

Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ – Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ

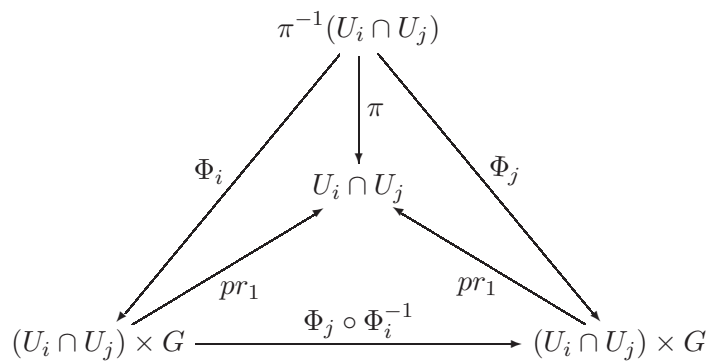


Σημειώσεις Μεταπτυχιακών Μαθημάτων
Νέα Έκδοση με διορθώσεις και προσθήκες

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ 2024**

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ

Νέα Έκδοση με διορθώσεις και προσθήκες



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ 2024

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ
GEOMETRY OF FIBER BUNDLES
AMS (2000) Subject Classification:
53B05, 53B20, 53C05, 55R10,
57R40, 57R42, 57R55

COPYRIGHT © 2024 by E. Vassiliou – M. Papatriantafillou
All rights reserved

Περιεχόμενα

Πρόλογος	vii
1 Απεικονίσεις Μέγιστης Τάξης	1
1.1 Κανονικές Υποπολλαπλότητες	2
1.2 Εμφυτεύσεις	13
1.3 Εμβαπτίσεις	24
1.4 Εγκάρσιες απεικονίσεις	35
2 Διανυσματικές Δέσμες	45
2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες	46
2.2 Απεικονίσεις μεταφοράς	50
2.3 Κατασκευές ορισμένων διανυσματικών δεσμών	57
2.3.1 Η δέσμη των γραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης	57
2.3.2 Η δέσμη των διγραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης	58
2.3.3 Το ευθύ (Whitney) άθροισμα διανυσματικών δεσμών	59
2.3.4 Η δέσμη γραμμικών απεικονίσεων	60
2.4 Η αντίστροφη εικόνα διανυσματικής δέσμης	61
2.5 Οι ιδιότητες της κατηγορίας $VB(X)$	65
2.6 Ακριβείς ακολουθίες - Διασπάσεις	73
2.7 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2	86

3	Πρωτεύουσες Δέσμες	89
3.1	Διαφορίσιμες δράσεις	90
3.2	Πρωτεύουσες (ή κύριες) δέσμες	93
3.3	Οι τομές μιας πρωτεύουσας δέσμης	102
3.4	Μορφισμοί πρωτευουσών δεσμών	108
3.5	Η αντίστροφη εικόνα πρωτεύουσας δέσμης	115
3.6	Οι απεικονίσεις μεταφοράς	118
4	Συνοχές σε Πρωτεύουσες Δέσμες	127
4.1	Προκαταρκτικά	128
4.2	Συνοχές	132
4.3	Οριζόντιες ανυψώσεις διανυσματικών πεδίων	145
4.4	Παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης	149
4.5	Ομάδες ολονομίας	156
4.6	Ασκήσεις Κεφαλαίου 4	159
5	Ο Συναρτητής Τομή	161
5.1	Οι τομές μιας διανυσματικής δέσμης	162
5.2	Η ισομορφία των $Mor(\ell_1, \ell_2)$ και $Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$	167
5.3	Το Θεώρημα Serre-Swan	173
5.4	Ασκήσεις Κεφαλαίου 5	176
6	Δομή Riemann και Συνοχές	179
6.1	Δομή Riemann	180
6.2	Συνοχή και συναλλοίωτη παραγωγή	187
6.3	Ασκήσεις Κεφαλαίου 6	199
7	Η Συνοχή ως διάσπαση ακολουθίας	203
7.1	Διασπάσεις και απεικονίσεις συνοχής	204
7.2	Γραμμικές συνοχές	220
7.3	Η ισοδυναμία διάσπασης και συναλλοίωτης παραγώγου	226
7.4	Ασκήσεις Κεφαλαίου 7	229
8	Πρωτευουσα συνοχή ως διάσπαση	233
8.1	Μία ακριβής ακολουθία G -διανυσματικών δεσμών	234
8.2	Επιπλέον κατασκευές διανυσματικών δεσμών	237
8.3	Ισοδυναμία συνοχών και G -διασπάσεων	240
8.4	Ασκήσεις Κεφαλαίου 8	241
	Παραρτήματα	243

A' Συμπληρωματικές Αποδείξεις	245
B' Κατηγορίες και Συναρτητές	257
Γ' Προβολικά Πρότυπα	269
Βιβλιογραφία	275
Ευρετήριο	279

Πρόλογος

But what is geometry? ... The best definition so far offered is due to a distinguished American geometer [Oscar Veblen]: “Geometry is what geometers do”. If it be asked what geometers do, the reply is equally satisfying: “Geometers do geometry”. These definitions were not intended facetiously. They were a frank acknowledgement that to a majority of those who call themselves geometers, all things are geometry.

E. T. BELL [6, p. 419]

Οι σημειώσεις αυτές σκοπεύουν να καλύψουν διδακτικές ανάγκες ενός μέρους μεταπτυχιακών μαθημάτων (Διαφορικής) Γεωμετρίας, που διδάσκουμε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Στην παρούσα δεύτερη έκδοση διορθώνονται διάφορα τυπογραφικά και άλλα

σφάλματα της πρώτης έκδοσης (του 2007), ενώ υπάρχουν αρκετές αλλαγές ή συμπληρώσεις σε αποδείξεις και ορισμένα σημεία του κειμένου.

Έχει αναδιαταχθεί το Κεφάλαιο 4, στο οποίο προστέθηκε (μετά την αναδιάταξη του περιεχομένου του) η νέα Παράγραφος 4.3, που διαπραγματεύεται τις οριζόντιες ανυψώσεις διανυσματικών πεδίων.

Επίσης έχουν προστεθεί δύο νέα κεφάλαια. Στο πρώτο, Κεφάλαιο 7, συμπληρώνεται η θεωρία των συνοχών σε διανυσματικές δέσμες (που άρχισε στο Κεφάλαιο 6). Ακριβέστερα, μελετώνται οι συνοχές αυτές ως διασπάσεις καταλλήλων ακριβών ακολουθιών διανυσματικών δεσμών, ως παραγωγίσεις, και ως απεικονίσεις συνοχής. Στο νέο Κεφάλαιο 8, η μελέτη των συνοχών σε πρωτεύουσες δέσμες (που ήταν αντικείμενο του Κεφαλαίου 4) συμπληρώνεται με τη μελέτη αυτών των συνοχών ως διασπάσεων G -ισομεταβλητών διανυσματικών δεσμών, όπου G είναι η δομική ομάδα της πρωτεύουσας δέσμης.

Τέλος, με τη βοήθεια υπερσυνδέσμων (hyperlinks), ο αναγνώστης της ηλεκτρονικής μορφής των σημειώσεων έχει τώρα τη δυνατότητα της άμεσης πρόσβασης στις αναφορές εντός κι εκτός κειμένου.

Η πλήρης διδασκαλία του συνόλου των σημειώσεων αυτών απαιτεί περίπου δύο διδακτικά εξάμηνα. Η ποικιλία των παρουσιαζομένων θεμάτων οδηγεί, με κατάλληλη επιλογή της ύλης, στη διαμόρφωση δύο (φαινομενικά ανεξαρτήτων μεταξύ τους) ενοτήτων, μία στο πλαίσιο των διανυσματικών δεσμών και μία στο πλαίσιο των πρωτεύουσών δεσμών. Αυτό επιτρέπει τη διδασκαλία δύο αντιστοίχων εξαμηνιαίων μαθημάτων, ανάλογα με τα ενδιαφέροντα των διδασκόντων και τη σύνθεση του ακροατηρίου.

Επόμενος στόχος μας είναι η συμπλήρωση των σημειώσεων αυτών με μερικές ακόμη βασικές έννοιες (όπως, Καμπυλότητα, Θεώρημα Chern-Weil, Μετασχηματισμοί Βαθμίδας, Προσαρτημένες Δέσμες και Συνοχές κλπ.), προκειμένου να καταστεί ένα ολοκληρωμένο κείμενο, το οποίο θα παρέχει περισσότερη πληροφόρηση στους ενδιαφερόμενους μεταπτυχιακούς φοιτητές και θα συμπληρώνει την ελλιπή ελληνική βιβλιογραφία στο πεδίο αυτό.

Το μεγαλύτερο μέρος των αρχικών χειρογράφων σημειώσεών μας, που αποτέλεσαν την έκδοση του 2007, είχε την καλοσύνη να στοιχειοθετήσει με το πρόγραμμα $\text{\LaTeX}$ ο συνάδελφος μαθηματικός Γιώργος Τζαχρίστας (MSc. του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Λογικής και Αλγορίθμων). Τον ευχαριστούμε θερμά για τον κόπο που κατέβαλε σ' αυτήν την επίπονη προσπάθεια.

Αθήνα, Απρίλιος 2024.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Απεικονίσεις Μέγιστης Τάξης

In this chapter we will explore conditions under which a subset of a smooth manifold can be considered as a smooth manifold in its own right. As you will soon discover, the situation is quite a bit more subtle than the analogous theory of topological subspaces.

J. M. LEE [20, p. 38]

Στο κεφάλαιο αυτό συμπληρώνουμε τη βασική θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων, που έχουμε αναπτύξει στο [4], με τη μελέτη θεμελιωδών εννοιών όπως: οι υποπολλαπλότητες, οι εμφυτεύσεις και εμβαπτίσεις, καθώς και οι εγκάρσιες απεικονίσεις. Περιοριζόμαστε σε βασικά συμπεράσματα, κυρίως αυτά που είναι απαραίτητα και έχουν άμεση εφαρμογή στα επόμενα κεφάλαια.

Για τους συμβολισμούς και τη γενική θεωρία των (διαφορικών) πολλαπλο-

τήτων παραπέμπουμε στο [4]

1.1 Κανονικές Υποπολλαπλότητες

Υποθέτουμε ότι $M \equiv (M, \mathcal{A})$ είναι μία C^∞ (διαφορίσιμη) πολλαπλότητα με διάσταση $\dim M = m$. Υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι ο μέγιστος άτλαντας, ο οποίος ορίζει τη διαφορική δομή της M .

