Αλγεβρική Τοπολογία

Ασκήσεις

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

Αθήνα,
7 Ιουνίου 2023

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι Πηλίκο

Ορισμός 1. Έστω $\pi: X \to Y$ απεικόνιση πηλίκο και A ένα υποσύνολο του X. Ο **κορεσμός** (saturation) του A είναι η ένωση όλων των νημάτων που τέμνουν το A, δηλαδή είναι το σύνολο

$$\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup_{y \in \pi(A)} \pi^{-1}(y).$$

Το A λέγεται **κορεσμένο** (saturated) αν και μόνο αν $A = \pi^{-1}\pi(A)$.

1. Έστω $\pi: X \to Y$ απεικόνιση πηλίκο και A ένα υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι η π είναι ανοικτή (κλειστή) αν και μόνο αν ο κορεσμός κάθε ανοικτού (κλειστού) υποσυνόλου A του X είναι ανοικτό (κλειστό) υποσύνολο του X.

Υπόδειξη. Η π είναι ανοικτή αν και μόνο αν $\pi(U)$ είναι ανοικτό για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό αν και μόνο αν (π είναι απεικόνιση πηλίκο) $\pi^{-1}\pi(U)$ είναι ανοικτό για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό. ■

2. Δείξτε ότι ο περιορισμός μιας απεικόνισης πηλίκο σε ένα κορεσμένο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο είναι απεικόνιση πηλίκο.

Υπόδειξη. Έστω $\pi: X \to Y$ απεικόνιση πηλίκο και A ένα ανοικτό κορεσμένο υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι $\pi\,|: A \to \pi(A)$ είναι απεικόνιση πηλίκο. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι η σχετική τοπολογία του $\pi(A)$ ταυτίζεται με την επαγόμενη τοπολογία της $\pi|A$. Έστω $U \cap \pi(A)$, όπου $U \subseteq Y$ ανοικτό. Συνεπώς, $\pi|^{-1}(U \cap \pi(A)) = \pi^{-1}(U) \cap A$, όποτ $\pi^{-1}(U)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X.

Αντίστροφα, έστω $U \subseteq \pi(A)$ τέτοιο ώστε $\pi|^{-1}(U) = \pi^{-1}(U) \cap A$ να είναι ανοικτό υποσύνολο του A. Όμως, A είναι ανοικτό, άρα $\pi^{-1}(U)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, δηλαδή U είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. ∎

Ορισμός 2. Ένας τοπολογικός χώρος X του οποίου τα μονοσύνολα είναι κλειστά, λέγεται **κανονικός** (regular) αν για κάθε σημείο $x \in X$ και κάθε κλειστό υποσύνολο B του X που δεν περιέχει το x, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X που περιέχουν το x και το B, αντίστοιχα.

3. (α) Δείξτε ότι αν X είναι κανονικός και το A κλειστό υποσύνολό του, τότε ο χώρος πηλίκο X/A είναι Hausdorff.

(β) Αν επιπροσθέτως ο X είναι φυσιολογικός, τότε και ο X/A είναι φυσιολογικός.

Υπόδειξη. (α) Έστω $[x],[y] \in X/A$ με $[x] \neq [y]$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν $x, y \notin A$, τότε αφού $x \neq y$, υπάρχουν ανοικτά $U, V \subseteq X$ τέτοια ώστε $x \in U, y \in V$ και $U \cap V = U \cap A = V \cap A$ (Αν $U \cap A \neq \varnothing$, τότε παίρνουμε το $U \smallsetminus A$ το οποίο είναι ανοικτό). Τότε παρατηρήστε ότι $\pi(U), \pi(V)$ είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X/A όπου $[x] \in \pi(U)$ και $[y] \in \pi(V)$.
- Έστω ότι $y \in A$ (και προφανώς $x \notin A$). Τότε, υπάρχουν U, V ανοικτά και ξένα, τέτοια ώστε $x \in U$ και $A \subseteq V$. Τότε $\pi(U), \pi(V)$ ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X/A (το $\pi(U)$ ανοικτό όπως πριν και αφού $G = G \smallsetminus A \cup A$, τότε $\pi(G) = \pi(G \smallsetminus A) \cup \{[y]\}$ επομένως $\pi^{-1}\pi(G) = G$ ανοικτό) με $[x] \in \pi(U)$ και $[y] \in \pi(V)$.

(β)

∎

4. Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ συνεχείς απεικονίσεις έτσι ώστε $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(α) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση f είναι απεικόνιση πηλίκο.

(β) Αν επιπλεόν, ο X είναι Hausdorff, τότε και ο Y είναι Hausdorff.

Υπόδειξη. (α) Η f είναι επί, αφού έχει δεξιά αντίστροφο. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ανοικτή. Έστω $U \subseteq Y$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(U) \subseteq X$ ανοικτό. Τότε, $g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U) = U \subseteq Y$ ανοικτό.

(β) Έστω $x \neq y$ στον Y. Η g είναι 1-1 επομένως, $g(x) \neq g(y)$ στον X. Επομένως, υπάρχουν $U, V \subseteq X$ ανοικτά και ξένα τέτοια ώστε $g(x) \in U$ και $g(y) \in V$. Τότε, $g^{-1}(U), g^{-1}(V)$ ανοικτά και ξένα υποσύνολα του Y και $x \in g^{-1}(U),\ y \in g^{-1}(V)$.

■

5. (α) Αποδείξτε ότι $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.

(β) Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{RP}^n$ είναι Hausdorff.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την φυσική προβολή $\pi\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{RP}^1$, όπου ο περιορισμός της $\pi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$ (καταχρηστικός συμβολισμός) είναι συνεχής, επί και ανοικτή. Για να δείξουμε ότι π είναι ανοικτή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $U \subseteq \mathbb{S}^1$ ανοικτό, τότε $\pi^{-1}\pi(U) = U \cup (-U)$, το οποίο είναι ανοικτό, επομένως $\pi(U) \subseteq \mathbb{RP}^1$ είναι ανοικτό [1] Άρα, ο περιορισμός π είναι απεικόνιση πηλίκο τέτοια ώστε $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x \sim y$ ($\sim$ η σχέση ισοδυναμίας $x \sim -x$). Έτσι έχουμε ότι $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1/x \sim -x$. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{S}^1/x \sim -x \cong \mathbb{S}^1$. Αυτό προκύπτει μέσω της απεικόνισης $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ z \mapsto z^2$ (με όμοια μέθοδο με την παραπάνω).

■

6. Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ αν και μόνο αν τα σημεία (x_0, y_0) και (x_1, y_1) ανήκουν σε κάποιο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να περιγραφεί ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο.

Υπόδειξη. Κάθε σημείο (x, y) ανήκει στο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = \|(x, y)\|$, δηλαδή $[(x, y)] = [(0, r)]$. Θα δείξουμε ότι $[0, \infty) \cong \mathbb{R}^2/\sim$. Είναι σαφές ότι $[0, \infty) \cong \{0\} \times [0, \infty)$. Αν $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ η απεικόνιση πηλίκο, τότε ο περιορισμός της στο $\{0\} \times [0, \infty)$ είναι ομοιομορφισμός. ■

7. Έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται στον χώρο $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x = \lambda y$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Ποιός είναι ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο ;

[1] Για κάθε $\mathbb{R}$ - διανυσματικό τοπολογικό χώρο X το $U \subseteq X$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν λU είναι ανοικτό, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση πηλίκο $\pi\colon \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}/\sim$. Ο περιορισμός της π στην $\mathbb{S}^n$ είναι ομοιομορφισμός. ∎

8. Αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $D^n/\partial D^n$ είναι ομοιομορφικός με την σφαίρα $\mathbb{S}^n$.

Ορισμός 3. Έστω $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ η n - διάστατη σφαίρα. Αν $N = (0, 0, \ldots, 1)$ ο βόρειος πόλος, ορίζεται απεικόνιση

$$\sigma\colon \mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, \quad \sigma\left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) = \frac{(x^1, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}.$$

Πρακτικά, αν $\sigma(x) = u$, το σημείο $(u, 0)$ είναι η τομή της ευθείας που ορίζουν τα N, x με τον γραμμικό υπόχωρο, όπου $x^{n+1} = 0$. Η απεικόνιση σ καλείται **στερεογραφική προβολή** από το βόρειο πόλο. Ομοίως ορίζεται και η στερεογραφική προβολή από το νότιο πόλο $S = (0, \ldots, -1)$. Δείξτε ότι $\sigma^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\}$ με

$$\sigma^{-1}\left(u^1, \ldots, u^n\right) = \frac{(2u^1, \ldots, 2u^n, |u|^2 - 1)}{1 + |u|^2}$$

δηλαδή σ είναι ομοιομορφισμός. [2]

Υπόδειξη. Έχουμε ότι $\mathrm{Int}(D^n) \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\}$ (μέσω της στερεογραφική προβολής). Επομένως, υπάρχει ομοιομορφισμός $f\colon \mathrm{Int}(D^n) \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\}$. Από το λήμμα της συγκόλλησης η απεικόνιση $\varphi\colon D^n \to \mathbb{S}^n$ με

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathrm{Int}(D^n) \\ N, & x \in \partial D^n \end{cases}$$

είναι συνεχής. Επίσης είναι επί και κλειστή (D^n είναι συμπαγής και $\mathbb{S}^n$ είναι Hausdorff). Συνεπώς, η φ είναι απεικόνιση πηλίκο που $\varphi(x) = \varphi(y)$ αν και μόνο αν $x \sim y$, όπου $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που επάγεται από την διαμέριση $\partial D^n, \{x\}$ με $x \notin \partial D^n$. Έτσι είναι σαφές ότι $D^n/\partial D^n \cong \mathbb{S}^n$. ∎

9. Έστω $X = \mathbb{S}^1 \times I$ και $A = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$. Να δειχθεί ότι $X/A \cong D^2$.

