Χώρος των Φάσεων και Χαμιλτονιανές

Σβούρος Στυλιανός

Μάρτιος 2024

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

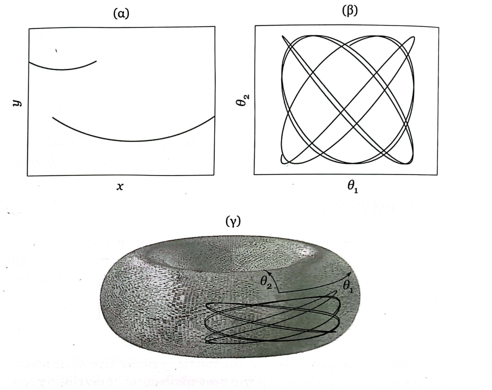
ΕΙΣΑΓΩΓΉ

Όπως ενδέχεται να μας είναι γνωστό, στη νευτώνεια θεώρηση της μηχανικής προσδιορίζουμε τη θέση $\overrightarrow{x}$ ενός σωματιδίου, αν γνωρίζουμε τη δύναμη $\overrightarrow{F}$ που ασκείται σε αυτό και τις αρχικές συνθήκες που το περιγράφουν, ολοκληρώνοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Συνεπώς, για ένα σύστημα N σωματιδίων έχουμε N ξεχωριστές τροχιές στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο.

Στο γενικότερο πλαίσιο της λαγκρανζιανής θεώρησης, δοθέντος αρχικής και τελικής θέσης μόνο, η τροχιά είναι λύση των εξισώσεων $Euler - Lagrange$:

$$\frac{d}{dt}(\frac{dL}{d\dot{q}}) = \frac{dL}{dq}$$

όπου $L = L(q, \dot{q}, t)$ είναι η λαγκρανζιανή συνάρτηση, q η γενικευμένη θέση, $\dot{q}$ η ταχύτητα, $\frac{dL}{d\dot{q}}$ ονομάζεται γενικευμένη ορμή και $\frac{dL}{dq}$ είναι η γενικευμένη δύναμη. Στην θεώρηση αυτή, η κίνηση πραγματοποιείται στον (πιο αφηρημένο) *θεσεογραφικό χώρο*, όπου η τροχιά N σωματιδίων είναι μια καμπύλη σε χώρο 3N διαστάσεων, εάν για παράδειγμα απαιτούνται 3N συντεταγμένες για τον προσδιορισμό της θέσης όλων των σωματιδίων.



Σχήμα 9.1: (α) Οι τροχιές δύο ασύζευκτων επίπεδων εκκρεμών στη νευτώνεια θεώρηση. (β) Η τροχιά του συστήματος των δύο εκκρεμών στο θεσεογραφικό χώρο. Η θέση του συστήματος προσδιορίζεται από τις γωνίες θ_1 και θ_2 που σχηματίζουν τα εκκρεμή με την κατακόρυφο. Η τροχιά για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα είναι η καμπύλη που φαίνεται στο Σχήμα. Ο θεσεογραφικός χώρος είναι το τετράγωνο $-\pi \leq \theta_1 < \pi$, $-\pi \leq \theta_2 < \pi$, του οποίου οι αντίθετες πλευρές ταυτίζονται λόγω της κυκλικότητας του ορισμού των γωνιών. Τέτοια τετράγωνα είναι τοπολογικά ισοδύναμα με έναν απλό τόρο (γ). Ο θεσεογραφικός χώρος μπορεί, λοιπόν, να είναι καμπύλος. Όποια μορφή, όμως, και αν έχει αυτός ο χώρος, η κίνηση στη λαγκρανζιανή θεώρηση δίνεται πάντα από τις ίδιες εξισώσεις, τις εξισώσεις Euler - Lagrange.

