε ότι ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Δηλαδή, κάθε κλειστό σύνολο είναι Borel. Δηλαδή, **η κλάση των Borel συνόλων**, είναι η **ελαχίστη σ-άλγεβρα** που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα. Επιπλέον, επειδή το $\{x\}$ είναι Borel, κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο της $\mathbb{R}$ είναι Borel. Για παράδειγμα, το σύνολο όλων των ρητών αριθμών είναι Borel σύνολο. Επίσης, το συμπληρωματικό του, το σύνολο των αρρήτων είναι Borel σύνολο. Κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών του οποίου το συμπληρωματικό είναι αριθμήσιμο είναι σύνολο Borel.

(ii) Ένα σύνολο που είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων καλείται **F_σ-σύνολο**. Προφανώς κάθε κλειστό σύνολο είναι F_σ. Επίσης και κάθε ανοικτό είναι F_σ γιατί,

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right].$$

Ένα σύνολο που είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων, καλείται **$\mathcal{G}_\delta$-σύνολο**. Το συμπληρωματικό ενός G_δ-συνόλου είναι F_σ-σύνολο. Τα F_σ και G_δ είναι οι πιο απλοί τύποι Borel συνόλων. Θεωρούμε την κλάση των $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, που είναι οι αριθμήσιμες τομές των F_σ-συνόλων. Ανάλογα κατασκευάζωμε την $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ που είναι οι αριθμήσιμες ενώσεις G_δ-συνόλων. Οι παρακάτω κλάσεις συνόλων

$$\mathcal{F}_\sigma,\ \mathcal{F}_{\sigma\delta},\ \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma},\ \cdots$$

$$\mathcal{G}_\delta,\ \mathcal{G}_{\delta\sigma},\ \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta},\ \cdots$$

είναι κλάσεις Borel συνόλων. **Αλλά** όλα τα Borel σύνολα **δεν** ανήκουν κατ' ανάγκην σε μία από τις προηγούμενες κλάσεις.

Τέλος, τίθεται το ερώτημα. Υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι Borel; Η απάντηση είναι ναι.

Με $\mathcal{F}$ συμβολίζεται η οικογένεια των κλειστών συνόλων και με $\mathcal{G}$ η οικογένεια των ανοικτών συνόλων.

Θεώρημα. (i) $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\sigma$, (ii) $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_\delta$, (iii) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_\delta$, (iv) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\sigma$

Απόδ.: Τα δύο πρώτα αποτελέσματα είναι προφανή, γιατί αν θεωρήσωμε μια ακολουθία συνόλων της οποίας όλοι οι όροι είναι το ίδιο σύνολο, τότε κάθε σύνολο της $\mathcal{F}$ μπορεί να εκφραστεί σαν όρος της $\mathcal{F}_\sigma$ ή $\mathcal{G}_\delta$.

(iii) Έστω $F \in \mathcal{F}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $G_n \underset{\text{ορσ.}}{=} \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ όπου

B (x, 1/n) η αντίστοιχη ανοικτή σφαίρα.

$$F \subset G_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \text{οπότε } F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

Αν

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \Rightarrow y \in B\left(x, \frac{1}{n}\right),$$

τότε το y είτε είναι σημείο του F είτε είναι σημείο συσσωρεύσεως. Επειδή το F είναι κλειστό, το $y \in F$. Επομένως $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ δηλ.

$$F \in G_\delta \text{ και η } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}_\delta.$$

(iv) Η απόδειξη είναι προφανής.

2.2.4. Ας θεωρήσωμε την κλάση **όλων** των συνόλων A τα οποία μπορούν να καλυφθούν από **αριθμήσιμη** ένωση συνόλων του $\mathcal{R}$. Ας σημειώσωμε αυτή την κλάση με $\mathcal{H}$. Προφανώς η $\mathcal{H}$ είναι κλειστή για τις αριθμήσιμες ενώσεις. Επιπλέον, η $\mathcal{H}$ έχει την ιδιότητα

$$\text{«αν } A \in \mathcal{H} \text{ και } B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{H}\text{»}$$

Δηλαδή, η κλάση $\mathcal{H}$ είναι δακτύλιος, (πρβλ. 2.1.(vi), (x)) προφανώς είναι σ-δακτύλιος. Έτσι καταλήγωμε στην έννοια του **κληρονομούμενου σ-δακτυλίου** (the hereditary σ-ring).

Ορισμός: Έστω $\mathcal{R}$ δακτύλιος, **ο κληρονομούμενος σ-δακτύλιος** είναι

$$\mathcal{H}(\mathcal{R}) = \left\{ A \subset X : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R} \right\}$$

Ορισμός 2.2.5. (α) Μια κλάση υποσυνόλων $\mathcal{L}$ λέγεται **σύνδεσμος (lattice)** αν

(i) $\varnothing \in \mathcal{L}$

(ii) $A \in \mathcal{L}, B \in \mathcal{L} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$

(β) Μια κλάση συνόλων $\mathcal{M}$ λέγεται **μονότονα αύξουσα (monotone increasing)** αν $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{M}$, $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Η κλάση $\mathcal{M}$ λέγεται **μονότονα φθίνουσα** αν

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{M} \text{ και } A_{n+1} \subset A_n.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Αν η κλάση $\mathcal{M}$ είναι μονότονα αύξουσα και μονότονα φθίνουσα τότε λέγεται μονότονη.

Πόρισμα 2.2.6. Ένας σ-δακτύλιος είναι μονότονη οικογένεια.

Απόδ.: Γιατί κάθε σ-δακτύλιος είναι και δ-δακτύλιος, (πρβλ. 2.1.1.(vi)).

Παράδειγμα. Τα $\mathcal{R} = \{\varnothing, X\}$, και $\mathcal{R} = 2^X$, όπου Χ είναι τυχαίο σύνολο αποτελούν παραδείγματα σ-δακτυλίων, επομένως και μονοτόνων κλάσεων.

Ορισμός 2.2.7. Για κάθε κλάση υποσυνόλων $\mathcal{A}$ ορίζομε

$$\bigcap_{\mathcal{A}} = \{E \subset X : \forall A \in \mathcal{A},\ E \cap A \in \mathcal{A}\}$$

Θεώρημα 2.2.8. Η τομή μιας συλλογής δακτυλίων είναι δακτύλιος.

Αντίστοιχα θεωρήματα ισχύουν για άλγεβρες, σ-δακτυλίους και μονότονες κλάσεις. Δεν ισχύουν για ημι-δακτυλίους (semi-rings).

Πρόταση 2.2.9: Τα Borel σύνολα του $\mathcal{R}^n$ είναι ακριβώς τα στοιχεία της σ-άλγεβρας που παράγεται από τα συμπαγή σύνολα.

Απόδειξη: Έστω C η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Κάθε συμπαγές υποσύνολο είναι κλειστό (και το συμπληρωματικό του ανοικτό) άρα

$$C \subseteq \mathcal{B}$$

όπου $\mathcal{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα.
Έστω C κλειστό σύνολο και d η συνήθης απόσταση του $\mathbb{R}^n$.

$$C_n \underset{\text{ορσ.}}{=} \{x \in C: d(0, x) \leqslant n\}$$

Η $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία συμπαγών συνόλων, η $(C_n)\uparrow$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο C, λόγω του ορισμού του C_n. Δηλαδή, το σύνολο C περιέχει όλα τα σύνολα που παράγονται από την C_n, περιέχει δηλαδή, κλειστά και ανοικτά σύνολα. Άρα

$$\mathcal{B} \subseteq C, \quad \text{επομένως} \quad \mathcal{B} = C$$

Εφαρμογή 2.2.10: Έστω <X, d> μετρικός χώρος. Να χαρακτηριστεί ο μετρικός χώρος για τον οποίο τα ανοικτά σύνολα σχηματίζουν μια σ-άλγεβρα.

Τα ανοικτά σύνολα σ' ένα μετρικό χώρο X σχηματίζουν μια σ-άλγεβρα αν και μόνο αν ο X είναι διακριτός μετρικός χώρος, (δηλαδή, αν και μόνο αν κάθε υποσύνολό του είναι ανοικτό).

Έστω τ μια συλλογή ανοικτών συνόλων. Αν $\tau = \mathcal{P}(X)$, τότε η τ είναι σ-άλγεβρα.

Αν η τ είναι σ-άλγεβρα και $x \in X$

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

δηλαδή, το $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Προφανώς, κάθε σύνολο του X θα είναι ανοικτό, άρα $\tau = \mathcal{P}(X)$.

3. ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ ΜΕΤΡΑ, ΜΕΤΡΗΣΙΜΑ ΣΥΝΟΛΑ. ΧΩΡΟΙ ΜΕΤΡΟΥ. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΜΕΤΡΟ. ΠΛΗΡΩΣΗ ΜΕΤΡΟΥ

Στην § 3 ορίζομε τις έννοιες του εξωτερικού μέτρου καθώς και του σ-προσθετικού μέτρου. Διατυπώνομε και αποδεικνύομε βασικές ιδιότητές τους. Βασικό τμήμα της παραγράφου αποτελεί η μελέτη της σ-άλγεβρας των μετρησίμων συνόλων του χώρου. Εφαρμόζωμε όλα τα προηγούμενα στην ειδική περίπτωση του εξωτερικού μέτρου Lebesgue, αποδεικνύοντας τις βασικές τους ιδιότητες καθώς και την «πλήρωση» του εν λόγω μέτρου.

3.1 Εξωτερικά μέτρα

Ορισμοί 3.1.1. (i) Έστω $\mathscr{A}$ κλάση υποσυνόλων του X. Μια συνάρτηση

$$s : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

λέγεται **μη αρνητική συνολοσυνάρτηση** (nonegative set function) αν

$$\exists\, A \in \mathscr{A} : \qquad 0 \leqslant s(A) < +\infty$$

(ii) Έστω $\mathscr{A}$ κλάση υποσυνόλων του X. Μια συνολοσυνάρτηση

$$s : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

λέγεται **πεπερασμένα προσθετική (finitely additive)** αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένη οικογένεια συνόλων ξένων ανά δύο

$$\{A_1, \dots A_n\} \subset \mathscr{A} : \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$$

$$s\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} s(A_k).$$

Σημειώνουμε ότι αν $A \in \mathscr{A}$, $\varnothing \in \mathscr{A}$ και $s(A) < +\infty$ τότε

$$\begin{aligned} A = A \cup \varnothing \Rightarrow s(A \cup \varnothing) &= s(A) + s(\varnothing) \\ &= s(A) \end{aligned}$$

δηλαδή, $s(\varnothing) = 0$.

(iii) Έστω $\mathscr{A}$ κλάση υποσυνόλων του X. Μιά συνάρτηση $s : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ λέγεται **αριθμήσιμα προσθετική (countably additive)** αν για κάθε αριθμήσιμη ακολουθία συνόλων ξένων ανά δύο, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{A}$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} s(A_n)$$

Ορισμός 3.1.2. Έστω X σύνολο (χωρίς τοπολογία) και $\mathscr{A}$ μια κλάση υποσυνόλων του X που περιέχει το $\varnothing$. Μια συνολοσυνάρτηση

$$\mu^* : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

καλείται **εξωτερικό μέτρο (outer measure)** αν και μόνο αν

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$ (ιδιότητα του μηδενός, zero property).

(ii) Αν $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{A}$ και $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ (μή φθίνουσα ιδιότητα, nondecreasing property)

(iii) Αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

(αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα).

Η έννοια του εξωτερικού μέτρου οφείλεται στον Έλληνα μαθηματικό θεμελιωτή της σύγχρονης θεωρίας μέτρου **Κων/νο Καραθεοδωρή (1873 - 1950)** (Nachr. Ges. Wiss Göttingen, (404 - 426 (1914)).

Συνήθως η κλάση $\mathcal{A}$ είναι **σ-δακτύλιος** οπότε η $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ για όλες τις ακολουθίες συνόλων εν $\mathcal{A}$. Συχνά $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

Ορισμός 3.1.3. Έστω Χ σύνολο (χωρίς τοπολογία και $\mathcal{R}$ δακτύλιος (ή ημι-δακτύλιος) υποσυνόλων του Χ. Η συνολοσυνάρτηση

$$\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

καλείται **μή αρνητικό μέτρο (nonegative measure)** αν και μόνο αν

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Αν τα $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R}$ είναι ξένα ανά δύο και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(iii) $\mu(A) \geqslant 0 \quad \forall A \in \mathcal{R}$

Θεώρημα 3.1.4. Έστω Χ σύνολο και $\mathcal{R}$ δακτύλιος ή ημι-δακτύλιος. Αν $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ μέτρο τότε,

(i) Αν $A \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$, και $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(ii) Αν $A \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$, $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$.

(iii) Αν Α και Β είναι μετρήσιμα σύνολα, $A \subset B$, το Α είναι πεπερασμένου μέτρου, και μ μέτρο, τότε

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Απόδ.: (i) Αν $\mathcal{R}$ δακτύλιος και $A \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{R}$. Το αποτέλεσμα είναι προφανές αν θεωρήσωμε την ακολουθία

$$A, B, \varnothing, \varnothing, \dots \varnothing \dots$$

(ii) Αν $\mathcal{R}$ δακτύλιος έχομε,

$$B = A \cup (B \cap A^c) \quad \text{και} \quad \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c)$$

άρα

$$\mu(B) \geqslant \mu(A)$$

Αν $\mathcal{R}$ είναι ημι-δακτύλιος

$$B \cap A^c = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \{E_1, \dots E_n\} \subset \mathcal{R}, E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n]$$

$$B = A \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$$

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n) \geqslant \mu(A)$$

(iii) Τα σύνολα A και $B \setminus A$ είναι ξένα, και $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad \text{ή}$$

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A),$$

(πρβλ. 1.1.1, 1.1.3 και 2.1).

Ορισμοί 3.1.5. (i) Έστω X σύνολο, $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X και

$$\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \text{μέτρο}$$

Ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται **χώρος μέτρου (measure space).**

(ii) Ένας χώρος μέτρου καλείται **πεπερασμένος (finite)** αν $\mu(X) < +\infty$.

(iii) Αν το σύνολο $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < +\infty$ τότε, ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου**

(iv) Έστω $E \subset X$

$$\mu^*(E) = \begin{cases} \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathscr{A}, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \\ +\infty \quad \text{αν δεν υπάρχουν } A_n \end{cases}$$

Το μ^* καλείται **εξωτερικό μέτρο οριζόμενο υπό της μ**. Σημειώνομε ότι $\mu^*(\varnothing) = 0$ υποθέτοντας ότι τα $A_n = \varnothing$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** είναι ειδική περίπτωση του προηγουμένως ορισθέντος εξωτερικού μέτρου, (πρβλ. 3.1.2 και 3.1.7(4)).

Πρόταση 3.1.6. Έστω $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα, $\forall\, A \in \mathscr{A}$

$$\mu^*(A) = \mu(A)$$

Απόδ.: Αν $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathscr{A}$ έστω $B_n = A \cap A_n \setminus \bigcup_{j<n} A_j$.

Τα (B_n) είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$, (πρβλ. και 2.1.3).

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

οπότε

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathscr{A}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

Αντίστροφα. Έστω $A_1 = A$,
$A_n = \varnothing$, $\forall\, n > 1$,
τότε, $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$ και επομένως

$$\mu^*(A) = \mu(A)$$

Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathscr{A} = \{A \subset X : A \text{ ή } X \setminus A \text{ να είναι αριθμήσιμο}\}$. Έστω

$$\mu(A) = 0, \quad |A| \in \mathbb{N}, \text{ δηλ. A αριθμήσιμο}$$
$$\mu(A) = 1, \quad \text{αν το A έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα}$$

Η $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα και το μ μέτρο επ' αυτής. Κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο B με υπεραριθμήσιμο συμπλήρωμα **δεν** είναι μετρήσιμο.

$$1 = \mu(X) = \mu^*(X) = \mu^*(X \cap B) + \mu^*(X \cap B^c) = 1 + 1 = 2.$$

3.1.7 Παραδείγματα εξωτερικού μέτρου

1. Έστω X σύνολο και

$$\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+ : \begin{array}{l} \mu^*(A) = 0 \text{ αν } A = \varnothing \\ \mu^*(A) = 1 \end{array}$$

τότε η συνολοσυνάρτηση μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

2. Έστω X σύνολο και

$$\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+ : \begin{array}{l} \mu^*(A) = 0 \text{ αν το A είναι αριθμήσιμο} \\ \mu^*(A) = 1 \text{ αν το A είναι υπεραριθμήσιμο} \end{array}$$

Τότε, η μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

3. Έστω X απειροσύνολο και

$$\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+ : \begin{array}{l} \mu^*(A) = 0 \text{ αν A πεπερασμένο} \\ \mu^*(A) = 1 \text{ αν A είναι άπειρο} \end{array}$$

Η μ^* αποτυγχάνει να είναι αριθμήσιμα υποπροσθετική και επομένως δεν είναι **εξωτερικό μέτρο**.

4. **Εξωτερικό μέτρο Lebesgue επί της** $\mathbb{R}$. Συμβολίζεται με λ^* και ορίζεται ως εξής. $\forall\, A \subset \mathbb{R}$, έστω $\mathscr{C} = \{(a_i, b_i) : i \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$$

$$\lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty] : \lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_i (b_i - a_i),\ (a_i, b_i) \in \mathscr{C}_A \right\}$$

5. Κάθε εξωτερικό μέτρο που είναι (πεπερασμένα) προσθετικό είναι σ-προσθετικό.

Πράγματι, αν $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A_n)$

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

και

$$\lim_{k\to\infty} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

3.1.8 Παραδείγματα μέτρου

(α) Έστω $X \neq \varnothing$ σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ η σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του X.
Έστω,

$$\mu_1 : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} : \mu_1(E) = 0, \quad \forall\, E \in \mathcal{P}(X)$$

$$\mu_2 : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} : \mu_2(\varnothing) = 0, \ \mu_2(E) = +\infty \text{ αν } E \neq \varnothing$$

Τα μ_1, μ_2 είναι μέτρα. Το μ_2 **δεν** είναι πεπερασμένο ή σ-πεπερασμένο, (πρβλ. 3.1.5).

(β) Έστω $(X, \mathcal{P}(X))$ και $p \in X$.

$$\mu: \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}: \mu(E) = 0 \quad p \notin E$$
$$= 1 \quad p \in E$$

Το μ είναι **πεπερασμένο μέτρο** και καλείται **μοναδιαίο μέτρο συγκεντρωμένο στο p**.

(γ) $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$.

Αν $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = |E|$, αν E πεπερασμένο

$= +\infty$ αν E απειροσύνολο

Το μ δεν είναι πεπερασμένο αλλά είναι σ-πεπερασμένο, (πρβλ. 3.1.5).

(δ) Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ χώρος Borel (πρβλ. 2.2.2) και έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς αύξουσα συνάρτηση. Αν $E = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, ορίζομε,

$$\lambda_f(E) \underset{\text{ορσ.}}{=} f(\beta) - f(\alpha)$$

Το λ_f καλείται Borel - Stieltjes μέτρο παραγόμενο υπό της f.

(ε) Έστω X τυχαίο σύνολο και $\mathcal{B}$ όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του X. Το σύστημα υποσυνόλων $\mathcal{B}$ είναι δακτύλιος και όχι σ - δακτύλιος. Έστω $f: X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Ορίζομε,

$$\mu(\{x_1 \ldots x_n\}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k), \quad \mu(\varnothing) = 0.$$

Το μ είναι μέτρο επί του $\mathcal{B}$.

Αν η f δεν είναι φραγμένη συνάρτηση, κάποια σύνολα έχουν μέτρο άπειρο και το μ δεν είναι κατ' ανάγκην σ - πεπερασμένο.

(στ) Έστω $X = \{x_1 \ldots x_n\}$. Κάθε σημείο x_k υποθέτουμε ότι έχει μάζα $m_k \geqslant 0$. Έστω $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$, δηλαδή, όλα τα υποσύνολα του X είναι μετρήσιμα. Ορίζομε, αν $B \subset X$, $\mu(B) \underset{\text{ορσ.}}{=} \sum_k m_k$ όπου το άθροισμα λαμβάνεται για τους δείκτες των σημείων $x_k \in B$. Η συνάρτηση μ είναι **πεπερασμένο μέτρο επί του** $(X, \mathcal{B})$

(στ΄) Ας υποθέσωμε ότι έχωμε ένα σύνολο B: μ (B) = 0. Το B καλείται **σύνολο μηδενικού μέτρου** (set of measure zero, null set), ως προς το δοθέν μέτρο μ.

Ας υποθέσωμε ότι μια ιδιότητα ισχύει για όλα τα σημεία του X, εκτός εκείνων που ανήκουν στο $B \subset X$ και είναι μ (B) = 0. Τότε, η ιδιότητα **ισχύει σχεδόν παντού** (almost everywhere, ή a.e.) επί του X. Δηλαδή, μια ιδιότητα ισχύει σχεδόν παντού αν αποτυγχάνει να ισχύει σε σύνολα μέτρου 0.

(ζ) **Παραδείγματα συνόλων μέτρου 0.** (i) Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε m (E) = 0. Πράγματι, έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ... πραγματικοί αριθμοί. Τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ... περιέχονται σε ανοικτά διαστήματα μήκους $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \frac{\varepsilon}{2^3}$, αντίστοιχα.

$\forall \varepsilon > 0$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i - \frac{\varepsilon}{2^i},\ \alpha_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right),$$

(πρβλ. 1.1.1).

$$m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m\left(\alpha_i - \frac{\varepsilon}{2^i},\ \alpha_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

Δηλαδή, m (E) = 0.

(ii) Η αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων έχει μέτρο Ο, προφανώς επειδή η αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων, είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(iii) Το σύνολο Cantor είναι μετρήσιμο και το μέτρο του είναι μηδέν.

Ως γνωστόν, επιτυγχάνομε το σύνολο Cantor διαιρώντας το διάστημα [0, 1] σε τρία μέρη και αφαιρούμε το μεσαίο διάστημα, (ίσο με το 1/3 του αρχικού διαστήματος). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται άπειρες φορές και αυτό που απομένει είναι το σύνολο Cantor. Στο πρώτο βήμα αφαιρείται διάστημα μήκους 1/3. Στο δεύτερο αφαιρείται διάστημα μήκους $1/3^2$. Γενικώς μετά n-βήματα αφαιρούνται 2^{n-1} διαστήματα μήκους $1/3^n$. Το ολικό μέτρο του συνόλου Cantor K είναι

$$m(K) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 0.$$

Είναι ενδιαφέρον να τονίσωμε ότι το σύνολο Cantor είναι υπεραριθμήσιμο.

Πράγματι, το σύνολο Cantor είναι υπεραριθμήσιμο σαν τέλειο υποσύνολο πλήρους μ.χ.

Έστω (X, d) πλήρης μ.χ. και $A \subset X$ τέλειο σύνολο. Θα δείξωμε ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Αν το A είναι τέλειο τότε είναι κλειστό και ο επαγόμενος μ.χ. $\langle A, d|A \times A \rangle$ είναι πλήρης. Έστω ότι το A είναι αριθμήσιμο,

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\}.$$

$$\overset{0}{\overline{\{\alpha_1\}}} = \overset{0}{\{\alpha_n\}} = \varnothing$$

γιατί αν $\overset{0}{\{\alpha_n\}} \neq \varnothing \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$:

$S(\alpha_n, \varepsilon) \subseteq \{\alpha_n\}$ δηλαδή, $S(\alpha_n, \varepsilon) = \{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in A' = A$, (το A είναι τέλειο) οπότε, $\exists\, \alpha_\lambda$: $\alpha_n \neq \alpha_\lambda$ και $\alpha_\lambda \in S(\alpha_n, \varepsilon) = \{\alpha_n\}$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Άτοπο. Δηλαδή, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\}$, $\overset{0}{\{\alpha_n\}} = \varnothing$. Επομένως, το A είναι σύνολο 1ης κατηγορίας. Άτοπο, γιατί σαν πλήρης μ.χ. κατά το θεώρημα Baire είναι σύνολο 2ης κατηγορίας. Το άτοπο προήλθε γιατί υποθέσαμε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

Ορισμός 3.1.9. Μια συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής **σχεδόν παντού** επί του $[a, b]$ αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνεχείας της f είναι σύνολο μέτρου μηδέν. Δηλαδή, αν D είναι το σύνολο των σημείων ασυνεχείας, $\lambda(D) = 0$ (Η f είναι συνεχής εκτός ενός συνόλου μέτρου 0).

Παράδειγμα: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in I = [a, b] \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής επί του I αλλά δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{Q}$. Επομένως η f είναι συνεχής σχεδόν παντού επί της $\mathbb{R}$.

Έστω (X, $\mathscr{A}$, μ) χώρος μέτρου. Διατυπώνομε και αποδεικνύομε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.1.10. Σε ένα χώρο μέτρου (X, $\mathscr{A}$, μ) θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα συνόλων,

$$\mathscr{N}(\mu) = \{N \in \mathscr{P}(X) : N \subset B \in \mathscr{A}, \ \mu(B) = 0\}$$

Η $\mathscr{N}(\mu)$ είναι σ - δακτύλιος υποσυνόλων του X.

Απόδ.: Έστω N, M $\in \mathscr{N}(\mu)$, τότε,

$$\begin{aligned} &N \subset B \in \mathscr{A} \text{ και } \mu(B) = 0 \\ &M \subset D \in \mathscr{A} \text{ και } \mu(D) = 0 \end{aligned} \qquad (\text{πρβλ. } 2.1.1.)$$

Επειδή,

$$N \cap M^c \subset B \Rightarrow N \cap M^c \in \mathscr{N}(\mu) \tag{1}$$

Επίσης,

$$\forall k \in \mathbb{N}, N_k \in \mathscr{N}(\mu) \Rightarrow \exists B_k \in \mathscr{A}, N_k \subset B_k \quad \mu(B_k) = 0$$

Επομένως,

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \in \mathscr{A}, \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \tag{2}$$

και

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k) = 0$$

Από τα (1) και (2) έπεται ότι η $\mathscr{N}(\mu)$ είναι σ - δακτύλιος.

Θα αποδείξωμε τώρα λεπτομερώς το παράδειγμα 4 της 3.1.7.

Πρόταση 3.1.11. Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue επί της $\mathbb{R}$ είναι ένα εξωτερικό μέτρο που αντιστοιχεί σε κάθε υποδιάστημα της $\mathbb{R}$ το μήκος του.