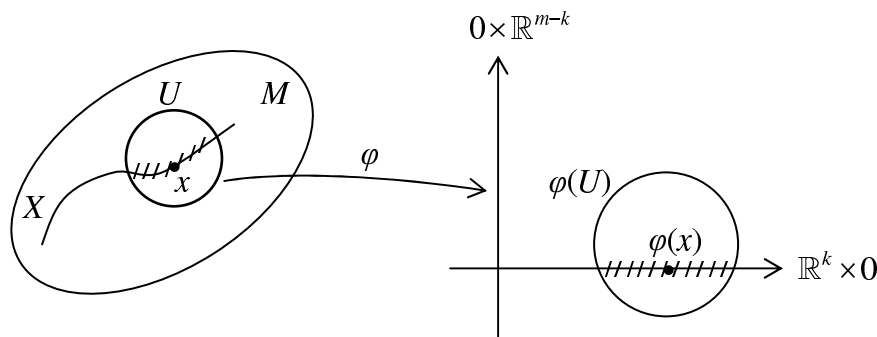
Αν $X \subset M$, συχνά προκύπτει το ερώτημα κατά πόσον το X μπορεί να εφοδιαστεί και αυτό με δομή πολλαπλότητας. Ο ορισμός μιας τέτοιας δομής δεν είναι τόσο απλός ή άμεσος, όπως στην περίπτωση π.χ. μίας (υπο)ομάδας ή ενός τοπολογικού (υπο)χώρου. Επιπλέον, είναι δυνατόν να οριστούν διάφορες διαφορικές δομές επί του X , οι οποίες δεν συμπίπτουν αναγκαίως μεταξύ τους.

Εδώ θα ασχοληθούμε με τη δομή της *κανονικής* υποπολλαπλότητας, σε αντιδιαστολή με τη δομή της *εμφυτευμένης* ή της *εμβαπτισμένης* υποπολλαπλότητας. Η πρώτη είναι αρκετά φυσιολογική, με την έννοια ότι η τοπολογία της, η οποία εισάγεται από τη διαφορική δομή, συμπίπτει με την σχετική τοπολογία και η απεικόνιση $i: X \hookrightarrow M$ (φυσική εμφύτευση) είναι C^∞ -απεικόνιση.

1.1.1 Ορισμός. Ένα υποσύνολο $X \subset M$, όπου $M \equiv (M, \mathcal{A})$ είναι m -διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, καλείται **κανονική υποπολλαπλότητα της M , διάστασης $k \leq m$** (regular submanifold), αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, έτσι ώστε $x \in U$ και να ισχύει η συνθήκη

$$(\text{ΥΠ. 1}) \quad \varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$$

Το επόμενο σχήμα μπορεί να διευκολύνει στην κατανόηση του ορισμού.



Σχήμα 1.1

Στη συνθήκη **(ΥΠ. 1)**, γράφοντας 0, εννοούμε ότι

$$0 \equiv \{0\} \equiv \{(0, \dots, 0)\} \in \mathbb{R}^{m-k}.$$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, αν καλέσουμε x_i , $i = (1, \dots, m)$ τις συντεταγμένες του χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, δηλαδή

$$x_i = pr_i \circ \varphi \quad (\text{όπου } pr_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ η } i\text{-προβολή}),$$

θα είναι

$$(1.1.1) \quad x_j(p) = 0, \quad \forall j = k+1, \dots, m \quad \text{και } p \in U \cap X.$$

Εκτός του Ορισμού **1.1.1**, ένα χρήσιμο κριτήριο, για να διαπιστώσουμε συχνά αν το $X \subset M$ είναι υποπολλαπλότητα, μας δίνει και η

1.1.2 Πρόταση. Το $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k τότε και μόνον τότε αν, για κάθε $x \in X$, υπάρχει $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, έτσι ώστε $x \in V$ και ισχύει η συνθήκη

$$(ΥΠ. 2) \quad \psi(V) = B_1 \times B_2, \quad \psi(V \cap X) = B_1 \times 0,$$

όπου $B_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ και $B_2 \subseteq \mathbb{R}^{m-k}$ είναι ανοιχτά σύνολα με $0 \in B_2$.

Απόδειξη. Έστω ότι το X είναι κανονική υποπολλαπλότητα και $x \in X$. Τότε κατά τον Ορισμό **1.1.1**, υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί την **(ΥΠ. 1)**. Εξ άλλου, επειδή το $\varphi(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ και $\varphi(x) \in \varphi(U)$, θα υπάρχουν (κατά την τοπολογία του καρτεσιανού γινομένου) ανοιχτά $B_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ και $B_2 \subseteq \mathbb{R}^{m-k}$, έτσι ώστε $\varphi(x) \in B_1 \times B_2 \subset \varphi(U)$. Θέτουμε

$$V := \varphi^{-1}(B_1 \times B_2) \quad \text{και} \quad \psi := \varphi|_V.$$

Προφανώς, $x \in V$ και $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, εφ' όσον το τελευταίο ζεύγος προκύπτει από κατάλληλο περιορισμό (επί ανοιχτού υποσυνόλου) του χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \psi(V \cap X) &= \varphi(V \cap X) = \varphi(V \cap U \cap X) \\ &= \varphi(V) \cap \varphi(U \cap X) \\ &= \varphi(V) \cap \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ [\text{επειδή } V \subset U] \quad &= \varphi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ &= (B_1 \times B_2) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ &= B_1 \times 0, \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην **(ΥΠ. 2)**. Σημειώνουμε ότι [λόγω της **(ΥΠ. 1)**] $\varphi(x) = (a, 0)$, άρα αναγκαία $0 \in B_2$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί την **(ΥΠ. 2)**. Τότε μπορούμε (παρόμοια με τις προηγούμενες σχέσεις) να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned}\psi(V \cap X) &= B_1 \times 0 = (B_1 \times \mathbb{R}^k) \times (B_2 \cap 0) \\ &= (B_1 \times B_2) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \\ &= \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)\end{aligned}$$

Θέτοντας $U := V$ και $\varphi := \psi$, καταλήγουμε στην ύπαρξη ενός χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ όπως στον Ορισμό **1.1.1**. $\square$

Ο όρος υποπολλαπλότητα υπονοεί ότι υπάρχει στο X δομή πολλαπλότητας, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Έστω $X \subset M$ κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k . Εισάγουμε τον εξής συμβολισμό:

$$\mathcal{A}_X := \{ (U \cap X, p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}, \text{ που ικανοποιεί την (ΥΠ. 1)} \}.$$

Εδώ $p_{1,0}: \mathbb{R}^k \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα [σε αντιδιαστολή προς τη (συνήθη) $pr_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$].

1.1.3 Πρόταση. Το $\mathcal{A}_X$ ορίζει επί του X έναν C^∞ -άτλαντα, διάστασης k .

Απόδειξη. i) Κάθε ζεύγος $(U \cap X, p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \in \mathcal{A}_X$ αποτελεί χάρτη: Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$(1.1.2) \quad (p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X})(U \cap X) = p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) = p_{1,0}(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)).$$

Όμως το $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k \times 0$ (κατά τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}^k \times 0$, ως υποχώρου του $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$) και η

$$p_{1,0}: \mathbb{R}^k \times 0 \longrightarrow \mathbb{R}^k : (a, 0) \mapsto a$$

είναι ομοιομορφισμός με αντίστροφη την

$$(1.1.3) \quad j: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \times 0 : b \mapsto (b, 0).$$

Επομένως, η **(1.1.2)** συνεπάγεται ότι το $(p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X})(U \cap X)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο $\mathbb{R}^k$. Επίσης, η $p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}$ είναι 1-1 απεικόνιση, ως σύνθεση απεικονίσεων 1-1, οπότε πράγματι ορίζεται χάρτης

ii) Είναι προφανές ότι οι χάρτες του $\mathcal{A}_X$ καλύπτουν το X , αφού, για κάθε $x \in X$, υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με τις ιδιότητες του Ορισμού **1.1.1** και $x \in U \cap X$.

iii) Οι χάρτες του $\mathcal{A}_X$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ -συμβιβαστοί μεταξύ τους. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα ζεύγη

$$(U \cap X, p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \quad \text{και} \quad (\tilde{U} \cap X, p_{1,0} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X})$$

του $\mathcal{A}_X$, που προκύπτουν από τους αντίστοιχους χάρτες $(U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$, και ας υποθέσουμε ότι $U \cap \tilde{U} \cap X \neq \emptyset$. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap \tilde{U} \cap X) &= \varphi((U \cap \tilde{U}) \cap (U \cap X)) = \\ \varphi(U \cap \tilde{U}) \cap \varphi(U \cap X) &= \varphi(U \cap \tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times 0). \end{aligned}$$

Λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών (U, φ) και $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ είναι $\varphi(U \cap \tilde{U}) \subset \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ ανοιχτό, άρα (βάσει του ορισμού της σχετικής τοπολογίας) και το $\varphi(U \cap \tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k \times 0$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον ομοιομορφισμό $p_{1,0}: \mathbb{R}^k \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^k$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$(p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X})(U \cap \tilde{U} \cap X) = p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X)) \subset \mathbb{R}^k \quad \text{ανοιχτό.}$$

Παρόμοια και για το

$$(p_{1,0} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X})(U \cap \tilde{U} \cap X) = p_{1,0}(\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U} \cap X)) \subset \mathbb{R}^k.$$

Τέλος διαπιστώνουμε ότι η

$$(p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \circ (p_{1,0} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X})^{-1}: p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X)) \rightarrow p_{1,0}(\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U} \cap X))$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση, αφού

$$\begin{aligned} & (p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \circ (p_{1,0} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X})^{-1} \\ & \equiv (p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \circ (p_{1,0} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X})^{-1} \Big|_{p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X))} \\ & = p_{1,0} \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ p_{1,0}^{-1} \Big|_{p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X))} \\ & = p_{1,0} \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \circ j \Big|_{p_{1,0}(\varphi(U \cap \tilde{U} \cap X))}, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε σύνθεση $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεων (προφανώς, η $p_{1,0}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ ως γραμμική απεικόνιση και ανάλογα η αντίστροφη-της j). Παρόμοια αποδεικνύεται η διαφορισμότητα της $(p_{1,0} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap X}) \circ (p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X})^{-1}$, οπότε και ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

1.1.4 Θεώρημα. Αν $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k , τότε το $(X, \mathcal{A}'_X)$, όπου $\mathcal{A}'_X$ ο αντίστοιχος μέγιστος άτλαντας του $\mathcal{A}_X$, είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης k .

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.1.3. $\square$

1.1.5 Πρόταση. Ο διαφορικός άτλαντας $\mathcal{A}_X$ περιέχει και τους χάρτες της μορφής $(V \cap X, p_1 \circ \psi|_{V \cap X})$, για όλα τα $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (ΥΠ. 2).