(το σχήμα είνα από το βιβλίο 'Θεωρητική Μηχανική', 2η έκδοση, Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτος)

Για να αποφύγουμε την τομή των τροχιών, που οφείλεται στο ότι η εξίσωση $Euler - Lagrange$ είναι β′ τάξης, θα πρέπει για το σύστημα αυτό των N βαθμών ελευθερίας να ορίσουμε ένα χώρο 2N διαστάσεων. Στην λαγκρανζιανή θεώρηση αυτός θα ήταν ο χώρος των θέσεων (q) και των ταχυτήτων $(\dot{q})$. Όμως και τότε η κατασκευή αυτής της μη αυτοτεμνόμενης, πλέον, τροχιάς σε αυτόν το χώρο θα είναι ιδιαίτερα περίπλοκη.

Με αυτήν την παρατήρηση ο $Hamilton$ το 1833 προχώρησε σε μια αναθεώρηση της λαγκρανζιανής μηχανικής και στην ανάπτυξη της χαμιλτονιανής θεώρησης. Σύμφωνα με αυτήν, η τροχιά πλέον εκτυλίσσεται στο χώρο των θέσεων (q) και των γενικευμένων ορμών (p) που ονομάζεται *χώρος των φάσεων*. Πλέον, θέσεις και ορμές είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$. Αυτή η, φαινομενικά απλή, αλλαγή στη θεώρησή μας, κάνει τις διατηρούμενες ποσότητες πιο προφανείς, εξαιτίας, όπως θα δούμε, της συμπλεκτικής δομής που έχει ο χώρος αυτός.

Για να μιλήσουμε με ένα πιο οικείο λεξιλόγιο, στην πραγματικότητα ο θεσεογραφικός χώρος αποτελεί μια διαφορική πολλαπλότητα M, ο χώρος των θέσεων-ταχυτήτων είναι η εφαπτόμενη δέσμη του TM, και ο χώρος των φάσεων είναι η συνεφαπτόμενη δέσμη $T^*(M) := W$ που γνωρίζουμε ότι δέχεται δομή διαφορικής πολλαπλότητας.

Παρακάτω $W \equiv T^*(M)$ καθώς μας ενδιαφέρει ο χώρος των φάσεων

Ορισμός 1. Έστω W ομαλή πολλαπλότητα. Εάν $X \in \mathcal{X}(W)$ και $\omega \in \Omega^k(W)$ (k-μορφή) τότε $i_X\omega \in \Omega^{k-1}(W)$ ορίζεται από την σχέση:

$$(i_X\omega)(X_1, ..., X_{k-1}) = \omega(X, X_1, ..., X_{k-1})$$

για οποιαδήποτε διανυσματικά πεδία $X_1, ..., X_{k-1}$ και καλείται εσωτερική παράγωγος.

Ιδιότητες:

1. $i_X i_Y \omega = -i_Y i_X \omega$ και άρα $i_X \circ i_X = 0$.
2. $i_X(\beta \wedge \gamma) = (i_X\beta) \wedge \gamma + (-1)^k \beta \wedge (i_X\gamma)$, όπου β $k-$μορφή και γ $l-$μορφή.

Ορισμός 2. Εάν $X \in \mathcal{X}(W)$ και $\omega \in \Omega^k(W)$, τότε η παράγωγος Lie, $L_X\omega \in \Omega^k(W)$, ορίζεται από τον τύπο (του $Cartan$):

$$L_X\omega = i_X \circ d\omega + d \circ i_X\omega$$

(Ενδέχεται να χρησιμοποιηθεί και ο σύνηθες τύπος $L_X\omega = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(\Phi_t^*\omega)$, όπου Φ η ροή που παράγει το X)

Παρατήρηση: Εάν $f \in C^\infty(W)$, τότε $i_X f = 0$, οπότε έχουμε $L_X f = i_X df$ που είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της f κατά μήκος του X.

Ορισμός 3. Μία 2-μορφή $\omega \in \Omega^2(W)$ καλείται **συμπλεκτική** αν είναι κλειστή ($d\omega = 0$) και μη-εκφυλισμένη ($\forall p \in W$ και $u \in T_pW$, η απεικόνιση ω_p^b με $u \mapsto \omega_p(u, -)$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των T_pW και T_p^*W).
Μία **συμπλεκτική πολλαπλότητα** είναι ένα ζεύγος (W, ω) όπου W ομαλή πολλαπλότητα και ω μία συμπλεκτική μορφή.