[2]Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη στερεογραφική προβολή παραπέμπουμε στο βιβλίο του John M. Lee ″Introduction to Smooth Manifold″ σελ. 31.

Υπόδειξη. Έστω $Y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le \|x\| \le 1\right\}$. Θεωρούμε απεικόνιση :

$$\varphi\colon X \to Y, \quad \varphi(x,y,t) = \frac{2-t}{2}(x,y)$$

Η φ είναι ομοιομορφισμός, αφού

$$\varphi^{-1}(a,b) = \left(\frac{a}{\|a,b\|}, \frac{b}{\|a,b\|}, 2 - 2\|a,b\|\right)$$

είναι συνεχής. Τώρα, ορίζουμε απεικόνιση

$$f\colon Y \to D^2, \quad f(x) = 2\left(\|x\| - \frac{1}{2}\right)x.$$

Η f είναι συνεχής. Η f είναι επί. Πράγματι, αναζητούμε αν $y \in D^2$ αναζητούμε $x \in Y$ ώστε $f(x) = y$, δηλαδή $\|y\| = 2(\|x\| - \frac{1}{2})\|x\|$. Επιλύοντας την επαγόμενη 2οβαθμια. έχουμε ότι $\|x\| = \frac{1+\sqrt{1+8\|y\|^2}}{4}$, οπότε αν $\lambda = 2\left(\frac{1+\sqrt{1+8\|y\|^2}}{4} - \frac{1}{2}\right)$ έχουμε ότι για $x = \frac{1}{\lambda}y$ έχουμε ότι $f(x) = y$. Τώρα, η απεικόνιση $\psi = f \circ \varphi$ είναι συνεχής, επί και κλειστή, επομένως ψ είναι απεικόνιση πηλίκο, για την οποία ισχύει $\psi(x) = \psi(y)$ αν και μόνο αν $x \sim y$,όπου $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που επάγεται από την διαμέριση $A, \{x\}$ με $x \notin A$. ∎

Ορισμός 4. Έστω X και Y ξένοι τοπολογικοί χώροι (δηλαδή $X \bigcup Y = X \bigsqcup Y$)), A κλειστό υποσύνολο του X, $f\colon A \to Y$ συνεχής. Συμβολίζουμε με $Z_f = X \cup_f Y$ τον χώρο που προκύπτει από τον Y με την **επισύναψη του X κατά μήκος του A μέσω της** f (ορίζεται σχέση στον $X \bigsqcup Y$ μέσω της διαμέρισης $\{x\}$, $x \in X \setminus A$ και $\{y \cup f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$). Έστω $\pi\colon X \bigcup Y \to X \bigcup_f Y$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο.

10. (α) Αποδείξτε ότι η π ορίζει ένα ομοιομορφισμό από τον Y σε ένα κλειστό υπόχωρο του Z_f.

(β) Η π απεικονίζει ομοιομορφικά το $X \setminus A$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο του Zf.

Υπόδειξη. (α) Είναι σαφές ότι ο περιορισμός της π στον Y επάγει μια απεικόνιση $\pi|\colon Y \to \pi(Y)$ 1-1,επί και συνεχή. Για να δείξουμε ότι π είναι ομοιομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή, και από την Άσκηση 1 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε κορεσμός κλειστού είναι κλειστό. Έστω $\Gamma \subsetneq Y$ κλειστό. Τότε, $\pi^{-1}\pi(\Gamma) = \Gamma \cup f^{-1}(\Gamma)$, επομένως $\pi|^{-1}\pi|(\Gamma) = \Gamma$, το οποίο είναι κλειστό.

(β) Όμοια με το (α)

■

11. Αν ο K είναι συμπαγής τοπολογικός υπόχωρος ενός συμπλέγματος κελιών X, τότε $K \subseteq X^n$, για κάποιο n', όπου με X^n συμβολίζουμε τον n - σκελετό του X.

Υπόδειξη. Αν X είναι πεπερασμένης διάστασης το ζητούμενο είναι άμεσο. Αρκεί να δείξουμε ότι K περιέχεται σε ένωση από πεπερασμένο το πλήθος κελιά. Έστω, προς άτοπο, ότι $K \cap e_a^n \neq \emptyset$, για άπειρα το πλήθος κελιά e_a^n. Έστω $x_a \in K \cap e_a^n$, για κάθε κελί e_a^n που η τομή είναι μη κενή και Y το σύνολο όλων αυτών των x_a. Θα δείξουμε τα ακόλουθα :

1. Y είναι κλειστό υποσύνολο του K.

2. Y είναι διακριτό, δηλαδή κάθε υποσύνολό του είναι κλειστό.

Τότε, οι οικογένεια $\{K \setminus Y) \cup \{x_a\}\}_{x_a \in Y}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K (αφού το $Y \setminus \{x_a\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, άρα κλειστό υποσύνολο του X) και καταλήγουμε σε άτοπο από την συμπάγεια του K. ■

Κεφάλαιο 2

Ομοτοπία και Θεμελιώδης Ομάδα

Ορισμός 5 (τοπολογική ομάδα)**.** Μια **τοπολογική ομάδα** είναι μια ομάδα G εφοδιασμένη με μια τοπολογία ώστε η απεικονίσεις του πολλαπλασιασμού $\mu: G \times G \to G$ και της αντιστροφής $i: G \to G$ που δίνονται από $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $i(g) = g^{-1}$, αντίστοιχα να είναι συνεχείς.

12. Έστω G μια τοπολογική ομάδα και x_0 το ουδέτερο στοιχείο της ομάδος. Αν $f, g \in \pi_1(G, x_0)$, ορίζουμε $f \circ g \in \pi_1(G, x_0)$ ως εξής :

$$f \circ g(s) = f(s)g(s) = \mu\left(f(s), g(s)\right).$$

(α) Δείξτε ότι η πράξη $\circ$ επάγει πράξη ομάδας στο $\pi_1(G, x_0)$, η οποία ταυτίζεται με τον συνήθη πολλαπλασιασμό της θεμελιώδους ομάδας.

(β) Δείξτε ότι η ομάδα $\pi_1(G, x_0)$ είναι αβελιανή.

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε πράξη στο $\pi_1(G, x_0)$ ως εξής $[f] * [g] \coloneqq [f \circ g]$.

- Αρχικά θα δείξουμε ότι η $*$ είναι καλά ορισμένη. Έστω $f \sim^F \tilde{f}$ και $g \sim^G \tilde{g}$ θηλειές στο x_0. Ορίζουμε $H(s,t) = \mu\left(F(s,t), G(s,t)\right)$, η οποία είναι ομοτοπία από την $f \circ g$ στην $\tilde{f} \circ \tilde{g}$, έτσι είναι σαφές ότι $[f \circ g] = [\tilde{f} \circ \tilde{g}]$.
- Από την προσεταιριστικότητα της μ είναι άμεσο ότι $*$ είναι προσεταιριστική.
- Έστω f θηλεία στο x_0. Τότε, έχουμε ότι $f \circ c_{x_0}(s) = \mu(f(s), x_0) = f(s)$. Έτσι είναι σαφές ότι $[f] * [c_{x_0}] = [f]$ και ομοίως δείχνουμε ότι $[c_{x_0}] * [f] = [f]$. Έτσι $[c_{x_0}]$ είναι ουδέτερο στοιχείο ως προς $*$.

- Έστω f θηλεία στο x_0. Τότε, $g = i \circ f$ είναι θηλεία στο x_0 και μάλιστα $[f] * [g] = [g] * [f] = [c_{x_0}]$.
- Θα δείξουμε ότι $[f] * [g] = [f] \circ [g]$, δηλαδή $f \circ g \sim f \cdot g$. Παρατηρούμε ότι $(f \cdot c_{x_0}) \circ (c_{x_0} \cdot g) = f \cdot g$, επομένως ισχύει ότι

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g] = [f \cdot c_{x_0}] * [c_{x_0} \cdot g] = [f] * [g]$$

.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$[f] \cdot [g] = [f] * [g] = [c_{x_0} \cdot f] * [g \cdot c_{x_0}] = [g] \cdot [f].$$

■

13. Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(α) Ο χώρος X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο.

(β) Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.

(γ) Κάθε απεικόνιση $f\colon X \to Y$, για αυθαίρετο χώρο Y, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

(δ) Κάθε απεικόνιση $g\colon Y \to X$, για αυθαίρετο χώρο Y, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

Υπόδειξη. Είναι άμεσο ότι (α) ↔ (β) και ότι (γ) → (β).

- (β) → (γ) : Έστω Y τοπολογικός χώρος και $f\colon X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αφού $\mathrm{id}_X \sim^H c$, όπου $c\colon X \to X$ σταθερή, τότε $f \sim^{f\circ H} f \circ c$.
- (β) → (δ) Έστω Έστω Y τοπολογικός χώρος και $g\colon Y \to X$ συνεχής απεικόνιση. Αφού Αφού $\mathrm{id}_X \sim^H c$, όπου $c\colon X \to X$ σταθερή, τότε ορίζουμε

$$\tilde{H}\colon Y \times I \to X, \quad \tilde{H}(y,t) = H(g(y),t)$$

η οποία είναι μια ομοτοπία από την g σε μια σταθερή απεικόνιση.