Απόδ.: Πρώτα θα δείξωμε ότι $\lambda^*(\varnothing) = 0$. $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει μια ακολουθία ανοικτών φραγμένων διαστημάτων $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$ των οποίων η ένωση περιέχει το $\varnothing$: $\sum\limits_i (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$. Άρα $\lambda^*(\varnothing) = 0$

Αν $A \subset B$ κάθε ακολουθία ανοικτών διαστημάτων που καλύπτει το B, επίσης καλύπτει και το A και τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$$

Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία υποσυνόλων της $\mathbb{R}$. Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) = +\infty$$

τότε

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(A_n) \tag{1}$$

Ας υποθέσωμε τώρα ότι $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(A_n) < +\infty$ και $\varepsilon > 0$

$$\lambda^*(A_n) \underset{\text{ορσ.}}{=} \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} (b_{n,i} - a_{n,i})\right)$$

γιατί κάθε A_n καλύπτεται από μία ακολουθία ανοικτών (φραγμένων) διαστημάτων.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_{n,i} - a_{n,i}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(b_{n,i}-a_{n,i}) < \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)+\varepsilon,\ \forall\, \varepsilon>0$$

οπότε,

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n), \qquad (2)$$

δηλαδή, το λ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

Τώρα, υπολογίζωμε το εξωτερικό μέτρο υποδιαστημάτων της $\mathbb{R}$. Ας θεωρήσωμε το διάστημα $[a, b]$. Έστω $\{(a_i, b_i)\}$ ακολουθία ανοικτών φραγμένων διαστημάτων:

$$[a, b] \subset \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$$

Επειδή το $[a, b]$ είναι συμπαγές $\exists\, n \in \mathbb{N}$:

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$$

$$b-a \leqslant \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) \Rightarrow b-a \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)$$

$$b-a \leqslant \lambda^*([a, b]) \quad (\text{πρβλ. } 3.1.7,\ 4) \qquad (3)$$

Τώρα, το $[a, b]$ περιέχεται στο ανοικτό διάστημα $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, $\forall\, \varepsilon>0$. Έχομε,

$$\lambda^*([a, b]) \leqslant \ell\,(a-\varepsilon, b+\varepsilon) = b-a+2\varepsilon$$

όπου $\ell\,(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ είναι το μήκος του διαστήματος.

$$\lambda^*([a, b]) \leqslant b-a, \quad \forall\, \varepsilon>0 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4)

$$\lambda^* ([a, b]) = b - a$$

Το εξωτερικό μέτρο ενός τυχόντος φραγμένου διαστήματος I είναι το μήκος του, επειδή κάθε τέτοιο διάστημα περιέχει και περιέχεται σε κλειστά φραγμένα διαστήματα, που το μήκος τους είναι απειροστά κοντά στο μήκος ℓ. Ένα μή φραγμένο διάστημα έχει άπειρο εξωτερικό μέτρο, επειδή περιέχει αυθαιρέτως μεγάλα, κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

Ας ορίσωμε τώρα το εξωτερικό μέτρο Lebesgue επί του $\mathbb{R}^n$.
Ένα **n - διάστημα** του $\mathbb{R}^n$ είναι της μορφής $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, όπου I_i $1 \leqslant i \leqslant n$ είναι υποδιάστημα της $\mathbb{R}$.

$$I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n = \{(x_1 \ldots x_n) : x_i \in I_i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Ο **όγκος (volume)** του διαστήματος $I_1 \times \ldots \times I_n$ είναι το γινόμενο των μηκών των διαστημάτων, $I_1, \ldots, I_n$, που σημειώνεται με vol $(I_1 \times \ldots \times I_n)$

$$\forall\, A \subset \mathbb{R}^n \text{ έστω } \mathscr{C}_A = \left\{ R_i \,|\, R_i \text{ φραγμένα και ανοικτά} \subset \mathbb{R}^n : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\}$$

$$\lambda^* (A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}\,(R_i) : R_i \in \mathscr{C}_A \right\}.$$

Πρόταση 3.1.12. Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue επί του $\mathbb{R}^n$ είναι ένα εξωτερικό μέτρο, που αντιστοιχεί σε κάθε n - διάστημα τον ολικό όγκο του.

Απόδ.: Αν K είναι συμπαγές n-διάστημα και αν $(R_i)_{i=1}^n$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία φραγμένων και ανοικτών διαστημάτων:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

$$K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_j \times K_{j+1} \times \ldots \times K_n, \qquad K_j \subset R_i$$

$$\text{vol}\,(K) = \sum_j \text{vol}\,(K_j) < \sum_i \text{vol}\,(R_j)$$

Οι λεπτομέρειες της αποδείξεως είναι ανάλογες της προηγούμενης προτάσεως.

Σε αντίθεση με το μέτρο Lebesgue **δεν** είναι γενικά αληθές ότι δύο διαστήματα με τα ίδια άκρα (π.χ. τα $[a, b]$, (a, b)) έχουν κατ' ανάγκην το ίδιο μέτρο.

Παράδειγμα: Αν δ είναι μέτρο επί της $\mathbb{R}$:

$$\begin{matrix} \delta\,(E) = 1 & o \in E \\ \delta\,(E) = 0 & o \notin E \end{matrix} \qquad \text{τότε}$$

$$\delta\,([0, 1]) = 1, \qquad \delta\,((0, 1)) = 0$$

3.1.13. Έστω X Hausdorff τοπολογικός χώρος. **Ένα Borel μέτρο επί του X** είναι ένα μέτρο με πεδίο ορισμού την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$. Έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$. Ένα θετικό μέτρο μ: $\mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ είναι **κανονικό (regular)** αν

a) $\forall$ K συμπαγές $\subset X \Rightarrow \mu(K) < +\infty$

b) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U)$: $A \subset U$ ανοικτό$\}$

c) $\forall$ U ανοικτό $\subset X$

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K): K \text{ συμπαγές } \subset U\}$$

Ένα μέτρο λέγεται **κανονικό Borel μέτρο** αν το πεδίο ορισμού είναι η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$. Αν το μέτρο μ ικανοποιεί την (b) λέγεται **εξωτερικό κανονικό μέτρο (outer regular measure)**. Αν ικανοποιεί την (c) λέγεται **εσωτερικό κανονικό μέτρο (inner regular measure)**.

Η κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Πρόταση 3.1.14. Έστω A μετρήσιμο κατά Lebesgue υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

(i) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U)$: U ανοικτό, $A \subset U\}$

(ii) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K)$: K συμπαγές, $K \subset A\}$

Δηλαδή, το μέτρο Lebesgue είναι κανονικό μέτρο.

Απόδ.: Επειδή το μέτρο λ είναι μονότονο,

$$\lambda(A) \leqslant \inf \{\lambda(U) \colon U \text{ ανοικτό}, A \subset U\}$$

$$\lambda(A) \geqslant \sup \{\lambda(K) \colon K \text{ συμπαγές}, K \subset A\}$$

Επομένως, αρκεί να δείξωμε την αντίστροφη ανισότητα

α) Αν $\lambda(A) = +\infty$ η απόδειξη είναι προφανής. Υποθέτομε ότι $\lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός.

$$A \subset \bigcup_i R_i, \ (R_i) \text{ ανοικτά διαστήματα } \subset \mathbb{R}^n$$

και

$$\sum_i \mathrm{vol}\,(R_i) < \lambda(A) + \varepsilon \ \ (\text{πρβλ. } 1.2, 3.1.5, 3.1.6) \tag{1}$$

Έστω

$$U = \bigcup_{i \in I}^{\infty} R_i \Rightarrow A \subset U \quad \text{και}$$

$$(\text{πρβλ. } 1.2, 3.2.3) \ \lambda(U) \leqslant \sum_i \lambda(R_i) = \sum_i \mathrm{vol}\,(R_i) < \lambda(A) + \varepsilon \tag{1}$$

Επειδή ο ε είναι απειροστά μικρός η ισότητα ισχύει.

β) Έστω ότι το A είναι φραγμένο και C κλειστό και φραγμένο σύνολο: $A \subset C$ και $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός.

Από την (α) $\exists$ U ανοικτό, $C \setminus A \subset U$:

$$\lambda(U) \leqslant \lambda\,(C \setminus A) + \varepsilon \tag{1}$$

Έστω $K \underset{\text{ορσ}}{=} C \setminus U = C \cap U^c$. Το K είναι κλειστό και φραγμένο, επομένως συμπαγές υποσύνολο του A,

$$K = C \setminus U \subseteq A \tag{3}$$

$$C \subseteq K \cup U \text{ και } \lambda(C) \leqslant \lambda(K) + \lambda(U) \tag{2}$$

Επομένως

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(K) + \lambda(U) \leqslant \lambda(K) + \lambda(C) - \lambda(A) + \varepsilon$$

$$\lambda(A) - \varepsilon \leqslant \lambda(K)$$

και επειδή ο $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετα μικρός $\Rightarrow \lambda(A) \leqslant \lambda(K)$, $\forall$ A φραγμένο $\subset \mathbb{R}^n$. Τώρα υποθέτομε ότι το A δεν είναι φραγμένο. Έστω $b \in \mathbb{R}$: $b < \lambda(A)$. Θα κατασκευάσωμε συμπαγές $K \subset A$:

$$b < \lambda(K)$$

Έστω $(A_n)\uparrow$ αύξουσα ακολουθία φραγμένων μετρησίμων υποσυνόλων του A:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \underset{1.2.14}{=} \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n) > b \tag{1}$$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \lambda(A_{n_0}) > b$
Το A_{n_0} είναι φραγμένο. Από το (β) της αποδείξεως $\exists$ K συμπαγές $\subset A_{n_0}$:

$$\lambda(K) > b$$

Επειδή, $K \subset A$ και ο $\varepsilon > 0$ είναι απειροστά μικρός αριθμός η απόδειξη είναι πλήρης.

3.1.15 Γεωμετρικές Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Όταν ορίσαμε το μέτρο Lebesgue σ' ένα Ευκλείδιο χώρο (πρβλ. 1.2) θεωρήσαμε κάποιες από τις ιδιότητες του μέτρου. Η δικαιολογία για την μελέτη του μέτρου Lebesgue είναι ότι αυτό επαληθεύει ακριβώς την προαίσθησή μας ότι αποτελεί γενίκευση του μήκους, του εμβαδού και του όγκου σ' ένα Ευκλείδιο χώρο. Μέχρι τώρα, έχομε διατυπώσει κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες (πρβλ. 2.2.3, 3.1.8, 3.1.12) του μέτρου Lebesgue. Διατυπώνομε μια επιπλέον γεωμετρική ιδιότητα του μέτρου Lebesgue.

Πρόταση: Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ^* επί του $\mathbb{R}^n$ είναι ως προς την μετάθεση αμετάβλητο, δηλαδή,

$$\text{αν } x \in \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^n,\ \ \lambda^*(A) = \lambda^*(A + x)$$

Ένα υποσύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ είναι Lebesgue μετρήσιμο $\Leftrightarrow$ $x + B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

3.2 Κατασκευή χώρου μέτρου από ένα εξωτερικό μέτρο

Επανερχόμαστε στην έννοια του εξωτερικού μέτρου, από το οποίο μπορούμε να κατασκευάσωμε ένα μέτρο. Αυτό επιτυγχάνεται αφού πρώτα κατασκευάσωμε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{M}(\mu)$ ή $\mathcal{M}_\mu$ επί της οποίας το εξωτερικό μέτρο μ^* είναι αριθμήσιμο προσθετικά. Οι K. Hewit και E. Stromberg θεωρούν μόνο την περίπτωση που το μέτρο μ^* είναι ορισμένο στην άλγεβρα $\mathcal{P}(X)$.

3.2.1 Έστω X σύνολο και μ^* εξωτερικό μέτρο επί του X. Ένα υποσύνολο $B \subset X$ λέγεται **μετρήσιμο ως προς το μ^* (measurable with respect to μ^*)** αν $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$, $\forall A \subseteq X$. Δηλαδή, μ^*-μετρήσιμο υποσύνολο του X είναι ένα σύνολο που διαιρεί κάθε υποσύνολο του X σε δύο κομμάτια ώστε τα μέτρα αυτών των κομματιών να έχουν άθροισμα το μέτρο του αρχικού συνόλου που διαιρέθηκε.

Για το εξωτερικό μέτρο μ^* έχομε

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

$\forall A, B \subset X$, (πρβλ. 3.1.2).

Για να δείξωμε ότι το B είναι **μετρήσιμο** αρκεί να δείξωμε ότι

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Αν $\mu^*(A) = +\infty$ η ανισότητα ισχύει προφανώς. Επομένως η μ^*-μετρησιμότητα του B αξίζει να επαληθευτεί αν $\mu^*(A) < +\infty$.

Πρόταση 3.2.2. Έστω X σύνολο και μ^* εξωτερικό μέτρο επί του X. Τότε, κάθε $B \subset X$: $\mu^*(B) = 0$ ή $\mu^*(B^c) = 0$ είναι μ^*-μετρήσιμο.

Απόδ.: Υποθέτομε ότι $\mu^*(B) = 0$ ή $\mu^*(B^c) = 0$. Σύμφωνα με προηγούμενη παρατήρηση αρκεί να δειχθεί ότι

$$\forall A \subset X \quad \mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap B) + (A \cap B^c)$$

Η ανισότητα είναι προφανής λόγω της υποθέσεως.

Από την 3.2.2 το $\varnothing$ και ο χώρος X είναι μετρήσιμα για κάθε εξωτερικό μέτρο επί του X.

Παρατήρηση. Επαναλαμβάνομε ότι το σύνολο E είναι μ^*-μετρήσιμο $\Leftrightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$, $\forall A \subseteq X$.
Έστωσαν $E \in \mathscr{A}$, $F \in \mathscr{A}$: $E \cap F = \varnothing$.
Αν θέσωμε στην θέση του A το $A \cap (E \cup F)$ έχομε,

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (E \cup F)) &= \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)\end{aligned}$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι, εαν τα E_i ειναι ξενα ανα δυο και $E_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$$\mu^*\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$

Θεώρημα 3.2.3. Έστω X σύνολο και μ^* εξωτερικό μέτρο επί του X.

$\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι η συλλογή των μ^*-μετρησίμων συνόλων επί του X. Δηλαδή,

$$\mathcal{M}_{\mu^*} \underset{\text{ορσ}}{=} \{B / B \subseteq X: \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)\} \ \forall A \subset X\}$$

Τότε

(i) η $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι σ-άλγεβρα

(ii) το $\mu^* / \mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι μέτρο επί της $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

Απόδ.: (i) (a) $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$
Η εξίσωση $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$ ισχύει αν εναλλάξωμε την θέση των B και B^c. Άρα η συλλογή $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι κλειστή για τα συμπληρωματικά των στοιχείων της.
(b) Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$
Πράγματι,

$$\mu^* (A \cap (B_1 \cup B_2)) = \mu^* (A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^* (A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c)$$
$$= \mu^* (A \cap B_1) + \mu^* (A \cap B_2 \cap B_1^c)$$

Τώρα,

$$\mu^* (A \cap (B_1 \cup B_2) + \mu^* (A \cap (B_1 \cup B_2)^c) =$$
$$= \mu^* (A \cap B_1) + \mu^* (A \cap B_2 \cap B_1^c) + \mu^* (A \cap B_1^c \cap B_2^c) =$$
$$= \mu^* (A \cap B_1) + \mu^* (A \cap B_1^c) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \mu^* (A)$$

άρα η $B_1 \cup B_2$ είναι μ^*-μετρήσιμη και επομένως η $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι άλγεβρα.

Τώρα, θα δείξωμε ότι η $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι σ-άλγεβρα. Έστω $B = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$, όπου $(B_i)_{i \in I}$ ακολουθία ξένων ανά δύο μετρησίμων συνόλων,

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad \text{και} \quad B^c \subset G_n^c \tag{1}$$

Το σύνολο G_n είναι μετρήσιμο,

$$\mu^* (A) = \mu^* (A \cap G_n) + \mu^* (A \cap G_n^c) \geqslant \mu^* (A \cap G_n) + \mu^* (A \cap B^c)$$

$$G_n \cap B_n = B_n \qquad G_n \cap B_n^c \underset{(1)}{=\!=} \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i = G_{n-1}$$

Επειδή το B_n είναι μετρήσιμο έχομε,

$$\mu^* (A) = \mu^* (A \cap B_n) + \mu^* (A \cap B_n^c)$$
$$\mu^* (A \cap G_n) = \mu^* (A \cap G_n \cap B_n) + \mu^* (A \cap G_n \cap B_n^c)$$
$$= \mu^* (A \cap B_n) + \mu^* (A \cap G_n \cap B_n^c)$$

Δηλαδή,

$$\mu^* (A \cap G_n) = \mu^* (A \cap B_n) + \mu^* (A \cap G_{n-1})$$

$$\mu^*(A \cap G_n) \underset{(1)}{=} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i)$$

$$\mu^*(A) \underset{\text{ορσ}}{=} \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap G_n^c) \geqslant \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap B^c) \quad (1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap B^c) \geqslant$$

$$\geqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

γιατί

$$A \cap B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$$

Δηλαδή,

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

επομένως, το $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ είναι μ^*-μετρήσιμο. Επειδή η τυχούσα ένωση μιας ακολουθίας συνόλων σε μία άλγεβρα μπορεί να αντικατασταθεί από μία ένωση ξένων συνόλων της άλγεβρας, (πρβλ. και 2.1.3), η $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι σ-άλγεβρα.

(ii) Θα αποδείξωμε ότι ο περιορισμός

$$\mu^* / \mathcal{M}_{\mu^*} = \mu, \quad (\text{πρβλ. Ορσ. } 3.1.3)$$

είναι μέτρο.

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \mu^*(B_1 \cup B_2) = \mu^*[(B_1 \cup B_2) \cap B_2] +$$

$$+ \mu^*[(B_1 \cup B_2) \cap B_2^c]$$

$$= \mu^*(B_2) + \mu^*(B_1) = \mu(B_2) + \mu(B_1)$$

γιατί τα B_1, B_2 είναι ξένα.

Η πεπερασμένη προσθετικότητα προκύπτει από την τελεία επαγωγή.

Αν $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ και $B_i \cap B_j = \varnothing, \ \forall i \neq j$

τότε

$$\mu(B) \geqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \Rightarrow \mu(B) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

αλλά επειδή $B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$$\mu(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

λόγω της υποπροσθετικότητος του μ^*. Άρα το μ είναι αριθμήσιμα προσθετικό.
Προφανώς,

$$\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$$

Αν το εξωτερικό μέτρο είναι **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** λ^* η σ–άλγεβρα $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ λέγεται **συλλογή των κατά Lebesgue μετρησίμων συνόλων της** $\mathbb{R}$ και ο περιορισμός

$$\lambda^* / \mathcal{M}_{\lambda^*} = \lambda$$

καλείται **μέτρο Lebesgue**.

Πρόταση 3.2.4. Κάθε Borel υποσύνολο της $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue.

Απόδ.: Θα δείξωμε ότι το διάστημα $B = (-\infty, b]$ είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue. Αρκεί να δειχθεί ότι

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad \lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c)$$

αφού είναι γνωστή η υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \ \lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c).$$

Έστω $\{(a_n, b_n)\}$ ακολουθία ανοικτών διαστημάτων που καλύπτουν το A:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \lambda^* (A) + \varepsilon$$

Τα σύνολα $(a_n, b_n) \cap B$ και $(a_n, b_n) \cap B^c$ είναι ξένα διαστήματα.

Επιλέγομε τα ανοικτά διαστήματα (c_n, d_n) και (e_n, f_n):

$$(a_n, b_n) \cap B \subset (c_n, d_n)$$

$$(a_n, b_n) \cap B^c \subset (e_n, f_n) \quad \text{και}$$

$$d_n - c_n + f_n - e_n \leqslant b_n - a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \varepsilon > 0$$

Η ακολουθία $\{(c_n, d_n)\}$ καλύπτει την $A \cap B$ και η $\{(e_n, f_n)\}$ καλύπτει την $A \cap B^c$

$$\lambda^* (A \cap B) \leqslant \sum_n (d_n - c_n) \qquad \lambda^* (A \cap B^c) \leqslant \sum_n (f_n - e_n)$$

Επιπλέον,

$$\sum_n (d_n - c_n) + \sum_n (f_n - e_n) \leqslant \sum_n (b_n - a_n) + \varepsilon$$

$$\lambda^* (A \cap B) + \lambda^* (A \cap B^c) \leqslant \sum_n (b_n - a_n) + \varepsilon \leqslant \lambda^* (A) + 2\varepsilon$$

Επειδή ο $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετα μικρός

$$\lambda^* (A \cap B) + \lambda^* (A \cap B^c) \leqslant \lambda^* (A).$$

Έχομε αποδείξει ότι (πρβλ. 3.2.3) η $\mathcal{M}_{\lambda^*}$, η συλλογή των κατά Lebesgue μετρησίμων συναρτήσεων είναι σ-άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$ και περιέχει κάθε ημι-ανοικτό διάστημα $(-\infty, b]$. Η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι η **ελαχίστη σ-άλγεβρα** που περιέχει όλα αυτά τα διαστήματα γιατί είναι παραγομένη από τις ακόλουθες κλάσεις συνόλων.

(α) την κλάση των κλειστών υποσυνόλων της $\mathbb{R}$

(β) την κλάση των υποδιαστημάτων της $\mathbb{R}$ της μορφής $(-\infty, b]$,

και

(γ) την κλάση των υποδιαστημάτων της μορφής $[a, b]$.

Δηλαδή, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{\lambda^*}$

Ανάλογα έχομε την

Πρόταση: Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue.

Μετά από όλα αυτά τίθενται οι εξής ερωτήσεις.

1η Ερώτηση. Κάθε υποσύνολο της $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue; Η απάντηση είναι ΟΧΙ. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει υποσύνολο της $\mathbb{R}$ και μάλιστα του $(0, 1)$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

2η Ερώτηση. Κάθε σύνολο μετρήσιμο κατά Lebesgue είναι σύνολο Borel; Και εδώ η απάντηση είναι ΟΧΙ.

Ένας χαρακτηρισμός των κατά Lebesgue μετρησίμων συνόλων

Έστω $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζομε,

$$d(A, B) \underset{\text{ορσ}}{=} \inf\{|p - g| : p \in A, g \in B\}$$

Πρόταση 3.2.5. Για $A, B \subset \mathbb{R}^n$ αν $d(A, B) > 0$ τότε,

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Απόδ.: Έστω $n = d(A, B) > 0$. Για δοθέν $\varepsilon > 0$ $\exists$ (I_n) ακολουθία κλειστών διαστημάτων:

$$A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

και

$$\lambda^*(A \cup B) \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_n) : A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_n) \leqslant \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon$$

Μπορούμε, επίσης να υποθέσουμε ότι η $\delta\,(I_n) < n$, $n = 1, 2, \ldots$ (αν η διάμετρος του I_n είναι μεγαλύτερη του n, μπορούμε να διαμοιράσωμε το I_n σ' ένα πεπερασμένο αριθμό κλειστών διαστημάτων με διάμετρο μικρότερη του n και να αντικαταστήσωμε τα I_n με διαστήματα αυτής της διαμερίσεως).

Για κάθε διαμέριση, $J \in \mathcal{D}(I_n)$, του I_n

$$\mathrm{vol}\,(I_n) = \sum_{J \in \mathcal{D}(I_n)}^{n} \mathrm{vol}\,(J)$$

Η υπόθεση $\delta\,(I_n) < n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει διάστημα I_n που να έχει μή κενές τομές με τα A και B συγχρόνως. Δηλαδή, τα σύνολα

$$U = \{n\colon I_n \cap A \neq \varnothing\}, \qquad V = \{n\colon I_n \cap B \neq \varnothing\}$$

είναι ξένα.

$$\sum_{n \in U} \mathrm{vol}\,(I_n) + \sum_{n \in V} \mathrm{vol}\,(I_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_n)$$

Επειδή κάθε όρος στα δεξιά της ανισότητας είναι μή αρνητικός και εμφανίζεται το πολύ μια φορά στα αριστερά της ανισότητος. Επειδή η (I_n) είναι κάλυψη της $A \cup B$ έχομε,

$$A \subset \bigcup_{n \in U} I_n \quad \text{και} \quad B \subset \bigcup_{n \in V} I_n$$

Τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n \in U} \mathrm{vol}\,(I_n) \qquad \lambda^*(B) \leqslant \sum_{n \in V} \mathrm{vol}\,(I_n)$$

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leqslant \sum_{n \in U} \mathrm{vol}\,(I_n) + \sum_{n \in V} \mathrm{vol}\,(I_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_n) \leqslant \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon, \ \ \forall\, \varepsilon > 0$$

Δηλαδή,

$$\lambda^* (A) + \lambda^* (B) \leqslant \lambda^* (A \cup B) + \varepsilon$$

Αν $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \lambda^* (A) + \lambda^* (B) \leqslant \lambda^* (A \cup B)$.
Λόγω της υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Ορισμός 3.2.6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και μ^* εξωτερικό μέτρο επί του $\mathcal{P}(X)$:

$$\mu^* (A \cup B) = \mu^* (A) + \mu^* (B)$$

αν $d (A, B) > 0$. Τότε το μ^* καλείται **μετρικό εξωτερικό μέτρο**.

Παράδειγμα. Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο, (πρβλ. 3.2.5).

Θεώρημα 3.2.7. Κάθε Borel σύνολο σ' ένα μ.χ. $<X, d>$ είναι μ^*-μετρήσιμο, όπου μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο επί του $\mathcal{P}(X)$, αν και μόνο αν το μ^* είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο.

Απόδ.: Ας υποθέσωμε ότι κάθε Borel σύνολο είναι μ^*-μετρήσιμο. Επομένως και κάθε ανοικτό εν X είναι μ^*-μετρήσιμο.
Έστω $d (A, B) = \delta > 0$,

$$A \subset G = \bigcup_{x \in A} \{y : d (x, y) < \delta\}$$

Το G είναι ανοικτό σύνολο και επομένως είναι μ^*-μετρήσιμο. Προφανώς,

$$G \cap B = \varnothing$$

$$\mu^* (A \cup B) = \mu^* ((A \cup B) \cap G) + \mu^* ((A \cup B) \cap G^c) =$$
$$= \mu^* (A) + \mu^* (B)$$

Άρα, το μ^* είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο.

Ας υποθέσωμε τώρα ότι το μ^* είναι **μετρικό** εξωτερικό μέτρο. Επειδή τα μ^*-μετρήσιμα σύνολα αποτελούν σ-άλγεβρα **αρκεί** να δείξω ότι κάθε κλειστό σύνολο είναι μ^*-μετρήσιμο, (πρβλ. 3.2.4).

Έστω B κλειστό σύνολο και A σύνολο. Θα πρέπει να δείξωμε ότι

$$\mu^* (A) \geqslant \mu^* (A \cap B) + \mu^* (A \cap B^c)$$

τότε το B θα είναι μ^*-μετρήσιμο. Έστω,

$$B_n = \left\{ x \in A \cap B^c : d(x, B) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

Προφανώς,

$$B_n \subset B_{n+1} \subset A \cap B^c \subset A$$

γιατί αν $x \in B_n \Rightarrow x \in A \cap B^c$ και

$$d(x, B) \geqslant \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

δηλαδή, $x \in B_{n+1}$.

$$d(B_n, B) = \inf_{x \in B_n} d(x, B) \geqslant \frac{1}{n}$$

Επειδή

$$A \supseteq (A \cap B) \cup B_n,\ \mu^* (A) \geqslant \mu^* ((A \cap B \cup B_n) =$$
$$= \mu^* (A \cap B) + \mu^* (B_n)$$

γιατί το μ^* είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο. Αρκεί να δείξω ότι,

$$\lim_{n \to \infty} \mu^* (B_n) \geqslant \mu^* (A \cap B^c)$$

οπότε

$$\mu^* (A) \geqslant \mu^* (A \cap B) + \mu^* (A \cap B^c)$$

Παρατηρούμε ότι,

$$A \cap B^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_n \cup (B_{n+1} \setminus B_n) \cup (B_{n+2} \setminus B_{n+1}) \cup \ldots$$

Επομένως

$$\mu^*(A \cap B^c) \leqslant \mu^*(B_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(B_{k+1} \setminus B_k)$$

Αν

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(B_{k+1} \setminus B_k) < +\infty$$

τότε,

$$\mu^*(A \cap B^c) \leqslant \lim_{n \to \infty} \mu^*(B_n)$$

και έτσι αποδείξαμε αυτό που έπρεπε να αποδειχθεί.

Αν $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \mu^*(B_{k+1} \setminus B_k) = \infty$ η απόδειξη είναι ανάλογη, (πρβλ. A. Munkerjea, and K. Pothoven, Real and Functional Analysis, Plenum Press, 1978).

Πρόταση 3.2.8. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα,

(a) Το A είναι Lebesgue μετρήσιμο

(b) $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ G$ ανοικτό: $A \subset G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

(c) $A = H \setminus B$, όπου το H είναι G_δ-σύνολο και $\lambda^*(B) = 0$.

(d) $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ F$ κλειστό: $F \subset A$ και $\lambda^*(A \setminus F) = 0$

(e) $A = K \cup B$, όπου το K είναι F_σ-σύνολο και $\lambda^*(B) = 0$.

Απόδειξη. (a) $\Rightarrow$ (b)

Ας υποθέσωμε ότι το A είναι μετρήσιμο και $\varepsilon > 0$.