Η απεικόνιση του προηγούμενου ορισμού είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι εξαρτάται ομαλά από το p, οπότε μπορεί να επεκταθεί σε ισομορφισμό, έστω ω^b, μεταξύ των TW και T^*W.
Αν $H \in C^\infty(W)$, τότε όπως γωνρίζουμε $dH \in \Gamma(T^*W)$ εφόσον το διαφορικό συνάρτησης είναι μία 1-μορφή και μπορούμε να συσχετίσουμε το διανυσματικό πεδίο $X_H = -(\omega^b)^{-1} \circ dH$ με την H.
Τότε έχουμε:

$$i_{X_H}\omega = \omega(X_H, -) = \omega^b \circ X_H = -dH.$$

Ορισμός 4. Έστω X διανυσματικό πεδίο στην συμπλεκτική πολλαπλότητα (W, ω). Τότε:

1. Το X είναι συμπλεκτικό εάν $i_X\omega$ κλειστή ($d(i_X\omega) = 0$).

2. Το X είναι Χαμιλτονιανό εάν $i_X\omega$ ακριβής (υπάρχει, δηλαδή, συνάρτηση f ώστε $i_X\omega = df$).

Παρατήρηση: Προφανώς, κάθε Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο είναι και συμπλεκτικό, καθώς ξέρουμε ότι κάθε ακριβής 1-μορφή είναι και κλειστή. Το αντίστροφο ισχύει πάντα μόνο εάν εργαζόμαστε τοπικά σε αστρόμορφο ανοιχτό σύνολο (Λήμμα *Poincare*), για αυτό και το συμπλεκτικό διανυσματικό πεδίο μπορεί να αναφέρεται και ως τοπικά Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο.

Λήμμα: Εάν X συμπλεκτικό διανυσματικό πεδίο σε μία συμπλεκτική πολλαπλότητα (W, ω) τότε η ροή του Φ_t διατηρεί την ω με την έννοια ότι $L_X\omega = 0$ (αφού βάσει ορισμού η πάραγωγος *Lie* μετρά την απειροελάχιστη μεταβολή της διαφορικής μορφής κατά μήκος ενός διανυσματικού πεδίου).

Απόδειξη: $L_X\omega = i_X(d\omega) + d(i_X\omega) = 0$ αφού ω κλειστή, δηλαδή $d\omega = 0$, και $d(i_X\omega) = 0$ αφού X συμπλεκτικό.

□

Εάν το X είναι πλήρες διανυσματικό πεδίο τότε αυτή η διατήρηση μπορεί να εκφραστεί με *pullbacks* και ροές.

Ορισμός 5. Έστω (W, ω) συμπλεκτική πολλαπλότητα. Ένας συμπλεκτομορφισμός (ή κανονικοί μετασχηματισμοί στη θεωρητική φυσική) είναι μία αμφιδιαφόριση $\psi : W \to W$ η οποία διατηρεί την ω με την έννοια ότι $\psi^*\omega = \omega$.

Παραδείγματα:

1) Σημειακοί μετασχηματισμοί είναι κανονικοί.

2)$(q, p) \mapsto (p, -q)$ για $M = \mathbb{R}, T^*(M) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και $\omega = dq \wedge dp$.

3) $(q, p) \mapsto (p, q)$ αλλάζει το πρόσημο του ω, άρα δεν είναι όλοι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί κανονικοί.

Θεώρημα: Εάν X είναι πλήρες συμπλεκτικό διανυσματικό πεδίο, τότε $\forall t \in \mathbb{R}$ η ροή $\Phi_t : W \to W$, που αυτό παράγει, είναι συμπλεκτομορφισμός.