- (δ) → (β) Άμεσο.

■

14. Έστω $f\colon \mathbb{S}^n \to Y$ μια (συνεχής) απεικόνιση σε έναν χώρο Y. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(α) Η f είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.

(β) Η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή απεικόνιση $\tilde{f}\colon D^{n+1} \to Y$.

Υπόδειξη.
- (β) → (α) Έστω ότι υπάρχει $\tilde{f}\colon D^{n+1} \to Y$ συνεχής επέκταση της f. Ορίζουμε $\varphi\colon \mathbb{S}^n \times I \to D^{n+1}$ με $\varphi(x,t) = (1-t)x$. Τότε, η απεικόνιση $H \coloneqq \tilde{f} \circ \varphi$ είναι μια ομοτοπία από την f σε μια σταθερή απεικόνιση.

- (α) → (β) Έστω ομοτοπία $H\colon \mathbb{S}^n \times I \to Y$ με $H(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) = c$ σταθερό, για κάθε $x \in \mathbb{S}^n$. Θεωρούμε απεικόνιση $\varphi\colon D^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{S}^n \times I$ με $\varphi(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right)$. Θεωρούμε απεικόνιση $\tilde{f}\colon D^{n+1} \to Y$ με

$$\tilde{f} = \begin{cases} H \circ \varphi(x), & x \in D^{n+1} \smallsetminus \{0\} \\ c, & x = 0 \end{cases}.$$

Η $\tilde{f}$ είναι επέκταση της f και μένει να δείξουμε ότι είναι συνεχής. Έστω $U \subseteq Y$ ανοικτό. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

1. Αν $c \notin U$, τότε $\tilde{f}^{-1}(U) = (H \circ \varphi)^{-1}(U)$ είναι ανοικτό, αφού $H \circ \varphi$ είναι συνεχής.
2. Αν $c \in U$, τότε $\tilde{f}^{-1}(U) = (H \circ \varphi)^{-1}(U) \cup \{0\}$. Αφού $H \circ \varphi$ είναι συνεχής, τότε $(H \circ \varphi)^{-1}(U)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $D^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, δηλαδή υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του D^{n+1}, τέτοιο ώστε $(H \circ \varphi)^{-1}(U) = V \cap D^{n+1} \smallsetminus \{0\} = V \smallsetminus \{0\}$. Άρα, έχουμε ότι $\tilde{f}^{-1}(U) = V \smallsetminus \{0\} \cup \{0\} = V$ και έχουμε το ζητούμενο.

■

15. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, Y τοπολογικός χώρος και $\varphi\colon (A, a_0) \to (Y, y_0)$ συνεχής. Αν υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{R}^n \to Y$ της φ, τότε η φ επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι συμπτύξιμος και $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$ η οποία επάγει την σχέση $\varphi_* = \tilde{\varphi}_* \circ i_*$. ■

Ορισμός 6. Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και $f\colon X \to Y$ συνεχής. Ο **κύλινδρος** M_f της f είναι ο χώρος πηλίκο $(X \times I) \bigsqcup Y / \sim$, όπου $(x,0) \sim f(x)$, για κάθε $x \in X$.

16. (α) Δείξτε ότι ο περιορισμός της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο π σε κάθε ένα από τα $X \times 1$ και Y είναι ομοιομορφισμός.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση (deformation retraction) $r\colon M_f \to \pi(Y)$.

(γ) Κάθε απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων παραγοντοποιείται ως μια εμφύτευση ακολουθούμενη από μια ομοτοπική ισοδυναμία.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο.

(β) Αρκεί να βρούμε ομοτοπία $H\colon M_f \times I \to M_f$ τέτοια ώστε :

- $H(m,0) = m$, για κάθε $m \in M_f$,
- $H([y],t) = [y]$, για κάθε $y \in Y$
- $H(m,1) \in \pi(Y)$, για κάθε $m \in M_f$.

Ορίζουμε $H\colon M_f \times I \to M_f$ ως εξής :

$$H([x,t],s) = [x,(1-t)s], \quad (x,t) \in X \times I,\ s \in I \quad \text{και} \quad H([y],s) = [y], y \in Y.$$

Τότε, αυτή είναι συνεχής και ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες. Προφανώς, η ζητούμενη r ορίζεται ως $r(m) = H(m,1)$.

(γ) Θεωρούμε την εμφύτευση $i\colon X \hookrightarrow M_f$ (λόγω του (α)) . Τότε, αν $\varphi = (\pi|_Y)^{-1} \circ r\colon M_f \to Y$, παρατηρούμε ότι $f = \varphi \circ i$. Θα δείξουμε ότι φ είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Αν $j\colon \pi_Y \hookrightarrow M_f$, τότε παρατηρούμε ότι

$$j \circ r \sim \mathrm{id}_{M_f} \Rightarrow (j \circ \pi_Y) \circ \varphi \sim \mathrm{id}_{M_f}$$

και $\varphi \circ (j \circ \pi_Y) = \mathrm{id}_Y$. Επομένως, έχουμε ότι φ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

■

Ορισμός 7. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο **κώνος** επί του X, CX είναι ο χώρος πηλίκο $X \times I/\sim$, όπου $(x,y) \sim (y,s)$ αν και μόνο αν $(x,t) = (y,s)$ ή $t = s = 1$.

17. Έστω X τοπολογικός χώρος. Αποδείξτε ότι ο CX είναι συμπτύξιμος.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την ομοτοπία $H\colon CX \times I \to CX$ με $H([x,s],t) = [x,(1-t)s]$. ∎

18. Έστω X τοπολογικός χώρος και CX ο κώνος του X. Ταυτίζουμε τον X με τον υπόχωρο $X \times \{0\}$ του κώνου μέσω της εμφύτευσης $X \ni x \mapsto [(x,0)]$. Εστω $f\colon X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής επέκταση $g\colon CX \to Y$ της f.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι η f είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση, δηλαδή υπάρχει ομοτοπία $H\colon X \times I \to X$ με $H(x,0) = x$ και $H(x,1) = c$ σταθερό, για κάθε $x \in X$. Αν $\pi\colon X \times I \to CX$ η συνήθης απεικόνιση πηλίκο, παρατηρούμε ότι η f παραμένει σταθερή στα νήματα της π, επομένως επάγεται επέκταση $g\colon CX \to Y$ που ορίζεται ως εξής : $g([x,t]) = f(H(x,t))$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $g\colon CX \to Y$ συνεχής επέκταση της f. Ορίζουμε $H\colon X \times I \to Y$ ως εξής $H(x,t) = g \circ \pi(x,t) = g([x,t])$, η οποία είναι μια ομοτοπία από την f σε μια σταθερή απεικόνιση. ∎

19. Αποδείξτε ότι $C\mathbb{S}^n \cong D^{n+1}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την εμφύτευση $i\colon \mathbb{S}^n \hookrightarrow D^{n+1}$, η οποία άμεσα επεκτείνεται συνεχώς στην $\mathrm{id}_{D^{n+1}}$. Από την Άσκηση 14, η i είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση μέσω της ομοτοπίας $H(x,t) = (1-t)x$. Από την Άσκηση 18 η i επεκτείνεται σε μια απεικόνιση $g\colon C\mathbb{S}^n \to D^{n+1}$ με $g([x,t]) = (1-t)x$. Θα δείξουμε ότι η g είναι ομοιομορφισμός. Προφανώς, είναι συνεχής, αφού $g \circ \pi = H$ είναι συνεχής και αμφιμονοσήμαντη με αντίστροφη την

$$h\colon D^{n+1} \to C\mathbb{S}^n, \quad h(x) = \begin{cases} \left[\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right], & x \neq 0 \\ [x_0, 1], & x = 0 \end{cases}$$

για κάποιο $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Όμοια με την Άσκηση 14, αποδεικνύεται ότι η h είναι συνεχής και έχουμε το ζητούμενο. ∎

20. Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι, A κλειστό υποσύνολο του X, $f\colon A \to Y$ συνεχής και $Z_f = X \cup_f Y$ ο χώρος που προκύπτει από τον Y με την επισύναψη του X κατά μήκος του A μέσω της f. Αν υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον X στον A, τότε υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον $X \cup_f Y$ στον Y. (εδώ θεωρούμε τον Y ως υπόχωρο του $X \cup_f Y$, αφού γνωρίζουμε ότι εμφυτεύεται μέσω της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο).

Υπόδειξη. ■

Κεφάλαιο 3

Θεώρημα Σταθερού Σημείου

21. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν συστολές $r: X \to A$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $X = \mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^3 \supseteq A \cong \mathbb{S}^1$.

(β) $X = \mathbb{S}^1 \times D^2$, όπου $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ και $A = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ το σύνορο του X.

Υπόδειξη. (α) Αν υπήρχε συστολή $r: X \to A$, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός στις θεμελιώδεις ομάδες θα ήταν επιμορφισμός, δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $r_*: \pi_1(\mathbb{R}^3) = \{1\} \to \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

(β) Αν υπήρχε συστολή $r: X \to A$, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός στις θεμελιώδεις ομάδες θα ήταν επιμορφισμός, δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $r_*: \pi_1(\mathbb{S}^1 \times D^2) = \mathbb{Z} \to \pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν $\ker r_* = n\mathbb{Z}$, για $n > 0$, τότε $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.
- Αν $\ker r_* = 0$, τότε $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο, διότι δύο ελεύθερες αβελιανές είναι ισόμορφες αν και μόνο αν έχουν την ίδια τάξη.