1η περίπτωση. $\lambda(A) < +\infty$

Έστω (I_n) ακολουθία κλειστών διαστημάτων:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) < \lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Έστωσαν J_n ανοικτά διαστήματα:

$$I_n \subset J_n : \lambda^*(J_n) < \mathrm{vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{2}$$

Το σύνολο $G = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup \ldots$ είναι ανοικτό και $A \subset G$.

$$\lambda^* (G) < \lambda^* (A) + \varepsilon \qquad (1), (2)$$

Επειδή,

$$\lambda^* (G) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* (J_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \lambda^* (A) + \varepsilon.$$

Τα A, G είναι μετρήσιμα, το A εξ' υποθέσεως και το G είναι Borel σύνολο, (πρβλ. 3.2.4), $A \subset G$.

$$\lambda^* (G \setminus A) = \lambda^* (G) - \lambda^* (A) < \varepsilon, \text{ (πρβλ. 3.1.4.(ii))}$$

Επομένως η (b) ισχύει.

2η περίπτωση.
Έστω ότι το A είναι τυχαίο μετρήσιμο σύνολο, το

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : \lambda^* (A_n) < +\infty$$

Για τα σύνολα A_n ισχύει η (b) όπως αποδείχθηκε. Επομένως υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n: $A_n \subset G_n$ και $\lambda^* (G_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Τώρα το $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup \ldots$ είναι ανοικτό και $A \subset G$. Επειδή

$$G \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus A_n)$$

$$\lambda^* (G \setminus A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* (G_n \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

(b) $\Rightarrow$ (c). Ας υποθέσωμε ότι για το σύνολο A ισχύει η (b) και G_n ανοικτό σύνολο:

$$A \subset G_n \text{ και } \lambda^* (G_n \setminus A) < \frac{1}{n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Έστω $H = G_1 \cap G_2 \cap \ldots$, το H είναι G_δ-σύνολο (πρβλ. 2.2.3) και

$$B = H \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus A$$

$$0 \leqslant \lambda^* (B) \leqslant \lambda^* (G_n \setminus A) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(c) $\Rightarrow$ (a). Πράγματι, το A είναι μετρήσιμο γιατί είναι διαφορά μετρησίμων συνόλων. Δηλαδή, δείξαμε ότι τα (a), (b), (c) είναι ισοδύναμα. Αρκεί να δείξωμε ότι τα (a), (d) και (e) είναι ισοδύναμα.

(a) $\Rightarrow$ (d). Αν το A είναι μετρήσιμο και το $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι μετρήσιμο. Πράγματι, αν το A είναι μετρήσιμο, $\forall Z \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda^* (Z) = \lambda^* (Z \cap A) + \lambda^* (Z \setminus A) =$$
$$= \lambda^* (Z \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)) + \lambda^* (Z \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) =$$
$$= \lambda^* (Z \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)) + \lambda^* (Z \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)^c)$$

Επειδή,

$$(Z \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)) = Z \setminus A$$

$$Z \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A) = Z \cap A$$

δηλαδή, το $\mathbb{R}^n \setminus A$ είναι μετρήσιμο οπότε από την πρόταση (b) υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G: $\mathbb{R}^n \setminus A \subset G$: $\lambda^* (G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) < \varepsilon$. Το κλειστό σύνολο $F = \mathbb{R}^n \setminus G \subset A$ έχει τις ιδιότητες της (d) επειδή,

$$F \subset A, \quad A \setminus F = A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus G) = G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

και

$$\lambda^* (G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A) < \varepsilon$$

(d) $\Rightarrow$ (e). Αν το A πληροί την (d) $\exists F_n$ κλειστό: $F_n \subset A$,

$$\text{και} \quad \lambda^* (A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$$

Το F_σ-σύνολο

$$K = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup \ldots$$

και το

$$B = A \setminus K$$

έχει τις ιδιότητες της (e)

$$A = K \cup B, \quad \lambda^* (B) = 0$$

επειδή,

$$0 \leqslant \lambda^* (B) \leqslant \lambda^* (A \setminus F_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(e) $\Rightarrow$ (a). Το A είναι μετρήσιμο επειδή είναι ένωση μετρησίμων συνόλων.

3.2.8.(a). Με «aleph o» $\aleph_0$ συμβολίζεται ο πληθικός αριθμός των στοιχείων κάθε απείρου συνόλου που είναι αριθμήσιμο. Ο κατάλογος των πληθικών αριθμών είναι

$$1, 2, 3, \ldots \aleph_0$$

Ας υποθέσωμε ότι m και n είναι οι πληθικοί αριθμοί των συνόλων X και Y. «m < n» σημαίνει ότι αν X και Y είναι δύο σύνολα με m και n στοιχεία, τότε,

1ον υπάρχει μια 1–1 απεικόνιση από το $X \xrightarrow[\text{εν}]{1-1} Y$ και

2ον **δεν** υπάρχει 1–1 και επί απεικόνιση από το $X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$.

Βάσει του προηγούμενου ορισμού

$$1 < 2 < 3 < \ldots < \aleph_0$$

Για πεπερασμένους πληθικούς αριθμούς η διάταξη είναι η συνήθης της $\mathbb{R}$. Η $\mathbb{R}$ **δεν** είναι αριθμήσιμο σύνολο, έχει υπεραριθμήσιμο άπειρο πλήθος στοιχείων. Ο πληθικός αριθμός των σημείων της $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με c και καλείται **πληθικός αριθμός του συνεχούς** (cardinal number of the continuum). O c είναι πληθικός αριθμός κάθε ανοικτού διαστήματος ή συνόλου που περιέχει ανοικτό διάστημα γιατί το (0, 1) είναι ισοδύναμο με την $\mathbb{R}$.
Δηλαδή, ο κατάλογος των πληθικών αριθμών μεγαλώνει,

$$1, 2, 3, \ldots \aleph_0, c$$

και

$$1 < 2 < 3 < \ldots < \aleph_0 < c \ldots$$

Εδώ καταγράφωμε το πιο διάσημο άλυτο μαθηματικό πρόβλημα. Υπάρχει πληθικός αριθμό μικρότερος του c και μεγαλύτερος του $\aleph_0$; **Η υπόθεση του Cantor για το continuum** εκφράζει τον ισχυρισμό ότι **δεν** υπάρχουν μεταξύ τους άλλοι πληθικοί αριθμοί, και ότι κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει το c σαν πληθικό αριθμό. Έστω ότι έχομε ένα σύνολο με n στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο των υποσυνόλων του. Ο πληθικός αριθμός είναι 2^n. Αν $n = \aleph_0$ τότε αποδεικνύεται ότι $2^{\aleph_0} = c$, δηλαδή,

$$1 < 2 < 3 < \ldots < \aleph_0 < c = 2^{\aleph_0} < 2^c < 2^{2^c} < \ldots$$

Πρόταση 3.2.9. Η ευθεία των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$, έχει 2^c μετρήσιμα υποσύνολα κατά Lebesgue.

Απόδ.: Έστω C το σύνολο Cantor.

$$\lambda(C) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

(πρβλ. 1.2.15).
Το σύνολο Cantor έχει πληθικό αριθμό c αφού ως γνωστόν (πρβλ. 3.1.8(f)) είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.
Δηλαδή, το C έχει 2^c υποσύνολα όλα μετρήσιμα κατά Lebesgue με μέτρο 0. Επειδή η $\mathbb{R}$ έχει 2^c υποσύνολα υπάρχουν ακριβώς 2^c μετρήσιμα υποσύνολα κατά Lebesgue.

3.2.10 Εφαρμογές του εξωτερικού μέτρου

1. Θεωρούμε $X = \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{H}$ που αποτελείται από όλα τα αριθμήσιμα υποσύνολα της $\mathbb{R}$ είναι κληρονομούμενος σ-δακτύλιος. Ορίζομε,

$$\mu^* : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu^*(\{a_1 \ldots a_n\}) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 \leqslant n < +\infty \\ +\infty & n = +\infty \end{cases}$$

Δείξτε ότι η μ^* είναι εξωτερικό μέτρο και $\mathcal{M}(\mu^*) = \{\varnothing\}$.

Απόδ.: (i) Προφανώς ο $\mathcal{H}$ είναι κληρονομούμενος σ–δακτύλιος.

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$.

Αν $A, B \in \mathcal{H}$ και $A \subseteq B \Rightarrow \quad \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

Έστω $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμη υπακολουθία του $\mathcal{H}$ και έστω ότι το A_p περιέχει n_p σημεία. Τότε $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$ περιέχει $\sum_{k=1}^{\infty} n_k$ σημεία.

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

Επομένως, το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

(iii) Έστω ότι το $E = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μ^*-μετρήσιμο, δηλαδή, $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

Επιλέγομε $H \in \mathcal{H}$: $H = \{b_{n_0} \in E,\ c \notin E\ c \neq b_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\}$. Υπάρχει πάντοτε $c \neq b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $c \in X$ γιατί ο X δεν είναι αριθμήσιμος χώρος. Τότε,

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap E^c)$$

γιατί το E είναι μ^*-μετρήσιμο.

$$\sqrt{2} = \sqrt{1} + \sqrt{1}$$

άτοπο. Το άτοπο αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει σημείο b_{n_0} και επομένως,

$$\mathcal{M}(\mu^*) = \{\varnothing\}$$

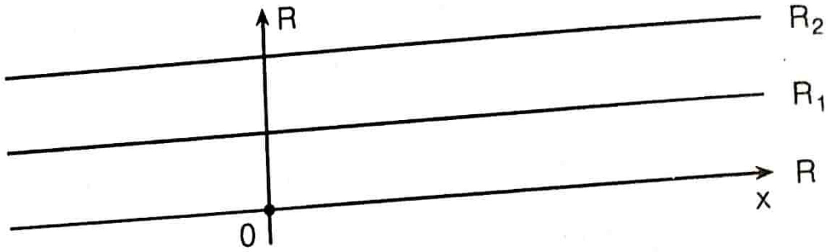
2. Έστω $X = \mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$ δύο παράλληλες ευθείες της O_x. Έστω $\mathcal{H}$ η οικογένεια των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ που περιέχεται στην $\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2$. Αν λ_1^* είναι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue επί της $\mathcal{P}(\mathbb{R}_1)$ και λ_2^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue επί της $\mathcal{P}(\mathbb{R}_2)$ δείξτε,

(i) ότι η $\mathcal{H}$ είναι κληρονομούμενος σ-δακτύλιος και

(ii) ότι η $\lambda^* : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}_+$:

$$H \to \max\{\lambda_1^*(H \cap \mathbb{R}_1),\ \lambda_2^*(H \cap \mathbb{R}_2)\}$$

είναι εξωτερικό μέτρο επί της $\mathcal{H}$.



Απόδ.: Από τον ορισμό του κληρονομούμενου σ-δακτυλίου είναι προφανές ότι ο $\mathscr{H}$ είναι κληρονομούμενος σ-δακτύλιος. Από τις ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου η μόνη μή προφανής είναι η αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα.

Αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{H}$

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \max\left\{\lambda_1^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_1\right), \lambda_2^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_2\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1^*((E_n)_1), \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_2^*((E_n)_2)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\max\left\{\lambda_1^*((E_n)_1), \lambda_2^*((E_n)_2)\right\}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

δηλαδή,

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

3.3 Η πλήρωση του μέτρου Lebesgue

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, (πρβλ. 3.1.5). Το μέτρο μ του $(X, \mathscr{A}, \mu)$ λέγεται **πλήρες** αν $(A \in \mathscr{A}, \mu(A) = 0$ και $B \subset A) \Rightarrow B \in \mathscr{A}$ δηλαδή, αν η $\mathscr{A}$ περιέχει όλα τα υποσύνολα συνόλων μέτρου μηδέν. Έστω $(X, \mathscr{A})$ χώρος μέτρου και μ μέτρο επί του $\mathscr{A}$.

Ορίζομε, $\forall A \in \mathscr{A}$,

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{αν } |A| = n \\ +\infty & \text{αν το } A \text{ είναι απειροσύνολο} \end{cases}$$

Το μ είναι παράδειγμα πλήρους μέτρου γιατί το μοναδικό μηδενικό σύνολο είναι το $\varnothing$ και το $\varnothing \in \mathscr{A}$.

Βεβαίως υπάρχουν και μή πλήρη μέτρα.

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $X \neq \varnothing$, $\mathscr{A} = \{X, \varnothing\}$ και μέτρο μ:

$$\mu(X) = \mu(\varnothing) = 0$$

Τότε, κανένα γνήσιο υποσύνολο $E \subset X$, **δεν** ανήκει στην $\mathscr{A}$.

Το μέτρο Dirac,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases} \qquad \forall A \in \mathscr{A} \neq \mathscr{P}(X)$$

δεν είναι πλήρες μέτρο.

3.3.1. Έστω $\mu^*: \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο, $\mathscr{M}_{\mu^*}$ είναι η σ-άλγεβρα όλων των μ^*-μετρησίμων υποσυνόλων του X. Ο περιορισμός

$$\mu^* \mid \mathscr{M}(\mu^*) = \mu$$

είναι πλήρες μέτρο, γιατί αν $A \in \mathscr{M}(\mu^*)$: $\mu^*(A) = 0$ και $B \subset A \Rightarrow \mu(B) \leqslant \mu(A) = 0$, δηλαδή $\mu(B) = 0$ και το $B \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ (πρβλ. 3.2.2).

Πόρισμα 3.3.2. (Η πληρότητα του μέτρου Lebesgue). Αν $E \subset \mathbb{R}$ και $\lambda^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathscr{M}_{\lambda^*}$.

Απόδ.: Έστω $A \subset \mathbb{R}$

$$\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leqslant \lambda^*(E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leqslant \lambda^*(A)$$

δηλαδή,

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

άρα $E \in \mathscr{M}_{\lambda^*}$.

Πλήρωση της $\mathscr{A}$ (completion) είναι η οικογένεια,

$$\mathscr{A}_\mu = \{A \subset X \mid \exists\, E, F \in \mathscr{A}: E \subset A \subset F,\ \mu(F \setminus E) = 0\}$$

Θεώρημα 3.3.2. Η $\mathscr{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα επί του X.

Απόδ.: Έστω $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα. Προφανώς $\mathscr{A}_\mu \supset \mathscr{A}$, γιατί αν $A \in \mathscr{A}$, $E = F = A$ και επομένως $A \in \mathscr{A}_\mu$

(i) $X \in \mathscr{A}_\mu$

(ii) Η σχέση «$E \subset A \subset F,\ \mu(F \setminus E) = 0$» συνεπάγεται την σχέση

$$«F^c \subset A^c \subset E^c,\ \ \mu(E^c \setminus F^c) = 0»$$

Δηλαδή, η $\mathscr{A}_\mu$ είναι κλειστή για το συμπληρωματικό των στοιχείων της. Απομένει να δείξωμε ότι είναι κλειστή για την αριθμήσιμη ένωση.

(iii) Έστω (A_n), $A_n \in \mathscr{A}_\mu$ ακολουθία, $\exists\, E_n, F_n \in \mathscr{A}: E_n \subset A_n \subset F_n$:

$$\mu(F_n \setminus E_n) = 0.$$

Η $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathscr{A}$, $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathscr{A}$ και $\bigcup\limits_n E_n \subseteq \bigcup\limits_n A_n \subseteq \bigcup\limits_n F_n$

$$\mu\left(\bigcup_n F_n \setminus \bigcup_n E_n\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_n (F_n \setminus E_n)\right) \leqslant \sum_n \mu(F_n \setminus E_n) = 0$$

Επομένως, η $\bigcup\limits_n A_n \in \mathscr{A}_\mu$. Δηλαδή, η $\mathscr{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα.

Πρόταση 3.3.3. Η συνάρτηση $\bar{\mu}: \mathscr{A}_\mu \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο επί της $\mathscr{A}_\mu$, $\bar{\mu} | \mathscr{A} = \mu$, και μάλιστα πλήρες.

Απόδ.: Η $\bar{\mu}$ είναι επέκταση της μ. Για $A \in \mathscr{A}$ μπορούμε να θεωρήσουμε $E = F = A$. Είναι προφανές ότι η $\bar{\mu}$ **δεν** είναι αρνητική και $\bar{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$. Αρκεί να αποδείξωμε ότι η $\bar{\mu}$ είναι προσθετικά αριθμήσιμη. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων συνόλων εν $\mathscr{A}_\mu$. Για κάθε A_n υπάρχουν $E_n, F_n \in \mathscr{A}$:

$$E_n \subset A_n \subset F_n, \quad \mu(F_n \setminus E_n) = 0$$

Επειδή τα (A_n) είναι ξένα, ξένα είναι και τα E_n.

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum \mu(E_n) = \sum \bar{\mu}(A_n)$$

Επομένως, η $\bar{\mu}$ είναι μέτρο. Η πληρότητα αποδεικνύεται με βάση τον ορισμό του πλήρους μέτρου.

3.3.4. Έστω A, E και F όπως προηγουμένως. Προφανώς $\mu(E) = \mu(F)$. Αν $B \in \mathscr{A}$, $B \subseteq A$ τότε,

$$\mu(B) \leqslant \mu(F) = \mu(E)$$

Επομένως, $\mu(E) = \sup\{\mu(B)\colon B \in \mathscr{A},\ B \subset A\}$. Η κοινή τιμή των $\mu(E) = \mu(F)$ εξαρτάται από το σύνολο A και το μέτρο μ και όχι από την επιλογή των E και F.

$$\bar{\mu}\colon \mathscr{A}_\mu \to [0, +\infty]\colon \bar{\mu}(A) = \mu(E) = \mu(F)$$

όπου $E, F \in \mathscr{A}$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.

Για την συλλογή των κατά Lebesgue μετρησίμων συνόλων υπάρχει πλήρωση.

Πρόταση 3.3.5. Έστω A μετρήσιμο κατά Lebesgue υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν Borel σύνολα $E, F \subset \mathbb{R}^n$:

$$E \subset A \subset F\colon \qquad \lambda(F \setminus E) = 0$$

Απόδ.: Έστω A μετρήσιμο σύνολο κατά Lebesgue: $\lambda(A) < +\infty$. Επειδή το μέτρο Lebesgue είναι κανονικό, (πρβλ. 3.1.14).

$$\exists\, K_n \text{ συμπαγή} \subset A\colon \ \lambda(A) - \frac{1}{n} \leqslant \lambda(K_n)$$

$$\exists\, U_n \text{ ανοικτά} \supset A\colon \ \lambda(U_n) \leqslant \lambda(A) + \frac{1}{n}$$

Έστω $E = \cup K_n$ και $F = \bigcap_n U_n$. Τα σύνολα $E, F \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ γιατί είναι F_σ και G_δ σύνολα (πρβλ. 2.2.3), και $E \subset A \subset F$.

$$\lambda(F \setminus E) \leqslant \lambda(U_n \setminus K_n) \leqslant \lambda(U_n \setminus A) + \lambda(A \setminus K_n) \leqslant \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως, $\lambda(F \setminus E) = 0$ αν $\lambda(A) < +\infty$.

Έστω τώρα $A \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο κατά Lebesgue: $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\{A_n\}\uparrow$ ακολουθία μετρησίμων κατά Lebesgue συνόλων με $\lambda(A_n) < +\infty$. Από την προηγούμενη περίπτωση $\exists\, E_n, F_n$: $E_n \subset A_n \subset F_n$: $\lambda(F_n \setminus E_n) = 0$.

Αν $E = \bigcup_n E_n$, $F = \bigcup_n F_n$, $E \subset A \subset F$ και $\lambda(F \setminus E) = 0$,

επειδή, $F \setminus E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (F_n \setminus E_n)$.

Παρατηρήσεις 2.3.6. (i) Αν το σύνολο E είναι υποσύνολο του [0, 1] και $\lambda(E) = 1$ τότε ο σύνολο E είναι πυκνό στο [0, 1].

Πράγματι, έστω $I_{\neq\varnothing} \subset [0, 1]$: $I \cap E = \varnothing$ τότε

$$\lambda(E) + \lambda(I) = \lambda(I \cup E) \leqslant \lambda([0, 1]) = 1$$

άρα

$$\lambda(E) \leqslant 1 - \lambda(I) < 1$$

Άτοπο, το άτοπο προήλθε γιατί υποθέσαμε ότι $I \cap E = \varnothing$ άρα

$$I \cap E \neq \varnothing, \quad \forall\, I \subset [0, 1]$$

επομένως $\overline{E} = [0, 1]$.

(ii) Αν $E \subset \mathbb{R}^n$: $\lambda(E) = 0 \Rightarrow \mathring{E} = \varnothing$. Αν υπήρχε $V_{\neq\varnothing}$ ανοικτό σύνολο: $V \subset E$

$$0 < \lambda(V) \leqslant \underbrace{\lambda(E) = 0}_{\text{υπόθεση}}$$

άρα ο πυρήνας $\mathring{E} = \varnothing$ γιατί αποδείξαμε ότι το σύνολο E δεν έχει, μη κενό, ανοικτό υποσύνολο.

Σχετικά με τις προτάσεις 1.2.14, 3.2.8(a), 3.2.9 έχομε την ακόλουθη

Πρόταση 2.3.7: Κάθε άπειρη σ-άλγεβρα συνόλων έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος συνόλων.

Απόδειξη: Έστω $\mathscr{A}$ άπειρη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Αν η $\mathscr{A}$ περιέχει μια ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \neq \varnothing$ συνόλων ξένων ανά δύο, τότε η $\mathscr{A}$ έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων.

Πράγματι, $\forall\ s \subset \mathbb{N}$ έστω

$$A_s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

$$A_s \neq A_t \quad \text{αν} \quad s \neq t$$

Η συλλογή $\{A_s : s \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$ έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, γιατί το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων ενός απείρου συνόλου είναι ισοδύναμο με το σύνολο, (πρβλ. N. Bourbaki: Théorie des Ensembles, Herman, 1970, §6, No 5, E III.50), επομένως η $\mathscr{A}$ έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων.

4. ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΑΠΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ $\mathscr{A}$-ΜΕΤΡΗΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην § 4 ορίζομε τις μετρήσιμες συναρτήσεις. Αποδεικνύεται ότι ο χώρος των μετρησίμων συναρτήσεων είναι κλειστός για τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις. Η ακριβής ή κατά προσέγγιση παράσταση μιας συναρτήσεως με την βοήθεια απλουστέρων συναρτήσεων είναι πολύ χρήσιμη. Παραδείγματα τέτοιων παραστάσεων είναι η ανάλυση πολυωνύμων σε γινόμενα παραγόντων πρώτου βαθμού, το ανάπτυγμα μιας συναρτήσεως σε δυναμοσειρά και διάφορα άλλα. Ανάλογη πρόταση είναι η 4.2.3 στην οποία αποδεικνύεται ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση είναι όριο μιας ακολουθίας απλών συναρτήσεων, (πρβλ. 4.2.1).

Αρχικά ο ορισμός της μετρησίμου συναρτήσεως δεν δίνει αρκετές πληροφορίες για την φύση μιας τέτοιας συναρτήσεως.

Με το θεώρημα N. N. Lusin κατανοούμε ότι, αν και μια μετρήσιμη συνάρτηση μπορεί να είναι ασυνεχής σ' όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της «πλησιάζει» πολύ μια συνεχή συνάρτηση. Οι προηγούμενες προτάσεις που αναφέραμε θα μπορούσαν να θεωρηθούν «προσεγγιστικά θεωρήματα».

4.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 4.1.1. Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathscr{A})$ καλείται **μετρήσιμος χώρος (measurable space)**.

Παρατηρούμε ότι στον ορισμό του «μετρησίμου χώρου» δεν εμπλέκεται η έννοια του μέτρου.

Ορισμός 4.1.2. Έστω $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ η Borel σ-άλγεβρα των υποσυνόλων της $\mathbb{R}$.

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) \underset{\text{ορσ.}}{=} \{A, A \cup \{\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$$

Ορισμός 4.1.3. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **$(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη** ή **$\mathscr{A}$-μετρήσιμη** ή απλώς **μετρήσιμη** αν και μόνο αν

$$\forall B \in \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}), \quad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

Αν $f: X \to \mathbb{K}$, η f λέγεται $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$-μετρήσιμη αν

$$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{K}) \qquad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

Αν $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \mathscr{M}_{\lambda^*}$ η f είναι $(\mathscr{M}_{\lambda^*}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-μετρήσιμη ή Lebesgue μετρήσιμη.

Θεώρημα 4.1.4. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν η f είναι $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-μετρήσιμη και

$$-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$$

τότε τα παρακάτω σύνολα ανήκουν στην σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$.

(i) $X, \varnothing$
(ii) $\{x \in X: f(x) > a\}$
(iii) $\{x \in X: f(x) \geqslant a\}$
(iv) $\{x \in X: f(x) < b\}$
(v) $\{x \in X: f(x) \leqslant b\}$
(vi) $\{x \in X: a < f(x) \leqslant b\}$
(vii) $\{x \in X: a \leqslant f(x) \leqslant b\}$
(viii) $\{x \in X: a \leqslant f(x) < b\}$
(ix) $\{x \in X: \quad f(x) = a\}$

Ειδικώτερα και τα παρακάτω σύνολα ανήκουν στην $\mathscr{A}$.

(x) $\{x \in X: f(x) = -\infty\}$

(xi) $\{x \in X: f(x) = +\infty\}$
(xii) $\{x \in X: f(x) \geqslant -\infty\}$
(xiii) $\{x \in X: f(x) > -\infty\}$
(xiv) $\{x \in X: f(x) \leqslant +\infty\}$
(xv) $\{x \in X: f(x) < +\infty\}$

Απόδ.: Τα σύνολα (i) - (xv) είναι αντίστροφες εικόνες Borel συνόλων. Πράγματι,

$$\{x \in X : f(x) < b\} = f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in A : f(x) \leqslant b - \frac{1}{n} \right\}$$

Παραδείγματα

1. Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής. Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) < b\} = f^{-1}(-\infty, b)$ είναι ανοικτό, επομένως Borel. Άρα η f είναι Borel μετρήσιμη.

2. Έστω I διάστημα $\subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ μή φθίνουσα συνάρτηση. Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}: f(x) < t\}$ είναι σύνολο Borel, (γιατί είτε είναι διάστημα, είτε είναι μονοσύνολο ή $\varnothing$). Επομένως η $f: I \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

3. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος και $A \subset X$. Τότε η

$$\mathscr{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow A \in \mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$.

Έστω M Borel υποσύνολο της $\mathbb{R}$, $M \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Αν $1 \in M, 0 \notin M \Rightarrow \mathscr{X}_A^{-1}(M) = \{x: \mathscr{X}_A(x) \in M\} = A$

Αν $1 \notin M, 0 \in M \Rightarrow \mathscr{X}_A^{-1}(M) = A^c$

Αν $1 \notin M, 0 \notin M \Rightarrow \mathscr{X}_A^{-1}(M) = \varnothing$

Αν $1 \in M, 0 \in M \Rightarrow \mathscr{X}_A^{-1}(M) = X$

Αν το $A \in \mathscr{B}$ τότε και τα σύνολα A^c, $\varnothing$, X είναι Borel επομένως και η $\mathscr{X}_A^{-1}(M)$ είναι Borel σύνολο και επομένως η $\mathscr{X}_A$ είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

Ερώτηση: Ποιά είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $\mathscr{X}_A$ να είναι συνεχής;

Επαναλαμβάνομε ότι αν η f είναι απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων (ή μεταξύ δύο μετρικών χώρων E και E′) η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού συνόλου του E′ είναι ανοικτό εν E (ή η αντίστροφη εικόνα κλειστού του E′ είναι κλειστό εν E).

Ας υποθέσωμε ότι η $\mathscr{X}_A$ είναι συνεχής

$$\begin{aligned} \mathscr{X}_A(x) &= 1 \qquad x \in A \\ &= 0 \qquad x \notin A \end{aligned}$$

$$\mathscr{X}_A^{-1}(\{1\}) = A \qquad \mathscr{X}_A^{-1}(\{0\}) = \mathscr{C}_E A$$

Τα A, $\mathscr{C}A$ είναι αντίστροφες εικόνες κλειστών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων επομένως τα A, $\mathscr{C}_A$ είναι κλειστά $\subset E$. Άρα το A είναι κλειστό και ανοικτό εν E.