Απόδειξη: Η ροή είναι καλά ορισμένη αφού το X είναι πλήρες (οι ολοκληρωτικές καμπύλες ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$). Τώρα θα δείξουμε ότι το $\Phi_t^*\omega$ δεν εξαρτάται από το t:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\Phi_t^*\omega) = \Phi_{t_0}^* L_X\omega = 0$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το προηγούμενο Λήμμα. Επομένως, $\Phi_t^*\omega = \Phi_0^*\omega = \omega, \forall t \in \mathbb{R}$.

$\square$

Ορισμός 6. Εάν X είναι Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο, τότε μία απεικόνιση $H \in C^\infty(W)$ με $i_X\omega = -dH$ ονομάζεται Χαμιλτονιανή συνάρτηση για το $X := X_H$.
Μάλιστα,

$$\dot{u} = X_H \circ u$$

είναι οι εξισώσεις Χάμιλτον, με u να είναι η τροχιά του συστήματος που ορίζεται εν γένει σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$.

Σε μία συνεκτική πολλαπλότητα οι Χαμιλτονιανές συναρτήσεις είναι μοναδικές ως προς μία προσθετική σταθερά, αφού και το διαφορικό είναι. Επιπλέον, κάθε ομαλή H είναι Χαμιλτονιανή συνάρτηση για το μοναδικό διανυσματικό πεδίο X_H.

Λήμμα: Έστω X Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο με Χαμιλτονιανή συνάρτηση H. Τότε η ροή Φ_t του X διατηρεί την H.

Απόδειξη: $L_X H = X(H) = dH(X) = (-i_X\omega)(X) = -i_X i_X\omega = 0$.

$\square$

(Αργότερα το $L_X H$ θα το συμβολίζουμε ως την αγκύλη *Poisson* $\{H, H\}$)

Ανάλογα με προηγουμένως αποδεικνύεται και το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα: Έστω X πλήρες Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο με Χαμιλτονιανή H και Φ_t η ροή του X. Τότε $\Phi_t^* H = H$.

Αν αποδεχτούμε την H σαν συνάρτηση ενέργειας, τότε το παραπάνω Πόρισμα εκφράζει μια διατήρηση αυτής.
Επομένως, μέχρι στιγμής, έχουμε καταφέρει να δείξουμε ότι η ροή Φ_t στην $W := T^*(M)$ που αφήνει αναλλοίωτη την ω ($\Phi_t^*\omega = \omega$) έχει ένα διανυσματικό πεδίο X ως γεννήτορα, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $L_X\omega = 0$. Μάλιστα, κάθε Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο, X_H, έχει αυτήν την ιδιότητα.
Θα δείξουμε αργότερα ότι η χρονική αυτή εξέλιξη δεν αφήνει αναλλοίωτη μόνο την ω, αλλά και τον όγκο στον χώρο των φάσεων (Θεώρημα *Liouville*).

Παράδειγμα: Στην κλασική μηχανική έχουμε $W = \mathbb{R}^{2n}$ με σύστημα συντεταγμένων $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$. Έστω $\omega = \sum_j dq_j \wedge dp_j$ και δοθείσα $H \in C^\infty(W)$.
Υποθέτουμε ότι $\Phi_t(q(0), p(0)) = (q(t), p(t))$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $X = X_H$ και άρα έχουμε:

$$i_{X_H}\omega = \sum_{j=1}^{n} i_{X_H}(dq_j \wedge dp_j) = \sum_{j=1}^{n}((i_{X_H}dq_j)dp_j - (i_{X_H}dp_j)dq_j) = \sum_{j=1}^{n}(\frac{dq_j(t)}{dt}dp_j - \frac{dp_j(t)}{dt}dq_j)$$

Από την άλλη πλευρά, λόγω ορισμού X_H, έχουμε:

$$i_{X_H}\omega = -dH = -\sum_{j=1}^{n}(\frac{dH}{dp_j}dp_j + \frac{dH}{dq_j}dq_j)$$

Άρα, πρέπει να ισχύει :

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = -\frac{dH}{dp_j}$$

και

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \frac{dH}{dq_j}$$

που είναι ακριβώς οι εξισώσεις Χάμιλτον.