Απόδειξη. Σύμφωνα με τους συλλογισμούς που έγιναν στην απόδειξη του αντιστρόφου μέρους της Πρότασης 1.1.2, κάθε χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ ο οποίος ικανοποιεί την (ΥΠ. 2), μπορεί να πάρει και τη μορφή χάρτη που ικανοποιεί την (ΥΠ. 1), άρα οδηγεί στην κατασκευή χάρτη του $\mathcal{A}_X$. $\square$

Το Θεώρημα 1.1.4 ήδη δικαιολόγησε την ορολογία υπό-πολλαπλότητα για το X . Θα πρέπει να εξηγηθεί και ο όρος κανονική. Αυτός αναφέρεται στην τοπολογία που εισάγει επί του X ο άτλαντας $\mathcal{A}'_X$, όπως προκύπτει από το

1.1.6 Θεώρημα. Έστω $X \subset M$ κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k . Αν τ_σ είναι η σχετική τοπολογία που εισάγει επί του X η τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$ (την οποίαν ορίζει ο $\mathcal{A}$ επί της M), τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\tau_\sigma = \tau_{\mathcal{A}_X} = \tau_{\mathcal{A}'_X}.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με σχετικό κριτήριο (βλ. [4, Πρόταση 1.2.8]), για να δείξουμε την $\tau_\sigma = \tau_{\mathcal{A}_X}$, αρκεί να δείξουμε ότι $U \cap X \in \tau_\sigma$ και η $p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}$ είναι τ_σ -ομοιομορφισμός, για κάθε $(U \cap X, p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \in \mathcal{A}_X$.

Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεσος, αφού $U \in \tau_{\mathcal{A}}$, άρα $U \subset M$ ανοιχτό. Για τον δεύτερο έχουμε ότι η αναφερόμενη απεικόνιση είναι τ_σ -ομοιομορφισμός ως σύνθεση τ_σ -ομοιομορφισμών, όπως προκύπτει από το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U \cap X & \xrightarrow{\varphi|_{U \cap X}} & \varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \subset \mathbb{R}^k \times 0 \\ & \searrow p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X} & \downarrow p_{1,0} \\ & & p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

Διάγραμμα 1.1

Εδώ ας επεξηγήσουμε ότι, επειδή η $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ είναι ομοιομορφισμός, θα είναι και η $\varphi|_{U \cap X}: U \cap X \rightarrow \varphi(U \cap X)$ ομοιομορφισμός (ως προς τη σχετική τοπολογία). Επίσης, η $p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}$ είναι ομοιομορφισμός ως περιορισμός του ομοιομορφισμού $p_{1,0}: \mathbb{R}^k \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ επί του ανοιχτού $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0) \subset \mathbb{R}^k \times 0$ ως προς τη σχετική τοπολογία και πάλι.

Η ισότητα $\tau_{\mathcal{A}_X} = \tau_{\mathcal{A}'_X}$ είναι αποτέλεσμα επίσης γνωστού συμπεράσματος για οποιεσδήποτε C^∞ -πολλαπλότητες (βλ. [4, Πρόταση 1.2.7]). $\square$

1.1.7 Πρόταση. Αν $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα, τότε η κανονική εμφύτευση $i: (X, \mathcal{A}'_X) \hookrightarrow (M, \mathcal{A})$ είναι C^∞ -απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x \in X$. Εφόσον το X είναι υποπολλαπλότητα, θα υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, με $x \in U$, ο οποίος ικανοποιεί την **(ΥΠ. 1)**, όποτε ορίζεται και ο χάρτης $(U \cap X, p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X})$ του X , με $x \in U \cap X$. Επειδή $i(U \cap X) \subset U$, μπορούμε να σχηματίσουμε την τοπική παράσταση της i ως προς τους δύο προηγούμενους χάρτες, δηλαδή την $\varphi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \varphi)^{-1}$, όπως προκύπτει από το επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
 U \cap X & \xrightarrow{i} & U \\
 \downarrow p_{1,0} \circ \varphi & & \downarrow \varphi \\
 \mathbb{R}^k \supset p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) & \xrightarrow{\varphi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \varphi)^{-1}} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \equiv \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.2

Εδώ σημειώνουμε ότι γράφουμε $p_{1,0} \circ \varphi$ αντί $p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}$. Αυτή τη σύμβαση θα ακολουθούμε συστηματικά στη συνέχεια, αφήνοντας στον αναγνώστη την επιμέλεια του προσδιορισμού του πεδίου ορισμού και των σχετικών περιορισμών των διάφορων απεικονίσεων, οι οποίες θα εμφανίζονται στους υπολογισμούς.

Άρα, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης **1.1.3** [μέρος iii)], έχουμε ότι:

$$\varphi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \varphi)^{-1} = \varphi \circ i \circ \varphi^{-1} \circ j = j: p_{1,0}(\varphi(U \cap X)) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \times 0,$$

που είναι C^∞ -απεικόνιση παντού, επομένως και στο $p_{1,0}(\varphi(x))$. Συνεπώς, η i είναι C^∞ στο x και, ανάλογα, σε όλο το X . $\square$

1.1.8 Παρατήρηση. Μια παρόμοια απόδειξη μπορεί να γίνει και με τη χρήση χαρτών της μορφής $(V \cap X, p_{1,0} \circ \psi|_{V \cap X})$, για $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιούν την **(ΥΠ. 2)**. Ας την κάνουμε, σύντομα, ως παράδειγμα εφαρμογής τέτοιων χαρτών.

$$\begin{array}{ccc}
 V \cap X & \xrightarrow{i} & V \\
 \downarrow p_{1,0} \circ \psi & & \downarrow \psi \\
 B_1 = p_{1,0}(\psi(V \cap X)) & \xrightarrow{\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1}} & B_1 \times B_2
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.3

Πάλι, για τυχόν $x \in X$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2, θα υπάρχει $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, με τις γνωστές ιδιότητες. Επομένως, κατά την Πρόταση 1.1.5, το ζεύγος $(V \cap X, p_{1,0} \circ \psi|_{V \cap X})$ είναι χάρτης της διαφορικής δομής του X με $x \in V \cap X$ και $i(V \cap X) \subset V$. Άρα, όπως στο προηγούμενο διάγραμμα, έχουμε την αντίστοιχη τοπική παράσταση $\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1}$ (βλ. και τη σημειούμενη σύμβαση στην απόδειξη της Πρότασης 1.1.7).

Προφανώς [βλ. (1.1.3)], $\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1} = j$ που είναι C^∞ -απεικόνιση. Επομένως καταλήγουμε, όπως και πριν, στο συμπέρασμα της Πρότασης.

1.1.9 Πόρισμα. Η απεικόνιση $T_x i \equiv (di)_x: T_x X \rightarrow T_x M$ είναι 1-1, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τους χάρτες και την αντίστοιχη τοπική παράσταση του Διαγράμματος 1.1.8, έχουμε και το αντίστοιχο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc}
 T_x X & \xrightarrow{\quad T_x i \quad} & T_{i(x)} M = T_x M \\
 \downarrow \overline{p_{1,0} \circ \psi} \cong & & \downarrow \cong \overline{\psi} \\
 \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\quad D(\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1})(p_{1,0}(\psi(x))) \quad} & \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.4

Επειδή (λόγω γραμμικότητας της j)

$$D(\psi \circ i \circ (p_{1,0} \circ \psi)^{-1})(p_{1,0}(\psi(x))) = Dj(p_{1,0}(\psi(x))) = j,$$

καταλήγουμε στην

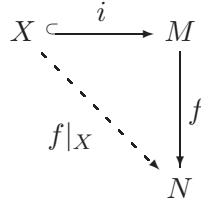
$$T_x i = \overline{\psi}^{-1} \circ j \circ (\overline{p_{1,0} \circ \psi}),$$

η οποία είναι 1-1. Παρόμοια απόδειξη ισχύει αν χρησιμοποιήσουμε το Διάγραμμα 1.1. □

1.1.10 Πόρισμα. Μετά την ταύτιση $T_x X \equiv T_x i(T_x X)$, μέσω της 1-1 απεικόνισης $T_x i$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_x X$ μπορεί να θεωρηθεί γραμμικός υπόχωρος του $T_x M$ με διάσταση k .

1.1.11 Πρόταση. Έστω $f: M \rightarrow N$ μία C^∞ -απεικόνιση μεταξύ των διαφορικών πολλαπλοτήτων M και N . Αν X είναι κανονική υποπολλαπλοότητα της M , τότε η απεικόνιση $f|_X: X \rightarrow N$ είναι C^∞ .

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του μεταθετικού διαγράμματος



Διάγραμμα 1.5

δηλαδή, $f|_X = f \circ i$, που είναι C^∞ ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων. $\square$

1.1.12 Πρόταση. Έστω $f: N \rightarrow M$ απεικόνιση μεταξύ των διαφορικών πολλαπλοτήτων $N \equiv (N, \mathcal{B})$ και $M \equiv (M, \mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι $X \subset M$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα (διάστασης k), τέτοια ώστε $f(N) \subset X$, και συμβολίζουμε με $f_X: N \rightarrow X$ την απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση $f_X(y) := f(y), y \in N$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$[\eta \ f: N \rightarrow M \text{ είναι } C^\infty] \Leftrightarrow [\eta \ f_X: N \rightarrow X \text{ είναι } C^\infty].$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την κατεύθυνση $\Rightarrow$: Αν $y \in N$ είναι τυχόν σημείον του πεδίου ορισμού και θέσουμε $x := f(y)$, τότε υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$ και $\varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.1. Επειδή $f^{-1}(U) \subset N$ ανοιχτό, θα υπάρχει χάρτης (V, ψ) της N τέτοιος ώστε $y \in V \subset f^{-1}(U)$. Επομένως, αφού η f είναι C^∞ στο y και $f(V) \subset U$, προκύπτει ότι και η τοπική παράσταση της f , μέσω των προηγούμενων χαρτών,

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1}: \psi(V) \longrightarrow \varphi(U)$$

θα είναι C^∞ στο $\psi(y)$. Θεωρούμε τους χάρτες (V, ψ) και $(U \cap X, p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X})$ των N και X αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι $f_X(V) = f(V) \subset U \cap X$ [αφού $f(V) \subset U$ και $f(V) \subset X$ λόγω της υπόθεσης]. Επομένως, η αντίστοιχη τοπική παράσταση μέσω των (V, ψ) και $(U \cap X, p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X})$, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$(p_{1,0} \circ \varphi|_{U \cap X}) \circ f_X \circ \psi^{-1} = p_{1,0} \circ (\varphi \circ f_X \circ \psi^{-1}) = p_{1,0} \circ (\varphi \circ f \circ \psi^{-1})$$

(για ευκολία παραλείπουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς). Η τελευταία είναι C^∞ -απεικόνιση στο $\psi(y)$ ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων. Επομένως, η f_X είναι C^∞ στο y και ανάλογα σε ολόκληρο το N .

Η κατεύθυνση $\Leftarrow$ είναι προφανής: Η f μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$f = i \circ f_X, \quad \text{όπου } i: X \hookrightarrow M.$$

Άρα η f είναι C^∞ σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.7. $\square$

1.1.13 Παραδείγματα.

1) Αν $M \equiv (M, \mathcal{A})$ είναι διαφορική πολλαπλότητα, τότε η διαγώνιος Δ_M είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M \times M$ με $\dim \Delta_M = \dim M = m$.