Αντίστροφα, ας υποθέσωμε ότι το A είναι ανοικτό και κλειστό. Έστω

$$M \subset \mathbb{R}, \quad \mathscr{X}_A^{-1}(M) = \begin{cases} \varnothing & 1 \notin M \quad 0 \notin M \\ A & 1 \in M \quad 0 \notin M \\ \mathscr{C}_A & 1 \notin M \quad 0 \in M \\ E & 1 \in M \quad 0 \in M \end{cases}$$

Η $\mathscr{X}_A^{-1}(M)$ είναι ανοικτό σύνολο, άρα $\forall$ M ανοικτό $\subset \mathbb{R}$, η $\mathscr{X}_A^{-1}(M)$ είναι ανοικτό σύνολο και η $\mathscr{X}_A$ είναι συνεχής.

4. Έστωσαν X και Y τοπολογικοί χώροι και $\mathscr{B}(X)$, $\mathscr{B}(Y)$ οι σ-άλγεβρες Borel επί των X και Y αντιστοίχως. Έστω $f: X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αν $B \in \mathscr{B}(Y) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(X)$.

Απόδ.: Έστω

$$\mathcal{B} \underset{\text{ορσ}}{=} \{B \subset Y:\ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)\}$$

Η Borel σ-άλγεβρα επί του Y είναι **η ελαχίστη** που περιέχει τα ανοικτά σύνολα του Y.

$$\forall\, B \in \mathcal{B},\ f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{B}(X)$$

Αν $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B} \Rightarrow$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (f^{-1}(B_n)) \in \mathcal{B}(X)$$

Επομένως, η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή για τις αριθμήσιμες τομές και για το συμπληρωματικό των στοιχείων της.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c\right)^c \in \mathcal{B}.$$

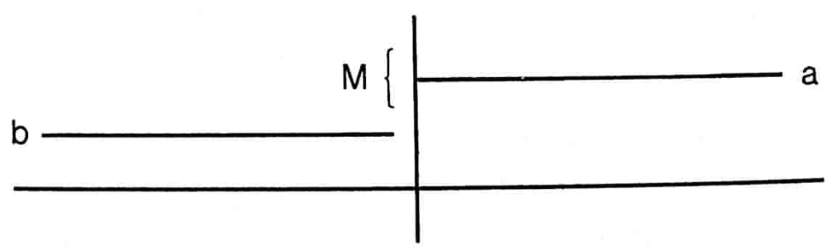
Άρα η $\mathcal{B}$ **είναι σ-άλγεβρα** και

$$\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}.$$

Το αποτέλεσμα είναι προφανές από τον ορισμό της $\mathcal{B}$.

4.1.5. Από το προηγούμενο παράδειγμα, είναι προφανές ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι μετρήσιμες. Αποδεικνύεται ότι η **κλάση των μετρησίμων συναρτήσεων** είναι **ευρύτερη εκείνης των συνεχών**. Έστω

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} a & \text{αν } x \geqslant 0 \\ b & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$



η f **δεν** είναι συνεχής.

$\forall$ M $\subset \mathbb{R}$ (επομένως και για κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$) έχομε

αν $a \in M, b \notin M, f^{-1}(M) = \{x: f(x) \in M\} = \{x: x \geqslant 0\}$

αν $a \notin M, b \in M, f^{-1}(M) = \{x: x < 0\}$

αν $a \notin M, b \notin M, f^{-1}(M) = \varnothing$

αν $a \in M, b \in M, f^{-1}(M) = \mathbb{R}$

Όλα τα σύνολα στην δεξιά πλευρά των ισοτήτων είναι Borel $\subset \mathbb{R}$.
Άρα η f είναι Borel μετρήσιμη.

4.1.6. Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχ. παντού, τότε η f είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση.

Λύση: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής σχ. παντού και $E = \{x \in \mathbb{R}$: η f να είναι συνεχής στο $x\}$. Το $\mathbb{R} \setminus E$ είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η f δεν είναι συνεχής. $\lambda^*(\mathbb{R} \setminus E) = 0$, (γιατί το σύνολο των σημείων στα οποία η f δεν είναι συνεχής είναι μηδενοσύνολο). Άρα το $\mathbb{R} \setminus E$ είναι μετρήσιμο σύνολο $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, (πρβλ. 3.3.2) άρα και το $E = \complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus E) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$
Έστω O ανοικτό $\subset \mathbb{R}$, το σύνολο $f^{-1}(O) \cap \mathbb{R} \setminus E$ (σαν σύνολο μηδενικού μέτρου) είναι μετρήσιμο σύνολο. Η f/E είναι συνεχής, το $f^{-1}(O) \cap E$ είναι ανοικτό εν E. $\exists\, V_{\text{ανοικτό}} \subset \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(O) \cap E = V \cap E$$

Το $f^{-1}(O) \cap E$ είναι μετρήσιμο σύνολο (πρβλ. 3.2.4).
Επομένως,

$$f^{-1}(O) = [f^{-1}(O) \cap E] \cup [f^{-1}(O) \cap R \setminus E]$$

άρα η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

4.2 Απλές συναρτήσεις. Αλγεβρικές πράξεις με μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 4.2.1. Μια συνάρτηση f λέγεται **απλή (simple)** αν είναι μ-μετρήσιμη και το πεδίο τιμών της είναι πεπερασμένο.

Ορισμένοι συγγραφείς, θεωρούν ότι η f λέγεται **απλή** αν το πεδίο τιμών της είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Η **απλή συνάρτηση** είναι απεικόνιση πραγματική ή μιγαδική. Δηλαδή,

$$s: X \to \overline{\mathbb{R}} \quad \text{ή} \quad s: X \to \overline{\mathbb{C}}:$$

$$\operatorname{rng}(S) = \{a_1 \dots a_n\} \text{ και } A_k = \{x \in X: s(x) = a_k,\ k = 1 \dots n\}$$

Τότε,

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathscr{X}_{A_k}.$$

Μπορούμε, πάντοτε να επιλέγομε την διαμέριση $\{A_1, \dots A_n\}$ έτσι ώστε τα σύνολα να είναι ανά δύο ξένα (πρβλ. 2.1.3).

Θεώρημα 4.2.2. Μια συνάρτηση f με αριθμήσιμο πλήθος τιμών $\{y_1, y_2, \dots\}$ είναι μ-μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ τα $A_n = \{x: f(x) = y_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ είναι μ-μετρήσιμα.

Απόδ.: Επειδή κάθε $\{y_n\}$ είναι, σαν μονοσύνολο, Borel, το σύνολο A_n είναι η αντίστροφη εικόνα του $\{y_n\}$ και είναι μετρήσιμο σύνολο αν η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Τώρα, αντίστροφα, έστω ότι τα A_n είναι μετρήσιμα. Αν το $B \subset \mathbb{R}$ είναι Borel υποσύνολο,

$$f^{-1}(B) \underset{\text{ορσ.}}{=} \{x: f(x) = y_n \in B\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Η αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο και επομένως η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αφού η αντίστροφη εικόνα Borel συνόλου, μέσω της f, η $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Προσέγγιση $\mathscr{A}$-μετρησίμων συναρτήσεων από $\mathscr{A}$-μετρήσιμες απλές συναρτήσεις

Θεώρημα 4.2.3. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ ή $f: X \to \mathbb{C}$ $\mathscr{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση επί του X. Τότε υπάρχει μία ακολουθία (s_n) $\mathscr{A}$-μετρησίμων απλών συναρτήσεων επί του X:

(i) $\quad |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \dots \leqslant |s_n| \leqslant \dots$

και $\forall\, x \in X \ \lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$.

Αν η f είναι φραγμένη, τότε

(ii) η (s_n) είναι δυνατόν να επιλεγεί: $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα επί του X.

Αν η f $\geqslant$ 0

(iii) η (s_n) επιλέγεται:

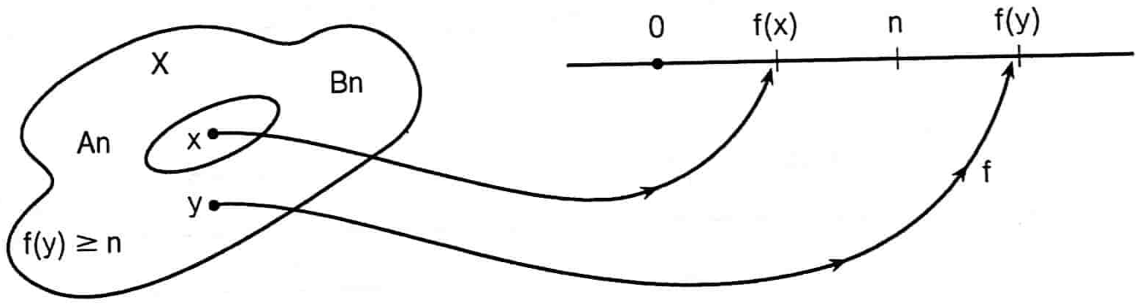
$$0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant f$$

Απόδ.: 1η περίπτωση, $f \geqslant 0$

Θα αποδείξωμε τα (i) και (iii). Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε μια διαμέριση του X σε ξένα σύνολα:

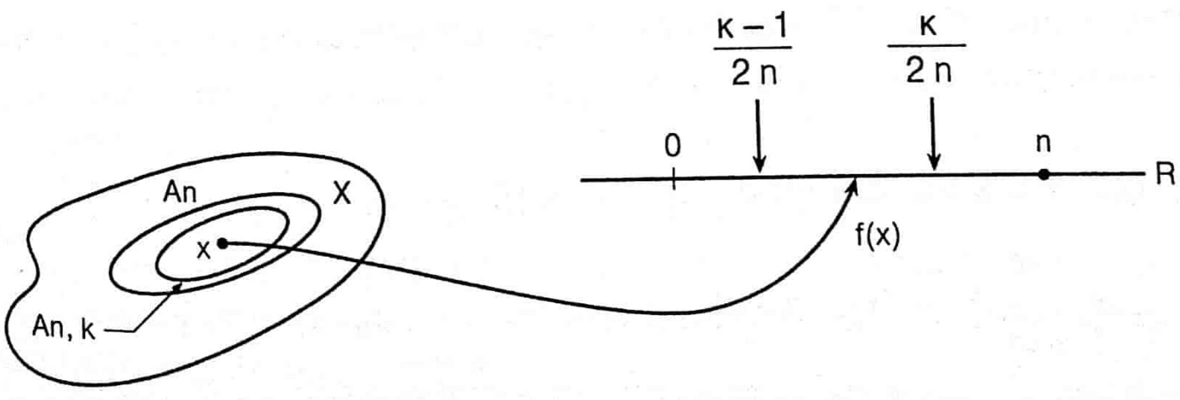
$$A_n = \{x \in X: f(x) < n\}$$

$$B_n = \{x \in X: f(x) \geqslant n\}$$



Θεωρούμε μια διαμέριση του A_n σε $n \cdot 2^n$ ανά δύο ξένα σύνολα. Έστω $k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n$ και ορίζομε

$$A_{n,k} = \left\{ x \in X: \frac{k-1}{2^n} < f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}$$



Επειδή η f είναι $\mathscr{A}$ -μετρήσιμη, $\forall$ n, k $\in \mathbb{N}$ τα σύνολα $A_{n,k}$ και B_n ανήκουν στην σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$.

Ορίζομε,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathscr{X}_{A_{n,k}} + n\mathscr{X}_{B_n}$$

(πρβλ. 4.1.4, παραδ. 3, 4.2.2).

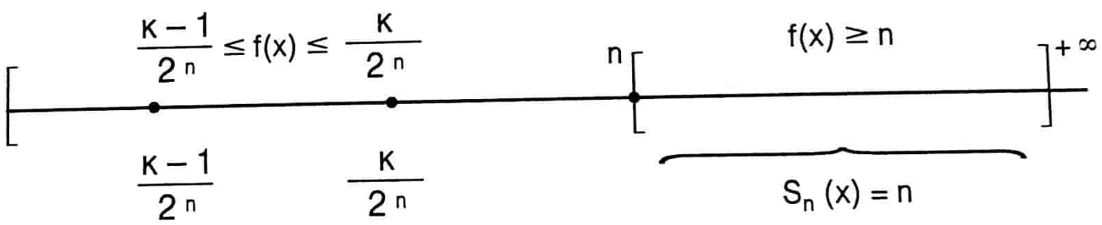
Η s_n είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη απλή συνάρτηση (πρβλ. 4.2.4).

Αν $x \in A_{n,k} \Rightarrow \dfrac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{k}{2^n}$ και $s_n(x) = \dfrac{k-1}{2^n}$

Αν $x \in B_n \Rightarrow f(x) \geqslant n$ και $s_n(x) = n$

Επομένως, $\forall\, x \in X \quad s_n(x) \leqslant f(x)$

$$\forall\, x \in A_{n,\kappa},\ f(x) - s_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad k = 1, 2, \ldots n\cdot 2^n$$



Αν αντικαταστήσωμε το n με το n + 1

$$A_{n+1} \supset A_n, \quad B_{n+1} \subset B_n$$

$$s_{n+1}(x) \geqslant s_n(x), \quad \forall\, x \in X$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για τον αριθμό $n \in \mathbb{N}$ μπορεί να επαναληφθεί $\forall\, n \in \mathbb{N}$ και θα δώσει μια μή φθίνουσα $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία $\mathscr{A}$-μετρησίμων απλών συναρτήσεων. Επομένως, το $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός του $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$.

Αν $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ το $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) < +\infty$

Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = (\cup A_n)^c = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} n = +\infty = f(x)$$

(ii) **Η f είναι φραγμένη.**

Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant f \leqslant n_0$ και επομένως $B_n = \varnothing$, $\forall\, n > n_0$. Δηλαδή $\forall\, n > n_0$ $\sup_{x \in X} \{f(x) - s_n(x)\} \leqslant 2^{-n}$ οπότε $\lim_{n \to \infty} s_n = f$ ομοιόμορφα επί του X.

2η περίπτωση. (α) Η f έχει τιμές εν $\overline{\mathbb{R}}$. Η $f = f^+ - f^-$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$. Εφαρμόζωμε την 1η περίπτωση για τις f^+, f^-, επιτυγχάνομε τις ακολουθίες $(s_n^+)_{n=1}^{+\infty}$, $(s_n^-)_{n=1}^{+\infty}$ μη αρνητικών $\mathscr{A}$-μετρησίμων μή φθινουσών απλών συναρτήσεων:

$$\lim_{n \to \infty} (s_n^+ - s_n^-) = f^+ - f^- = f$$

Έστω $x \in X$, τότε $f(x) > 0$ ή $f(x) = 0$ ή $f(x) < 0$. Επομένως μια από τις ακολουθίες $(s_n^+(x))_{n=1}^{+\infty}$, $(s_n^-(x))_{n=1}^{+\infty}$ που αντιστοιχούν στις f^+ και f^- αντιστοίχως είναι μηδέν και επομένως η (i) ικανοποιείται.

2η περίπτωση (β). Η f έχει μιγαδικές τιμές:

$$f = u + i\upsilon \qquad (u, \upsilon) \in \mathscr{F}(X, \mathbb{R}) \times \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$$

Εφαρμόζωμε την 2η περίπτωση (α) για τις πραγματικές συναρτήσεις u, υ. Αποδεικνύεται ότι η (i) ικανοποιείται. Διαφορετικά,

$$f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4), \quad f_i \geqslant 0$$

$i = 1, 2, 3, 4$ και εφαρμόζωμε την 1η περίπτωση.

Τα επόμενα θεωρήματα 4.2.4, 4.2.6, 4.2.7 αποδεικνύουν ότι το σύνολο των μετρησίμων συναρτήσεων είναι κλειστό για συνήθεις αλγεβρικές πράξεις.

Θεώρημα 4.2.4. (i) Αν οι f, g είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, η $f \pm g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(ii) Αν η f είναι μετρήσιμη η cf, $c \in \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(iii) Αν οι f, g είναι μετρήσιμες συναρτήσεις η $f \cdot g$ είναι μετρήσιμη.

(iv) Αν η f είναι μετρήσιμη, $f \neq 0$ και η $\frac{1}{f}$ είναι μετρήσιμη.

(v) Αν οι f, g είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $g(x) \neq 0$, η $\frac{f}{g}$ είναι μετρήσιμη.

Απόδ.: Αν $(X, \mathcal{A})$ είναι είναι μετρήσιμος χώρος, $A \subset X$, $A \in \mathcal{A}$ και οι

$$f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}^{+} = [0, +\infty]$$

είναι μετρήσιμες θα δείξωμε ότι οι cf, f + g είναι μετρήσιμες.

Αν $c = 0$ τότε $cf = 0$ και επομένως είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Αν $c > 0$ $\{x \in A : cf(x) < t\} = \left\{x \in A : f(x) < \frac{t}{c}\right\} \in \mathcal{A}$

$$\{x \in A : (f+g)(x) < t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in A : f(x) < r\} \cap \{x \in A : g(x) < t-r\} \in \mathcal{A}$$

γιατί η σχέση $(f + g)(x) < t$ ισχύει τότε και μόνον τότε αν

$$\exists\, r \in \mathbb{Q}: \quad f(x) < r \quad \text{και} \quad g(x) < t - r$$

Το $\{x \in A: (f + g)(x) < t\} \in \mathcal{A}$ γιατί είναι αριθμήσιμη ένωση συνόλων που ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Επομένως η f + g είναι μετρήσιμη.

(iii) Θα δείξωμε τώρα, ότι το γινόμενο δύο μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω $h: A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θα δείξωμε ότι η h^2 είναι μετρήσιμη.

Αν $t \leqslant 0$ $\quad \{x \in A: h^2(x) \leqslant t\} = \emptyset$

αν $t > 0$ $\quad \{x \in A : h^2(x) < t\} = \{x \in A : -\sqrt{t} < h(x) < \sqrt{t}\}$

και η μετρησιμότητα της h^2 είναι προφανής, (πρβλ. 4.1.4.(vi)).

Επομένως, αν οι f, g είναι μετρήσιμες και οι f^2, g^2, $(f + g)^2$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε, η

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(v). Έστω $A_0 = \{x \in X: g(x) \neq 0\}$

$$\left\{x \in A_0: \frac{f}{g}(x) < t\right\} = \{x \in A: g(x) > 0\} \cap \{x \in A: f(x) < tg(x)\}$$

$$= \{x \in A: g(x) < 0\} \cap \{x \in A: f(x) > tg(x)\}$$

Επομένως, η $\frac{f}{g}$ είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 4.2.5. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος και $A \subset X$, $A \in \mathscr{A}$. Αν οι f, g είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, $f, g: A \to \overline{\mathbb{R}}$, τότε τα σύνολα

$$\{x \in A: f(x) < g(x)\}$$

$$\{x \in A: f(x) \leqslant g(x)\}$$

$$\{x \in A: f(x) = g(x)\}$$

ανήκουν στην $\mathscr{A}$.

Απόδ.: Η ανισότητα $f(x) < g(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει ένας ρητός αριθμός $r \in \mathbb{Q}$:

$$f(x) < r < g(x)$$

$\{x \in A: f(x) < g(x)\} =$

$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in A: f(x) < r\} \cap \{x \in A: r < g(x)\}$$

δηλαδή, το σύνολο $\{x \in A: f(x) < g(x)\}$ είναι αριθμήσιμη ένωση συνόλων που ανήκουν στην $\mathscr{A}$, (πρβλ. 4.1.4). Τώρα,

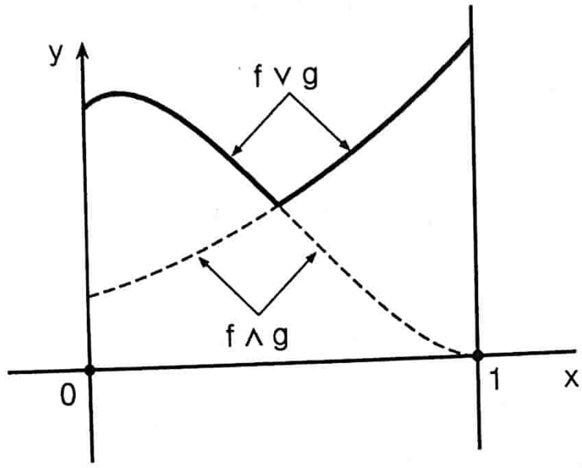
$$\mathscr{A} \ni \{x \in A: f(x) \leqslant g(x)\} = A \setminus \{x \in A: g(x) < f(x)\}$$

(πρβλ. 2.1.3). Τέλος, το σύνολο $\{x \in A: f(x) = g(x)\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$ γιατί είναι η διαφορά των δύο προηγούμενων συνόλων.

Έστω $f, g: A \to \overline{\mathbb{R}}$

$$(f \vee g) \underset{\text{ορσ}}{=} \max (f(x), g(x))$$

$$(f \wedge g) \underset{\text{ορσ}}{=} \min (f(x), g(x))$$



Πρόταση 4.2.6. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος, $A \subset X$, $A \in \mathscr{A}$. Αν οι f, g είναι όπως προηγουμένως, οι συναρτήσεις $f \vee g$ και $f \wedge g$ είναι μετρήσιμες.

Απόδ.:

$$\{x \in A: (f \vee g)(x) \leqslant t\} = \{x \in A: f(x) \leqslant t\} \cap \{x \in A: g(x) \leqslant t\}$$

$$\{x \in A: (f \wedge g)(x) \leqslant t\} = \{x \in A: f(x) \leqslant t\} \cup \{x \in A: g(x) \leqslant t\}$$

Η μετρησιμότητα των $f \wedge g$ και $f \vee g$ είναι προφανής.

Πρόταση 4.2.7. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος, $A \subset X$, $A \in \mathscr{A}$. Έστω (f_n), $f_n\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων επί του A.

Τότε, (i) οι $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$

(ii) $\lim\limits_n \sup f_n$, $\lim\limits_n \inf f_n$

(iii) $\lim\limits_n f_n$

είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

Απόδ.: (i)

$$\{x \in A: \sup_n f_n(x) \leqslant t\} = \bigcap_n \{x \in A: f_n(x) \leqslant t\}$$

και

$$\{x \in A:\ \inf_n f_n(x) \leq t\} = \bigcup_n \{x \in A: f_n(x) \leq t\}$$

Δηλαδή, οι $\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$ είναι μετρήσιμες.

(ii) Έστω $g_k = \sup_{n \geqslant k} f_n$, $h_k = \inf_{n \geqslant k} f_n$. Οι g_k και h_k είναι μετρήσιμες, οπότε,

$$\inf_k g_k \underset{\text{ορσ.}}{=} \limsup_n f_n$$

$$\sup_k h_k \underset{\text{ορσ.}}{=} \liminf_n f_n$$

είναι μετρήσιμες.

(iii) Αν υπάρχει $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, τότε

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$$

ή το

$$A_0 = \left\{ x \in X:\ \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) \right\}$$

είναι το πεδίο ορισμού της $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ και $A_0 \in \mathcal{A}$, (πρβλ. 4.2.5).

$$\left\{ x \in A_0:\ \lim_n f_n(x) \leq t \right\} = A_0 \cap \left\{ x \in A:\ \limsup_n f_n(x) \leq t \right\}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ είναι μετρήσιμη.

Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι η κλάση των μετρησίμων συναρτήσεων **δεν** είναι κλειστή για μή αριθμήσιμες πράξεις του προηγούμενου τύπου.

Σαν εφαρμογή της 4.2.7(iii) διατυπώνομε την ακόλουθη

Πρόταση 4.2.7(a). Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Η παράγωγος f' της f είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ορίζομε

$$g_n = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

Η g_n είναι μετρήσιμη γιατί είναι συνεχής,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

άρα από το 4.2.7(iii) η f' είναι μετρήσιμη.

4.2.8. (i) Έστω $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{A}$. Το θετικό μέρος της f, $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ και το αρνητικό μέρος της f, $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$, δηλ. οι $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις αν η f είναι μετρήσιμη. Τότε, και η $|f| = f^+ + f^-$ είναι μετρήσιμη.

Ένας άλλος τρόπος αποδείξεως του προηγούμενου είναι ο εξής.

$$\mathcal{A} \ni \{x \in X\colon |f(x)| > a\} = \{x \in X\colon f(x) > a\} \cup \{x \in X\colon f(x) < -a\}$$

αν $a \geqslant 0$,

$$\text{και} \qquad \{x \in X\colon |f(x)| > a\} = X \quad \text{αν } a < 0.$$

Επομένως, η $|f|$ είναι μετρήσιμη.

(ii). Ο περιορισμός μετρησίμου συναρτήσεως είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση η f/B είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη,

$$\{x \in B\colon f_B(x) < t\} = B \cap \{x \in A\colon f(x) < t\}.$$

(iii). Στο (i) αποδείξαμε ότι αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη η $|f|$ είναι επίσης $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Θα δείξωμε ότι υπάρχουν μη μετρήσιμες συναρτήσεις f: η $|f|$ να είναι μετρήσιμη.

Έστω E μή μετρήσιμο υποσύνολο $\subset [0, 1]$. Ορίζομε την συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus E \end{cases}$$

Η $|f| = 1$ και είναι μετρήσιμη συνάρτηση, $f^{-1}(\{1\}) = E$, όπου εξ' υποθέσεως το σύνολο E δεν είναι μετρήσιμο, άρα η f **δεν** είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 4.2.9. Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος και $A \subset X$, $A \in \mathscr{A}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

(i) Η f είναι μετρήσιμη ως προς το $\mathscr{A}$

(ii) $\forall$ U ανοικτό $\subset \mathbb{R}$, η $f^{-1}(U) \in \mathscr{A}$

(iii) $\forall$ C κλειστό $\subset \mathbb{R}$, η $f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$

(iv) $\forall$ B Borel $\subset \mathbb{R}$, η $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$

Απόδ.: Έστω $\mathscr{F} = \{B \subset \mathbb{R}: f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$. Αν $B_n \in \mathscr{F}$ τότε $\bigcup_n B_n \in \mathscr{F}$,

γιατί

$$f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathscr{A}$$

και η $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Αν $B \in \mathscr{F}$ τότε $B^c \in \mathscr{F}$ γιατί

$$f^{-1}(B^c) = A \setminus f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

Επομένως, η $\mathscr{F}$ είναι σ-άλγεβρα γιατί είναι κλειστή για την αριθμήσιμη ένωση καθώς και για το συμπληρωματικό τυχόντος στοιχείου της.

Η f θα είναι μετρήσιμη αν

$$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \qquad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

Επομένως, αρκεί να δείξωμε ότι η σ-άλγεβρα $\mathscr{F}$ περιέχει την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα $(-\infty, b]$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $(-\infty, b]$ είναι η Borel σ-άλγεβρα η οποία είναι και η ελαχίστη σ-άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα ανοικτά και κλειστά σύνολα. Δηλαδή, οι (i), (ii), (iii), (iv) είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 4.2.10. Αν μια συνάρτηση f είναι **ισοδύναμη** με μια μετρήσιμη συνάρτηση g η f είναι μετρήσιμη.

Απόδ.: Δύο συναρτήσεις f, g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού λέγονται ισοδύναμες ως προς ένα μέτρο μ αν $\mu(\{x \in X: f(x) \neq g(x)\}) = 0$, δηλαδή, αν οι f, g συμπίπτουν σχεδόν παντού. Τα σύνολα

$$\{x: f(x) < c\} \quad \text{και} \quad \{x: g(x) < c\}$$

διαφέρουν κατά ένα σύνολο μέτρου 0. Αν επομένως, το δεύτερο σύνολο είναι μετρήσιμο, μετρήσιμο είναι και το πρώτο.

Είναι γνωστό, (πρβλ. 4.2.8, 4.2.4(iii)) ότι αν η f είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση οι $|f|$ και f^2 είναι Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Εν τούτοις, υπάρχει $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μή Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση: οι $|f|$ και f^2 να είναι Lebesgue μετρήσιμες.

Βάσει της προτάσεως 3.2.8 αν το A είναι μετρήσιμο σύνολο υπάρχουν F_n κλειστά και G_n ανοικτά:

$$F_n \subset A \subset G_n \quad \text{και} \quad \lambda^*(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$$

Θέτομε $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Το E είναι F_σ-σύνολο. Αν $N = A \setminus E$,

$$\lambda^*(N) = 0 \quad \text{γιατί,}$$

$$N \subset G_n \subset F_n \quad \text{και} \quad \lambda^*(N) \leq \lambda^*(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$$

Το $A = N \cup E$, δηλαδή, **αν το A είναι μετρήσιμο σύνολο μπορεί να παρασταθεί σαν ένωση ενός F_σ-συνόλου και ενός μηδενοσυνόλου.**

Αντίστροφα: Κάθε σύνολο της μορφής $A = N \cup E$, όπου N μηδενοσύνολο, $\lambda(N) = 0$ και E είναι F_σ, είναι μετρήσιμο.