Ορισμός 7. Η αγκύλη *Poisson* δύο απεικονίσεων $F, G \in C^\infty(W)$, με Χαμιλτονιανά διανυσματικά πεδία X_F και X_G αντίστοιχα, ορίζεται ως:

$$\{G, F\} \equiv \omega(X_G, X_F) = i_{X_F} i_{X_G}\omega = i_{X_F}dG = L_{X_F}G = -L_{X_G}F.$$

Παρατηρήσεις

1. ω αντισυμμετρικό οπότε $\{F, G\} = -\{G, F\}$.
2. Στον χώρο των φάσεων με κάποιον χάρτη με συντεταγμένες $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$:

$$\{G, F\} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{dG}{dq^i}\frac{dF}{dp_i} - \frac{dF}{dq^i}\frac{dG}{dp_i})$$

   μάλιστα $\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ και $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$.

3. Οι αγκύλες *Poisson* είναι αναλλοίωτες σε κανονικούς μετασχηματισμούς Ψ, με την έννοια ότι στο νέο σύστημα γίνονται οι αγκύλες *Poisson* των νέων συναρτήσεων, δηλαδή $\{F, G\} \circ \Psi = \{F \circ \Psi, G \circ \Psi\}$.
   Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν Ψ είναι αμφιδιαφόριση του W που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση για κάθε F, G, τότε Ψ είναι κανονικός.
4. Ως συνέπειες των ιδιοτήτων της παραγώγου *Lie*, ισχύει ότι :

$$\{F + G, H\} = \{F, H\} + \{G, H\}$$

$$\{FG, H\} = G\{F, H\} + F\{G, H\}$$

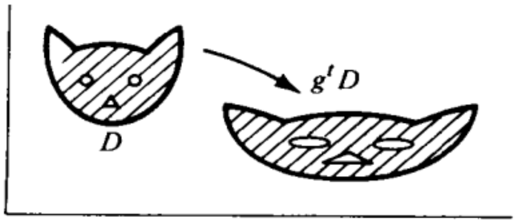
   και ικανοποιείται και η ταυτότητα του *Jacobi*.

Θεώρημα: Η αγκύλη *Lie* δύο Χαμιλτονιανών διανυσματικών πεδίων είναι το Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο της αγκύλης *Poisson* τους, δηλαδή

$$[X_H, X_G] = X_{\{G,H\}}.$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει υπολογιστικά λαμβάνοντας τοπικές συντεταγμένες.

Θεώρημα (*Liouville*)**:** Η ροή που παράγεται από το Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο στο χώρο των φάσεων διατηρεί τον όγκο, δηλαδή για οποιαδήποτε περιοχή D έχουμε ότι όγκος(D) = όγκος$(\Phi_t D)$.



Θα δείξουμε την γενικότερη Πρόταση του *Liouville* που αναφέρει:

Έστω $\dot{x} = f(x), x = (x_1, ..., x_n)$, ένα δοθέν σύστημα διαφορικών εξισώσεων, με f το διανυσματικό πεδίο, του οποίου η λύση μπορεί να επεκταθεί σε όλο τον χρονικό άξονα. Έστω, επίσης, $\{\Phi_t\}$ με $\Phi_t : (q(0), p(0)) \mapsto (q(t), p(t))$ η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών από τις ροές του χώρου φάσεων:

$$\Phi_t(x) = x + f(x)t + O(t^2) \quad , t \to 0 \qquad (1)$$

Έστω $D(0)$ περιοχή στον x-χώρο και $V(0)$ ο όγκος της, τότε $V(t) =$ όγκος$(D(t))$, όπου $D(t) = \Phi_t D(0)$.

Θεώρημα 2: Εάν $divf \equiv 0$, τότε Φ_t διατηρεί όγκους: $V(t) = V(0)$.