■

Ορισμός 8. Λέμε ότι ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου αν για κάθε συνεχή $f: X \to X$ υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. σταθερού σημείου, τότε:

22. Αποδείξτε ότι αν ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε :

(α) Αν A υπόχωρος του X για τον οποίο υπάρχει συστολή $r: X \to A$, τότε ο A έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

(β) Κάθε χώρος Y ομοιομορφικός με τον X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Υπόδειξη. (α) Έστω $r\colon X \to A$ συστολή και $f\colon A \to A$ συνεχής. Τότε, η απεικόνισης $i \circ f \circ r\colon X \to X$ είναι συνεχής, όπου i η συνήθης ένθεση. Συνεπώς, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f(r(x_0) = x_0 \in A$ και αφού r είναι περιστολή, τότε $r(x_0) = x_0 \in A$. Άρα, έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $f\colon Y \to X$ ομοιομορφισμός και $g\colon Y \to Y$ συνεχής. Τότε, η απεικόνιοη $h = f \circ g \circ f^{-1}$ είναι συνεχής, επομένως υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $g\left(f^{-1}(x_0)\right) = f^{-1}(x_0)$ και έχουμε το ζητούμενο.

■

23. Έστω $\mathbb{B}^2$ η ανοικτή μοναδιαία μπάλα στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί παράδειγμα συνεχούς απεικονίσεως $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ χωρίς σταθερά σημεία.

Υπόδειξη. Αφού $\mathbb{B}^2$ είναι ομοιομορφική με $\mathbb{R}^2$ (μέσω ενός ομοιομορφισμου φ), τότε κάθε $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ έχει σταθερό σημείο αν και μόνο αν κάθε $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ έχει σταθερό σημείο. Όμως, αν $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = (x+1, y+1)$, τότε f δεν έχει σταθερό σημείο, άρα και η $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ δεν έχει σταθερό σημείο. ■

24. (α) Αποδείξτε ότι η αντιποδική απεικόνιση $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\alpha(x) = -x$ είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. Ιδιαιτέρως, $\deg(\alpha) = 1$.

(β) Κάθε συνεχής $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ τέτοια ώστε $\deg f \neq 1$ έχει σταθερό σημείο.

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε την ομοτοπία $H\colon \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$ με $H\left(e^{2\pi i x}, t\right) = e^{2\pi i(x+t\pi)}$.

(β) Έστω, προς άτοπο, ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$H\colon \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1,\ H(x,t) = \frac{f(x)(1-t) - tx}{\|f(x)(1-t) - tx\|}$$

είναι καλά ορισμένη και ομοτοπία από την $f(x)$ στην αντοποδική α. Από το (α) καταλήγουμε σε άτοπο.

■

25. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $x \in U$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $U \setminus \{x\}$ δεν είναι απλά συνεκτικός.

Υπόδειξη. Αφού U είναι ανοικτό, υπάρχει ένας κύκλος στο εσωτερικό του U με κέντρο το x. Τότε, ο $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον C. Πράγματι, αφού $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ θεωρήστε την ομοτοπία $H(x,t) = ty + \frac{y}{\|y\|}(1-t)$. Επομένως, αν $i\colon C \hookrightarrow U \setminus \{x\}$ και $j\colon U \setminus \{x\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ οι συνήθεις ενθέσεις, τότε η $j \circ i\colon C \to \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ επάγει μονομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες, δηλαδή $(j \circ i)_*\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι μονομορφισμός ομάδων. Από την άλλη, αν υποθέσουμε ότι $U \setminus \{x\}$ είναι απλά συνεκτικός, τότε η i_* είναι τετριμμένη, άρα $(j \circ i)_* = j_* \circ i_*$ είναι τετριμμένη και καταλήγουμε σε άτοπο. ∎

26. Υπολογίστε την θεμελιώδη ομάδα του $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathbb{R}^2$ ως υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ ως εξής : $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Τώρα, θεωρούμε $Y = \{(0,0,x_3,x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, όπου παρατηρούμε ότι ο $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$ περιστέλλεται στον $Y \setminus \{0\}$ μέσω του τύπου $r\colon \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2 \to Y \setminus \{0\}$ με $r(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,x_3,x_4)$. Αφού $Y \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$, τότε έχουμε ότι $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2) = \mathbb{Z}$. ∎

27. Κάθε 3×3 πίνακας με στοιχεία θετικούς πραγματικούς αριθμούς έχει ένα ιδιοδιάνυσμα με θετική ιδιοτιμή.

Υπόδειξη. Έστω $B = \{(v_1, v_2, v_3) \mid v_i \geq 0,\ \|v\| = 1\}$. Παρατηρούμε ότι $B \cong D^2$ (μέσω της (v_1, v_2, v_3)). Επομένως, από το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, έχουμε ότι κάθε συνεχής $f\colon B \to B$ έχει σταθερό σημείο. Θεωρούμε την $f\colon B \to B$ με $f(v) = \frac{Av}{\|Av\|}$. Από την προηγούμενη παρατήρηση υπάρχει $v \in B$ με $Av = (\|Av\|)v$ με $\|Av\| > 0$. Άρα, έχουμε το ζητούμενο. ∎

28. Έστω $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ένα πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζες πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{S}^1$. Δείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p(x)$ στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου (δηλ. $|x| < 1$) ισούται με τον βαθμό της απεικονίσεως $\hat{p}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ με $\hat{p}(x) = \frac{p(x)}{|p(x)|}$.

Υπόδειξη. ∎

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα Seifert - Van Kampen

Ορισμός 9 (τοπολογική πολλαπλότητα)**.** Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ θα λέγεται **(τοπολογική) πολλαπλότητα** διάστασης n αν (ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$) είναι

- Hausdorff
- Δεύτερος αριθμήσιμος
- Τοπικά Ευκλείδειος, δηλαδή για κάθε $x \in X$, υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του x και ομοιομορφισμός $\varphi_U : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Μικραίνοντας το U, μπορούμε να υποθέσουμε στον ορισμό ότι U είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 10 (σφήνα)**.** Έστω X και Y πολλαπλότητες (όχι απαραιτήτως ίδιας διάστασης), $x_0 \in X$ και y_0 . Ορίζουμε την σφήνα τους $X \vee Y$ να είναι ο χώρος που λαμβάνεται από την ξένη ένωση των X και Y ταυτοποιώντας το x_0 με το y_0. Δηλαδή

$$X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0.$$

29. Έστω X και Y πολλαπλότητες (όχι απαραιτήτως ίδιας διάστασης), $x_0 \in X$ και y_0 . Δείξτε ότι

$$\pi_1 \left(X \vee Y, [x_0] \right) = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Υπόδειξη. Έστω $x_1 \neq x_0$ στον X. Το σύνολο $X \setminus \{x_1\}$ είναι μια ανοικτή υποπολλαπλότητα του X, επομένως υπάρχει U ανοικτή περιοχή του $X \setminus \{x_1\}$ (άρα και ανοικτό στον X) με $U \cong \mathbb{R}^n$, επομένως ο U συμπτύσσεται στο x_0, δηλαδή ο χώρος $U \sqcup Y$ περιστέλλεται στο $\{x_0\} \sqcup Y$. Συνεπώς, ο χώρος $\pi(U \sqcup Y)$ περιστέλλεται στον $\pi(Y)$

(ο οποίος είναι ομοιομορφικός με τον Y). Όμοια, υπάρχει V ανοικτή περιοχή του y_0 ώστε $\pi(X \sqcup V)$ να περιστέλλεται στον $\pi(X)$ (ο οποίος είναι ομοιομορφικός με τον X). Τώρα, αν $\tilde{U} = \pi(U \sqcup Y)$ και $\tilde{V} = \pi(X \sqcup V)$, αφού $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ είναι συμπτύξιμος, από το θεώρημα Seifert - Van Kampen έχουμε το ζητούμενο. ■

30. Συμβολίζουμε με $\mathbb{B}^n$ την ανοικτή μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, με $\mathbb{B}^n_a$ την μικρότερη ανοικτή μπάλα ακτίνας $1/2$ και με $\mathbb{S}^n_a$ την σφαίρα ακτίνας $1/2$, δηλαδή το σύνορο της $\mathbb{B}^n_a$.

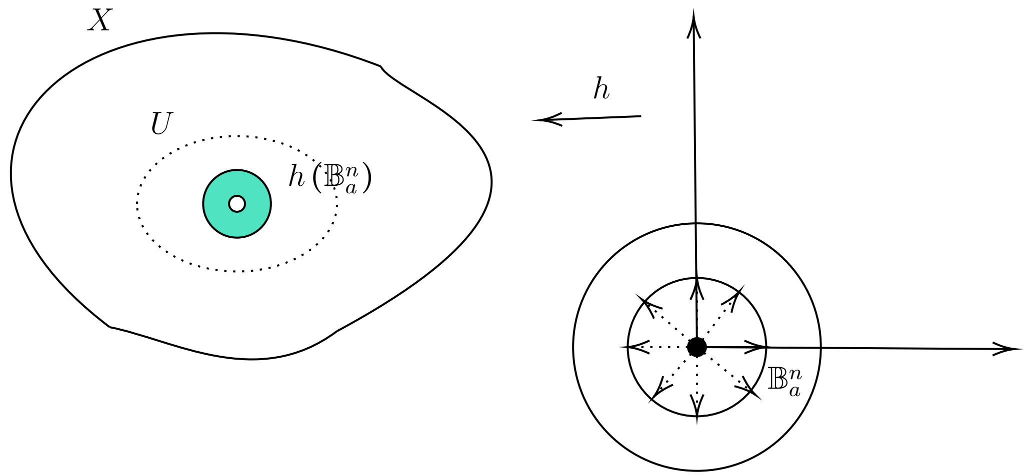
(α) Έστω X συνεκτική πολλαπλότητα διαστάσεων $n \geq 3$ και $h\colon \mathbb{B}^n \to U$ ομοιομορφισμός από την $\mathbb{B}^n$ σε ένα ανοικτό $U \subseteq X$. Να δειχθεί ότι $\pi\left(X \smallsetminus h(\mathbb{B}^n_a)\right) = \pi_1(X)$.