Πράγματι, ας πάρουμε ένα τυχόν σημείο $(x, x) \in \Delta_M$. Επειδή $x \in M$, υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ της M με $x \in U$. Αν θεωρήσουμε την (προφανώς) αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση

$$\sigma: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m: (\alpha, b) \mapsto (\alpha, b - \alpha),$$

τότε το ζεύγος $(U \times U, \sigma \circ (\varphi \times \varphi))$ είναι χάρτης της $M \times M$, για τον οποίον ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (1.1.4) \quad & (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))((U \times U) \cap \Delta_M) = \\ & = (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(\Delta_U) = \sigma(\Delta_{\varphi(U)}) = \varphi(U) \times 0. \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$\begin{aligned} & (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(U \times U) = \sigma(\varphi(U) \times \varphi(U)) = \\ & = \{(\varphi(y), \varphi(z) - \varphi(y))\} (y, z) \in U \times U, \end{aligned}$$

οπότε

$$(1.1.5) \quad (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(U \times U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0) = \{(\varphi(y), 0) \mid y \in U\} = \varphi(U) \times 0.$$

Από τις (1.1.4) και (1.1.5) προκύπτει ότι

$$(\sigma \circ (\varphi \times \varphi))((U \times U) \cap \Delta_M) = (\sigma \circ (\varphi \times \varphi))(U \times U) \cap (\mathbb{R}^m \times 0).$$

Επομένως, για το τυχόν $(x, x) \in \Delta_M$, βρίσκουμε χάρτη $(U \times U, \sigma \circ (\varphi \times \varphi))$ που ικανοποιεί τον Ορισμό 1.1.1, άρα η Δ_M είναι κανονική υποπολλαπλότητα, διάστασης m , της $2m$ -διάστατης πολλαπλότητας $M \times M$.

2) Ο εφαπτόμενος χώρος $T_x M$ ($x \in M$) είναι κανονική υποπολλαπλότητα, διάστασης m , της εφαπτόμενης δέσμης TM (αν $\dim M = m$).

Πράγματι, για το $x \in M$ υπάρχει χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ της M με $x \in U$. Συνεπώς ορίζεται ο αντίστοιχος χάρτης $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ της TM (βλ. [4, Θεώρημα 2.4.3]) με

$$\Phi(u) := (\varphi(y), \overline{\varphi}_y(u)), \quad \text{αν } u \in T_y M \text{ και } \overline{\varphi}_y: T_y T \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m.$$

Ο χάρτης $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ καλύπτει ολόκληρο τον εφαπτόμενο χώρο $T_x M$, άρα

$$\pi^{-1}(U) \cap T_x M = T_x M.$$

Για τον ίδιο χάρτη έχουμε ότι

$$\Phi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \quad (\text{ανοιχτό})$$

και

$$(1.1.6) \quad \begin{aligned} \Phi(\pi^{-1}(U) \cap T_x M) &= \Phi(T_x M) = \{(\varphi(x), \overline{\varphi}(u)) \mid u \in T_x M\} \\ &= \{\varphi(x)\} \times \overline{\varphi}_x(T_x M) = \{\varphi(x)\} \times \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι οι προηγούμενες εκφράσεις ουσιαστικά αποδεικνύουν ότι, για κάθε $v \in T_x M$, βρίσκουμε χάρτη [πάντοτε τον ίδιο $(\pi^{-1}(U), \Phi)$], που ικανοποιεί ουσιαστικά την ιδιότητα **(ΥΠ. 2)** της Πρότασης 1.1.2.

Για να είμαστε, πιο τυπικά, σύμφωνα με την **(ΥΠ. 2)** θα πρέπει να βρούμε στο τελευταίο μέλος της (1.1.6) την έκφραση $\mathbb{R}^m \times 0$ αντί της $\{\varphi(x)\} \times \mathbb{R}^m$. Αυτό γίνεται αφ' ενός με κατάλληλη μεταφορά του χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ και αφ' ετέρου με εφαρμογή της απεικόνισης συμμετρίας. Ακριβέστερα, αντί του $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ θα θεωρήσουμε τον χάρτη $(\pi^{-1}(U), \tilde{\Phi})$ όπου η απεικόνιση $\tilde{\Phi}$ προκύπτει από το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow \tilde{\Phi} & & \downarrow S \\ \mathbb{R}^m \times B & \xleftarrow{id_{\mathbb{R}^m} \times \tau} & \mathbb{R}^m \times \varphi(U) \end{array}$$

Διάγραμμα 1.6

δηλ. $\tilde{\Phi} = (id_{\mathbb{R}^m} \times \tau) \circ S \circ \Phi$, όπου

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m: h \mapsto h - \varphi(x) \quad (\text{αμφιδιαφόριση}), \\ B &:= \tau(\varphi(U)) \subset \mathbb{R}^m \quad (\text{ανοιχτό}), \\ S: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m: (a, b) \mapsto (b, a) \quad (\text{αμφιδιαφόριση}). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε τις σχέσεις

$$\tilde{\Phi}(\pi^{-1}(U)) = \mathbb{R}^m \times B$$

και (όπως πριν, για την Φ)

$$\tilde{\Phi}(T_x M \cap \pi^{-1}(U)) = \mathbb{R}^m \times 0.$$

Άρα παίρνουμε την **(ΥΠ. 2)**.

1.1.14 Σχόλιο. Οι κανονικές υποπολλαπλότητες είναι τα υποσύνολα μιας πολλαπλότητας που "κληρονομούν" με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη διαφορική δομή της πολλαπλότητας, έτσι ώστε η επαγόμενη (από την διαφορική δομή) τοπολογία να συμπίπτει με την σχετική τοπολογία και η φυσική εμφύτευση να είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Σε αντίθεση προς τις κανονικές υποπολλαπλότητες, οι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες (βλ. την επόμενη παράγραφο) δεν έχουν την παραπάνω τοπολογική ιδιότητα.

1.1.15 Ασκήσεις.

1. Αν M και N είναι C^∞ -πολλαπλότητες και $y \in N$ τυχόν σημείο, τότε το σύνολο $M \times \{y\}$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M \times N$.
2. Αν X είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M , τότε

$$T_x X \equiv \{[(\alpha, x)] \in T_x M \mid \text{Im}(\alpha) \subset X\}$$

3. Η διαφορική δομή του $T_x M$ ως κανονικής υποπολλαπλότητας της TM [βλ. Παράδειγμα 1.1.13 (2)] συμπίπτει με τη "φυσιολογική" διαφορική δομή, την οποίαν έχει ως διανυσματικός χώρος.
4. Κάθε διανυσματικός υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V (πεπερασμένης διάστασης) είναι κανονική υποπολλαπλότητα του V .
5. Να αποδειχθεί ότι οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες
 - i) Το X είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M με $\dim X = \dim M$.
 - ii) Το X είναι ανοιχτό υποσύνολο της M .
6. Αν X_i είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M_i ($i = 1, 2$), τότε και η $X_1 \times X_2$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M_1 \times M_2$.
7. Η σφαίρα (επιφάνεια) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$. Ανάλογα και ο κύκλος S^1 είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$.
8. Αν $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ -καμπύλη, τότε το γράφημά της

$$\Gamma_\alpha := \{(t, \alpha(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$. Επιπλέον, ισχύει η σχέση

$$T_{(t, \alpha(t))} \Gamma_\alpha \equiv \Gamma_{T_t \alpha}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

9. Να γενικευτούν τα συμπεράσματα της Άσκησης 8 για μία C^∞ -καμπύλη $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$, όπου M είναι C^∞ -πολλαπλότητα.

10. Να αποδειχθεί η σχέση

$$M_{(x,x)}(\Delta_M) \equiv \Delta_{T_x M}, \quad \forall x \in M.$$

11. (Γενίκευση της 9). Δίνεται μία C^∞ -απεικόνιση $f: M \rightarrow N$. Να αποδειχθεί ότι το γράφημα της f ,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N,$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $M \times N$. Ποιά είναι η διάστασή της; Επιπλέον, να δειχθεί ότι

$$T_{(x,f(x))}\Gamma_f \equiv \Gamma_{T_x f}, \quad \forall x \in M.$$

1.2 Εμφυτεύσεις

Στην παράγραφο αυτή σταθεροποιούμε δύο διαφορετικές πολλαπλότητες $M \equiv (T, \mathcal{A})$ και $N \equiv (N, \mathcal{B})$ με $\dim M = m$ και $\dim N = n$ αντιστοίχως, όπου $m \leq n$.

1.2.1 Ορισμός. Μια C^∞ -απεικόνιση $f: M \rightarrow N$ καλείται **εμφύτευση** (immersion) **στο** $x_o \in M$, αν το σημειακό διαφορικό της (εφαπτομένη απεικόνιση στο x_o) $T_{x_o}f: T_{x_o}M \rightarrow T_{f(x_o)}N$ είναι απεικόνιση 1-1. Η f θα καλείται (απλώς) **εμφύτευση** αν είναι εμφύτευση σε κάθε σημείο $x \in M$.

Από τη γνωστή σχέση

$$\dim(T_{x_o}M) = \dim(\ker(T_{x_o}f)) + \dim(\operatorname{Im}(T_{x_o}f))$$

και την υπόθεση, προκύπτει ότι [αφού $\ker(T_{x_o}f) = 0$]

$$\operatorname{rank}_{x_o}(f) := \dim(\operatorname{Im}(T_{x_o}f)) = m.$$

Το προηγούμενο δικαιολογεί και την έκφραση "μια εμφύτευση είναι **απεικόνιση μέγιστης τάξης**" (βλ. και την έννοια της εμβάπτισης, στην επόμενη Παράγραφο 1.3, όπου θα είναι $\operatorname{rank}_{x_o}(f) = n$).

1.2.2 Λήμμα. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

i) Η f είναι εμφύτευση στο $x_o \in M$.

ii) Υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U_o του $x_o \in M$, W_o του $0 \in \mathbb{R}^k$ ($k := n - m$) και V_o του $f(x_o) \in N$, καθώς και μια αμφιδιαφόριση $g: U_o \times W_o \xrightarrow{\cong} V_o$, τέτοια ώστε $f(x) = g(x, 0)$, για κάθε $x \in U_o$. Δηλαδή $f|_{U_o} = g \circ J$, όπου J είναι η φυσική εμφύτευση (σε επίπεδο πολλαπλοτήτων) $U_o \ni x \mapsto (x, 0) \in U_o \times W_o$.

Η συνθήκη ii) απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U_o & \xrightarrow{f} & V_o \\ & \searrow J & \uparrow \cong g \\ & & U_o \times W_o \end{array}$$

Διάγραμμα 1.7

Επομένως, κατά το Λήμμα, έχουμε ότι, μέσω κατάλληλης ταύτισης (με τη βοήθεια της g), η f συμπίπτει με τη φυσική εμφύτευση (σε μια περιοχή του υπ' όψιν σημείου x_o). Έτσι, λέμε ότι *τοπικά μια εμφύτευση είναι η φυσική εμφύτευση*.