Θεώρημα Lusin 4.2.11: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. H f είναι μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, E \subset \mathbb{R}$ με $m(E) < \varepsilon$: ο περιορισμός $f|\mathbb{R} \setminus E$ να είναι συνεχής.

Απόδ.: Έστω $U_1, U_2, \ldots$ αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία της $\mathbb{R}$. Αν η f είναι μετρήσιμη έπεται ότι $\forall\, i \in I$ υπάρχει ένα κλειστό σύνολο F_i και ένα ανοικτό σύνολο G_i:

$$F_i \subset f^{-1}(U_i) \subset G_i \quad \text{και} \quad m(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Θέτομε,

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \setminus F_i)$$

τότε, $m(E) < \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$.
Αν $g = f|R\setminus E$, $g^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_i) \setminus E = G_i \setminus E = F_i \setminus E$.
Το σύνολο $g^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτό και κλειστό στον $\mathbb{R} \setminus E$ και επομένως η g είναι συνεχής.

Αντίστροφα: Υπάρχει μία ακολουθία συνόλων E_i: $m(E_i) < 1$ και η $f_i = f|\mathbb{R}\setminus E_i$ να είναι συνεχής. Για κάθε U ανοικτό σύνολο εν $\mathbb{R}$ υπάρχει G_i ανοικτό σύνολο:

$$f_i^{-1}(U) = G_i \setminus E_i$$

Έστω

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i, \quad f^{-1}(U) \setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (f^{-1}(U) \setminus E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(U).$$

Ακολούθως,

$$f^{-1}(U) = [f^{-1}(U) \cap E] \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \setminus E_i) \right)$$

Τα σύνολα δεξιά της ισότητος είναι μετρήσιμα επομένως, η f είναι μετρήσιμη.

5. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ LEBESGUE

Ο A.L. Cauchy (1789 - 1857) ήταν ίσως ο πρώτος μαθηματικός που διατύπωσε τον ορισμό του ολοκληρώματος σαν όριο αθροίσματος, θεωρώντας συναρτήσεις με πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών. Ο B. Riemann (1826 - 1866) συνέχισε την εργασία του Cauchy. Όρισε το ολοκλήρωμα κατά τον ίδιο τρόπο, αλλά εξέτασε την κλάση όλων των συναρτήσεων στην οποία το ολοκλήρωμα μπορούσε να ορισθεί. Απέδειξε ότι μπορούσαν να ολοκληρωθούν και συναρτήσεις των οποίων τα σημεία ασυνέχειας ήταν σύνολα παντού πυκνά στο πεδίο ορισμού τους. Το κίνητρο γι' αυτή την θεωρία ήταν η εργασία του Dirichlet (1829) κατά την οποία μια μονότονη συνάρτηση f αναλύονταν σε σειρά

$$\sum (a_n \sigma\upsilon\nu\, n x + b_n \eta\mu\, n x)$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, n x\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\eta\mu\, n x\, dx,$$

Στα χρόνια του Cauchy και του Riemann οι μαθηματικοί θεωρούσαν, ως επί το πλείστον, ολοκληρώματα φραγμένων συναρτήσεων. Αλλά μόλις οι μή φραγμένες συναρτήσεις άρχισαν να εμφανίζονται στην θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών άρχισε η προσπάθεια να ορισθούν ολοκληρώματα για τέτοιες συναρτήσεις. Ο Harnack (1883) και ο Vallée - Poussin (1894) ήταν μεταξύ των πρώτων. Αργότερα ο G. Peano (1858 - 1932) και ο C. Jordan (1838 - 1922) συνδύασαν τις έννοιες της ολοκληρώσεως με τις πρόσφατες έννοιες του μέτρου. Αλλά το αποφασιστικό βήμα στη θεωρία ολοκληρώσεως ήταν του H. Lebesgue, (1857 - 1941).

Το ολοκλήρωμα που θα μελετήσωμε σ' αυτή την παράγραφο επεκτείνει το κλασικό ολοκλήρωμα του Riemann στην πολύ ευρύτερη κλάση των μετρησίμων συναρτήσεων. Θα ορίσωμε το ολοκλήρωμα πρώτα για μή αρνητικές συναρτήσεις και μετά θα το επεκτείνωμε σε τυχούσες μετρήσιμες συναρτήσεις. Οι απλές συναρτήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στον ορισμό του ολοκληρώματος.

Έστω $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ μια «κατάλληλη» συνάρτηση. Θέλωμε να ορίσωμε το ολοκλήρωμα της f, $\int f$ σαν πραγματικό αριθμό. Αυτές ο «κατάλληλες» συναρτήσεις καλούνται ολοκληρώσιμες. Ο τελεστής που θα ορίσωμε για να καλείται δικαιολογημένα ολοκλήρωμα θα πρέπει να έχει ορισμένες ιδιότητες. Αν

$$\mathscr{A} = \{f \mid f: X \to \overline{\mathbb{R}}\} \quad \text{και} \quad \int : \mathscr{A} \to \mathbb{R}, \int f \in \mathbb{R}.$$

ο τελεστής $\int$ θα πρέπει να ικανοποιεί τα ακόλουθα

(i) Αν $f \in \mathscr{A}, f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in X \Rightarrow \int f \geqslant 0$

(ii) Αν $f, g \in \mathscr{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathscr{A}$ και

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

δηλαδή, ο τελεστής $\int$ είναι γραμμική συνάρτηση επί του $\mathscr{A}$.

(iii) Αν (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων εν $\mathscr{A}$ και $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$ τότε $f \in \mathscr{A}$, $\int f_n \to \int f$, $n \to \infty$.

5.1 Το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b \text{ διαμέριση του } [a, b]$$

Έστω $M_i = \sup_{\xi_{i-1} \le x \le \xi_i} f(x)$, $m_i = \inf_{\xi_{i-1} \le x \le \xi_i} f(x)$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}) M_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}) m_i$$

Το άνω ολοκλήρωμα Riemann, είναι

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf S$$

όπου το infimum λαμβάνεται επί όλων των διαμερίσεων του [a, b].
Το κάτω ολοκλήρωμα Riemann είναι

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup s$$

Αν τα άνω και κάτω ολοκληρώματα συμπίπτουν τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Η συνάρτηση

$$\psi: (\xi_{i-1}, \xi_i) \to \mathbb{R} : \psi(x) = c_i$$

λέγεται **κλιμακωτή (step function)** όπου (ξ_1 ... ξ_n) είναι διαμέριση του [a, b] και οι c_i είναι σταθερές. Προφανώς

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i (\xi_i - \xi_{i-1})$$

5.2. Ολοκλήρωμα απλών συναρτήσεων

Έστω ($\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{\lambda^*}$, λ) χώρος μέτρου και λ μέτρο Lebesgue. Η s καλείται **απλή συνάρτηση** αν το s(E) είναι πεπερασμένο και η s είναι μετρήσιμη, (πρβλ. 4.2). Αν οι s και s′ είναι απλές τότε οι s + s′, λs, s ∘ s′ είναι απλές.

Πρόταση 5.2.1. Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ χώρος μέτρου, $E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $s: E \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) Η s είναι απλή με $s(E) = \{r_1 \dots r_n\}$

(β) Η $s = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{E_i}$, $E_i \in \mathcal{M}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{και} \quad r_i \neq r_j \quad \text{αν } i \neq j$$

Η $s = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{E_i}$ είναι **μονοσήμαντη**, **μοναδική** και καλείται **κανονική παράσταση**.

Απόδ. (α) $\Rightarrow$ (β). Το σύνολο $s(E) = \{r_1, \dots r_n\}$. Επειδή η s είναι μετρήσιμη τα σύνολα $E_i = \{x \in E: s(x) = r_i\}$ είναι μετρήσιμα, $E_i \in \mathcal{M}_\lambda$.
Αν $i \neq j$ $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Αν $x \in E \Rightarrow x \in E_i \Rightarrow s(x) = r_i, \quad \forall\, i \in [1, n] \Rightarrow s = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{E_i}$

(β) $\Rightarrow$ (α). Αν η $s = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{E_i}$,

$$E_i \in \mathcal{M}_\lambda,\ E_i \cap E_j = \emptyset,\ E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{και} \quad r_i \neq r_j$$

τότε η s είναι απλή.
Αν οι r_i δεν είναι διάφοροι και τα E_i δεν είναι ξένα ανά δύο, η απλή συνάρτηση έχει πολλές παραστάσεις.

Αν $s = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{E_i}$,

το
$$I_E(s) = \int_E s\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda(E_i).$$

καλείται **ολοκλήρωμα της απλής συναρτήσεως**.

Πρόταση 5.2.2. Αν s και s′ είναι απλές συναρτήσεις με πεδί(ορισμού το $E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, τότε

$$I_E(s + s') = I_E(s) + I_E(s')$$
$$I_E(\lambda s) = \lambda\, I_E(s), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αν $s \leqslant s'$ σχεδόν παντού, τότε,

$$I_E(s) \leqslant I_E(s')$$

Απόδ.: Η $s = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathscr{X}_{E_i}$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$ (πρβλ. 5.2.1).

$$s' = \sum_{j=1}^{m} t_j \mathscr{X}_{A_j},\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ \bigcup_{j=1}^{m} A_j = E$$

Επειδή, $E_i = \bigcup_j (E_i \cap A_j)$ έχομε,

$$\mathscr{X}_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} \mathscr{X}_{E_i \cap A_j}.$$

Ανάλογα

$$\mathscr{X}_{A_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{X}_{A_j \cap E_i}$$

Η $s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i \mathscr{X}_{E_i \cap A_j}$ $\qquad s' = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_j \mathscr{X}_{A_j \cap E_i}$

τότε

$$s + s' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (r_i + t_j) \mathscr{X}_{A_j \cap E_i}$$

$$I_E(s + s') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (r_i + t_j)\, \lambda(A_j \cap E_i)$$

$$I_E(s) + I_E(s') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i \lambda(E_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_j \lambda(A_j \cap E_i).$$

Ανάλογα,

$$I_E(\lambda s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda r_i \lambda(E_i) = \lambda I_E(s)$$

Αν $s \geqslant 0$

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda(E_i) \geqslant 0$$

γιατί αν

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda(E_i) < 0$$

τότε, επειδή, $r_i \geqslant 0 \Rightarrow \lambda(E_i) < 0$, άτοπο.

Αν $s \geqslant s' \Rightarrow s - s' \geqslant 0 \Rightarrow I_E(s - s') \geqslant 0$ δηλαδή,

$$I_E(s) \geqslant I_E(s')$$

Άρα η I_E είναι γραμμική συνάρτηση που διατηρεί την διάταξη.

5.2.3. Στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{A}, \mu)$ αν s και s' είναι απλές συναρτήσεις και $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ έχομε τα ακόλουθα

(i) $\int |s + s'| d\mu < \int |s| d\mu + \int |s'| d\mu$

(ii) Αν $A_i \in \mathscr{A}$, $1 \leqslant i < +\infty$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ για $i \neq j$ τότε,

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} s\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} s\, d\mu.$$

Παραδείγματα. (i). Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου

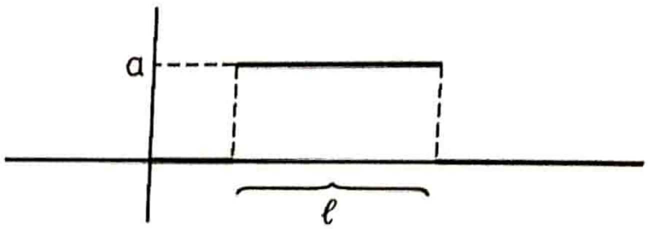
$$\int_A 1\, d\mu = \int_A d\mu = \mu(A), \quad A \in \mathscr{A}$$

(ii) Αν $A \in \mathscr{B}(X)$, $\mu(A) < +\infty$ και η απλή συνάρτηση $s = \mathscr{X}_A$, τότε,

$$\int_A \mathscr{X}_A\, d\mu = \mu(A)$$

(iii) Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ χώρος μέτρου Lebesgue. Αν η s είναι απλή συνάρτηση και $s = a$ με πεδίο ορισμού ένα πεπερασμένο διάστημα ℓ και $s = 0$ εκτός αυτού του διαστήματος, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} s\, d\lambda = a\,\ell$$



(iv) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$$\text{Η} \quad f(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}\, d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0$$

Όπως προαναφέρθηκε (πρβλ. 4.2.1) ορισμένοι συγγραφείς διατυπώνουν τον ακόλουθο ορισμό της απλής συνάρτησης.

Έστω s μια απλή συνάρτηση, δηλαδή μετρήσιμη συνάρτηση που το πεδίο τιμών της είναι αριθμήσιμο, δηλαδή,

$$\mathrm{rg}s = \{y_1, y_2, \ldots y_k, \ldots\}$$

Τότε, το ολοκλήρωμα της s επί του συνόλου $A \in \mathcal{A}$ συμβολίζεται $\int_A s(x)\, d\mu$ και

$$\int_A s(x)\, d\mu \underset{\text{ορσ.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\, \mu(A_n)$$

όπου

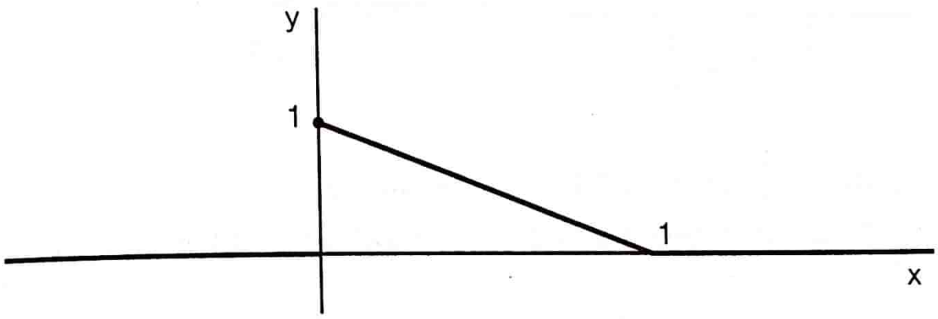
$$A_n = \{x \mid x \in A : s(x) = y_n\}$$

Το ολοκλήρωμα υπάρχει αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n\, \mu(A_n)$ συγκλίνει απολύτως. Αν το ολοκλήρωμα $\int_A s(x)\, d\mu$ υπάρχει τότε η s λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue (ως προς το μέτρο μ).

Εφαρμογή του 5.2

Έστω $(X, \mathscr{B}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ η πραγματική ευθεία με μέτρο Lebesgue και f η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

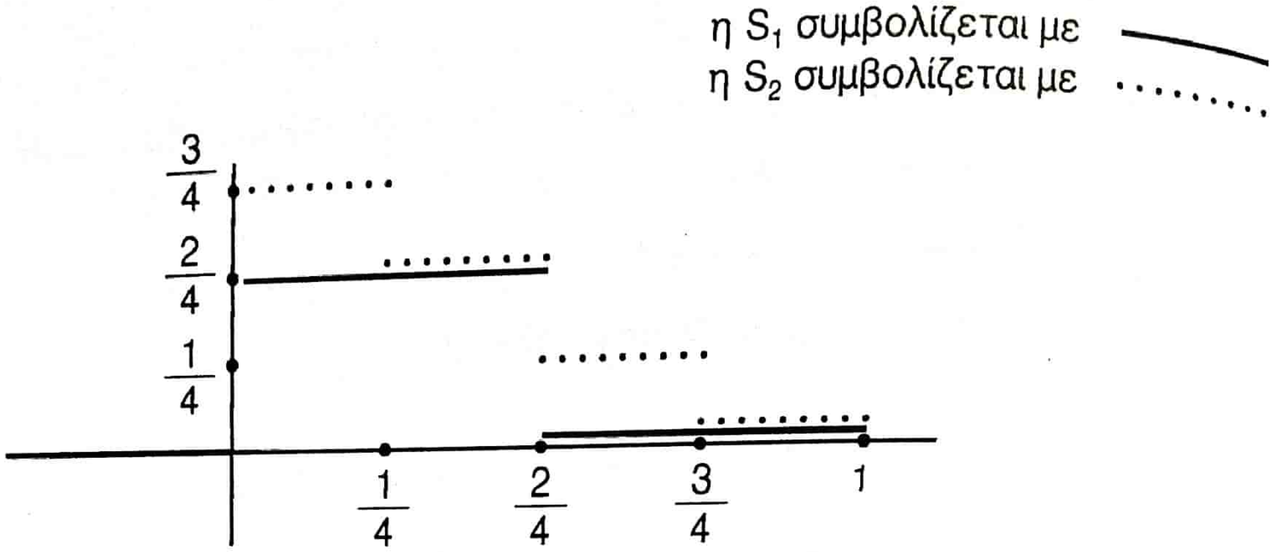


Θεωρούμε την ακολουθία

$$s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & 1 - \dfrac{k+1}{2^n} < x < 1 - \dfrac{k}{2^n} \\ & k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

$$s_1(x) = \begin{cases} 0 & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2} & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \qquad n = 1, k = 0, 1$$

$$s_2(x) = \begin{cases} 0 & \dfrac{3}{4} < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{2}{4} < x \leqslant \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2}{4} & \dfrac{1}{4} < x \leqslant \dfrac{2}{4} \\ \dfrac{3}{4} & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{4} \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \qquad n = 2, k = 0, 1, 2, 3$$



Αυτή είναι μία μή φθίνουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων. Επιπλέον, για όλα τα x για τα οποία η (s_n) δεν μηδενίζεται έχομε

$$\frac{k}{2^n} \leqslant 1 - x < \frac{k+1}{2^n}$$

Επομένως

$$1 - x = \frac{k}{2^n} + a, \qquad a < \frac{1}{2^n}$$

$$|f(x) - s_n(x)| = \left|1 - x - \frac{k}{2^n}\right| < \frac{1}{2^n}$$

δηλαδή η $s_n(x) \to f(x)$ όταν $n \to \infty$.
Τώρα, υπολογίζωμε το

$$\int_{\mathbb{R}} s_n \, d\mu = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} k$$

Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι η τιμή της s_n επί του διαστήματος $\left[1 - \frac{k+1}{2^n}, 1 - \frac{k}{2^n}\right]$ είναι $\frac{k}{2^n}$ και προφανώς το μέτρο του διαστήματος (δηλαδή το μήκος του) είναι $\frac{1}{2^n}$. Ως γνωστόν, $\sum\limits_{k=0}^{m-1} k = \frac{m(m-1)}{2}$

$$\int_{\mathbb{R}} s_n \, d\mu = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} k = \frac{1}{2^n} \frac{2^n(2^n-1)}{2} = \frac{2^n(2^n-1)}{2^n \cdot 2^n \cdot 2} =$$

$$= \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \lim_n \int_{\mathbb{R}} s_n \, d\mu = \lim_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2}$$

Η τιμή του ολοκληρώματος συμπίπτει με την τιμή του ολοκληρώματος Riemann της f.

Στην εισαγωγή του ολοκληρώματος Lebesgue (§ 5) διατυπώσαμε συνθήκες που θα ήταν «επιθυμητές» και τις οποίες θα πρέπει να πληροί ένας τελεστής για να είναι «ολοκλήρωμα». Η ιδιότητα (iii) δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann.

Πρόταση 5.2.4. Υπάρχει μονότονη ακολουθία από συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ που το όριό της δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμο.

Απόδ. Έστω $K \subset [0, 1]$, K κλειστό και η $f_n(x) = (1 - d(x, K))^n$, $x \in [0, 1]$. Είναι προφανές ότι

$$0 \leq f_n \leq 1 \qquad f_n \in C([0, 1])$$

Επειδή το σύνολο K είναι κλειστό η

$$f_n(x) \to \mathscr{X}_K(x), \qquad \forall\, x \in [0, 1]$$

προφανώς, αν εξετασθούν οι περιπτώσεις το $x \in K$ ή $x \notin K$.
Επομένως αρκεί να βρω K κλειστό $\subset (0, 1)$ έτσι ώστε η $\mathscr{X}_K$ να μην είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
Έστω $\{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ μια αριθμήσιμη των ρητών του $(0, 1)$ και $0 < \varepsilon < 1$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, έστω (α_i, β_i) ανοικτό διάστημα:

$$x_i \in (\alpha_i, \beta_i) \quad \text{και} \quad \beta_i - \alpha_i < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$ είναι ανοικτό σύνολο και το «μήκος του» είναι

$\mu(E) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. Θέτομε $K = (0, 1) \setminus E$. Το K είναι κλειστό και το

$$\mu(K) > 1 - \varepsilon.$$

Έστω P τυχαία διαμέριση του [0, 1]. Κάθε διάστημα της διαμέρισης θα περιέχει κάποιο ρητό.

$$\mathscr{X}_K(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 1 & x \notin E \\ 0 & x \in E \end{cases}$$

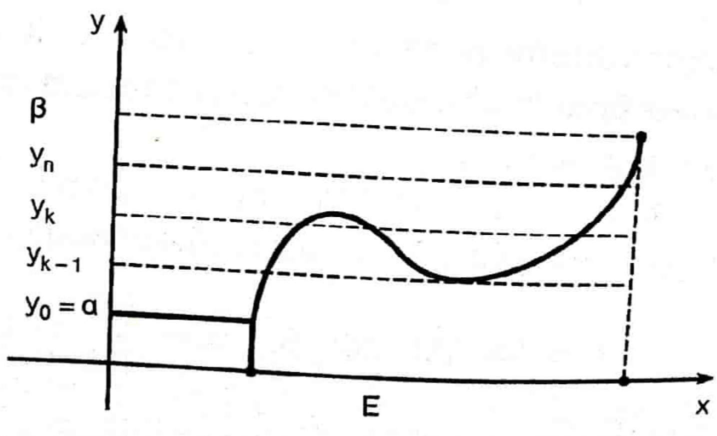
δηλ. η $\mathscr{X}_K(x)$ μηδενίζεται στους ρητούς οπότε $L(\mathscr{X}_K, P) = 0$.
Η διαμέριση P καλύπτει το K. Αν $\{I_i\}$ είναι εκείνα τα διαστήματα που καλύπτουν το K, τότε

$$U(\mathscr{X}_k, P) = \sum_i \sup \mathscr{X}_k(t) \cdot \mu(I_i) \geqslant \sum_i \mu(I_i) \geqslant 1 - \varepsilon$$

(γιατί $\exists\, t \in I_i$, $t \in K$ άρα $\mathscr{X}_K(t) = 1$), αφού $\bigcup I_i \supset K$.
Επομένως $U(\mathscr{X}_K, P) \geqslant 1 - \varepsilon$, άρα η $\mathscr{X}_K$ **δεν** είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο (0, 1).

5.2(a) Ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue για φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού σύνολο πεπερασμένου μέτρου

Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ χώρος μέτρου Lebesgue $E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, $\lambda(E) \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$.



Έστω f(x) μετρήσιμη και φραγμένη συνάρτηση στο $E \subset \mathbb{R}$. Αν $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\alpha < f(x) < \beta$. Διαιρούμε το (α, β) σε n-υποδιαστήματα επιλέγοντας τα σημεία $y_1 \ldots y_{n-1}$:

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

Έστω $E_K = \{x \in E: y_{k-1} < f(x) < y_K, k = 1, 2, \ldots n\}$. Επειδή η f είναι μετρήσιμη τα σύνολα E_K είναι μετρήσιμα, (πρβλ. 4.1.4), και ξένα.

$$S \underset{\text{ορσ.}}{=} \sum_{k=1}^{n} y_k \lambda(E_k), \quad s \underset{\text{ορσ.}}{=} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \lambda(E_k)$$

Αν

$$\inf \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \lambda(E_k) \right) = \sup \left(\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \lambda(E_k) \right)$$

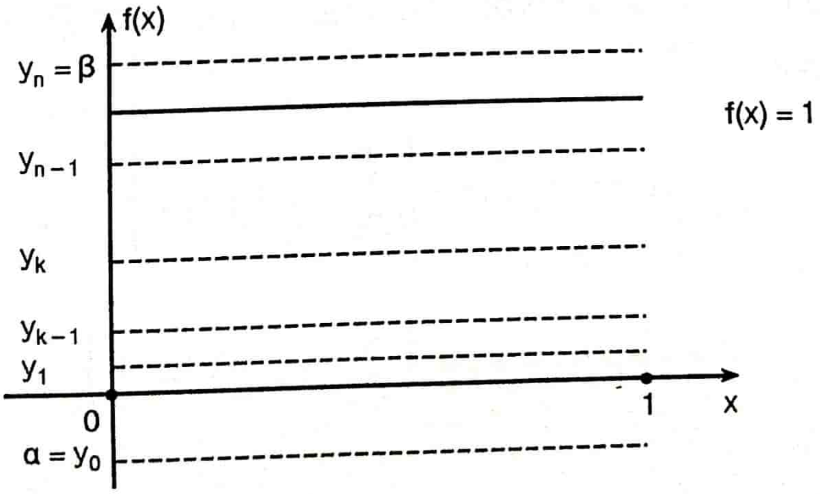
τότε η f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη** (τα inf και τα sup, λαμβάνονται επί όλων των δυνατών διαμερίσεων του $[\alpha, \beta]$).

Θα διατυπώσωμε παράδειγμα, σύμφωνα με το οποίο, υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue αλλά δεν είναι κατά Riemann.

Παράδειγμα 5.2.1.(a) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ρητός}, x \in [0, 1] \\ 0 & x \text{ άρρητος}, x \in [0, 1] \end{cases}$$

Η f(x) είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue.



Διαιρώντας το διάστημα (α, β) σε n - διαστήματα

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$E_K = \{x: y_{K-1} \leq f(x) < y_K\}$$

Είναι προφανές ότι τα μόνα μή κενά σύνολα είναι

$$E_1 = \{x: y_0 \leq f(x) < y_1\}$$

$$E_n = \{x: y_{n-1} \leq f(x) < y_n\}$$

Το E_1 είναι το σύνολο των αρρήτων και το E_n το σύνολο των ρητών.

$$\lambda(E_n) = 0, \quad \lambda(E_k) = 0, \ k = 2, 3, \dots n-1$$

$$\lambda(E_1) = 1, \quad (\text{πρβλ. } 3.1.8, (z), 3.1.4(i)).$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k \lambda(E_k) = y_1 \lambda(E_1) + y_2 \lambda(E_2) + \dots = y_1$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \lambda(E_k) = y_0 \lambda(E_1) + y_1 \lambda(E_2) + \dots = y_0$$

$$\sup s = \sup y_0 = 0 \qquad \inf S = \inf \ y_1 = 0$$

Δηλαδή, $\inf S = \sup s$, άρα η f είναι ολοκληρώσιμη,

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = 0$$

Είναι πολύ γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό, ότι η f, η συνάρτηση Dirichlet, **δεν** είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

5.2.2.(a) Αν

$$I = \inf S_n = \inf \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \lambda(E_k) \right)$$

και

$$J = \sup s_n = \sup \left(\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \lambda(E_k) \right)$$

τότε

$$s_n \leqslant J \leqslant I \leqslant S_n$$

$$0 \leqslant S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\, \lambda(E_k)$$

Για $\varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall\, n \geqslant n_0$

$$y_k - y_{k-1} < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}, \quad k = 1, 2 \ldots n$$

και

$$S_n - s_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}\, \lambda(E_k) < \varepsilon$$

δηλ.

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0$$

οπότε

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} s_n = I = J = \int_{[0,1]} f(x)\, dx.$$

5.2.3.(a) Παρά το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann δεν πρέπει να παραβλέψωμε το γεγονός ότι υπάρχουν πολλές «ωραίες» συναρτήσεις που **δεν** είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες.