(β) Έστω X_1 και X_2 συνεκτικές πολλαπλότητες ίδιας διαστάσεως $n \geq 3$ και $h_i\colon \mathbb{B}^n \to U_i$ ομοιομορφισμός από την $\mathbb{B}^n$ σε ένα ανοικτό $U_i \subseteq X$, για $i = 1, 2$. Το **συνεκτικό άθροισμα** των X_1 και X_2 είναι ο χώρος πηλίκο

$$X_1 \# X_2 = \left(X_1 \smallsetminus h_1\left(\mathbb{B}^n_a\right)\right) \sqcup \left(X_1 \smallsetminus h_1\left(\mathbb{B}^n_a\right)\right) / h_1(x) \sim h_2(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{S}^n_a.$$

Αποδείξτε ότι $\pi_1\left(X_1 \# X_2\right) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τα ανοικτά $U_1 = U$ και $U_2 = X \smallsetminus \{h(0)\}$. Παρατηρούμε ότι U_1 είναι συμπτύξιμος και $U_1 \cap U_2 = U \smallsetminus \{h(0)\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$, δηλαδή απλά συνεκτικός χώρος. Τώρα, παρατηρούμε ότι ο χώρος $\overline{\mathbb{B}^n_a} \smallsetminus \{0\}$ περιστέλλεται στην $\mathbb{S}^n_a$ αν για κάθε $x \in \overline{\mathbb{B}^n_a} \smallsetminus \{0\}$ συμβολίσουμε με $r(x)$ το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος $(0, x]$ με το σύνορο, η οποία είναι συνεχής. Ορίζουμε ομοτοπία $H\colon U_2 \times I \to U_2$ με $H(x,t) = x$, για κάθε $x \in X \smallsetminus h(\mathbb{B}^n_a)$ και $H(x,t) = h \circ G(x,t)$, όπου G η αντίστοιχη ομοτοπία της παραπάνω περιστολής r. Επομένως, ο U_2 περιστέλλεται στον $X \smallsetminus h(\mathbb{B}^n_a)$ και από το θεώρημα Seifert - Van Kampen έχουμε το ζητούμενο.



(β) Θεωρούμε τα σύνολα $\overline{A} = (X_1 \smallsetminus h_1(\mathbb{B}_a^n)) \sqcup [U_2 \smallsetminus h_2(\mathbb{B}_a^n)]$ και $\overline{B} = [U_1 \smallsetminus h_1(\mathbb{B}_a^n)] \sqcup (X_2 \smallsetminus h_2(\mathbb{B}_a^n))$ και A, B οι εικόνες τους στο πηλίκο, αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι $A \simeq X_1 \smallsetminus h_1(\mathbb{B}_a^n)$, $B \simeq X_2 \smallsetminus h_2(\mathbb{B}_a^n)$ με απλά συνεκτική τομή, άρα από το θεώρημα Seifert - Van Kampen και το (α) έχουμε το ζητούμενο.

■

31. Υπολογίστε την θεμελιώδη ομάδα του χώρου που προκύπτει:

(α) Από τον κύλινδρο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ βγάζοντας ένα σημείο.

(β) Από την σπείρα $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ βγάζοντας δύο σημεία.

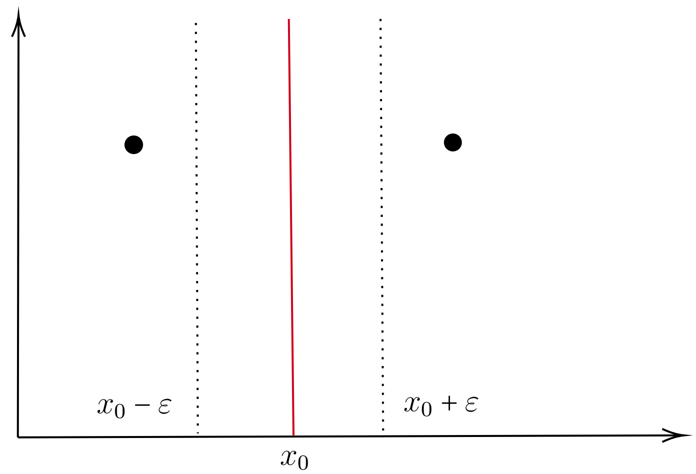
(γ) από το $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας k ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(δ) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας ένα κύκλο.

Υπόδειξη. (α) Ισχύει ότι $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{x_1\}$, επομένως έχουμε ότι $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \smallsetminus \{z\} \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{x_1, x_2\}$. Αρκεί να υπολογίσουμε την $\pi_1(X)$ με $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{x_1, x_2\}$. Αφού $x_1 \neq x_2$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1^1 \neq x_1^1$ και $x_1^2 = x_2^2$. Έστω $x_0 = (x_1^1 + x_2^1)/2$ και διαλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε

$$x_1^1 < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < x_2^1.$$

Θεωρούμε $U = (-\infty, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R} \smallsetminus \{x_1, x_2\} = (-\infty, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R} \smallsetminus \{x_2\}$ και $V = (x_0 - \varepsilon, \infty) \times \mathbb{R} \smallsetminus \{x_1, x_2\} = (x_0 - \varepsilon, \infty) \times \mathbb{R} \smallsetminus \{x_1\}$.

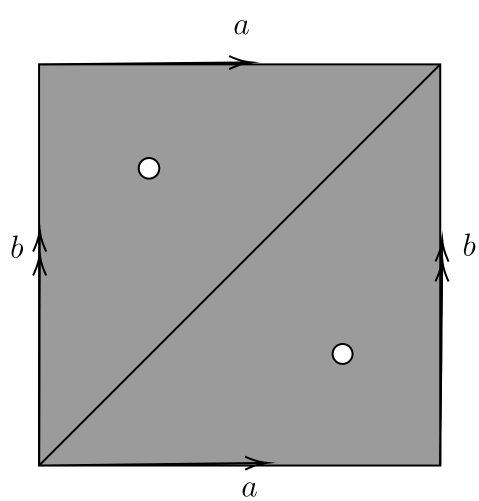


Τα U, V είναι ανοικτή κάλυψη του X με $U \cap V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}$ να είναι συμπτύξιμος χώρος. Τώρα, παρατηρούμε ότι

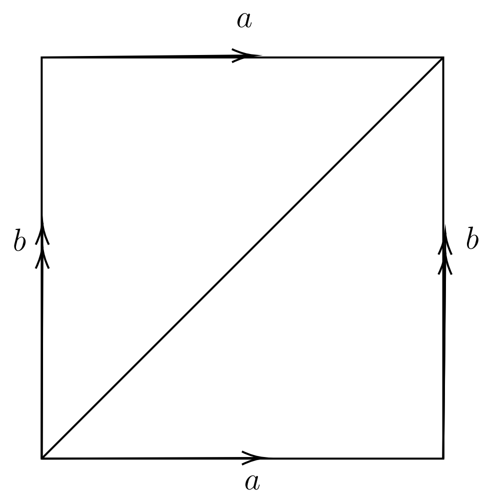
$$U = (-\infty, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R} \smallsetminus \{x_2\} \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{*\} \sim \mathbb{S}^1.$$

Έτσι έχουμε ότι $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ και όμοια δείχνουμε ότι $\pi_1(V) = \mathbb{Z}$. Από το θεώρημα Seifert - Van Kampen ισχύει ότι $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Επαγωγικά και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{x_1, \dots, x_k\}) = F_k$.

(β) Αφαιρούμε κατάλληλα $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$ ώστε να έχουμε την ακόλουθη πολυγωνική παράσταση του $\mathbb{T} \smallsetminus \{x_1, x_2\}$

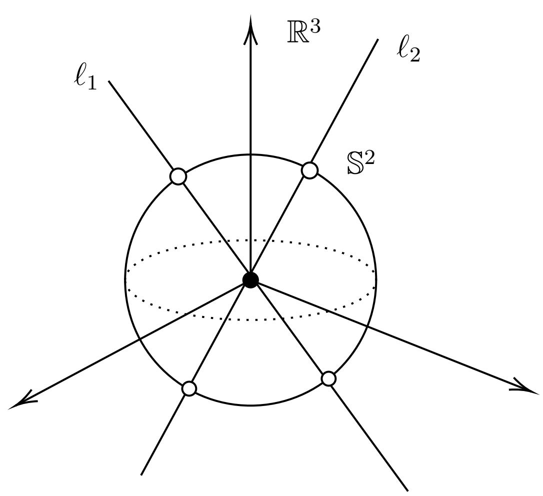


Το ″γεμισμένο″ αριστέρα τρίγωνο χωρίς το σημείο περιστέλλεται στο σύνορό του και ομοίως το ″γεμισμένο″ δεξιά τρίγωνο περιστέλλεται στο σύνορό του. Συνδυάζοντας τις δύο περιστολές προκύπτει ότι ο αρχικό χώρος περιστέλλεται στον ακόλουθο :



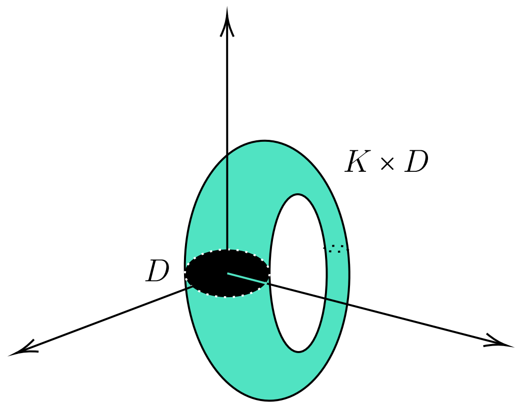
Αφού μέσω της προηγούμενης περιστολής το σύνορο του τετραγώνου παραμένει σταθερό, περνόντας σε ομοτοπία στο πηλίκο, ο δοσμένος χώρος προκύπτει ότι είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με την $S^1 \vee S^1 \vee S^1$, δηλαδή $\pi_1 (\mathbb{T} \smallsetminus \{x_1, x_2\}) = F_3$.