Απόδειξη: Πρώτα δείχνουμε το εξής Λήμμα:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{t=0} = \int_{D(0)} divf dx$$

$\forall t$, έχουμε ότι $V(t) := \int_{D(t)} dx = \int_{D(0)} det(\frac{d\Phi_t(x)}{dx})dx$
Όμως από την (1) έχουμε ότι $\frac{d\Phi_t(x)}{dx} = I_n + tA + O(t^2)$ όπου $A = (\frac{df_i}{dx_j})$ ο Ιακωβιανός της f.
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $A = (a_{ij})$ ισχύει ότι:

$$det(I_n + tA) = 1 + t \cdot tr(A) + O(t^2)$$

αφού

$$det(I + tA) = t^n det(A + \frac{1}{t}I) = t^n \chi_A(-\frac{1}{t}) =$$
$$= t^n[(-1)^n(-\frac{1}{t})^n + (-1)^{n-1} \cdot tr(A) \cdot (-\frac{1}{t})^{n-1} + ... + detA] =$$
$$= 1 + t \cdot tr(A) + ... + detA \cdot t^n$$

Άρα

$$det(\frac{d\Phi_t(x)}{dx}) = 1 + t \cdot tr(A) + O(t^2)$$

Όμως $tr(A) = divf$ οπότε

$$V(t) = \int_{D(0)} [1 + t \cdot divf + O(t^2)]dx$$

και εύκολα βλέπουμε ότι έπεται το ζητούμενο του Λήμματος.

Για το Θεώρημα 2: χωρίς βλάβη της γενικότητας, χρησιμοποιούμε το Λήμμα για $t = t_0$, δηλαδή έχουμε

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} divf dx$$

και αν $divf \equiv 0$ τότε $\frac{dV}{dt} \equiv 0 \Rightarrow V(t) = V(0)$.

$\square$

Συγκεκριμένα, αν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων παραπάνω είναι οι εξισώσεις του Χάμιλτον, τότε έχουμε

$$divf = \frac{d}{dq}(\frac{dH}{dp}) + \frac{d}{dp}(-\frac{dH}{dq}) \equiv 0$$

αποτέλεσμα που αποδεικνύει, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, το Θεώρημα του *Liouville*.

Το Θεώρημα του *Liouville* έχει σημαντικές εφαρμογές, ιδιαίτερα στη στατιστική φυσική και στην μηχανική, όπου μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε στοιχεία της εργοδικής θεωρίας.
Άμεση συνέπειά του είναι, επίσης, το Θεώρημα Επανάληψης του *Poincaré*, το οποίο ουσιαστικά αναφέρει ότι ένα σύστημα πεπερασμένης ενέργειας, περιορισμένο σε έναν πεπερασμένο όγκο, μετά από ένα χρονικό διάστημα επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση.

Άλλη συνέπεια του θεωρήματος είναι ότι τα Χαμιλτονιανά συστήματα δεν μπορούν να είναι ασυμπτωτικά ευσταθή. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που το πεδίο περιγράφεται από έναν 2×2 πίνακα (δηλαδή $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$), τότε μπορούμε να δείξουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι της μορφής $\lambda_1 = \frac{1}{2}(trA + \sqrt{\Delta})$ και $\lambda_2 = \frac{1}{2}(trA - \sqrt{\Delta})$, όπου $\Delta = (trA)^2 - detA$. Όμως, είδαμε ότι $trA = 0$ άρα $\lambda_1 = -\lambda_2$. Αυτό μπορεί να γενικευθεί και σε παραπάνω διαστάσεις, συνεπώς στα Χαμιλτονιανά συστήματα ιδιοτιμή είναι τόσο η λ όσο και η $-\lambda$. Οπότε, αν $Re(\lambda) \neq 0$ τότε υπάρχει αστάθεια, ενώ αν $Re(\lambda) = 0$ τότε μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχει ελλειπτική ευστάθεια.

References

[1] V.I. Arnold. "Mathematical Methods of Classical Mechanics", 2nd edition, 1989

[2] Walter Thirring. "Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories", 3rd edition, 1997

[3] Π. Ιωάννου, Θ. Αποστολάτος. 'Θεωρητική Μηχανική', 2η έκδοση, 2007