Απόδειξη. i) $\Rightarrow$ ii): Επειδή η f είναι C^∞ στο x_o , υπάρχουν χάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, τέτοιοι ώστε $x_o \in U$, $f(U) \subset V$ και η τοπική παράσταση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

να είναι C^∞ στο $\varphi(x_o)$. Επίσης, επειδή

$$\text{rank}_{x_o}(f) = \dim(\text{Im}(T_{x_o}M)) = m \leq n,$$

υπάρχει γραμμικός υπόχωρος F του $T_{f(x_o)}N$ με $\dim F = k := n - m$, και τέτοιος ώστε

$$T_{f(x_o)}N = T_{x_o}f(T_{x_o}M) \oplus F.$$

Εφαρμόζοντας τον γραμμικό ισομορφισμό $\bar{\psi}: T_{f(x_o)}N \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ στην τελευταία σχέση, έχουμε ότι

$$\mathbb{R}^n = \bar{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M)) \oplus \bar{\psi}(F)$$

και

$$\dim [\bar{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M))] = m, \quad \dim \bar{\psi}(F) = k = n - m.$$

Κατασκευάζουμε και έναν γραμμικό ισομορφισμό $\xi: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, που να έχει την ιδιότητα

$$\xi(\bar{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M))) = \mathbb{R}^m \times 0, \quad \xi(\bar{\psi}(F)) = 0 \times \mathbb{R}^k.*$$

*Αυτό γίνεται με τον εξής κλασικό τρόπο: Σταθεροποιούμε δύο βάσεις $\{u_i \mid i = 1, \dots, m\}$ και $\{u_j \mid j = 1, \dots, k\}$ των $\bar{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M))$ και $\bar{\psi}(F)$ αντιστοίχως, και ορίζουμε τον ξ από την απαίτηση να είναι $\xi(u_i) = e_i$ και $\xi(u_j) = e_{m+j}$, αν $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+k=n})$ είναι η φυσική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Σχηματικά, τα προηγούμενα βήματα της απόδειξης απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 T_{f(x_o)}N & = & T_{x_o}f(T_{x_o}M) \oplus F \\
 \downarrow \overline{\psi} & & \downarrow \overline{\psi} \\
 \mathbb{R}^n & = & \overline{\psi}(T_{x_o}f(T_{x_o}M)) \oplus \overline{\psi}(F) \\
 \downarrow \xi & & \downarrow \xi \\
 \mathbb{R}^n & = & (\mathbb{R}^m \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^k)
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.8

Επειδή η απεικόνιση ξ είναι αμφιδιαφόριση, μπορούμε να ορίσουμε και την επίσης διαφορίσιμη απεικόνιση

$$h: U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n : (x, a) \mapsto h(x, a) := (\xi \circ \psi \circ f) + (0, a)$$

όπου εννοείται ότι $(0, a) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^n$. Υπολογίζουμε το διαφορικό της h στο σημείο $(x_o, 0)$. Βάσει του τύπου του Leibniz είναι

$$(1.2.1) \quad T_{(x_o, 0)}h(u, v) = T_{x_o}h_o(u) + T_oh_{x_o}(v),$$

για κάθε $(u, v) \in T_{(x_o, 0)}(U \times \mathbb{R}^k) \equiv T_{x_o}M \times T_o\mathbb{R}^k$. Για τις μερικές απεικονίσεις της σχέσης (1.2.1) βρίσκουμε ότι είναι:

$$h_o: U \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad h_o(x) = (\xi \circ \psi \circ f)(x) + c_1,$$

$$h_{x_o}: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad h_{x_o}(b) = c_2 + (0, b),$$

όπου $c_1 = (0, 0)$ και $c_2 = (\xi \circ \psi \circ f)(x_o)$ σταθερές. Επομένως, $h_o = \xi \circ \psi \circ f$ και $h_{x_o} = c_2 + (0, id_{\mathbb{R}^k})$, οπότε

$$(1.2.2) \quad T_{x_o}h_o(u) = T_{x_o}(\xi \circ \psi \circ f)(u),$$

$$(1.2.3) \quad T_oh_{x_o}(v) = (0, v).$$

Άρα, οι (1.2.2) και (1.2.3) μετασχηματίζουν την (1.2.1) διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
 T_{(x_o, 0)}h(u, v) &= T_{x_o}(\xi \circ \psi \circ f)(u) + (0, v) \\
 &= (T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi) \circ T_{x_o}f)(u) + (0, v) \\
 &= T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi)(T_{x_o}f(u)) + (0, v).
 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το διαφορικό της $\xi \circ \psi$ στην προηγούμενη έκφραση. Επειδή $\xi \circ \psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, χρησιμοποιώντας τους τοπικούς χάρτες (V, ψ) και $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$, η τοπική παράσταση της $\xi \circ \psi$ είναι η $id_{\mathbb{R}^n} \circ (\xi \circ \psi) \circ \psi^{-1} = \xi$. Συνεπώς, θέτοντας $z = \xi(\psi(f(x_o)))$, το αντίστοιχο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_{f(x_o)}N \equiv T_{f(x_o)}V & \xrightarrow{T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi)} & T_z\mathbb{R}^n \\ \bar{\psi} \downarrow & & \downarrow \bar{id}_{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D\xi(\psi(f(x_o)))} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 1.9

συνεπάγεται ότι

$$T_{f(x_o)}(\xi \circ \psi) = \bar{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \xi \circ \bar{\psi},$$

αφού η ξ είναι γραμμική απεικόνιση, άρα $D\xi(\psi(f(x_o))) = \xi$. Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} T_{(x_o,0)}h(u, v) &= (\bar{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ \xi \circ \bar{\psi})(T_{x_o}f(u)) + (0, v) \\ &= \bar{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1}[(\xi \circ \bar{\psi})(T_{x_o}f(u))] + (0, v) \end{aligned}$$

Επειδή $\bar{id}_{\mathbb{R}^n} \equiv \bar{id}_{\mathbb{R}^m} \times \bar{id}_{\mathbb{R}^k}$, η παραπάνω σχέση (μαζί με τις ιδιότητες της ξ) οδηγεί στην

$$(1.2.4) \quad \bar{id}_{\mathbb{R}^n}(T_{(x_o,0)}h(u, v)) = (\xi \circ \bar{\psi} \circ T_{x_o}f)(u) + (0, \bar{id}_{\mathbb{R}^k}(v))$$

με

$$(\xi \circ \bar{\psi} \circ T_{x_o}f)(u) + (0, \bar{id}_{\mathbb{R}^k}(v)) \in (\mathbb{R}^m \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^k) \equiv \mathbb{R}^n.$$

Από την (1.2.4) προκύπτει αμέσως ότι η

$$T_{(x_o,0)}h: T_{x_o}M \times T_o\mathbb{R}^k \longrightarrow T_{h(x_o,0)}\mathbb{R}^n$$

είναι γραμμική 1-1 απεικόνιση μεταξύ χώρων της ίδιας διάστασης ($:n$), άρα είναι γραμμικός ισομορφισμός, συνεπώς και η απεικόνιση h θα είναι μία τοπική αμφιδιαφόριση στο $(x_o, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $A \subset U \times \mathbb{R}^k$ και $B \subset \mathbb{R}^n$, με $(x_o, 0) \in A$ και $h(x_o, 0) = (\xi \circ \psi \circ f)(x_o) \in B$, έτσι ώστε $h|_A: A \rightarrow B$ να είναι αμφιδιαφόριση. Θέτουμε $B_1 := B \cap (\xi \circ \psi)(V)$ ($B_1 \neq \emptyset$, αφού $f(x_o) \in V$) και $A_1 := h^{-1}(B_1) \subset A$, οπότε $(x_o, 0) \in A_1$. Επομένως, θα

υπάρχουν ανοιχτά $U_o \subset M$, $W_o \subset M$ και $W_o \subset \mathbb{R}^k$, με $x_o \in U_o$, $0 \in W_o$ και $U_o \times W_o \subset A_1$. Θέτουμε ακόμη

$$B_o := h(U_o \times W_o) \subset B_1 \subset (\xi \circ \psi)(V),$$

μέσω του οποίου ορίζουμε την ανοιχτή περιοχή του $f(x_o)$

$$V_o := (\xi \circ \psi)^{-1}(B_o) \subset V$$

και την απεικόνιση

$$g: U_o \times W_o \longrightarrow V_o \quad \text{με} \quad g := (\xi \circ \psi)^{-1} \circ h|_{U_o \times W_o}.$$

Η g είναι αμφιδιαφύριση ως σύνθεση αμφιδιαφορίσεων και ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x, 0) = (\xi \circ \psi)^{-1}(h(x, 0)) = (\psi^{-1} \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \psi \circ f)(x) = f(x); \quad x \in U_o,$$

που αποδεικνύει πλήρως την ii).

Αντιστρόφως, αν ισχύει η ii), από τη σχέση $f|_{U_o} = g \circ J$ προκύπτει ότι

$$(1.2.5) \quad T_{x_o} f \equiv T_{x_o} (f|_{U_o}) = T_{(x_o, 0)} g \circ T_{x_o} J.$$

Επειδή $J = (id_{U_o}, C_o)$, όπου C_o είναι η σταθερή απεικόνιση $C_o(x) = 0$, τελικά βρίσκουμε ότι $T_{x_o} J = (id_{T_{x_o} M}, 0)$ από την οποία έχουμε ότι $T_{x_o} J$ είναι απεικόνιση 1-1. Άρα και η (1.2.5) είναι 1-1, αφού, λόγω της αμφιδιαφύρισης g , η $T_{(x_o, 0)} g$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. $\square$

Ας σχολιάσουμε λίγο το πρώτο μέρος της προηγούμενης απόδειξης, παραθέτοντας και το Σχήμα 1.2 στην επόμενη σελίδα. Εκείνο που ουσιαστικά προσπαθούμε να κάνουμε είναι να μικρύνουμε κατάλληλα το V , έτσι ώστε ο περιορισμός του (μέσω αμφιδιαφύρισης) να πάρει τη μορφή ενός γινομένου $U_o \times W_o$, όπου και το U_o είναι περιορισμός του U . Αυτό θα γίνει με αντίστοιχο περιορισμό του $\psi(V)$ και ανάλυσή του (μέσω ισομορφίας) σε γινόμενο ανοιχτών υποσυνόλων του

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \equiv (\mathbb{R}^m \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^{n-m}).$$

Οι προηγούμενοι Ευκλείδειοι χώροι είναι μοντέλα εφαπτομένων χώρων, οπότε η πιο πάνω ανάλυση γίνεται μέσω κατάλληλης ανάλυσης/διάσπασης των αντίστοιχων εφαπτόμενων χώρων. Το ίδιο σχήμα απεικονίζει και την τελική διαδικασία

The diagram illustrates a complex relationship between various mathematical spaces and mappings. It features several nested sets and points, connected by arrows representing mappings.