(γ) Αφού $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{\ell_1, \dots, \ell_k\} \simeq \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{x_1, \dots, x_{2k}\}$ αρκεί να υπολογίσουμε την $\pi_1 (\mathbb{S}^2 \smallsetminus \{x_1, \dots, x_n\})$.



Αφού $\mathbb{S}^2 \smallsetminus \{*\} \cong \mathbb{R}^2$, μέσω της στερεογραφικής προβολής, τότε $\mathbb{S}^2 \smallsetminus \{x_1, \dots, x_n\} \cong \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$. Έτσι, από το (α) συμπαιρένουμε ότι $\pi_1 (\mathbb{S}^2 \smallsetminus \{x_1, \dots, x_n\}) = F_{n-1}$.

(δ) Θεωρούμε κύκλο $K = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ και D τον αντίστοιχο δίσκο με σύνορο το K. Θεωρούμε ανοικτά $U = \mathbb{R}^3 \smallsetminus D$ και $V = \mathrm{Int}(K \times D)$.



Μέσω της συνήθους περιστολής $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ σε $\mathbb{S}^2$ συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{R}^3 \setminus D \simeq \mathbb{S}^2$. Επίσης έχουμε ότι V περιστέλλεται σε $\mathbb{S}^1$ και $U \cap V$ ειναι συμπτύξιμος (πρακτικά είναι το εσωτερικό ενός γεμισμένου κυλίνδρου). Από το θεώρημα Seifert - Van Kampen προκύπτει ότι

$$\pi\left(\mathbb{R}^3 \setminus K\right) = \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) = \mathbb{Z}.$$

∎

32. Έστω $x_1, \ldots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι απλά συνεκτικός για $n \geq 3$.

Υπόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι τα σημεία ταυτίζονται από την δεύτερη συντεταγμένη και έπειτα και διαφέρουν στην πρώτη. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο k.

- Αρχικά υποθέτουμε ότι $X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2\}$. Αφού $x_1^1 < x_2^1$ (χ.β.γ.), αν $x_0 = (x_1^1 + x_2^1)/2$, διαλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $x_1^1 < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < x_2^1$ και θεωρούμε ανοικτά

  $$U = (-\infty, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{x_1, x_2\} = (-\infty, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{x_1\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{*\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

  και

  $$V = (-\infty, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{x_1, x_2\} = (x_0 - \varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{x_2\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{*\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

  Αφού $U \cap V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^n$, τότε $U, V, U \cap V$ είναι απλά συνεκτικοί, άρα από το θεώρημα Seifert - Van Kampen έχουμε το ζητούμενο.

- Για $k > 2$ εφαρμόστε την μέθοδο της βάσης και εφαρμόστε την επαγωγική υπόθεση.

∎

Κεφάλαιο 5

Χώροι Επικάλυψης

33. Έστω $p\colon \tilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης.

(α) Αποδείξτε ότι η p είναι τοπικός ομοιομορφισμός (δηλ. κάθε σημείο του $\tilde{X}$ έχει περιοχή U με $p(U)$ ανοικτό και $p|_U\colon U \to p(U)$ ομοιομορφισμός), ανοικτή απεικόνιση και απεικόνιση πηλίκο. Επιπλέον, αν η p είναι 1-1, τότε είναι ομοιομορφισμός.

Υπόδειξη.

(α)

- Αρχικά αν $\tilde{x} \in \tilde{X}$, έστω V η στοιχειώδης περιοχή του $p(\tilde{x})$ και U η αντίστοιχη συνιστώσα που περιέχει το $\tilde{x}$. Τότε, $p|_U\colon U \to V$ ομοιομορφισμός.

- Έστω $x = p(\tilde{x}) \in p(U)$, όπου $U \subseteq \tilde{X}$ ανοικτό. Έστω W μια στοιχειώδης περιοχή του x και V η αντίστοιχη συνιστώσα που περιέχει το $\tilde{x}$. Τότε, $U \cap V \subseteq U, V$, άρα έχουμε ότι $x \in p(U \cap V) \subseteq X$ ανοικτό. Έτσι, είναι άμεσο ότι η p είναι απεικόνιση πηλίκο.

- Αφού p είναι συνεχής, ανοικτή και αμφιμονοσήμαντη είναι ομοιομορφισμός.

(β) Αν για κάθε $x \in X$ το νήμα $p^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο (δηλ. το κάλυμμα είναι πεπερασμένο), τότε η p είναι κλειστή απεικόνιση.

■

34. Έστω $p\colon \tilde{X} \to X$ προβολή επικάλυψης, A υπόχωρος του X και $\tilde{A}$. Δείξτε ότι ο περιορισμός $p\colon \tilde{A} \to A$ είναι επικάλυψη.

Υπόδειξη. Προφανώς $p|_A$ είναι συνεχής και επί. Τώρα, αν $x = p(a) \in p(A)$, τότε υπάρχει p - στοιχειώδης περιοχή U του y με $p^{-1}(U) = \bigsqcup_j V^j$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$(p|_A)^{-1}(U \cap p(A)) = p^{-1}(U \cap p(A)) \cap A = p^{-1}(U) \cap A = \bigsqcup_j (V_j \cap A).$$

Συνεπώς, το $U \cap p(A)$ είναι μια στοιχειώδης περιοχή του x. ∎

35. (α) Έστω $p_2 \colon X_2 \to X_1$ και $p_1 \colon X_1 \to X$ απεικονίσεις επικάλυψης. Αν το νήμα $p^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο για κάθε $x \in X$, τότε η σύνθεση $p_1 \circ p_2 \colon X_2 \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

(β) Έστω $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots$ ο χώρος γινομένου (όχι πεπερασμένου) πλήθους αντιτύπων του $\mathbb{S}^1$, $\tilde{X} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cdots$, $n \geq 1$ και $p_n \colon \tilde{X}_n \to X$ η προβολή επικάλυψης που ορίζεται ως

$$p_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = \left(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \dots, e^{2\pi i x_n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\right).$$

Θεωρούμε την ξένη ένωση $\bigsqcup_n \tilde{X}_n$ και τον χώρο γινόμενο $\mathbb{N}_+ \times X$, όπου $\mathbb{N}+$ είναι εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία. Η απεικόνιση $p \colon \bigsqcup_n \tilde{X}_n \to \mathbb{N}_+ \times X$ που ορίζεται με $p|_{\tilde{X}_n} = (n, p_n) \colon \tilde{X}_n \to \{n\} \times X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης, η $q \colon \mathbb{N}_+ \times X \to X$ με $q(m, x) = x$ είναι επίσης απεικόνιση επικάλυψη, ενώ η σύνθεσή του $q \circ p$ δεν είναι.

Υπόδειξη. (α) Αρχικά θα δείξουμε ότι το κάθε κάλυμμα της p_1 (ως απεικόνιση επικάλυψης) είναι πεπερασμένο. Έστω $x \in X$. Τότε, υπάρχει p_1 - στοιχειώδης περιοχή U_x ώστε $p_1^{-1}(U_x) = \bigsqcup_j V^j$. Τώρα, αφού $|p_1^{-1}(x)| = |J|$ έχουμε ότι $p_1^{-1}(U) = \bigsqcup_{j=1}^n V^{i_j}$. Αν $x_j \in V^{i_j} \cap p^{-1}(x)$, θεωρούμε p_2 - στοιχειώδη περιοχή U_j του x_j που περιέχεται στο V^j. Θα δείξουμε ότι $U = \bigcap_{j=1}^n p_1(U_j)$ είναι $p_1 \circ p_2$ - στοιχειώδης περιοχή του x. Τότε έχουμε ότι

$$p_1 \circ p_2)^{-1}(U) = p_2^{-1}\left[\bigcap_{j=1}^n p_1^{-1}\left(p_1(U_j)\right)\right] = p_2^{-1}\left[\bigsqcup_{j=1}^n \left(U_j \cap \bigcap_{i \neq j} (p_1^j)^{-1}(U_i)\right)\right]$$

$$= \bigsqcup_{j=1}^n p_2^{-1}\left[\left(U_j \cap \bigcap_{i \neq j} (p_1^j)^{-1}(U_i)\right)\right]$$

όπου p_1^j είναι ο περιορισμός $p_1^j = p_1|_{U_j} \colon U_j \to p(U_j)$. Από την τελευταία σχέση και την επιλογή των U_j έχουμε το ζητούμενο.