Αν λ είναι μέτρο Lebesgue επί του X = (0, 1) τότε η $\left.\dfrac{1}{x}\right| x \in (0, 1)$ αν και συνεχής επί του X **δεν** είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ η
$$\sum_{n=1}^{k} n\, \mathscr{X}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, d\lambda \geqslant \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{k} n\, \mathscr{X}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x) \right] d\lambda =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} n \int_0^1 \mathscr{X}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} n\, \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1}$$

Δηλαδή,
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, d\lambda = +\infty$$

Πρόταση 5.2.4.(a) Αν $f(x) \geqslant 0$ φραγμένη και μετρήσιμη επί του E και
$$\int_E f(x)\, dx = 0$$
τότε η $f(x) = 0$ σ.χ. παντού επί του E.

Απόδ.: Επειδή η $f(x)$ είναι φραγμένη $\exists$ σταθερά M: $0 \leqslant f(x) \leqslant M$. Θεωρούμε τα σύνολα,

$E_1 = \{x: f(x) = 0\}$

$$E_2 = \left\{ x: \frac{M}{2} < f(x) \leqslant M \right\}$$

....

$$E_k = \left\{ x: \frac{M}{k} < f(x) \leqslant \frac{M}{k-1} \right\},\ k = 2, 3, \ldots$$

Τα σύνολα είναι μετρήσιμα (πρβλ. 4.1.4) και ξένα, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$$\lambda(E) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2) + \ldots$$
$$\frac{M}{k}\lambda(E_k) < \int_{E_k} f(x)\, dx \leqslant \frac{M}{k-1}\lambda(E_k)$$

$$\lambda(E_k) < \frac{k}{M}\int_{E_k} f(x)\, dx \leqslant \frac{k}{M}\int_E f(x)\, dx = 0$$

άρα $\lambda(E_k) = 0$ για $k = 2, 3, \ldots$

$$\lambda(E_2 \cup E_3 \cup \ldots) = \lambda(E_2) + \lambda(E_3) + \ldots = 0$$

Δηλαδή, το μέτρο του συνόλου για το οποίο η $f(x) > 0$ είναι μηδέν, άρα η $f(x) = 0$ σ.χ. παντού.

Η επόμενη πρόταση είναι μια απλή γενίκευση της προηγούμενης, με «άλλη» απόδειξη.

Πρόταση 5.2.5.(a) Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $E \in \mathscr{A}$, $\int_E f\, d\mu = 0$, $f \geqslant 0$. Τότε η $f = 0$ σχεδόν παντού επί του E.

Απόδ.: Έστω,

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in E : f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

Αν

$$A_n \underset{\text{ορσ.}}{=} \left\{ x \in E : f(x) > \frac{1}{n} \right\} \text{ και } \mu(A_n) > 0$$

τότε

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$0 = \int_E f \geqslant \int_{A_n} f \geqslant \frac{1}{n} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(A_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Άρα

$$\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

επομένως η $f = 0$ σχεδόν παντού, (πρβλ. 3.1.2).

«Άλλος» ορισμός του ολοκληρώματος φραγμένων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού σύνολο πεπερασμένου μέτρου.

Έστω $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{\lambda^*}, \lambda)$, χώρος μέτρου Lebesgue $E \subset \mathbb{R}$, $\lambda(E) \in \mathbb{R}$, και $f \colon E \to \mathbb{R}$, φραγμένη δηλαδή, $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$.

Έστω $L(f) = \{s : s$ απλή, με $s \leqslant f\}$, $I_E(s) \leqslant \beta\, \lambda(E)$ άρα υπάρχει το

$$\sup I_E(s) \underset{\text{ορσ.}}{=} \int_{-} f$$

και καλείται **κάτω ολοκλήρωμα Lebesgue της f**

Αν s′ είναι μια απλή συνάρτηση,

έστω $U(f) = \{s' : s' \text{ απλή συνάρτηση}: f \leqslant s'\}$

το $I_E(s') > αλ(E)$ άρα υπάρχει το

$$\inf I_E(s') = \int^{-} f$$

και καλείται **άνω ολοκλήρωμα της f**. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν

$$\int_{-E} f = \int_{E}^{-} f$$

Θεώρημα 5.2.6.(a) Έστω $(E, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ χώρος μέτρου Lebesgue και $f: E \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, $E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, $\lambda(E) \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) η f είναι μετρήσιμη

(β) η f είναι ολοκληρώσιμη

Απόδ. (α) ⇒ (β). Η f είναι μετρήσιμη, επομένως τα σύνολα

$$E_i = \left\{ x \in E : α + \frac{(i-1)(β-α)}{n} < f(x) < α + \frac{i(β-α)}{n} \right\} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

είναι μετρήσιμα

$$E_i \cap E_j = \varnothing \quad i \neq j, \quad E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

Ορίζομε

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left(α + \frac{(i-1)(β-α)}{n} \right) \mathscr{X}_{E_i}$$

$$s_n' = \sum_{i=1}^{n} \left(α + \frac{i(β-α)}{n} \right) \mathscr{X}_{E_i}$$

Οι s_n, s_n' είναι απλές συναρτήσεις και

$$s_n \leqslant f \leqslant s_n'$$

$$I(s_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha + \frac{(i-1)(\beta-\alpha)}{n} \right) \lambda(E_i) \leqslant \int_{-E} f \leqslant \int_{E}^{-} f \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{n} \right) \lambda(E_i)$$

$$0 \leqslant \int_{E}^{-} f - \int_{-E} f \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(\beta-\alpha)}{n} \right) \lambda(E_i)$$

ή

$$0 \leqslant \int_{E}^{-} f - \int_{-E} f \leqslant \frac{(\beta-\alpha)}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i) = \frac{(\beta-\alpha)}{n} \lambda(E)$$

Επομένως

$$\int_{E}^{-} f = \int_{-E} f.$$

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν απλές συναρτήσεις s_n και s_n':

$$s_n \leqslant f, \quad f \leqslant s_n' \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\int_E s_n \leqslant \int_E f \Rightarrow \int_{-E} f = \sup I(s_n)$$

$$\int_{-E} f - \frac{1}{n} < I(s_n) = \int s_n$$

Ανάλογα

$$I(s_n') = \int s_n' < \int_E f + \frac{1}{n}$$

οπότε

$$0 \leqslant I_E(s_n' - s_n) \leqslant \frac{2}{n}$$

Οι s_n και s_n' είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

$$s' = \inf_n s'_n, \qquad s = \sup_n s_n$$

$$s \leqslant f \leqslant s'$$

Έστω

$$E_\nu = \left\{ x \in E : s'(x) - s(x) \geqslant \frac{1}{\nu} \right\}$$

τότε

$$E_\nu \subseteq E_{\nu_n} = \left\{ x \in E : s'_n(x) - s_n(x) \geqslant \frac{1}{\nu} \right\}$$

$$s'_n - s_n \geqslant \frac{1}{\nu} \mathscr{X}_{E_{\nu n}}$$

$$\frac{1}{\nu} \lambda(E_{\nu n}) \leqslant I_E(s'_n - s_n) \leqslant \frac{2}{n}$$

$$\lambda(E_\nu) \leqslant \lambda(E_{\nu n}) \leqslant \frac{2\nu}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

οπότε, $\lambda(E_\nu) = 0$.
Δηλαδή, $\lambda(\{x \in E: s'(x) - s(x) > 0\}) = 0$ άρα $s = s'$ σχεδόν παντού ή

$$s = f = s' \quad \text{σχ. παντού}$$

και επειδή η s είναι μετρήσιμη είναι και η f.

Θεώρημα 5.2.7.(a) Κάθε συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ που είναι Riemann ολοκληρώσιμη είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη. Επιπλέον,

$$\int_{[\alpha,\beta]} f = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Απόδ. Αν η f είναι κλιμακωτή συνάρτηση,

$$f(x) = c_i, \qquad x \in (t_{i-1}, t_i)$$

τότε είναι και απλή γιατί, $f(x) = c_i \mathscr{X}(t_{i-1}, t_i)$. Αν $K([\alpha, \beta])$ είναι το σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων και $S([\alpha, \beta])$ το σύνολο των απλών τότε,

$$K([\alpha, \beta]) \subseteq S([\alpha, \beta]).$$

$$L_K(f) = \{\varphi \in K([\alpha, \beta]) \subseteq S([\alpha, \beta]) : \varphi \leqslant f\}$$

$$U_K(f) = \{\psi \in K([\alpha, \beta]) \subseteq S([\alpha, \beta]) : f \leqslant \psi\}$$

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)\,dx = \sup\{I_E(\varphi) : \varphi \in L_K(f)\} \leqslant \int_{-[\alpha, b]} f \leqslant \int_{[\alpha, b]}^{-} f \leqslant$$

$$\leqslant \inf\{I_E(\psi) : \psi \in U_K(f)\} = \int_{\alpha}^{\overline{\beta}} f(x)\,dx$$

Αλλά η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, δηλαδή

$$\int_{\underline{\alpha}}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\overline{\beta}} f(x)\,dx$$

άρα

$$\int_{-[\alpha, \beta]}^{\beta} f = \int_{[\alpha, \beta]}^{-} f$$

5.3 Το ολοκλήρωμα Lebesgue μή αρνητικών μετρησίμων συναρτήσεων με τιμές στο $[0, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Θεωρούμε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Θα ορίσωμε το ολοκλήρωμα μή αρνητικών $\mathscr{A}$-μετρησίμων συναρτήσεων ως προς το μέτρο μ, δηλαδή των συναρτήσεων που ανήκουν στο χώρο $M^+(X, \mathscr{A})$.

Ορισμός 5.3.1. Αν $f \in \mathscr{M}^+(X, \mathscr{A})$ **το ολοκλήρωμα της f ως προς μ** είναι

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int s\,d\mu : 0 \leqslant s \leqslant f\right\}$$

όπου το supremum λαμβάνεται επί όλων των απλών συναρτήσεων $s \in \mathscr{M}^+(X, \mathscr{A})$:

$$0 \leqslant s(x) \leqslant f(x), \quad \forall\, x \in X$$

Αν $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ και $E \in \mathcal{A}$ τότε, $f\mathcal{X}_E \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$. Ορίζομε

$$\int_E f\,d\mu = \int f\mathcal{X}_E\,d\mu$$

Η τιμή του ολοκληρώματος δεν είναι κατ' ανάγκην πεπερασμένη.

Αν $\int_E f\,d\mu < +\infty$ η f καλείται **ολοκληρώσιμη επί του E**.

Πρόταση 5.3.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και s_1, s_2 απλές μή αρνητικές συναρτήσεις, $s_1, s_2 \in M^+(X, \mathcal{A})$, $a \in \mathbb{R}^+$. Τότε

(a) $\int a s_1\,d\mu = a \int s_1\,d\mu$

(b) $\int (s_1 + s_2)\,d\mu = \int s_1\,d\mu + \int s_2\,d\mu$

Απόδ.: $s_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ όπου $a_1 \dots a_m$ μή αρνητικοί αριθμοί και $A_1 \dots A_m \in \mathcal{A}$ ξένα υποσύνολα του X, $A_i \cap A_j = \varnothing$

$$s_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{B_j}$$

όπου $b_1 \dots b_n$ μή αρνητικοί αριθμοί, $B_1 \dots B_n \in \mathcal{A}$ και $B_i \cap B_j = \varnothing$. Υποθέτομε ότι

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j \quad (\text{πρβλ. } 2.1.3) \qquad (1)$$

$$\int a s_1\,d\mu = \sum_{i=1}^{m} a \quad a_i \mu(A_i) = a \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = a \int s_1\,d\mu$$

$$\int (s_1 + s_2)\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j)\, \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i\, \mu(A_i \cap B_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_j\, \mu(A_i \cap B_j) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j) =$$

$$= \int s_1 d\mu + \int s_2 d\mu.$$

Θα δείξωμε ότι το ολοκλήρωμα είναι μονότονος τελεστής, ως προς την συνάρτηση που ολοκληρώνεται, αλλά και ως προς το σύνολο που αποτελεί πεδίο ορισμού της συναρτήσεως που ολοκληρώνεται.

Λήμμα 5.3.3. Αν $f, g \in M^+(X, \mathscr{A})$ και $f \leqslant g$ τότε

(i) $\int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$,

(ii) Αν $E, F \in \mathscr{A}$, $E \subset F$, τότε $\int_E f\, d\mu \leqslant \int_F f\, d\mu$

Απόδ.: (i) Αν $f \leqslant g$, η κλάση των απλών συναρτήσεων $s \in M^+(X, \mathscr{A})$ που ικανοποιούν την σχέση $s \leqslant f$ περιέχεται στην κλάση των απλών συναρτήσεων $s \in M^+(X, \mathscr{A})$: $s \leqslant g$ και επομένως

$$\int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$$

Η

$$g - f \in M^+(X, \mathscr{A})$$

$$\int g\, d\mu = \int (f + (g - f))\, d\mu = \int f\, d\mu + \int (g - f)\, d\mu \geqslant \int f\, d\mu$$

(πρβλ. 5.3.5).

(ii) $f\, \mathscr{X}_E \leqslant f\, \mathscr{X}_F$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από την (i).

Θεώρημα (της μονοτόνου συγκλίσεως) 5.3.4. Αν (f_n) είναι μή φθίνουσα (↑) ακολουθία $f_n \in M^+(X, \mathscr{A})$ η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού εν X τότε,

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$$

Απόδ.: Επειδή η (f_n) είναι ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων, η f είναι μετρήσιμη, (πρβλ. 4.2.7). Πρώτα υποθέτομε ότι οι υποθέσεις μας ισχύουν $\forall\, x \in X$.

Για την απόδειξη του 5.3.4 είναι αναγκαία η διατύπωση των ακολούθων λημμάτων.

Λήμμα 1. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και s απλή συνάρτηση. Αν λ είναι συνολοσυνάρτηση ορισμένη επί του $E \in \mathscr{A}$:

$$\lambda(E) = \int s\, \mathscr{X}_E\, d\mu$$

τότε η λ είναι μέτρο επί της $\mathscr{A}$.

Απόδ.:

$$s\, \mathscr{X}_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathscr{X}_{E_j \cap E}$$

$$\lambda(E) = \int s\, \mathscr{X}_E\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \mathscr{X}_{E_j \cap E}\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E)$$

Η απεικόνιση $E \to \mu(E_j \cap E)$ είναι μέτρο, οπότε η λ είναι μέτρο σαν γραμμικός συνδυασμός μέτρων επί της $\mathscr{A}$.

Λήμμα 2: Αν $(E_n) \uparrow$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων, $E_n \subseteq X$:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} s\, d\mu = \int_X s\, d\mu$$

Απόδ.:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} s\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int s\,\mathscr{X}_{E_n}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\lambda(E_n) =$$

$$= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lambda(X) = \int_X s\,d\mu$$

Απόδ. 5.3.4. Η f είναι μετρήσιμη (σαν όριο μετρησίμων συναρτήσεων).

Επειδή, $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$

$$\int f_n\,d\mu \leqslant \int f_{n+1}\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu \tag{1}$$

Αρκεί να αποδείξωμε την αντίστροφη ανισότητα

$$\int f\,d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

Έστω $0 < a < 1$ και s απλή συνάρτηση:

$0 \leqslant s \leqslant f$ $\qquad A_n = \{x \in X: f_n(x) \geqslant a\,s(x)\}$

$$A_n \in \mathscr{A}, \quad A_n \subseteq A_{n+1}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Σύμφωνα με γνωστό λήμμα (πρβλ. 5.3.3)

$$\int_{A_n} as\,d\mu \leqslant \int_{A_n} f_n\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu \tag{2}$$

Επειδή η $(A_n)\uparrow$ είναι (μονότονη) αύξουσα

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X, \qquad \int_X s\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} s_n\, d\mu$$

Θεωρώντας τα όρια στην (2)

$$a \int_X s\, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

Επειδή ισχύει, $\forall\, a: 0 < a < 1$.

$$\int_X s\, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

οπότε

$$\int f\, d\mu = \sup \int_X s\, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Τώρα, υποθέτομε ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν σχεδόν παντού. Έστω $N \in \mathscr{A}$: $\mu(N) = 0$, το N περιέχει όλα τα σημεία στα οποία οι υποθέσεις του θεωρήματος αποτυγχάνουν να ισχύουν. Η συνάρτηση $f\mathscr{X}_{N^c}$ και η ακολουθία $(f_n\mathscr{X}_{N^c})$ ικανοποιούν τις υποθέσεις, και από την μέχρι τώρα απόδειξη

$$\int f\mathscr{X}_{N^c}\, d\mu = \lim_n \int f_n \mathscr{X}_{N^c}\, d\mu$$

η $f_n\mathscr{X}_{N^c} = f_n$ σχ. παντού, $f\mathscr{X}_{N^c} = f$ σχ. παντού οπότε,

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

Τα αποτελέσματα που διατυπώνονται και αποδεικνύονται προκύπτουν από το θεώρημα της μονοτόνου συγκλίσεως.

Πόρισμα 5.3.5. (a) Αν $f \in M^+ = M^+(X, \mathscr{A})$, $c \geqslant 0$ τότε η $cf \in M^+$ και $\int cf d\mu = c \int f d\mu$, (b) Αν $f, g \in M^+$, τότε $f + g \in M^+$ και

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

Απόδ. (a) Αν $c = 0$ προφανές, αν $c > 0$ έστω (s_n) μονότονη, αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων εν M^+:

$$s_n \to f \quad \text{επί του } X \text{ όταν} \quad n \to \infty$$

(πρβλ. 4.2.3).

Η cs_n είναι μονότονη ακολουθία που συγκλίνει στην cf

$$\int cf\, d\mu = \int c \lim_{n\to\infty} s_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} c \int s_n\, d\mu = c \int f\, d\mu$$

(b) Αν (s_n) και (s'_n) είναι (μονοτόνως) αύξουσες ακολουθίες απλών συναρτήσεων που συγκλίνουν στην f και g τότε, η $(s_n + s'_n)$ συγκλίνει στην $f + g$. Από το θεώρημα της μονοτόνου συγκλίσεως έχομε

$$\int (f+g)\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} (s_n + s'_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (s_n + s'_n)\, d\mu =$$

$$= \lim_{n} \int s_n\, d\mu + \lim_{n} \int s'_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

Λήμμα Fatou 5.3.6: Αν (f_n), $f_n \in M^+(X, \mathscr{A})$ τότε

$$\int (\liminf f_n)\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu$$

Απόδ.: Έστω $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$.

Επομένως

$$g_m \leqslant f_n \qquad m \leqslant n$$

τότε

$$\int g_m\, d\mu \leqslant \int f_n\, d\mu, \qquad m \leqslant n$$

άρα

$$\int g_m\, d\mu \leqslant \liminf \int f_n\, d\mu \tag{1}$$

$$\left(\text{γιατί } \liminf \int f_n\, d\mu = \sup\left\{\inf \int f_n\, d\mu\right\}\right)$$

Η $(g_m) \uparrow$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\lim\inf f_n$

$$\lim_m g_m = \sup g_m = \sup\inf\{f_m, f_{m+1} \dots\} = \lim\inf f_n$$

Από το **θεώρημα της μονότονης συγκλίσεως**

$$\int (\lim\inf f_n)\, d\mu = \lim_n \int g_n\, d\mu \leqslant \lim_n\inf \int f_n\, d\mu \qquad (2)$$

Παράδειγμα 5.3.6. (i) Έστω (f_n) ακολουθία θετικών μετρησίμων συναρτήσεων:

$$f_{2n-1} = \mathscr{X}_{[0,1]} \quad f_{2n} = \mathscr{X}_{(1,2)} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lim\inf f_n(x) = 0, \qquad \int f_n(x)\, dx = 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Θεώρημα 5.3.7 (της κυριαρχημένης σύγκλισης κατά Lebesgue). Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και g ολοκληρώσιμη συνάρτηση επί του X με τιμές στο $[0, +\infty]$. Έστωσαν $f, f_1, f_2, \dots$ $\mathscr{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις επί του X με τιμές στο $[-\infty, +\infty]$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, και $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, $n = 1, 2, ..$ σχεδόν παντού. Τότε, οι $f, f_1, f_2, \dots$ είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$$

Απόδ.: Οι f_n $n = 1, 2, \dots$ είναι ολοκληρώσιμες γιατί φράσσονται από την g(x) σχεδόν παντού, και η f είναι ολοκληρώσιμη, σαν όριο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων.
Πρώτα θα αποδείξωμε ότι

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$$

με τις υποθέσεις του θεωρήματος και $g(x) < +\infty$ να ισχύουν $\forall\, x \in X$.
Τότε,

$$(g+f)(x) = \lim_{n\to\infty} (g+f_n)(x)$$

$$\int (g+f)\,d\mu \leqslant \liminf \int (g+f_n)\,d\mu$$

γιατί

$$\int (g+f)\,d\mu = \int \liminf_n (g+f_n)\,d\mu \leqslant \liminf \int (g+f_n)\,d\mu$$

(Λήμμα Fatou), οπότε

$$\int f\,d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n\,d\mu$$

Ανάλογοι συλλογισμοί για την $(g - f_n)$ δείχνουν ότι

$$\int (g-f)\,d\mu \leqslant \liminf_n \int (g-f_n)\,d\mu$$

και επομένως

$$\limsup \int f_n\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu$$

άρα

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lebesgue της μονότονης συγκλίσεως μπορούμε να γράψωμε την προηγούμενη απόδειξη για υποθέσεις που συμβαίνουν σχεδόν παντού, (πρβλ. 5.3.4).

Παρατηρήσεις. (i) Στο θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης η συνθήκη του φράγματος είναι σημαντική. Το θεώρημα **δεν** εφαρμόζεται για την ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\mathscr{X}_{[0,n]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία **δεν** φράσσεται από ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(ii) Η έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος κατά Riemann που επιτρέπει την επέκταση της θεωρίας Riemann όταν η f δεν είναι φραγμένη ή όταν το διάστημα ολοκληρώσεως δεν είναι πεπερασμένο είναι χωρίς σημασία στην θεωρία ολοκληρώσεως Lebesgue.

(iii) Αν η f είναι (μή φραγμένη) ολοκληρώσιμη συνάρτηση κατά Lebesgue το θεώρημα Lebesgue είναι εφαρμόσιμο, γιατί,

$$\lim_{n\to\infty} f\mathscr{X}_{[0,n]} = f \qquad |f\mathscr{X}_{[0,n]}| \leqslant |f|$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int f\mathscr{X}_{[0,n]}\, d\lambda = \int f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

(iv) Έστω

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 & \text{αν } x > n \end{cases}$$

τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ αλλά

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n$$

Πρέπει να παρατηρηθεί ότι (f_n) **δεν** είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, +\infty]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, και επομένως δεν υπάρχει ολοκληρώσιμη g: $|f_n| \leqslant g$, οπότε το προηγούμενο θεώρημα (5.3.7) **δεν** εφαρμόζεται

(v) Έστω $f_n(x) = \lim_{k\to\infty} (\text{συν}(n!\,\pi x))^{2k}$ και $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Οι $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι ολοκληρώσιμες και έστω g(x) ολοκληρώσιμη συνάρτηση:

$$|f_n(x)| < g(x) \quad \text{π.χ. } g(x) = 1$$

Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη (σαν όριο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων) και

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 1$$

(v) Έστω $f_n \in C([0, 1], \mathbb{R})$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n\,\eta\mu\, n\pi x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Η $f_n(x) \to 0$, $\forall\, x \in [0, 1]$, προφανώς από το γνωστό θεώρημα της μεταφοράς

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^{\frac{1}{n}} \eta\mu\, n\pi x\, dx = n\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu\, n\pi x}{\pi x}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \not\to 0$$

Δηλαδή, κατά τη σύγκλιση κατά σημείο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων **δεν** υπάρχει εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος.

(vi) Στο χώρο μέτρου Lebesgue $([0, 1], \mathcal{M}, \lambda)$ αν θέσωμε

$$f_n = n(n+1)\,\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]} \quad \text{και} \quad g_n = 2n\,\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]} \quad \text{τότε}$$

$$\text{η } f_n \to f = 0 \quad \text{κατά σημείο}$$

$$g_n \not\to 0 \quad \text{»} \quad \text{»}$$

αλλά

$$\int_0^1 f_n\,dx = 1 = \int_0^1 g_n\,dx$$

(vii) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue συνάρτηση. Τότε

$$\lim_{t\to\infty} \int f(x)\,\sigma\upsilon\nu(xt)\,d\lambda = \lim_{t\to\infty} \int f(x)\,\eta\mu(xt)\,d\lambda(x)$$

Λύση: Αρκεί να αποδείξωμε τον ισχυρισμό για την ειδική περίπτωση. $f = \mathcal{X}_{[a, b]}$, (πρβλ. Θεωρ. 4.2.3(ii), και 5.2.6), όπου $-\infty < a < b < +\infty$ $\forall\, t > 0$ έχομε

$$\left|\int f(x)\,\sigma\upsilon\nu(xt)\,d\lambda(x)\right| = \left|\int_a^b \sigma\upsilon\nu(xt)\,dx\right| = \left|\frac{\eta\mu(xt)}{t}\right]_{x=a}^{x=b}\right| =$$

$$= \left|\frac{\eta\mu(bt)-\eta\mu(at)}{t}\right| \leqslant \frac{2}{t}$$

οπότε

$$\lim_{t\to\infty}\int f(x)\,\sigma\upsilon\nu(xt)\,d\lambda(x) = 0$$

Ανάλογα,

$$\lim_{t\to\infty}\int f(x)\,\eta\mu(xt)\,d\lambda(x) = 0$$

(πρβλ. 5.3.7).

(viii). $\forall\ n\in\mathbb{N}$ έστω $\quad f_n:[0,1]\to\mathbb{R}: f_n(x) = \dfrac{n\,x^{n-1}}{1+x} \quad x\in[0,1]$

Το
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) = \frac{1}{2}$$

Λύση:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{x^n}{1+x}\Big]_0^1 + \int_0^{1.} \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$$

Επειδή, $\quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant 1, \quad x\in[0,1]$

και $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)^2} = 0, \quad \forall\ x\in[0,1)$

Τότε (πρβλ. 5.3.7) $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx = 0$

άρα $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Πόρισμα 5.3.8. (Θεώρημα Beppo Levi). Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ σειρά συναρτήσεων της οποίας οι όροι είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[0, +\infty]$. Τότε

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\mu$$

Απόδ.: Έστω $g_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{k \to \infty} g_k$

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \int \lim_{k \to \infty} g_k \, d\mu \underset{5.3.4}{=}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int g_k \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int \sum_{n=1}^{k} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

Παράδειγμα 5.3.8. (i) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx = \infty$

Απόδ.: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής για $x > 0$ και άρα μετρήσιμη. Η $f(x)$ είναι θετική και το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx$ ορίζεται. Έτσι

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx > \int_1^{n} \frac{1}{x} \, dx$$

Αλλά $\frac{1}{x} > \frac{1}{k}$ για $x \in [k-1, k]$

$$\int_1^{n} \frac{1}{x} \, dx > \sum_{k=2}^{n} \int_1^{n} \frac{1}{k} \mathscr{X}_{[k-1,k]} \, dx > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

(πρβλ. και 5.2.3).

Θα αποδείξωμε, εκ νέου, το θεώρημα 5.2.7, σαν εφαρμογή του θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης 5.3.7.

Θεώρημα 5.3.9. Έστω f: [α, β] → $\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\beta}^{\alpha} f = \int_{[\alpha,\beta]} f\,d\lambda$$

Απόδ.: Θεωρούμε την ακολουθία των διαμερίσεων Δ_n, $n = 1, 2 \ldots$ του [α, β].

$$\Delta_1 < \Delta_2 < \ldots < \Delta_n < \ldots$$

και $\|\Delta_n\| \to 0 \quad n \to \infty$, δηλαδή, το πλάτος των διαστημάτων της διαμερίσεως τείνει προς το 0.

Χρησιμοποιώντας την ακολουθία των διαμερίσεων Δ_n και την συνάρτηση f (για την οποία υποθέτομε ότι είναι φραγμένη) θα ορίσωμε δύο ακολουθίες συναρτήσεων $\{\varphi_n\}$ και $\{\psi_n\}$ στο [α, β] και θα μελετήσωμε τις ιδιότητές τους σε σχέση με τις Δ_n και f.