- Top Left:** A region in $\mathbb{R}^k$ is shown, bounded by a vertical line and a horizontal line. A point 0 is marked on the horizontal line. A region A is shown, containing a smaller region A_l . A shaded square region $U_o \times W_o$ is centered at x_o . The region A is also labeled $U \times \mathbb{R}^k$. A mapping g is shown as a curved arrow from this region to the top right.
- Top Right:** A set N is shown, containing a region V . Inside V is a shaded region V_o containing a point $f(x_o)$. A mapping ψ is shown as a curved arrow from N to the middle right.
- Middle Right:** A set $\psi(V)$ is shown, containing a shaded region. A mapping ξ is shown as a curved arrow from this set to the bottom right.
- Bottom Left:** A region M is shown, containing a point x_o . A mapping h is shown as a curved arrow from this region to the bottom right.
- Bottom Right:** A set $\xi(\psi(V))$ is shown, containing a region B . Inside B is a shaded region B_o containing a point $\xi(\psi(f(x_o)))$. A region B_l is also shown, overlapping with B . The entire bottom right section is labeled $\mathbb{R}^n$.

Σχήμα 1.2

1.2.3 Θεώρημα. Έστω $f: M \rightarrow N$ μία C^∞ -απεικόνιση. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- ii) Υπάρχουν χάρτες $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$, $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ με $f(U_o) \subseteq V_o$ και $\psi_o(V_o) = \varphi_o(U_o) \times W_o \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, όπου $k = n - m$ και W_o ανοιχτή περιοχή του $0 \in \mathbb{R}^k$,

εις τρόπον ώστε η αντίστοιχη τοπική παράσταση της f ,

$$\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1}: \varphi_o(U_o) \longrightarrow \psi_o(V_o) = \varphi_o(U_o) \times W_o,$$

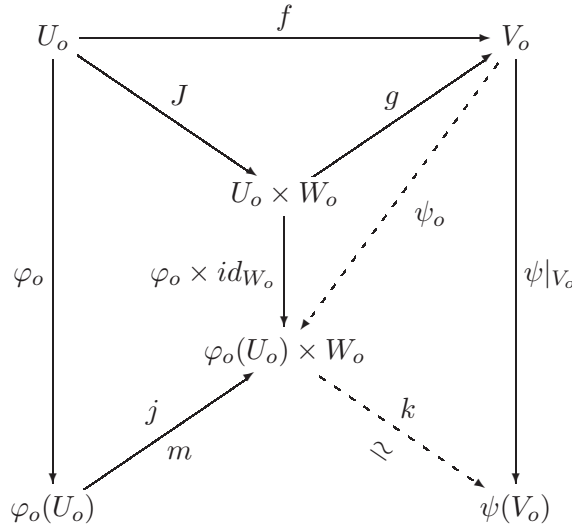
να είναι η κανονική εμφύτευση $j: a \mapsto (a, 0)$. Επομένως, $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$.^{**}

iii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_o του $x_o \in M$ και κανονική υποπολυπλοκότητα $P \subset N$ με $\dim P = m$, έτσι ώστε η $f|_{U_o}: U_o \rightarrow P$ να είναι αμφιδιαφόριση.

Απόδειξη. i) $\Rightarrow$ ii): Εφ' όσον η f είναι εμφύτευση στο x_o , θα υπάρχουν οι περιοχές U_o, V_o και W_o του Λήμματος 1.2.2, όπου τα U_o και V_o έχουν προκύψει από τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) , που αναφέρονται στην απόδειξη του ίδιου λήμματος. Θεωρούμε τώρα τους χάρτες

$$(U_o, \varphi_o|_{U_o}) \text{ και } (V_o, \psi_o), \text{ με } \psi_o = (\varphi_o \times id_{W_o}) \circ g^{-1},$$

όπου g είναι η αμφιδιαφόριση επίσης του Λήμματος 1.2.2 (βοηθητικά συμπληρώνουμε το Διάγραμμα 1.9 στο επόμενο).



$$\text{όπου } m := \psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1},$$

$$k := \psi|_{V_o} \circ g \circ (\varphi \times id_{W_o})^{-1}$$

Διάγραμμα 1.10

Επειδή $f(U_o) \subset V_o$ (όπως ήδη έχουμε από το ίδιο λήμμα), ορίζεται η τοπική παράσταση της f μέσω των παραπάνω χαρτών, δηλαδή η $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1}$. Τότε, βάσει

^{**}Σημειώστε τη διαφορά μεταξύ της εμφύτευσης J του Λήμματος 1.2.2 της j [βλ. επίσης και τη σχέση (1.1.3)].

της συνθήκης ii) του Λήμματος 1.2.2 και για οποιοδήποτε $\alpha \in \varphi_o(U_o)$, είναι

$$\begin{aligned} (\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\alpha) &= [(\varphi_o \times id_{W_o}) \circ g^{-1}](f(\varphi_o^{-1}(\alpha))) \\ &= [(\varphi_o \times id_{W_o}) \circ g^{-1}](g(\varphi_o^{-1}(\alpha), 0)) \\ &= (\alpha, 0), \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Θέτουμε $P := f(U_o)$. Λόγω της υπόθεσης $f(U_o) \subset V_o$, είναι τελικά $P \subset V_o \subset N$. Ο προηγούμενος χάρτης (V_o, ψ_o) καλύπτει ολόκληρο το P και, από την κατασκευή του, έχει τη μορφή $\psi_o(V_o) = \varphi_o(U_o) \times W_o$, με $\varphi_o(U_o) \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $W_o \subset \mathbb{R}^k$ ανοιχτό. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \psi_o(V_o \cap P) &= \psi_o(P) = \psi_o(f(U_o)) \\ &= (\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(U_o)) \\ &= j(\varphi_o(U_o)) = \varphi_o(U_o) \times 0 \end{aligned}$$

Άρα το (V_o, ψ_o) είναι χάρτης της N που ικανοποιεί την **ΥΠ. 2**, για όλα τα σημεία του P , οπότε το P είναι κανονική υποπολλαπλότητα της N , διάστασης m . Σημειώνεται ότι η διαφορετική δομή του P ορίζεται από τον (μέγιστο) άτλαντα

$$\{(V_o \cap P = P, p_{1,0} \circ \psi_o|_P)\}'.$$

Επειδή η $f: M \rightarrow N$ είναι $\mathcal{C}^\infty$, θα είναι $\mathcal{C}^\infty$ και η $f|_{U_o}: U_o \rightarrow N$, άρα και η $f|_{U_o}: U_o \rightarrow P$, αφού $f(U_o) = P$ και P κανονική υποπολλαπλότητα της N (βλ. σχετικά και την Πρόταση 1.1.12).

Η $f|_{U_o}: M \rightarrow P$ είναι 1-1 (αφού η τοπική της παράσταση $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$ είναι 1-1). Επομένως, υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $(f|_{U_o})^{-1}: P \rightarrow U_o$. Δείχνουμε ότι και αυτή είναι απεικόνιση $\mathcal{C}^\infty$: Χρησιμοποιώντας τον ολικό χάρτη $(P, p_{1,0} \circ \psi_o|_P)$, που αναφέρθηκε στον παραπάνω σχολιασμό, η τοπική παράσταση της $(f|_{U_o})^{-1}$ είναι η

$$\begin{aligned} \varphi_o \circ (f|_{U_o})^{-1} \circ (p_{1,0} \circ \psi_o|_P)^{-1} &= \varphi_o \circ (f|_{U_o})^{-1} \circ (\psi_o^{-1} \circ j) \\ &= (\varphi_o \circ (f|_{U_o})^{-1} \circ \psi_o^{-1}) \circ j \\ &= (\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})^{-1} \circ j \\ &= j^{-1} \circ j = id_{\varphi_o(U_o)} \end{aligned}$$

[Θυμίζουμε ότι η συγκεκριμένη εμφύτευση $j: \alpha \mapsto (\alpha, 0)$ αντιστρέφεται]. Συνεπώς η $(f|_{U_o})^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ (σε όλο το πεδίο ορισμού της), δηλαδή τελικά η $f|_{U_o}: U_o \rightarrow P$ είναι αμφιδιαφόριση.

iii) $\Rightarrow$ i): Εφ' όσον η $f|_{U_o}: U_o \rightarrow P$ είναι αμφιδιαφόριση και $\dim P = m = \dim M$, από τον γραμμικό ισομορφισμό

$$T_{x_o} f \equiv T_{x_o}(f|_{U_o}): T_{x_o} U_o \equiv T_{x_o} M \xrightarrow{\simeq} T_{f(x_o)} P$$

προκύπτει ότι

$$\dim (T_{x_o} f(T_{x_o} M)) = \dim (T_{f(x_o)} P) = m,$$

άρα

$$\dim (\ker(T_{x_o} f)) = \dim (T_{x_o} M) - \dim (T_{x_o} f(T_{x_o} M)) = 0,$$

απ' όπου $\ker(T_{x_o} f) = \{0\}$, δηλαδή καταλήγουμε στην i). $\square$

1.2.4 Πρόρισμα. Η $f: M \rightarrow N$ είναι εμφύτευση αν και μόνον αν διαθέτει **τοπικά αριστερή αντίστροφο**, δηλαδή, για κάθε $x \in M$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή $A \subset M$ του x , ανοιχτή περιοχή $B \subset N$ του $f(x)$ και C^∞ -απεικόνιση $\sigma: B \rightarrow A$ τέτοια ώστε $f(A) \subset B$ και $\sigma \circ f|_A = id_A$.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x_o \in M$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.3, υπάρχουν κατάλληλοι χάρτες (U_o, φ_o) και (V_o, ψ_o) των x_o και $f(x_o)$, έτσι ώστε $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = j$ (βλ. και το επόμενο διάγραμμα).

$$\begin{array}{ccc} U_o & \xrightarrow{f} & V_o \\ \varphi_o \downarrow & & \downarrow \psi_o \\ \varphi_o(U_o) & \xrightarrow{j} & \varphi_o(U_o) \times W_o \end{array}$$

Διάγραμμα 1.11

Θέτουμε $A := U_o$, $B := V_o$, και ορίζουμε την απεικόνιση $\sigma: B \rightarrow A$ μέσω της σχέσης

$$\sigma(y) := \varphi_o^{-1}(p_1(\psi_o(y))); \quad y \in B,$$

όπου $p_1: \varphi_o(U_o) \times W_o \rightarrow \varphi_o(U_o)$ είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα. Προφανώς η σ είναι C^∞ -απεικόνιση και ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} (\sigma \circ f)(x) &= \sigma(f(x)) = (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(\psi_o(f(x))) \\ &= (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1}(\varphi_o(x))) \\ &= (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(j(\varphi_o(x))) \\ &= (\varphi_o^{-1} \circ p_1)(\varphi_o(x), 0) = x, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in A$. Άρα $\sigma \circ f|_A = id_A$.