∎

36. Αποδείξτε ότι αν $n > 1$, κάθε συνεχής απεικόνιση $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνήθη επικάλυψη $p: \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ Αφού $f_*[\pi_1(\mathbb{S}^n)] = \{1\} = p_*[\pi_1(\mathbb{R})]$ από το κριτήριο ανυψώσεως έχουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $\tilde{f}: \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{S}^n \arrow[ul, dashed, "\tilde{f}"] \end{tikzcd}$$

Από την Άσκηση 13 και από την μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος. ■

37. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να αποδείξουμε ότι κάθε περιττή απεικόνιση $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, δηλαδή $f(-z) = -f(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$, έχει περιττό βαθμό.

(α) Αν $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ περιττή, τότε δείξτε ότι υπάρχει $g: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ίδιου βαθμού με την f η οποία να κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "p_2"'] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, dashed, "g"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

όπου $p_2: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ η προβολή επικάλυψης με $p_2(z) = z^2$.

(β) Αν η f έχει άρτιο βαθμό, δείξτε ότι η g ανυψώνεται μέσω $\tilde{g}: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, δηλαδή $g = p_2 \circ \tilde{g}$.

(γ) Δείξτε ότι η f και η $\tilde{g} \circ p_2$ είναι ανυψώσεις της $g \circ p_2$ οι οποίες συμφωνούν στο (1,0) ή στο (-1,0) και καταλήξτε σε άτοπο.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, τότε υπάρχει $\tilde{f}: \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{RP}^1 \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & \mathbb{RP}^1 \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5 και τις αντίστοιχες απεικονίσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην άσκηση αυτή προκύπτει η ζητούμενη g. Αφού $\deg(f \circ h) = \deg(f) \cdot \deg(h)$, για κάθε $f, h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ και $\deg(p_2) = 2$, από την μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι $\deg(f) = \deg(g)$.

(β) Αν $\deg(f)$ είναι άρτιος, τότε $\deg(g)$ είναι άρτιος. Αφού $\deg(g)$ είναι άρτιος παρατηρήστε ότι $g_*(\pi(\mathbb{S}^1, 1)) \subseteq (p_2)_*(\pi(\mathbb{S}^1, 1))$ και από το θεώρημα ύπαρξης ανυψώσεων, υπάρχει $\tilde{g}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "p_2"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

(γ) Από (α),(β) είναι αμεσο ότι $f, \tilde{g} \circ p_2$ είναι ανυψώσεις της $g \circ p_2$ και αφού f είναι περιττή, τότε συμφωνούν είτε στο (1,0) είτε στο (-1,0). Από το κριτήριο ανυψώσεως προκύπτει ότι $f = g \circ p_2$ και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι f είναι περιττή, $g \circ p_2$ είναι άρτια και $f \neq 0$. ∎

38. Κάθε συνεχής απεικόνιση $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f_*\left[\pi_1\left(\mathbb{RP}^2\right)\right] = \{1\}$ και μιμηθείται την Άσκηση 36. ∎

39. Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Μια επικάλυψη $p\colon \tilde{X} \to X$, όπου $\tilde{X}$ κατά τόξα συνεκτικός, λέγεται **αβελιανή** αν είναι κανονική και η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών είναι αβελιανή. Αποδείξτε ότι ο X επιδέχεται μια ('καθολική') αβελιανή επικάλυψη η οποία επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή επικάλυψη του X και είναι μοναδική, ως προς ισομορφισμό επικαλύψεων, με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή να επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή.

Υπόδειξη. Θέτουμε Έστω $x_0 \in X$ και $G = \pi_1(X, x_0)$. Έστω H η παράγωγος υποομάδα της G ($H = G'$), τότε υπάρχει χώρος επικάλυψης $\tilde{X}_H$ και προβολή επικάλυψης $p\colon \tilde{X}_H \to X$ με $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}_H, x_0)$. Τότε, αφού $H \lhd G$ έχουμε ότι p είναι κανονική και $G\left(\tilde{X}_H\right)$, αφού $G\left(\tilde{X}_H\right) \cong G/H = G_{\mathrm{ab}}$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι p είναι αβελιανή. Αφήνεται να δειχθεί ότι $\tilde{X}_H$ είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος.

Τώρα, έστω $\hat{p}\colon \hat{X} \to X$ μια άλλη αβελιανή επικάλυψη. Τότε, έχουμε ότι $G(\hat{X}) \cong G/\hat{p}_*(\pi_1(\hat{X},\hat{x_0}))$ αβελιανή, άρα έχουμε ότι $H \subseteq \hat{p}_*(\pi_1(\hat{X},\hat{x_0}))$. Από το κριτήριο ανύψωσης, υπάρχει $q\colon \tilde{X}_H \to \hat{X}$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[r, "\hat{p}"] & X \\
& \tilde{X}_H \arrow[u, "p"'] \arrow[ul, dashed, "q"]
\end{tikzcd}$$

Η q είναι ομομορφισμός επικαλύψεων, δηλαδή είναι επικάλυψη. Αφήνεται να δειχθεί η μοναδικότητα του $\tilde{X}_H$. ■

40. Έστω H διακριτή υποομάδα μιας συνεκτικής και τοπικά κατά τόξα συνεκτικής τοπολογικής ομάδας G. Αποδείξτε ότι η δράση της H στην G με πολλαπλασιασμό από δεξιά είναι δράση χώρου επικάλυψης υπό την έννοια ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει περιοχή U του x έτσι ώστε $g = 1$, οποτεδήποτε $U \cap U \cdot g \neq \varnothing$, και ως εκ' τούτου η απεικόνιση πηλίκο $G \to G/H$ ορίζει κανονικό χώρο επικάλυψης. Αν επιπλέον G απλά συνεκτική, τότε $\pi_1(G/H,1) \cong H$.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά το ζητούμενο για $x = 1$. Αφού $1 \in H$ και H διακριτή, τότε το $\{1\}$ είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει V ανοικτή περιοχή του 1 στην G, ώστε να ισχύει $V \cap H = \{1\}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mu\colon G \times G \to G$ με $\mu(g,h) = g^{-1}h$, η οποία είναι συνεχής αφού G είναι τοπολογική ομάδα, επομένως αφού $1 \in V$, υπάρχει βασική περιοχή $U_1 \times U_2 \subseteq \mu^{-1}(V)$ που περιέχει το $(1,1)$. Τότε, παρατηρούμε ότι αν $U = U_1 \cap U_2$, τότε $U \times U \subseteq \mu^{-1}(V)$. Άρα, για κάθε $u_1, u_2 \in U$, τότε $u_1^{-1}u_2 \in V$. Τώρα, έστω $g \in H$, ώστε $Ug \cap U \neq \varnothing$. Άρα, υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ ώστε $u_1 g = u_2$, δηλαδή $g = u_1^{-1}u_2 \in V$, άρα από την αρχική υπόθεση $g = 1$.

Τώρα, για τυχόν $x \in G$, παρατηρούμε ότι xU, είναι ανοικτή περιοχή του x και μάλιστα αν $g \in H$ με $(xU)g \cap xU \neq \varnothing$, τότε υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ ώστε $xu_1 g = xu_2$, δηλαδή $g = u_1^{-1}u_2 \in V$, άρα από την αρχική υπόθεση $g = 1$. ■

41. Έστω $\varphi\colon G \to K$ ένας συνεχής επιμορφισμός μεταξύ συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών τοπολογικών ομάδων. Αν η φ είναι ανοικτή (ή κλειστή) και έχει διακριτό πυρήνα, τότε η $\varphi\colon G \to K$ είναι η προβολή κανονικού χώρου επικάλυψης.

Υπόδειξη. Έχουμε ότι φ είναι απεικόνιση πηλίκο και από την μοναδικότητα των χώρων πηλίκο, επάγεται $\tilde{\varphi}\colon G/\ker\varphi \to K$ ομοιομορφισμός, ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & K \\ G/\ker\varphi \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Οι απεικονίσεις $p, \tilde{\varphi}$ είναι προβολές επικάλυψεις (βλέπε Άσκηση 40) και από την Άσκηση 35 η απεικόνιση φ είναι προβολή επικάλυψης. Τώρα, για την κανονικότητα της φ, αρκεί να δείξουμε ότι η ομάδα μετασχηματισμών της p ταυτίζεται με αυτήν της φ και από την κανονικότητα της φ θα έχουμε το ζητούμενο. Πράγματι, αν $\psi \in G(p)$, τότε προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα και έχουμε το ζητούμενο

$$\begin{tikzcd} & K & \\ G \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "p"] & & G/\ker\varphi \arrow[ul, "\tilde{\varphi}"'] \\ & G \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

■

Κεφάλαιο 6

Ομολογία

42. Υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας $H_n(S^2, A)$ του ζεύγους (S^2, A), όπου το A αποτελείται από δύο σημεία του $\mathbb{S}^2$.