Έστω

$$\Delta_n = \{\alpha = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = \beta\} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ορίζομε,

$$\varphi_n \underset{\text{ορσ.}}{=} f(\alpha)\mathcal{X}_{\{\alpha\}} + \sum_{i=1}^{k_n} m_i^n \mathcal{X}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}, \; m_i^n = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}^n, t_i^n]\}$$

και

$$\psi_n \underset{\text{ορσ.}}{=} f(\alpha)\mathcal{X}_{\{\alpha\}} + \sum_{i=1}^{k_n} M_i^n \mathcal{X}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}, \; M_i^n = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}^n, t_i^n]\}$$

$i = 1, 2, \ldots k_n \qquad n = 1, 2, \ldots$

Οι φ_n και ψ_n είναι μετρήσιμες Borel συναρτήσεις εφ' όσον τα διαστήματα είναι σύνολα Borel. Οι φ_n και ψ_n είναι επίσης απλές συναρτήσεις.

$$\int_{[\alpha,\beta]} \varphi_n \, d\lambda = L(f, \Delta_n), \qquad \int_{[\alpha,\beta]} \psi_n \, d\lambda = U(f, \Delta_n)$$

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$$

Επειδή η $\Delta_\nu < \Delta_{\nu+1}$ η $(\varphi_n) \uparrow$ είναι αύξουσα και η $(\psi_n) \downarrow$ είναι φθίνουσα.

Θέτομε,

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sup \varphi_n$$

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \inf \psi_n$$

Τότε, οι φ και ψ είναι Borel μετρήσιμες συναρτήσεις, (πρβλ. 4.2.7) και

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi$$

Εφ' όσον η f είναι φραγμένη υπάρχει πραγματικός αριθμός $M > 0$: $|f| \leqslant M$. Τότε $|\varphi_n| \leqslant M$ και $|\psi_n| \leqslant M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης κατά Lebesgue (πρβλ. 5.3.7) για $g = M$ έπεται ότι και οι φ, ψ είναι ολοκληρώσιμες ως προς λ στο [α, β] και ισχύουν

$$\int_{[\alpha,\beta]} \varphi \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[\alpha,\beta]} \varphi_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} L(f, \Delta_n)$$

$$\int_{[\alpha,\beta]} \psi \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[\alpha,\beta]} \psi_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} U(f, \Delta_n)$$

Από το κριτήριο Riemann η ακολουθία μπορεί να επιλεγεί:

$$U(f, \Delta_n) - L(f, \Delta_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_\alpha^\beta f = \lim_{n\to\infty} L(f, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, \Delta_n) = \int_{[\alpha,\beta]} \varphi \, d\lambda = \int_{[\alpha,\beta]} \psi \, d\lambda$$

και

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi$$

$$\int_{[\alpha,\beta]} (\varphi - \psi)\, d\lambda = 0 \Rightarrow \varphi - \psi = 0 \quad \lambda-\text{σχ. παντού}$$

$$\Rightarrow \varphi = \psi \quad \lambda - \text{σχ. παντού}$$

άρα $\quad f = \varphi = \psi \quad \lambda - \text{σχ. παντού}$

Επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη γιατί αν $f = \varphi$ λ – σχ. παντού

$$\int f\, d\lambda = \int \varphi\, d\lambda$$

5.4 Ολοκλήρωση μετρησίμων συναρτήσεων (Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις)

Ορίζομε την ολοκλήρωση μετρησίμων πραγματικών συναρτήσεων.

Ορισμός 5.4.1. Η συλλογή L $(X, \mathscr{A}, \mu)$ των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων αποτελείται από τις πραγματικές $\mathscr{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις που ορίζονται επί του X και των οποίων το θετικό και αρνητικό μέρος f^+, f^- της f έχουν πεπερασμένα ολοκληρώματα ως προς το μ.

$$\int f\, d\mu \underset{\text{ορσ.}}{=} \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Αν $E \in \mathscr{A}$

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Αν $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων: $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu$$

Η πρόταση που ακολουθεί λέγεται πολλές φορές ιδιότητα της απόλυτης ολοκληρώσεως του ολοκληρώματος Lebesgue. Είναι γνωστό, ότι αν η απόλυτη τιμή μιας συναρτήσεως είναι ολοκληρώ - σιμη κατά Riemann δεν συνεπάγεται ότι η συνάρτηση είναι ολο - κληρώσιμη κατά Riemann. Για την ολοκλήρωση κατά Lebesgue έχομε.

Θεώρημα 5.4.2. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$.

Τότε

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\mu$$

Απόδ.: Αν $f \in L \Leftrightarrow f^+, f^- \in M^+(X, \mathscr{A})$ και έχουν πεπερασμένα ολοκληρώματα. Επειδή $|f| = f^+ + f^-$ έπεται ότι $|f| \in L$. Αν $|f| \in L$ $f \leqslant |f|$ και $\int f\,d\mu \leqslant \int |f|\,d\mu$. Επιπλέον,

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leqslant \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f|\,d\mu.$$

5.4.2. (i) Η $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο $(-\infty, +\infty)$ επειδή $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| dx = \infty$, ενώ το γενικευμένο ολο- κλήρωμα Riemann υπάρχει και είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}\,dx = \pi$$

Θεώρημα 5.4.3. Έστω f ολοκληρώσιμη και g μετρήσιμη και φραγμένη σχεδόν παντού. Τότε η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδ.: Από την υπόθεσή μας υπάρχει αριθμός $k > 0$: $|g| \leqslant k$. Μπορούμε να αγνοήσωμε το σύνολο μέτρου 0 όπου η προηγούμε - νη ανισότητα δεν ισχύει

$$|f \cdot g| \leqslant k\,|f|$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη και η $|f|$ είναι (πρβλ. 5.4.2). Δηλαδή, η $k\,|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα το ολοκλήρωμα της είναι πεπερα -

σμένο, άρα και η $|f \cdot g|$ είναι ολοκληρώσιμη επομένως και η $f \cdot g$ (πρβλ. ibid).

Πόρισμα 5.4.4. Αν η f είναι μετρήσιμη και η g ολοκληρώσιμη με $|f| \leqslant g$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int |f|\, d\mu < \int |g|\, d\mu$$

Απόδ.: Αρκεί να δούμε ότι $f^+ \leqslant g$, $f^- \leqslant g$ και

$$0 \leqslant \int f^+ d\mu \leqslant \int g\, d\mu \qquad 0 \leqslant \int f^- d\mu \leqslant \int g\, d\mu$$

Επομένως, οι f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες.

Το ολοκλήρωμα επί του $L\,(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι γραμμική συνάρτηση.

Θεώρημα 5.4.5. Αν $f, g \in L$ τότε η af, $a \in \mathbb{R}$, και η $f + g$ ανήκουν στον L.
Επιπλέον,

$$\int af\, d\mu = a \int f\, d\mu, \; a \in \mathbb{R} \qquad \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

Απόδ.: Αν $a = 0$ $\quad af = 0$

$$\int af\, d\mu = 0 = a \int f\, d\mu$$

Αν $a > 0$ $\qquad (af)^+ = af^+ \quad (af)^- = af^-$

$$\int af\, d\mu = \int af^+ d\mu - \int af^- d\mu = a \left\{ \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right\} = a \int f\, d\mu$$

Αν $a < 0$ η απόδειξη είναι ανάλογη. Υποθέτομε ότι $f, g \in L$, τότε $|f| \in L$, $|g| \in L$

$$|f + g| \leqslant |f| + |g|$$

οπότε βάσει των προηγούμενων (πρβλ. 5.4.2) $f + g \in L$

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

Οι συναρτήσεις $f^+ + g^+$, $f^- + g^-$ είναι μή αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις γιατί αν $f \in L \Leftrightarrow f^+, f^- \in M^+(X, \mathscr{A})$ και έχουν πεπερασμένα ολοκληρώματα.

$$\int (f + g)\, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

Θεώρημα 5.4.6. (της κυριαρχημένης σύγκλισης). Έστω $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων που συγκλίνει σχεδόν παντού σε μία πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση f. Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g: $|f_n| \leqslant g$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$$

Απόδ.: Η απόδειξη είναι ανάλογη της 5.3.7.

5.4.7. (i) Αν η f είναι μή αρνητική συνάρτηση, $(E, \mathscr{A}, \mu)$ ο αντίστοιχος χώρος μέτρου και $\int_E f\, d\mu < \infty$ τότε,

$$\mu(A) = \mu(\{x \in E: f(x) = \infty\}) = 0$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant n \cdot \mathscr{X}_A \leqslant f$, (πρβλ. 5.3.1, 4.2.3), τότε η

$$n \cdot \mu(A) \leqslant \int_E f\, d\mu < +\infty$$

άρα $\mu(A) = 0$.

(ii) Αν $\mu(E) < \infty$ και $m \leqslant f \leqslant M$ όπου m και M είναι δύο μή αρνητικοί αριθμοί

$$m\mu(E) \leqslant \int_E f\, d\mu \leqslant M\mu(E)$$

(iii) Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και f = g σχεδόν παντού, $E \in \mathscr{A}$ τότε

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$$

(iv) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $E \in \mathcal{A}$ τότε, το

$$A = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$$

έχει σ-πεπερασμένο μέτρο (3.1.5, iii), γιατί αν

$$A_n = \left\{ x \in E : |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} \text{ τότε } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\frac{1}{n}\,\mathscr{X}_{A_n} \leq |f| \quad \text{(πρβλ. 5.3.1)}$$

$$\int_E \frac{1}{n}\,\mathscr{X}_{A_n}\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu < \infty$$

δηλαδή, $\mu(A_n) < +\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

6. ΤΡΟΠΟΙ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Σ' αυτή την παράγραφο θεωρούμε μόνο πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται στο χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Ορισμοί 6.1. (i) Η (f_n) συγκλίνει **ομοιόμορφα** στην f αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: αν $n \geqslant N(\varepsilon)$ και $x \in X$ τότε η $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(ii) Η (f_n) συγκλίνει **κατά σημείο** στην f

$$\text{αν } \forall\ \varepsilon > 0,\ x \in X\ \ \exists\ N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}: \text{ αν } n \geqslant N(\varepsilon, x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(iii) Η (f_n) συγκλίνει **σχεδόν παντού στην f**

$$\text{αν } \exists\ M \in \mathcal{A}: \mu(M) = 0 \text{ και}$$

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ x \in X \setminus M \quad \exists\ N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}: \forall\ n \geqslant N(\varepsilon, x)$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Είναι προφανές ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση επάγεται την σημειακή, η σημειακή την σχεδόν παντού σύγκλιση και βέβαια το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν το X αποτελείται μόνο από πεπερασμένο πλήθος σημείων τότε η σημειακή κάλυψη επάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση. Αν το μόνο σύνολο μέτρου μηδέν είναι το κενό σύνολο, τότε η σχεδόν παντού σύγκλιση επάγεται την σημειακή.

Από τα επόμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι η **σχεδόν παντού** σύγκλιση αλλά ακόμα και η **ομοιόμορφη σύγκλιση δεν** εξασφαλίζουν την εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος.

Παραδείγματα. (i) Αν $f_n = n\,\mathcal{X}_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}$ ακολουθία απλών μετρησίμων συναρτήσεων στο χώρο μέτρου Lebesgue $([0, 1], \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ τότε η $f_n \to f = 0$ σχ. παντού. Αλλά

$$\int_0^1 f_n\, dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f\, dx$$

(ii) Στο χώρο μέτρου Lebesgue ($\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{\lambda^*}$, λ) αν θέσωμε

$$f_n(x) = n^2 \mathscr{X}\left[0, \frac{1}{n}\right]$$

τότε η $f_n \to f = 0$ σχ. παντού. Αλλά

$$\int f_n\, dx = n \to \infty, \qquad \int f\, dx = 0$$

(iii) Στο χώρο μέτρου Lebesgue ($\mathbb{R}$, $\mathcal{M}$, λ) αν θέσωμε

$$f_n = \frac{1}{n} \mathscr{X}_{[0,n]} \quad g_n = \frac{1}{n} \mathscr{X}_{[-n^2, n^2]}$$

τότε

$$f_n \to f = 0 \quad \text{ομοιόμορφα}$$

$$g_n \to f = 0 \quad \text{ομοιόμορφα}$$

αλλά

$$\int f_n\, dx = 1 \neq 0, \qquad \int g_n\, dx = 2n \to \infty$$

Θεώρημα 6.2. Αν η $f_n \to f$ και η $g_n \to g$ σχεδόν παντού και $A \subset X$, τότε,

(1) $cf_n \to cf$ σχεδόν παντού

(2) $f_n + g_n \to f + g$ » »

(3) $|f_n| \to |f|$ » »

(4) $f_n \vee g_n \to f \vee g$

$f_n \wedge g_n \to f \wedge g$ » »

(5) $f_n^+ \to f^+$ σχ. παντού, $f_n^- \to f^-$ σχ. παντού

(6) $\mathscr{X}_A f_n \to \mathscr{X}_A f$ σχεδόν παντού

(7) $f_n g_n \to f g$ » »

Απόδ.: Έστω Ε σύνολο: $\mu(E) = 0$. Στο συμπληρωματικό του Ε, $f_n(x) \to f(x)$, $g_n(x) \to g(x)$ και το θεώρημα προκύπτει από τις αντίστοιχες ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών των πραγματικών αριθμών.

6.3. Θα διατυπώσωμε επιπλέον παραδείγματα για να δείξωμε ότι η σχεδόν παντού σύγκλιση και η ομοιόμορφη σύγκλιση δεν συνεπάγονται ότι το ολοκλήρωμα και το όριο μπορούν να εναλλαγούν.

Παραδείγματα: 1. Έστω ο χώρος μέτρου Lebesgue $([0, 1], \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ και $f_n = n\,\mathcal{X}_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}$.

Η $f_n \xrightarrow{\sigma.\pi.} 0$ σχεδόν παντού αλλά

$$\int_0^1 f_n \, d\lambda = 1 \neq 0, \quad (\pi\rho\beta\lambda.\ 5.4.1.\ (\mathrm{i}))$$

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ χώρος μέτρου Lebesgue και $f_n = \frac{1}{n}\,\mathcal{X}_{[0, n]}$, τότε η

$f_n \xrightarrow{u} 0$, συγκλίνει ομοιόμορφα, αλλά

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1 \neq 0.$$

3. Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $\mu(X) < +\infty$ τότε η ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας ολοκληρωσίμων συναρτήσεων f_n σε μια συνάρτηση f συνεπάγεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu, \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

6.4 Σύγκλιση κατά μέτρο

Ορισμός 6.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία $\mathcal{A}$-μετρησίμων πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X. Τότε η $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει στην f **κατά μέτρο (in measure)**, όπου f $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση και γράφωμε

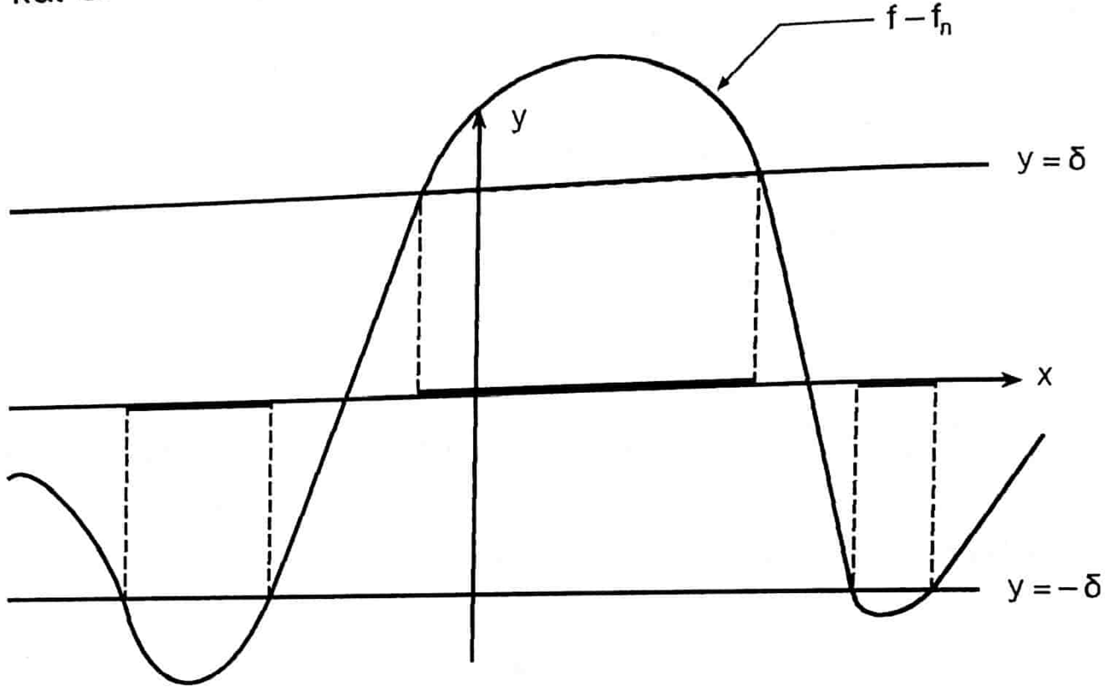
$\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ κατά μέτρο ή $\lim\limits_{n \to \infty} f_n \overset{\mu}{=} f$ αν και μόνο αν

$$\forall\, \delta > 0,\ \lim \mu\,(\{x \in X: |f(x) - f_n\,(x)| \geqslant \delta\}) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\forall\, \delta, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall\, n \geqslant n_0 \Rightarrow \mu\,(\{x \in X: |f(x) - f_n(x)| \geqslant \delta\}) < \varepsilon$$

Οι $\delta > 0$ και $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίοι αριθμοί αλλά ο n_0 εξαρτάται από τα δ και ε.



Το σκιαγραφημένο τμήμα είναι

$$\{x \in X: |f(x) - f_n\,(x)| \geqslant \delta\}$$

Θεώρημα 6.4.2. [F. Riesz]. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και f, $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ $\mathscr{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις:

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{\mu}{=} f$$

Τότε, υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k})_{k=1}^{+\infty}$:

$$\lim_{n \to \infty} f_{n_k} = f \quad \mu-\text{σχ. παντού}$$

Απόδ.: Προσδιορισμός της υπακολουθίας $(f_{n_k})_{k=1}^{+\infty}$. Έστω $\delta = 1$ και $\varepsilon = 1/2$. Από τον ορισμό της συγκλίσεως κατά μέτρο,

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$, δηλαδή, $\exists f_{n_1} : F_{n_1} = \{x \in X : |f(x) - f_{n_1}(x)| \geqslant 1\}$, $\mu(F_{n_1}) < \frac{1}{2}$

Αν $\delta = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\exists f_{n_2}$:

$$F_{n_2} = \left\{ x \in X : |f(x) - f_{n_2}(x)| \geqslant \frac{1}{2} \right\}, \quad \mu(F_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$$

Από τον ορισμό της **συγκλίσεως κατά μέτρο**, επιλέγομε $n_2 \geqslant n_1$. Επαγωγικά, επιλέγομε

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k \quad \text{και}$$

$$F_{n_1} \; F_{n_2} \; \ldots \; F_{n_k} \quad :$$

$$F_{n_p} = \left\{ x \in X : |f_{n_p}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{p} \right\}, \quad \mu(F_{n_p}) < \frac{1}{2^p} \quad p = 1, 2, \ldots k$$

Αν $\delta = \frac{1}{k+1}$ και $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ υπάρχει f_{k+1}, $n_{k+1} > n_k$:

$$F_{n_{k+1}} = \left\{ x \in X : |f(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geqslant \frac{1}{k+1} \right\}, \quad \mu(F_{k+1}) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

Η $(f_{n_k})_{k=1}^{+\infty}$ συγκλίνει μ-σχ. παντού στην f γιατί η σύγκλιση αποτυγχάνει να ισχύει σε σύνολα μέτρου 0.

Παράδειγμα 6.4.3. Θεωρούμε τον χώρο μέτρου $([0, 1], \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$. Ορίζομε την ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ επί του [0, 1] με

$$f_n = \mathscr{X}_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]}, \; n = 2^k + j, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2^k$$

Δείξτε ότι η $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει κατά μέτρο στο [0, 1]. Να βρεθεί μια υπακολουθία της (f_n) η οποία να συγκλίνει στο 0 λ-σχεδόν παντού. Μπορείτε να βρείτε υπακολουθία που να συγκλίνει παντού επί του [0, 1];

Απόδ.: Για $n = 1, k = 0, j = 0 \quad f_1 = \mathscr{X}_{[0, 1]}$

$$n = 2 \quad k = 1 \quad j = 0 \quad f_2 = \mathscr{X}_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$$

$$n = 3 \quad k = 1 \quad j = 1 \quad f_3 = \mathscr{X}\left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$n = 4 \quad k = 2 \quad j = 0 \quad f_4 = \mathscr{X}\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

$$n = 5 \quad k = 2 \quad j = 1 \quad f_5 = \mathscr{X}\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

$$n = 6 \quad k = 2 \quad j = 2 \quad f_6 = \mathscr{X}\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$n = 7 \quad k = 2 \quad j = 3 \quad f_7 = \mathscr{X}\left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$n = 8 \quad k = 3 \quad j = 0 \quad f_8 = \mathscr{X}\left[0, \frac{1}{8}\right]$$

....

$$n = 2^4 \quad k = 4 \quad j = 0 \quad f_{16} = \mathscr{X}\left[0, \frac{1}{16}\right]$$

Προφανώς όταν $n \to \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0$ κατά μέτρο. Το σύνολο στο οποίο αποτυγχάνει να ισχύει η προηγούμενη σχέση είναι μέτρου 0.

$$\lim_{k \to \infty} f_{2^k}(x) = 0, \quad x \in (0, 1]$$

Δηλαδή, η $(f_{2^k})_{k=1}^{+\infty}$ συγκλίνει στο 0 λ-σχεδόν παντού.
Θα δείξωμε ότι η $(f_{2^k+1})_{k=1}^{+\infty}$ συγκλίνει στο 0 $\forall\, x \in [0, 1]$.

$$f_{2^k+1} = \mathscr{X}\left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right]$$

Επομένως, $\forall\, k \geq 1 \quad 0 \notin \left[\dfrac{1}{2^k}, \dfrac{2}{2^k}\right]$

$$\lim_{k \to \infty} f_{2^k+1}(0) = 0$$

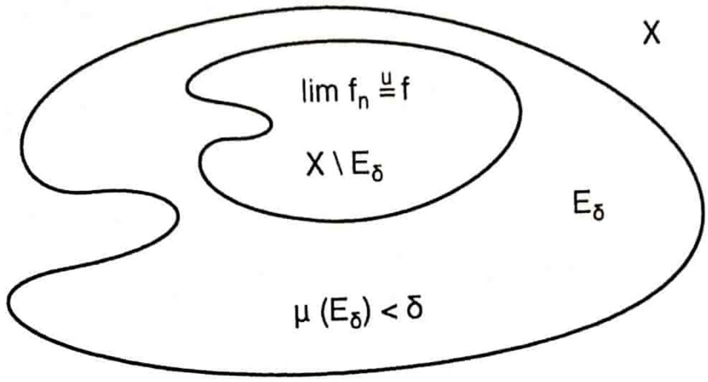
Επίσης, $\forall\, x_0 \in (0, 1]\ \exists\, k_0 \geq 1 : \dfrac{2}{2^{k_0}} < x_0$ και επομένως,

$$\forall\, k \geq k_0 \Rightarrow f_{2^k+1}(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f_{2^k+1}(x_0) = 0.$$

Ορισμοί 6.4.4. Μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει **σχεδόν ομοιόμορφα (almost uniformly convergent)** σε μια μετρήσιμη συνάρτηση f αν

$$\forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, E_\delta \in \mathcal{A} \;\; \text{με} \;\; \mu(E_\delta) < \delta:$$

η f_n να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του $X \setminus E_\delta$.



6.4.5. Ας υποθέσωμε ότι η $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, E_n \in \mathcal{A}: \mu(E_n) < \frac{1}{n} \;\; \text{και} \;\; f_n \xrightarrow{u} f \,|\, X \setminus E_n$$

Έστω

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_n), \qquad \mu(X \setminus A) = 0$$

$\forall\, x \in A \;\; f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού, γιατί το συμπληρωματικό του A, $X \setminus A$, έχει μέτρο 0. Δηλαδή, η **σχεδόν ομαλή σύγκλιση επάγεται την σχεδόν παντού σύγκλιση**.

Το αντίστροφο είναι αληθές αν το $\mu(X) < +\infty$ και είναι το **θεώρημα του Egoroff**.

Θεώρημα 6.4.6 (Egoroff). Έστω $\mu(X) < +\infty$ και (f_n) ακολουθία μετρησίμων πραγματικών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει σχεδόν παντού επί του X σε μια μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση f. Τότε η (f_n) συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα και κατά μέτρο στη f.

Απόδ.: Κατ' αρχήν υποθέτομε ότι η $f_n(x) \to f(x) \;\; \forall\, x \in X$. Θα δείξωμε στο τέλος της αποδείξεως ότι αυτό δεν είναι βλάβη της γενικότητος.

$\forall$ m, n = 1, 2, 3, ... ορίζομε

$$F_n^m = \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}, \text{ για } k \geq n \right\} = \bigcup_{k \geq n}^{\infty} \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\}$$

Επειδή κάθε $f_k - f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση τα σύνολα F_n^m είναι μετρήσιμα σύνολα. Αν το m είναι σταθερό η ακολουθία F_n^m είναι φθίνουσα ($\downarrow$). Πράγματι, ισχυριζόμαστε ότι η F_n^m ($\downarrow$) όταν $n \to \infty$. Για δοθέντα $m \in \mathbb{N}$ και $\forall\, x \in X$ η $f_n(x) \to f(x)$ συνεπάγεται την ύπαρξη δείκτη r:

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \qquad \forall\, k \geq r$$

δηλαδή, $x \notin F_r^m$ οπότε $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^m$ και έτσι αποδείξαμε ότι η τομή των F_n^m (όταν ο $m \in \mathbb{N}$) είναι το $\varnothing$ (όταν $f_n(x) \to f(x)$) $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $\mu(F_n^m) \to 0$ $\quad n \to \infty$ (πρβλ. 1.2.15)). Δοθέντος $\delta > 0$ υπάρχει δείκτης n(m):

$$\mu(F_{n(m)}^m) \leq \frac{\delta}{2^m} = \delta \cdot 2^{-m}$$

Ορίζομε, $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n(m)}^m$,

$$\mu(F) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(F_{n(m)}^m) \leq \delta \sum_{1}^{\infty} 2^{-m} = \delta \quad \text{(πρβλ. 3.1.4)}$$

Τώρα, αρκεί να δείξωμε ότι η $f_n(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο $X \setminus F$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ αναζητούμε δείκτη r:

$$\text{όταν } k \geq r \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in X \setminus F$$

$$X \setminus F = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathscr{C} F^{m}_{n(m)} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathscr{C} \bigcup_{k \geq n(m)} \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{m} \right\} =$$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n(m)} \mathscr{C} \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{m} \right\} =$$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n(m)} \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\} =$$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \ \forall k \geqslant n(m) \right\}$$

Επιλέγομε m: $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Επειδή,

$$X \setminus F \subset \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \ \forall k \geqslant n(m) \right\}$$

Προφανώς,

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus F, \ \forall k \geqslant n(m)$$

Θεωρούμε τώρα, την γενική περίπτωση, $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Έστω E σύνολο: $\mu(E) = 0$ στο συμπληρωματικό του οποίου $f_n(x) \to f(x)$. Ορίζομε

$$g_n = \mathscr{X}_{X \setminus E} f_n \qquad g = \mathscr{X}_{X \setminus E} f$$

Οι (g_n) και g είναι προφανώς μετρήσιμες συναρτήσεις.