Αντίστροφα, η σχέση $\sigma \circ f|_A = id_A$ συνεπάγεται ότι

$$T_{x_o}(\sigma \circ f|_A) = T_{x_o}(id_A) = id_{T_{x_o}A} \equiv id_{T_{x_o}M},$$

επομένως

$$id_{T_{x_o}M} = T_{f(x_o)}\sigma \circ T_{x_o}(f|_A) = T_{f(x_o)}\sigma \circ T_{x_o}f,$$

απ' όπου προκύπτει ότι η $T_{x_o}f$ είναι όντως 1-1 (και παρεπιμπτόντως η $T_{f(x_o)}\sigma$ επί), άρα η f είναι εμφύτευση στο x_o και ανάλογα σε ολόκληρο το M . $\square$

1.2.5 Πρόρισμα. Το σύνολο

$$\mathcal{J} := \{x \in M : f \text{ είναι εμφύτευση στο } x\}$$

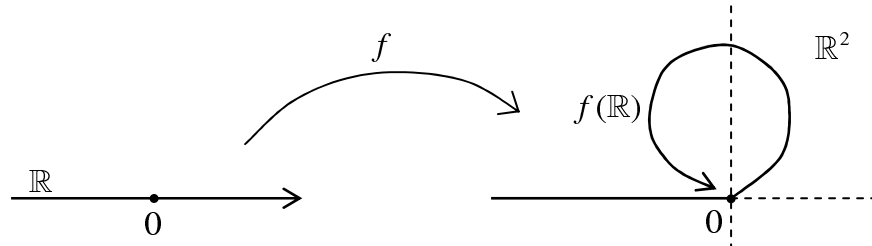
είναι ανοιχτό υποσύνολο του M .

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x_o \in \mathcal{J}$. Σύμφωνα με την περίπτωση iii) του Θεωρήματος 1.2.3, θα υπάρξει αμφιδιαμόρφωση $f|_{U_o} : U_o \xrightarrow{\cong} P$, όπου U_o περιοχή του x_o . Τότε όμως θα ισχύει η συνθήκη iii) του ίδιου θεωρήματος και για κάθε $x \in U_o$, άρα η f είναι εμφύτευση και σε κάθε $x \in U_o$, οπότε $U_o \subset \mathcal{J}$. Δηλαδή, για το τυχόν x_o βρίσκουμε ανοιχτό $U_o \subset M$ με $x_o \in U_o \subset \mathcal{J}$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. $\square$

1.2.6 Πρόταση. Αν X είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M , τότε η κανονική εμφύτευση $i : X \hookrightarrow M$ είναι εμφύτευση (με την έννοια του Ορισμού 1.2.1).

Απόδειξη. Ήμηση συνέπεια του Πορίσματος 1.1.9. $\square$

1.2.7 Σχόλια. Στο Θεώρημα 1.2.3 είδαμε ότι τοπικά η εικόνα μιας εμφύτευσης είναι κανονική υποπολλαπλότητα. Όμως αυτή η ιδιότητα δεν ολοκληρώνεται, δηλαδή ακόμη και αν η απεικόνιση είναι παντού εμφύτευση και 1-1, δεν συναγεται αναγκαία ότι ολόκληρη η εικόνα της είναι κανονική υποπολλαπλότητα του πεδίου τιμών. Ένα κλασικό αντιπαράδειγμα δίνεται από την απεικόνιση f του επομένου σχήματος:



Σχήμα 1.3

Εδώ θεωρούμε την απεικόνιση f η οποία απεικονίζει το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^2$ και η εικόνα της είναι η συνεχής γραμμή στο δεξιό μέρος του σχήματος. Η f είναι εμφύτευση παντού αλλά η εικόνα της δεν είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$. Αυτό φαίνεται από μια στοιχειώδη εξέταση των περιοχών του 0, στο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και στην εικόνα $f(\mathbb{R})$.

Γενικά, αν $f: M \rightarrow N$ είναι εμφύτευση 1-1, η εικόνα $f(M) \subset N$ καλείται **εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα**. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει (εκ μεταφοράς από την M) δομή πολλαπλότητας επί του $f(M)$, αλλά αυτή επάγεται μία τοπολογία που δεν συμπίπτει αναγκαία με την σχετική τοπολογία. Κάτι τέτοιο συμβαίνει αν και μόνον αν η f είναι ομοιομορφισμός από την M στην $f(M)$. Σημειώνουμε ότι μία εμφύτευση 1-1 καλείται **κατάκλιση** (imbedding).

Ειδικότερα, αν M είναι υποσύνολο μιας πολλαπλότητας N και το M έχει μία δομή πολλαπλότητας, έτσι ώστε η $i: X \hookrightarrow M$ να είναι εμφύτευση, τότε το M είναι μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της N . Φυσικά η τοπολογία που εισάγει η διαφορική δομή επί του M δεν συμπίπτει με τη σχετική τοπολογία (ως υποχώρου του N).

Συναφώς αναφέρουμε το εξής συμπέρασμα:

Έστω $f: M \rightarrow N$ μία 1-1 C^∞ -απεικόνιση και $P \subset N$. Τότε το P είναι κανονική υποπολλαπλότητα της N τότε και μόνον τότε αν $P = f(M)$ και $f: M \rightarrow P$ είναι ομοιομορφισμός.

1.2.8 Ασκήσεις.

1. Αν M και N είναι C^∞ -πολλαπλότητες, τότε η απεικόνιση

$$i_y: M \longrightarrow M \times N \quad \text{με} \quad i_y(x) := (x, y),$$

για ένα $y \in N$ σταθερό, είναι εμφύτευση.

2. Κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο είναι εμφύτευση.
3. Αν $f: M \rightarrow N_1$ είναι εμφύτευση και $g: M \rightarrow N_2$ τυχαία C^∞ -απεικόνιση, τότε η $(f, g): M \rightarrow N_1 \times N_2$ είναι εμφύτευση.
4. Αν $f_i: M_i \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) είναι εμφυτεύσεις, τότε και η $f_1 \times f_2$ είναι εμφύτευση.
5. Να αιτιολογηθεί γιατί η f , που δίνεται στα Σχόλια 1.2.7, είναι εμφύτευση και γιατί η εικόνα της δεν είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2$.

1.3 Εμβάπτσεις

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, σταθεροποιούμε δύο πολλαπλότητες $M \equiv (M, \mathcal{A})$ και $N \equiv (N, \mathcal{B})$, όπου όμως τώρα υποθέτουμε ότι $\dim M = m \geq n = \dim N$.

1.3.1 Ορισμός. Μια C^∞ -απεικόνιση $f: M \rightarrow N$ καλείται **εμβάπτιση** (submersion) **στο** $x_o \in M$ αν η $T_{x_o}f: T_{x_o}M \rightarrow T_{x_o}N$ είναι απεικόνιση επί. Η f θα καλείται **εμβάπτιση** αν είναι εμβάπτιση σε κάθε σημείο $x \in M$.

Από τον προηγούμενο Ορισμό προκύπτει ότι

$$\text{rank}_{x_o}(f) := \dim(T_{x_o}f(T_{x_o}M)) = \dim(T_{f(x_o)}N) = n.$$

Επομένως, μία εμβάπτιση είναι απεικόνιση μέγιστης τάξης. Επίσης, είναι και

$$(1.3.1) \quad \dim(\ker(T_{x_o}f)) = m - n =: k$$

1.3.2 Λήμμα. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- i) Η f είναι εμβάπτιση στο $x_o \in M$.
- ii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U_o \subset M$ του x_o , ανοιχτή περιοχή $V_o \subset N$ του $f(x_o)$, ανοιχτή περιοχή $W_o \subset \mathbb{R}^k$ του 0 και αμφιδιαφόριση $g: U_o \xrightarrow{\cong} V_o \times W_o$, έτσι ώστε $f|_{U_o} = p_1 \circ g$, όπου $p_1: V_o \times W_o \rightarrow V_o: (\alpha, b) \mapsto \alpha$ είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα.

Η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} U_o & \xrightarrow{f} & V_o \\ & \searrow g \cong & \downarrow p_1 \\ & & V_o \times W_o \end{array}$$

Διάγραμμα 1.12

Επομένως, μέσω κατάλληλης ταύτισης (με τη βοήθεια της αμφιδιαφόρισης g), η f συμπίπτει τοπικά (δηλαδή σε μια περιοχή του x_o) με την πρώτη προβολή (: προβολή στον πρώτο παράγοντα). Δηλαδή, όπως λέμε, *τοπικά μία εμβάπτιση είναι μία προβολή*.

Απόδειξη. i) $\Rightarrow$ ii): Ακολουθούμε μία διαδικασία ανάλογη με αυτήν της απόδειξης του Λήμματος 1.2.2: Λόγω της διαφορισιμότητας της f στο x_o , θα υπάρχουν χάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x_o \in U$, $f(U) \subset V$, και έτσι ώστε η τοπική παράσταση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \quad (k = m - n)$$

να είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο $\varphi(x_o)$. Επίσης, λόγω της (1.3.1), υπάρχει γραμμικός υπόχωρος $\mathbb{E} \leq T_{x_o}M$ με $\dim \mathbb{E} = n$ και τέτοιος ώστε

$$T_{x_o}M = \mathbb{E} \oplus \ker(T_{x_o}f),$$

οπότε και

$$\mathbb{R}^m = \overline{\varphi}(T_{x_o}M) = \overline{\varphi}(\mathbb{E}) \oplus \overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f)),$$

με

$$\dim(\overline{\varphi}(\mathbb{E})) = n, \quad \dim \overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f)) = k = m - n.$$

Στη συνέχεια κάνουμε ένα μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^m$ έτσι ώστε ο $\overline{\varphi}(\mathbb{E})$ να απεικονίζεται ακριβώς στον $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times 0$ και ο $\overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f))$ στον $\mathbb{R}^k \equiv 0 \times \mathbb{R}^k$, δηλαδή βρίσκουμε έναν γραμμικό ισομορφισμό $\xi: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$, έτσι ώστε

$$\xi(\overline{\varphi}(\mathbb{E})) = \mathbb{R}^n \times 0 \quad \text{και} \quad \xi(\overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f))) = 0 \times \mathbb{R}^k$$

(βλ. την ανάλογη απόδειξη του Λήμματος 1.2.2 και τη σχετική υποσημείωση). Σχηματικά έχουμε το επόμενο βοηθητικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} T_{x_o}M & = & \mathbb{E} \oplus \ker(T_{x_o}f) \\ \downarrow \overline{\varphi} & & \downarrow \overline{\varphi} \\ \mathbb{R}^m & = & \overline{\varphi}(\mathbb{E}) \oplus \overline{\varphi}(\ker(T_{x_o}f)) \\ \downarrow \xi & & \downarrow \xi \\ \mathbb{R}^m & = & (\mathbb{R}^n \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^k) \end{array}$$

Διάγραμμα 1.13

Μετά από αυτά ορίζουμε την απεικόνιση

$$(1.3.2) \quad h: U \longrightarrow V \times \mathbb{R}^k: x \mapsto h(x) := (f(x), (p_2 \circ \xi \circ \varphi)(x)),$$