Υπόδειξη. Μέσω της βραχείας ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων

$$0 \to S_*(A) \to S_*\left(\mathbb{S}^2\right) \to S_*\left(\mathbb{S}^2, A\right) \to 0.$$

επάγεται μακρά ακριβής ακολουθία στην ομολογία

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(\mathbb{S}^2) \to H_n\left(\mathbb{S}^2, A\right) \to H_{n-1}(A) \to \cdots$$

Ο $A = \{x_1, x_2\}$ αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες $\{x_1\}, \{x_2\}$, επομένως, ισχύει ότι

$$H_n(A) = H_n(x_1) \oplus H_n(x_2) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

και

$$H_n\left(\mathbb{S}^2\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ 0, & n \neq 0, 2 \end{cases}.$$

Για $n \geq 3$ είναι άμεσο ότι $H_n(\mathbb{S}^2, A) = 0$. Για $n = 2$, έχουμε ότι $H_2(\mathbb{S}^2, A) = \mathbb{Z}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι, αφού $\mathbb{S}^2$ κ.τ.σ. και $A \neq \varnothing$, τότε $H_0(\mathbb{S}^2, A) = 0$. Για $n = 1$, έχουμε ότι

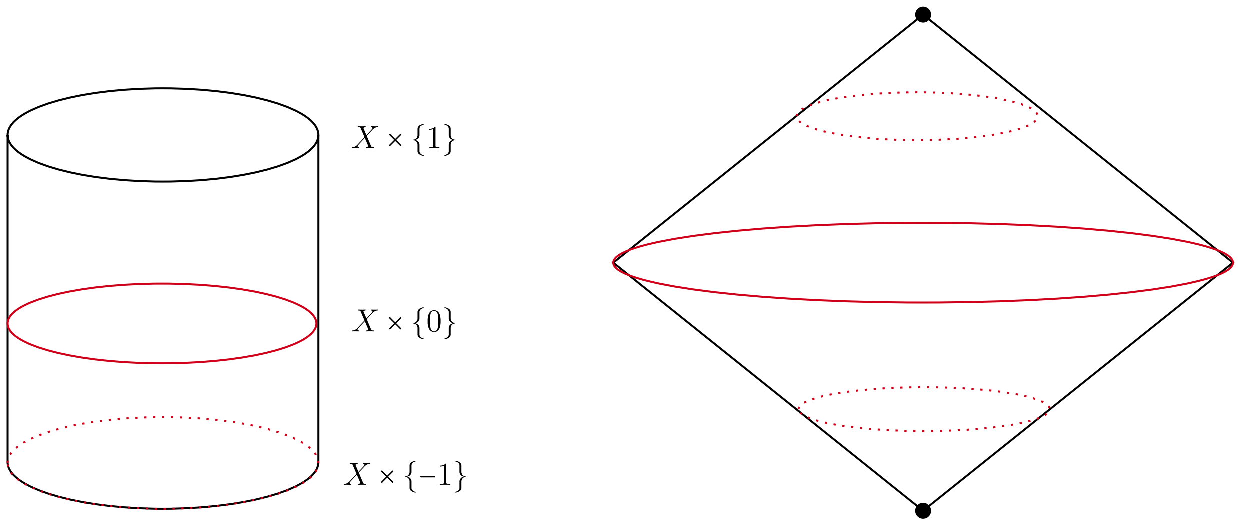
$$\cdots \to H_1(\mathbb{S}^2) = 0 \to H_1\left(\mathbb{S}^2, A\right) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Αφού ε είναι επί, τότε έχουμε ότι $\ker\varepsilon = \mathbb{Z} = \mathrm{Im}\varphi$. Έτσι έχουμε ότι $H_1(\mathbb{S}^2, A) = \mathbb{Z}$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$H_n\left(\mathbb{S}^2, A\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1,2 \\ 0, & n \neq 1,2 \end{cases}.$$

■

Ορισμός 11. Η **ανάρτηση** (suspension) SX ενός τοπολογικού χώρου X είναι ο χώρος πηλίκο που λαμβάνεται από τον $X \times [-1,1]$ θεωρώντας τα υποσύνολα $X \times \{-1\}$ και $X \times \{1\}$ ως μονοσύνολα. Δηλαδή είναι δύο κώνοι του X κολλημένοι μεταξύ τους.



43. Αποδείξτε ότι για κάθε χώρο X για κάθε n υπάρχει ισομορφισμός $\tilde{H}_n(SX) \cong \tilde{H}_{n-1}(X)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $\overline{A} = X \times [-1, 3/4)$ και $\overline{B} = X \times (-3/4, 1]$ ανοικτά στον $X \times [-1,1]$ και A, B οι αντίστοιχες εικόνες τους στο πηλίκο. Παρατηρούμε ότι $\overline{A} \simeq X \times \{-1\}$, $\overline{B} = X \times \{1\}$ και $\overline{A} \cap \overline{B} = X \times (-3/4, 3/4) \simeq X \times \{0\}$. Περνόντας σε ομοτοπίες στο πηλίκο, έχουμε ότι $A \simeq *$, $B \simeq *$ και $A \cap B \simeq X$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Mayer - Vietoris επάγεται μακρά ακριβής ακολουθία στις ομάδες ανηγμένης ομολογίας ως εξής :

$$\cdots \to \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \to \tilde{H}_n(SX) \to \tilde{H}_{n-1}(X) \to \cdots$$

Αφού A, B είναι συμπτύξιμοι, τότε ισχύει ότι $\tilde{H}_n(A), \tilde{H}_n(B) = 0$, για κάθε $n \geq 1$. Συνεπώς, από την παραπάνω σχέση έχουμε το ζητούμενο. ∎

44. Έστω X_1 και X_2 ζεύγος τοπολογικών χώρων και $x_i \in X_i$ σημεία για τα οποία υπάρχουν περιοχές $U_i \subseteq X_i$ οι οποίες περιστέλλονται στα x_i. Αν με $X_1 \vee X_2 = X_1 \sqcup X_2/(x_1 \equiv x_2)$ συμβολίσουμε την σφήνα των X_1 και X_2 που προκύπτει ταυτοποιώντας το x_1 με το x_2, τότε $\tilde{H}_n(X_1 \vee X_2) \cong \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2)$, για κάθε $n \geq 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $\overline{A} = X_1 \sqcup U_2$ και $\overline{B} = U_1 \sqcup X_2$ και A, B τις αντίστοιχες εικόνες των $\overline{A}, \overline{B}$ στο πηλίκο. Από την αρχική υπόθεση $\overline{A} \simeq X_1 \sqcup \{x_2\}$, $\overline{B} \simeq \{x_1\} \sqcup X_2$ και $\overline{A} \cap \overline{B} \simeq \{x_1\} \sqcup \{x_2\}$, όπου περνώντας σε ομοτοπία στο πηλίκο (τα σημεία ταύτισης παραμένουν σταθερά στις αντίστοιχες περιστολές) συμπεραίνουμε ότι $A \simeq X_1$, $B \simeq X_2$ και $A \cap B \simeq *$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Mayer - Vietoris προκύπτει μακρά ακριβής ακολουθία στις ομάδες ανηγμένης ομολογίας :

$$\cdots \to \tilde{H}_n(A \cap B) \to \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2) \to \tilde{H}_n(X_1 \vee X_2) \to \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

Για $n \geq 1$ έχουμε ότι $\tilde{H}_n(A \cap B) = 0$, αφού $A \cap B$ είναι συμπτύξιμος. Άρα, από την παραπάνω ακολουθία είναι άμεσο ότι $\tilde{H}_n(X_1 \vee X_2) \cong \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2)$, για κάθε $n \geq 0$. ∎

45. Έστω $r\colon X \to A$ μια συστολή από έναν χώρο X σε ένα υπόχωρο A. Αποδείξτε ότι $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A)$, για κάθε n.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλεγμάτων

$$0 \to S_*(A) \xrightarrow{i_*} S_*(X) \xrightarrow{\varepsilon_*} S_*(X, A) \to 0$$

επάγει μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(\epsilon)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots.$$

Αφού $r \circ i = \mathrm{id}_A$, όπου i η συνήθης ένθεση $i\colon A \hookrightarrow X$, τότε επάγεται η σχέση $H_n(r) \circ H_n(i) = \mathrm{id}_{H_n(A)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η τελευταία σχέση μας λέει ότι $H_n(i)$ είναι μονομορφισμός και μάλιστα ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία (γιατί ;)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "H_n(i)"] & H_n(X) \arrow[r, "H_n(\varepsilon)"] \arrow[l, bend left, "H_n(r)"] & H_n(X, A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

διασπάται, για κάθε n. Συνεπώς, από ισοδύναμο χαρακτηρισμό διασπώμενων β.α.α., ότι $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A)$, για κάθε n. ∎

46. Δείξτε ότι οι χώροι $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ και $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ έχουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας (σε όλες τις διαστάσεις), όμως τα καθολικά του καλύμματα όχι.

Υπόδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ και $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ έχουνε ισόμορφες ομάδες ομολογίας (κάθε διάστασης) και μάλιστα

$$H_n\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Τώρα, ένα καθολικό κάλυμμα του $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ είναι $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ο οποίος είναι συμπτύξιμος χώρος, άρα έχει ομολογία σημείου. Τώρα, αφού έστω $\tilde{X}$ ένα καθολικό κάλυμμα του $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει εμφύτευση $i\colon \mathbb{S}^2 \hookrightarrow X$ και από το κριτήριο ανυψώσεως υπάρχει $\tilde{i}\colon \mathbb{S}^2 \to \tilde{X}$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^2 \arrow[ur, dashed, "\tilde{i}"] \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}.$$

Η παραπάνω σχέση επάγει ισότητα την ομολογία $H_2(i) = H_2(p) \circ H_2(\tilde{i})$. Αφού $H_2(i)$ δεν είναι τετριμμένη (γιατί ;), προκύπτει και ότι $H_2(\tilde{i}) \neq 0$, επομένως $H_2(\tilde{X}) \neq 0$, επομένως προφανώς οι $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και $\tilde{X}$ δεν έχουν (κάθε διάστασης) ισόμορφες ομάδες ομολογίας. ■