Η $g_n(x) \to g(x)$, για κάθε x. Δοθέντος $\delta > 0$, από το πρώτο μέρος της αποδείξεως υπάρχει μετρήσιμο σύνολο G:

$$\mu(G) < \delta$$

$$g_n(x) \to g(x) \mid x \in X \setminus G$$

Ορίζομε

$$F \underset{\text{ορσ}}{=\!=} E \cup G$$

$$\mu(F) \leqslant 0 + \mu(G) < \delta$$

Στο συμπληρωματικό του F έχομε,

$$f_n(x) = g_n(x) \to g(x) = f(x), \ \forall\, x \in X \setminus F$$

6.4.7. (i) Μια ακολουθία πραγματικών μετρησίμων συναρτήσεων (f_n) **συγκλίνει κατά μέτρο** σε μια μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση f

$$\text{αν} \ \lim_{n\to\infty} \mu\,(\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0, \ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f το σύνολο

$$\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

είναι το $\emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Επομένως η **ομοιόμορφη σύγκλιση επάγεται την κατά μέτρο σύγκλιση**.

(ii) Αν η $f_n \xrightarrow{\mu} f$ κατά μέτρο και

$$\Rightarrow f = g \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

η $f_n \xrightarrow{\mu} g$ κατά μέτρο και

Για δοθέν $\varepsilon > 0$

$$\{x: |f(x) - g(x)| > 2\varepsilon\} \subset \{x: |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \cup \{x: |g(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

οπότε

$$\mu\,(\{x: |f(x) - g(x)| > 2\varepsilon\}) = 0$$

άρα $f = g$ σχεδόν παντού.

(iii) Η σύγκλιση κατά μέτρο **δεν** συνεπάγεται την σύγκλιση σχεδόν παντού.
Για παράδειγμα, έστω λ μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε, την ακολουθία των διαστημάτων $[0, 1]$, $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right)$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\left[\frac{3}{4}, 1\right)$, ...
Αν η f_n είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του n-οστού όρου της ακολουθίας η $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ κατά μέτρο αλλά η $f_n(x)$ αποκλίνει, $\forall\, x \in [0, 1)$.

(iv) (α) Το θεώρημα του Egoroff **δεν** ισχύει αν $\mu(X) = \infty$. Για παράδειγμα η $f(x) = \mathscr{X}_{(n, \infty)} \to 0$, $n \to \infty$ αλλά η $f(x)$ **δεν** συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα ως προς το μέτρο Lebesgue.

(β) Έστω $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \mathscr{M}_{\lambda^*}$ και $\mu = \lambda$, $f_n = \mathscr{X}_{[n, n+1]}$, $f = 0$.
Η $f_n(x) \to f(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}: |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1\}) = \lambda(\{x \in \mathbb{R}: |\mathscr{X}_{[n, n+1]}(x)| \geqslant 1\}) =$$
$$= \lambda([n, n+1]) = 1 \not\to 0$$

Άρα η $f_n \overset{\mu}{\not\to} f$ κατά μέτρο.

(v) Συνοπτικά έχομε τα εξής

(α) Η σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την σχεδόν παντού σύγκλιση (πρβλ. 6.4.5).

(β) Αν $\mu(X) < +\infty$, η σχεδόν παντού σύγκλιση επάγεται την σύγκλιση «κατά μέτρο» (πρβλ. Θεώρημα Egoroff, 6.4.6).

(γ) Η σύγκλιση κατά μέτρο **δεν** συνεπάγεται την σχεδόν παντού σύγκλιση, (πρβλ. 6.4.7(iii)).

(δ) Η σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται στην «κατά μέτρο» σύγκλιση, (πρβλ. 6.4.7(i)), αλλά η σύγκλιση «κατά μέτρο» δεν συνεπάγεται την σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση (πρβλ. και 6.4.7(iii)).

Θα αποδείξουμε την εξής

Πρόταση 6.4.7. Έστω (f_n) ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων και f μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, αν η $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ σχεδόν ομοιόμορφα η $f_n \xrightarrow[\sigma.\pi.]{\mu} f$ σχεδόν παντού και κατά μέτρο.

Πριν από την πρόταση διατυπώνομε και αποδεικνύομε το ακόλουθο

Λήμμα. Έστω (f_n) ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων και f μετρήσιμη συνάρτηση. Η $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $(C_k) \downarrow$, $C_k \in \mathscr{A}$: $\mu(C_k) \to 0$ και $f_n \xrightarrow{u} f \,|\, X \setminus C_k$, ομοιόμορφα.

Απόδ.: Έστω ότι η $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Τότε $\forall \ k \in \mathbb{N}$, $\exists \ B_k \in \mathscr{A}$:

$$\mu(B_k) < \frac{1}{2^k} \text{ και } f_n \to f \mid X \setminus B_k, \text{ ομοιόμορφα.}$$

Θέτομε, $C_k = \bigcup_{k=i}^{\infty} B_i$, $k = 1, 2, \ldots$

Για $k = 1$ $C_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$k = 2$ $C_2 = \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i$

....

Δηλαδή $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ και επομένως,

$$\mu(C_k) \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \mu(B_i) < \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$$

Η $f_n \xrightarrow{u} f$ ομοιόμορφα $\mid X \setminus C_k$ γιατί

$$X \setminus C_k \subset X \setminus B_k$$

αντίστροφα, έστω ότι $\exists\ (C_k)_{k=1}^{\infty}$:

$$(C_k)\downarrow,\ C_k \in \mathscr{A}\ \ \mu(C_k) \to 0 \text{ και η } \quad f_n \xrightarrow{u} f \mid X \setminus C_k$$

αν $\varepsilon > 0$ αφού $\mu(C_k) \to 0\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N}$: $\mu(C_{k_0}) < \varepsilon$. Για $B = C_{k_0}$ έχομε $f_n \to f \mid X \setminus B$, $\mu(B) < \varepsilon$ επομένως η $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Απόδειξη της Προτάσεως. Αν η $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα $\exists\ (C_k)$: $(C_k)\downarrow$, $C_k \in \mathscr{A}$ και $\mu(C_k) \to 0$ και $f_n \xrightarrow{u} f \mid X \setminus C_k$.

Θέτομε, $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Τότε,

$$\mu(C) \leqslant \mu(C_k) \to 0 \quad \text{άρα} \quad \mu(C) = 0$$

Η $f_n \to f$ κατά σημείο στην $\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus C_k) = X \setminus C$ άρα η $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Τώρα θα δείξωμε ότι η $f_n \xrightarrow{\mu} f$ κατά μέτρο.

Θέτομε, $A_n^{\varepsilon} = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ για $\forall\, n = 1, 2, \dots$ και $\varepsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι $\mu(A_n^{\varepsilon}) \to 0$. Έστω $\delta > 0$. Αφού $\mu(C_k) \to 0$ $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $\mu(C_{k_0}) < \delta$.
Αφού η $f_n \to f$ ομοιόμορφα $|\, X \setminus C_{k_0} \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in X \setminus C_{k_0}$.
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall\, n > n_0$ $A_n^{\varepsilon} \cap (X \setminus C_{k_0}) = \varnothing$, δηλαδή,

$$A_n^{\varepsilon} \subset C_{k_0} \Rightarrow \mu(A_n^{\varepsilon}) \leqslant \mu(C_{k_0}) < \delta \quad \forall\, n \geqslant n_0$$

και άρα $\mu(A_n) \to 0$ άρα η $f_n \xrightarrow{\mu} f$, ως προς το μέτρο.

Θεώρημα 6.4.8. Αν η $f_n \xrightarrow{\mu} f$, ως προς το μέτρο μ, και η $g_n \xrightarrow{\mu} g$, $c \in \mathbb{R}$, και το Α είναι μετρήσιμο σύνολο, τότε:

(1) $cf_n \xrightarrow{\mu} cf$, ως προς το μέτρο μ.

(2) $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$ » »

(3) $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$ » »

(4) $f_n \vee g_n \xrightarrow{\mu} f \vee g$ » »

$f_n \wedge g_n \xrightarrow{\mu} f \wedge g$ » »

(5) $f_n^+ \xrightarrow{\mu} f^+$ » »

$f_n^- \xrightarrow{\mu} f^-$ » »

(6) $\mathcal{X}_A f_n \xrightarrow{\mu} \mathcal{X}_A f$ » »

Απόδ.: (1) Αν $c = 0$ προφανώς, αν $c \neq 0$

$$\{x: |cf_n(x) - cf(x)| \geqslant \varepsilon\} = \left\{ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{|c|} \right\}$$

(2) Έστω $h_n = f_n + g_n$ και $h = f + g$, τότε,

$$|h_n(x) - h(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

$$\{x: |h_n(x) - h(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{ x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ x: |g_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

(3) $||f_n(x)| - |f(x)|| \leqslant |f_n(x) - f(x)|$

(4) Προφανώς από την (1) και (3).

(5) Προφανώς από την (4).

(6) Οι συναρτήσεις του (6) είναι μετρήσιμες και

$$|\mathscr{X}_A f_n - \mathscr{X}_A f| = \mathscr{X}_A |f_n - f| \leqslant |f_n - f|.$$

Ορισμός 6.4.9. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_1, f_2, \ldots$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δηλαδή, οι $f, f_1, f_2, \ldots$ ανήκουν στον $L(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. Τότε η $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ **συγκλίνει στην f «ως προς το μέσον» (in mean)** αν

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Πρόταση 6.4.10. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_1, f_2, \ldots$ συναρτήσεις που ανήκουν στον $L(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. Αν η $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει στην f «ως προς το μέσον» τότε η f_n συγκλίνει στην f ως προς το μέτρο μ.

Πριν την απόδειξη της προτάσεως διατυπώνομε και αποδεικνύομε την ακόλουθη,

Ανισότητα Chebyshev, (1821 - 1894)

Αν η $f \geqslant 0$ και ολοκληρώσιμη επί του $A \in \mathscr{A}$ τότε, αν $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x \in A : f(x) \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_A f(x)\,d\mu,$$

Απόδ.: Έστω $A' = \{x \in A: f(x) \geqslant \varepsilon\}$

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_{A'} f(x)\,d\mu + \int_{A\setminus A'} f(x)\,d\mu \geqslant \int_{A'} f(x)\,d\mu \geqslant \varepsilon\mu(A')$$

$$\int_A f(x)\,d\mu \geqslant \varepsilon\mu(\{x \in A : f(x) \geqslant \varepsilon\}) \text{ ή}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_A f(x)\,d\mu \geqslant \mu(\{x \in A : f(x) \geqslant \varepsilon\}).$$

Απόδειξη της 6.4.10. Προφανώς από την ανισότητα Chebyshev

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \frac{1}{\varepsilon}\int |f_n(x) - f(x)|\,d\mu$$

Η σύγκλιση «ως προς το μέσο» **δεν** συνεπάγεται την σύγκλιση «σχεδόν παντού». Αν η $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει στην f «ως προς το μέσον» τότε έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην f σχεδόν παντού.

Η σύγκλιση «σχεδόν παντού» και η σύγκλιση «ως προς το μέτρο» **δεν** συνεπάγονται την σύγκλιση «ως προς το μέσον».

Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ χώρος μέτρου Lebesgue, και (f_n) ακολουθία:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

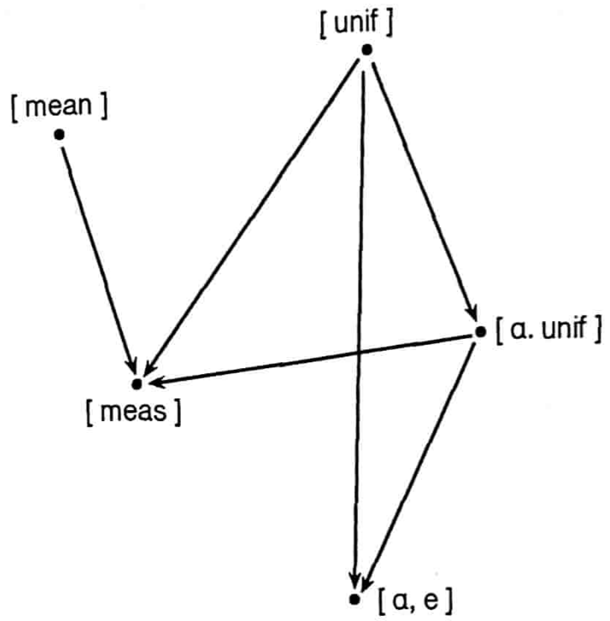
Τότε, η $f_n(x) \xrightarrow[\mu]{\sigma.\pi.} 0$ «σχεδόν παντού» και ως «προς το μέτρο».

Αλλά,

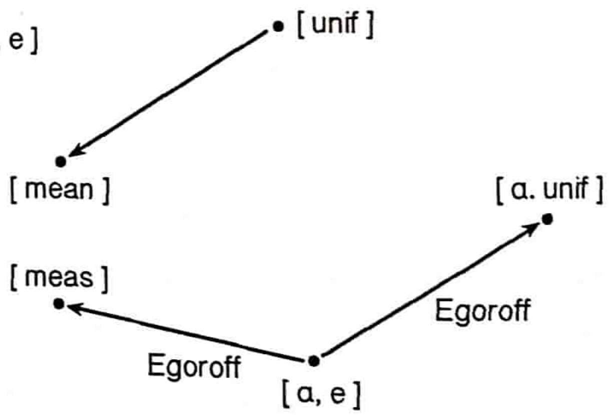
$$\int |f_n - 0|\,d\mu = 1.$$

Όλα τα προηγούμενα θεωρήματα συγκλίσεως που αναφέραμε συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα

[unif] = ομαλή σύγκλιση
[a.unif] = σχεδόν ομαλή σύγκλιση
[mean] = ως προς το μέσον
[meas] = ως προς το μέτρο
[a. e] = σχεδόν παντού



Αν μ(X) < +∞ ⇒



Αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ορίζομε,

$$d\,(f, g) \underset{\text{ορσ.}}{=} \int |f - g|\, d\mu$$

Η απεικόνιση d είναι «απόσταση» με τις ακόλουθες ιδιότητες,

(1) $d\,(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ σχεδόν παντού
(2) $d\,(f, g) = d\,(g, f)$
(3) $d\,(f, h) \leqslant d\,(f, g) + d\,(g, h)$

Παρατηρούμε ότι

$$d(f, g) = d(f - g, 0), \qquad d(f + h, g + h) = d(f, g)$$

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος **πεπερασμένου μέτρου**, $\mu(X) < +\infty$. Για παράδειγμα έστω ότι είναι χώρος μέτρων πιθανότητος, $\mu(X) = 1$.

Έστω $M(X, \mathscr{A}, \mu)$ ο χώρος όλων των $\mathscr{A}$-μετρησίμων συναρτήσεων επί του X. Ταυτίζωμε, δύο συναρτήσεις αν αυτές είναι ίσες σχεδόν παντού.

Για $f, g \in M(X, \mathscr{A}, \mu)$, θέτομε,

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, d\mu$$

Πρόταση 6.4.11. Έστω $E_n = \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$

$$\lim_{n \to \infty} d(f_n, g) = 0 \Leftrightarrow \mu(E_n) \to 0 \text{ όταν } n \to \infty.$$

Δηλαδή, η ακολουθία συναρτήσεων «συγκλίνει κατά μέτρο» $\Leftrightarrow$ $d(f_n, g) \to 0$ αν $n \to \infty$.

Απόδ.: Επειδή η $\left.\dfrac{t}{1+t}\right|(-1, +\infty)$ είναι αύξουσα,

$$d(f_n, g) \geqslant \int_{E_n} \frac{|f_n - g|}{1 + |f_n - g|}\, d\mu \geqslant \int_{E_n} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\, d\mu = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\, \mu(E_n)$$

Αν $d(f_n, g) \to 0$ $n \to \infty \Rightarrow \mu(E_n) \to 0$ $n \to \infty$ οπότε $f_n \xrightarrow{\mu} g$ (κατά μέτρο).

Τώρα, αν $\mu(E_n) \to 0$, $n \to \infty$ έχομε,

$$d(f_n, g) = \int_{E_n} \frac{|f_n - g|}{1 + |f_n - g|}\, d\mu + \int_{E_n^c} \frac{|f_n - g|}{1 + |f_n - g|}\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E_n} 1\, d\mu + \int_{E_n^c} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\, d\mu = \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\, \mu(X \setminus E_n) < \mu(E_n) + \varepsilon\mu(X)$$

Επειδή, $\mu(E_n) \to 0$ $n \to \infty$ και ο ε είναι αυθαίρετα μικρός αριθμός ή

$$d(f_n, g) \to 0 \quad \text{όταν} \quad n \to \infty.$$

Θεώρημα 6.4.12. Έστω f_n, f, g_n, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $c \in \mathbb{R}$, A μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτομε ότι η $f_n \to f$ και η $g_n \to g$ συγκλίνουν «ως προς το μέσον».

Τότε,
(1) $cf_n \to cf$ «ως προς το μέσον»
(2) $f_n + g_n \to f + g$ » »
(3) $|f_n| \to |f|$ » »
(4) $f_n \vee g_n \to f \vee g$ » »
(5) $f_n^+ \to f^+$ » »
$f_n^- \to f^-$ » »
(6) $\mathcal{X}_A f_n \to \mathcal{X}_A f$ » »

Απόδ.:

(1) $d(cf_n, cf) = \int |cf_n - cf| \, d\mu = |c| \, d(f_n, f)$.

(2) $$d(f_n + g_n, f + g) \leqslant d(f_n + g_n, f + g_n) + d(f + g_n, f + g) = \\ = d(f_n, f) + d(g_n, g)$$

(3) Ολοκληρώνομε την ανισότητα

$$||f_n| - |f|| \leqslant |f_n - f|$$

και έχομε

$$d(|f_n|, |f|) \leqslant d(f_n, f)$$

(4) Προφανώς από τα (1) και (3).

(5) Ειδική περίπτωση του (4).

(6) Ολοκληρώνομε την σχέση,

$$|\mathcal{X}_A f_n - \mathcal{X}_A f| = \mathcal{X}_A |f_n - f| \leqslant |f_n - f|$$

και έχομε,

$$d(\mathcal{X}_A f_n, \mathcal{X}_A f) \leqslant d(f_n, f)$$

Πρόταση 6.4.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου. Υποθέτομε, ότι οι ακολουθίες των μετρησίμων συναρτήσεων (f_n) και (g_n) συγκλίνουν στις μετρήσιμες συναρτήσεις f, g αντίστοιχα, ως προς το μέτρο μ. Δηλαδή

$$\text{αν η } f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{και η} \quad g_n \xrightarrow{\mu} g$$

Τότε, η $$f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $\mu^*(X) = \infty$.

Απόδειξη: Αν $f_n g_n \overset{\mu}{\not\longrightarrow} fg$ $\exists$ $\varepsilon, \delta > 0$ και κάποια υπακολουθία της $f_n g_n$ (που συμβολίζομε με $f_n g_n$):

$$(*) \quad \mu(\{x \in X : |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \delta \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(πρβλ. 6.4.1).

Από το θεώρημα F. Riesz (6.4.2) υπάρχει υπακολουθία $f_{k_n} g_{k_n}$:

$$f_{k_n} g_{k_n} \to fg \qquad \text{σχ. παντού}$$

Αν η $f_{k_n} g_{k_n} \to fg$ σχεδόν παντού από το θεώρημα Egoroff (6.4.6),

η $$f_{k_n} g_{k_n} \xrightarrow{\mu} fg$$

Δηλαδή η σχέση (*) είναι άτοπη άρα

$$f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$$

Τώρα, αν $\mu(X) = \infty$ το συμπέρασμα της προτάσεως δεν ισχύει. Ας υποθέσωμε ότι $X = (0, +\infty)$ με μέτρο, το μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x}{n}} \quad \text{και} \quad f(x) = x^2$$

το $$\lim_{n \to \infty} \lambda\left(\left\{ x \in X : \left| x^2 - \sqrt{x^4 + \frac{x}{n}} \right| \geqslant \delta \right\}\right) = 0$$

το $$\lim_{n \to \infty} \lambda\left(\left\{ x \in X : \left| x^4 - \left(x^4 + \frac{x}{n}\right) \right| \geqslant \delta \right\}\right) \not< \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

άρα η $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ αλλά η $f_n^2 \overset{\lambda}{\not\longrightarrow} f_2$.

6.5 Θεώρημα Radon - Nikodym

Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ σ - πεπερασμένος χώρος μέτρου και f ολοκληρώσιμη συνάρτηση επί του X. Έστω

$$\nu: \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}: \nu(B) = \int_B f\,d\mu, \ \forall B \in \mathcal{B}$$

Ας υποθέσωμε ότι η $f \geqslant 0$. Τότε,

(i) $\nu(B) \geqslant 0 \ \ \forall B \in \mathcal{B}$

(ii) $\nu(\varnothing) = 0$.

Αν $(B_k)_{k=1}^{+\infty}$ είναι ακολουθία ξένων μετρησίμων συνόλων, τότε,

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)$$

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \int_{\bigcup_k B_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) \ \ \text{(πρβλ. 5.4.1)}$$

Δηλαδή, η συνολοσυνάρτηση ν **είναι μέτρο επί του** $\mathcal{B}$. Επειδή,

$$\nu(X) = \int_X f\,d\mu < +\infty$$

εξ' υποθέσεως, το ν είναι **σ - πεπερασμένο** μέτρο (πρβλ. 3.1.5).

$$\text{Αν } \mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = \int_B f\,d\mu = 0$$

Τότε, το ν λέγεται **κατώτερο** (inferior) ως προς το μ ή **«απολύτως συνεχές» (absolutely continuous)** ως προς το μ και συμβολίζεται με

$$\nu \ll \mu$$

Διατυπώνομε αναλυτικώτερα τον σχετικό

Ορισμό 6.5.1. (i) Έστωσαν μ_1 και μ_2 δύο μέτρα επί του $(X, \mathscr{B})$. Το μ_1 είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ_2 αν $\Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{B}$: $\mu_2(B) = 0 \Rightarrow \mu_1(B) = 0$. Δηλαδή το μ_1 είναι κατώτερο του μ_2, $\mu_1 << \mu_2$ αν όλα τα μηδενοσύνολα για το μ_2 είναι επίσης μηδενοσύνολα για το μ_1.

(ii) Δύο μέτρα μ_1 και μ_2 επί του $(X, \mathscr{B})$ λέγονται **ισοδύναμα (equivalent)** $\Leftrightarrow$ αν και μόνο αν έχουν τα ίδια μηδενοσύνολα.

Παράδειγμα ισοδυνάμων μέτρων

Αν $f > 0$ και $v(B) = \int_B f\, d\mu = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$ δηλαδή, αν η f είναι θετική σχεδόν παντού τα δύο μέτρα είναι ισοδύναμα (γιατί θα έχουν ακριβώς τα ίδια μηδενοσύνολα).

Ερώτημα: Δοθέντος ενός μέτρου μ επί του $(X, \mathscr{B})$ είναι δυνατόν να παραχθεί κατώτερο μέτρο v ολοκληρώνοντας κάποια ολοκληρώσιμη συνάρτηση επί του X ως προς το μ;

Η απάντηση είναι το **θεώρημα Radon - Nikodym**.

6.5.2. Αν $(X, \mathscr{A})$ χώρος μέτρου, $E \in \mathscr{A}$, μ, μέτρο επί του $(X, \mathscr{A})$ ορίζομε

$$v(E) \underset{\text{ορσ.}}{=} \int_E f\, d\mu$$

Η συνολοσυνάρτηση v είναι αριθμήσιμα προσθετική και επομένως μέτρο. Το μέτρο v θα είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη. Επειδή το προηγούμενο ολοκλήρωμα επί ενός συνόλου μ-μέτρου 0 είναι 0 έχομε ότι το μέτρο v είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ.

Θεώρημα 6.5.3. (i) Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και v μέτρο ορισμένο επί του $\mathscr{A}$, απολύτως συνεχές ως προς το μ, $v << \mu$. Τότε, υπάρχει μή αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση, f:

$$\forall E \in \mathscr{A} \qquad v(E) \underset{\text{ορσ.}}{=} \int_E f\, d\mu$$

Η f είναι μοναδική, (δηλαδή αν g είναι κάποια μετρήσιμη συνάρτηση που πληροί την προηγούμενη ιδιότητα, f = g μ-σχεδόν παντού).

(ii) Αν τα ν και μ είναι ισοδύναμα τότε η f $\geqslant$ 0 σχεδόν παντού και

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{f}\, d\nu, \quad E \in \mathscr{A}$$

Αν τα μ και ν είναι πεπερασμένα οι f και $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμες.

6.5.4. (i) Έστω (X, $\mathscr{A}$) χώρος μέτρου και μ και ν σ-πεπερασμένα θετικά μέτρα επί του (X, $\mathscr{A}$). Υποθέτομε ότι ν << μ. Μια $\mathscr{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση g επί του X που ικανοποιεί την σχέση

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu, \quad \forall A \in \mathscr{A}$$

καλείται **παράγωγος Radon - Nikodym** του ν ως προς το μ και ορισμένες φορές συμβολίζεται με $\frac{d\nu}{d\mu}$. Σ' αυτή την περίπτωση η g είναι μή αρνητική.

(ii) Στην περίπτωση που το μέτρο ν είναι σ-πεπερασμένο είναι δυνατόν να βρεθεί μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη f: $\nu(B) = \int_B f\, d\mu$ αλλά η f να μην είναι ολοκληρώσιμη. Το μέτρο ν είναι πεπερασμένο $\Leftrightarrow$ η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα σχετικά με το θεώρημα Radon - Nikodym

Έστω X = {1, 2, ... n ...}, το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων, και $\mathscr{B}$ η κλάση όλων των υποσυνόλων του X.

Έστω (a_k) ακολουθία θετικών αριθμών: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$, (η σειρά συγκλίνει).

Ορίζομε, $\mu: \mathscr{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu(B) = \sum_{k \in B} a_k$

Η συνολοσυνάρτηση μ είναι μέτρο επί του $(X, \mathcal{B})$.

$$\mu(\{n\}) \underset{\text{ορσ.}}{=} a_n, \quad \mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

Τώρα επί του $(X, \mathcal{B})$ ορίζομε ένα μέτρο ν:

$$\nu(B) = \sum_{k \in B} \beta_k, \quad \sum_{k=1} \beta_k < +\infty$$

Τα μέτρα μ και ν είναι ισοδύναμα γιατί το μόνο μηδενοσύνολο είναι το $\varnothing$. Επομένως $\nu << \mu$.

Τότε, από το θεώρημα Radon-Nikodym θα πρέπει να υπάρχει μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f επί του $(X, \mathcal{B}, \mu)$:

$$\nu(B) = \int_B f\, d\mu \underset{\text{ορσ.}}{=} \sum_{k \in B} f(k)\, a_k, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση f επί του $(X, \mathcal{B}, \mu)$:

$$f(k) = \frac{\beta_k}{a_k}$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη γιατί

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|\, a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < +\infty$$

$$\int_B f\, d\mu = \sum_{k \in B} \frac{\beta_k}{a_k} a_k = \sum_{k \in B} \beta_k = \nu(B)$$

Η f είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένη γιατί το μόνο μηδενοσύνολο στον $(X, \mathcal{B}, \mu)$ είναι το $\varnothing$.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym, πρβλ. §15.

7. ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Αν f: [α, β] → ℝ και η f′ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha) \tag{i}$$

Αν f: [α, β] → ℝ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = f(x) \tag{ii}$$

Αν στην θέση του ολοκληρώματος Riemann θέσωμε το ολοκλήρωμα Lebesgue τίθεται το ερώτημα, οι σχέσεις (i) και (ii) εξακολουθούν να ισχύουν;
Η απάντηση είναι ότι η (ii) ισχύει **σχεδόν παντού**, (πρβλ. 7.4.3) ενώ η (i) ισχύει για την κλάση των **απόλυτα** συνεχών συναρτήσεων, (πρβλ. 7.6.9).

7.1 Προτάσεις επί των μονοτόνων συναρτήσεων

Μονότονες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $f(x) \mid x \in [\alpha, \beta]$ λέγεται **μονοτόνως αύξουσα** αν

$$f(x_2) \geqslant f(x_1), \quad \forall\, x_2 \geqslant x_1$$

και **μονοτόνως φθίνουσα** αν

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \quad \forall\, x_2 \geqslant x_1$$

Αν συμβαίνει το πρώτο ή το δεύτερο η f λέγεται **μονότονη**.