όπου $p_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι η προβολή στον δεύτερο παράγοντα. Η h είναι $\mathcal{C}^\infty$ και το διαφορικό της στο $x_o \in U$ είναι η απεικόνιση

$$T_{x_o}h: T_{x_o}U \equiv T_{x_o}M \longrightarrow T_{h(x_o)}(V \times \mathbb{R}^k) \equiv T_{f(x_o)}N \times T_q\mathbb{R}^k,$$

όπου, για ευκολία, έχουμε θέσει $q = (p_2 \circ \xi \circ \varphi)(x_o)$. Το προηγούμενο διαφορικό, για τυχόν $u \in T_{x_o}M = \mathbb{E} \oplus \ker(T_{x_o}f)$ με $u = u_1 + u_2$, όπου $u_1 \in \mathbb{E}$ και $u_2 \in \ker(T_{x_o}f)$, δίνει ότι

$$\begin{aligned} (1.3.3) \quad T_{x_o}h(u) &= (T_{x_o}f(u_1 + u_2), T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2)) \\ &= (T_{x_o}f(u_1), T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2)) \end{aligned}$$

Επειδή $p_2 \circ \xi \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, η τοπική παράστασή της μέσω των χαρτών (U, φ) και $(\mathbb{R}^k, id_{\mathbb{R}^k})$ είναι η

$$id_{\mathbb{R}^k} \circ (p_2 \circ \xi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = p_2 \circ \xi|_{\varphi(U)}: \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Άρα, μέσω του μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} T_{x_o}M & \xrightarrow{T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)} & T_q\mathbb{R}^k \\ \downarrow \overline{\varphi} & & \downarrow \overline{id}_{\mathbb{R}^k} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(p_2 \circ \xi)(\varphi(x_o))} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

Διάγραμμα 1.14

μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή $T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2)$. Ακριβέστερα, βρίσκουμε ότι διαδοχικά είναι:

$$\begin{aligned} T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2) &= [\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ D(p_2 \circ \xi)(\varphi(x_o)) \circ \overline{\varphi}](u_1 + u_2) \\ \text{[αφού } p_2 \circ \xi \text{ γραμμική]} &= [\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ (p_2 \circ \xi) \circ \overline{\varphi}](u_1 + u_2) \\ &= (\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_2)(\xi(\overline{\varphi}(u_1)) + \xi(\overline{\varphi}(u_2))) \end{aligned}$$

ή, θέτοντας $\xi(\overline{\varphi}(u_1)) = (\alpha, 0)$, $\xi(\overline{\varphi}(u_2)) = (0, b)$,

$$\begin{aligned} &\equiv (\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_2)((\alpha, 0) + (0, b)) \\ &= (\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_2)(\alpha, b) \\ &= \overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1}(b). \end{aligned}$$

Άρα, μέσω του γραμμικού ισομορφισμού $p_{0,2}: 0 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k: (0, b) \xrightarrow{\simeq} b$,

$$T_{x_o}(p_2 \circ \xi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1}(b) = \overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1}[p_{0,2}(\xi(\overline{\varphi}(u_2)))].$$

Επομένως, βάσει της τελευταίας, η (1.3.3) παίρνει τη μορφή

$$(1.3.4) \quad T_{x_o}h(u_1 + u_2) = (T_{x_o}f(u_1), (\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_{0,2} \circ \xi \circ \overline{\varphi})(u_2))$$

Διαπιστώνουμε ότι η (1.3.4) είναι απεικόνιση 1-1: Ας θεωρήσουμε δύο στοιχεία $u, u' \in T_{x_o}M$ με $T_{x_o}h(u) = T_{x_o}h(u')$. Επειδή $u = u_1 + u_2$ και $u' = u'_1 + u'_2$, όπου $u_1, u'_1 \in \mathbb{E}$ και $u_2, u'_2 \in \ker(T_{x_o}f)$, η ίδια σχέση δίνει τις

$$(1.3.5) \quad T_{x_o}f(u_1) = T_{x_o}f(u'_1),$$

$$(1.3.6) \quad (\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_{2,0} \circ \xi \circ \overline{\varphi})(u_2) = (\overline{id}_{\mathbb{R}^k}^{-1} \circ p_{2,0} \circ \xi \circ \overline{\varphi})(u'_2).$$

Από την (1.3.6), λόγω ισομορφισμού, έχουμε αμέσως ότι $u_2 = u'_2$. Απ' το άλλο μέρος, η (1.3.5) συνεπάγεται ότι $T_{x_o}f(u_1 - u'_1) = 0$, δηλαδή $u_1 - u'_1 \in \ker(T_{x_o}f)$. Όμως και $u_1 - u'_1 \in \mathbb{E}$, άρα [επειδή $\mathbb{E} \cap \ker(T_{x_o}f) = 0$] $u_1 = u'_1$, δηλαδή καταλήγουμε στην $u = u'$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Επειδή τώρα το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της (1.3.4) έχουν ίδια διάσταση m , τελικά έχουμε ότι $T_{x_o}h$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Άρα, κατά το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης, η h είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο x_o , δηλαδή θα υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $A \subset U$ του x_o και μία ανοιχτή περιοχή $B \subset V \times \mathbb{R}^k$ του $h(x_o)$, έτσι ώστε η

$$h|_A: U \supset A \xrightarrow{\simeq} B \subset V \times \mathbb{R}^k$$

να είναι (C^∞) -αμφιδιαφόριση. Βάσει του ορισμού της τοπολογίας στο καρτεσιανό γινόμενο, μπορούμε να βρούμε $V_o \subset V$ ανοιχτό και $W_o \subset \mathbb{R}^k$ ανοιχτό, με $h(x_o) \in V_o \times W_o \subset B \subset V \times \mathbb{R}^k$. Θέτουμε $U_o := h^{-1}(V_o \times W_o)$, οπότε $x_o \in U_o \subset A \subset U$ και ορίζουμε τη ζητούμενη αμφιδιαφόριση g θέτοντας $g := h|_{U_o}$.

Μένει να δείξουμε ότι καταλήγουμε στις συνθήκες της ii). Πριν από αυτό όμως να παρατηρήσουμε το εξής: Όπως κατασκευάστηκε η περιοχή W_o δεν είναι βέβαιο πώς είναι ανοιχτή περιοχή του 0. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε μία περιοχή του 0, όπως στην εκφώνηση, με τον εξής τρόπο: Θέτοντας (για ευκολία) $h(x_o) = (a_o, b_o) \in V_o \times W_o$, θεωρούμε την μετατόπιση

$$\tau_{-b_o}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k: \vec{h} \mapsto \vec{h} - b_o,$$

οπότε ορίζεται η ανοιχτή περιοχή $\overline{W}_o := \tau_{-b_o}(W_o)$ του 0. Κατόπιν θεωρούμε, αντί της U_o , την $h^{-1}(V_o \times \overline{W}_o) =: \overline{U}_o$ και ως g παίρνουμε πλέον την $h|_{\overline{U}_o}$. Έτσι,

αντί της τριάδας δεδομένων $(U_o, g, V_o \times W_o)$ του λήμματος, θα πάρουμε την $(\overline{U}_o, g, V_o \times \overline{W}_o)$.

Επανερχόμενοι στην αρχική τριάδα $(U_o, g, V_o \times W_o)$ [και υποθέτοντας ότι W_o είναι περιοχή του 0], διαπιστώνουμε ότι η $g = h|_{U_o}: U_o \xrightarrow{\cong} V_o \times W_o$ είναι αμφιδιαφόριση, τέτοια ώστε, για κάθε $x \in U_o$, να ικανοποιείται η σχέση

$$(p_1 \circ g)(x) = p_1(h(x)) = p_1(f(x), (p_2 \circ \xi \circ \varphi)(x)) = f(x),$$

η οποία αποδεικνύει πλήρως την ii).

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ii), από τη σχέση $f|_{U_o} = p_1 \circ g: U_o \rightarrow V_o$ προκύπτει ότι η

$$T_{x_o}f \equiv T_{x_o}(f|_{U_o}): T_{x_o}U_o \equiv T_{x_o}M \longrightarrow T_{f(x_o)}V_o \equiv T_{f(x_o)}N$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$T_{x_o}f = T_{x_o}(p_1 \circ g) = T_{g(x_o)}p_1 \circ T_{x_o}g = p_1 \circ T_{x_o}g,^\dagger$$

από την οποίαν προκύπτει ότι η $T_{x_o}f$ είναι απεικόνιση επί, δηλαδή καταλήγουμε στην i). $\square$

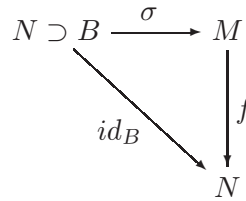
1.3.3 Θεώρημα. Αν είναι $f: M \rightarrow N$ μία C^∞ -απεικόνιση, τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- i) Η f είναι εμβάπτιση στο x_o , δηλαδή η $T_{x_o}f$ είναι απεικόνιση επί.
- ii) Υπάρχουν χάρτες $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$, $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ και ανοιχτή περιοχή W_o του $0 \in \mathbb{R}^k$, έτσι ώστε: $x_o \in U_o$, $f(U_o) \subseteq V_o$, $\varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o$ και

$$\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1: \varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o \longrightarrow \psi_o(V_o).$$

Εδώ $\tilde{p}_1$ συμβολίζει την προβολή στον πρώτο παράγοντα σε επίπεδο ευκλειδείου χώρων.

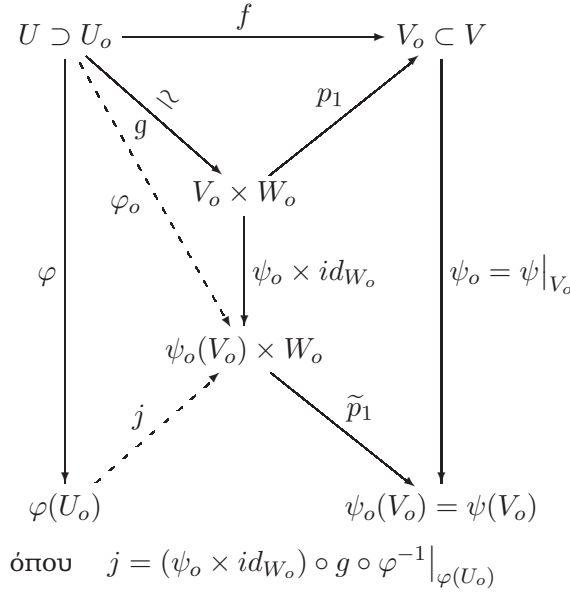
- iii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή $B \subset N$ του $f(x_o)$ και μία C^∞ -απεικόνιση $\sigma: N \supset B \rightarrow M$, τέτοια ώστε $\sigma(f(x_o)) = x_o$ και $f \circ \sigma = id_B$.



Διάγραμμα 1.15

[†] Στο τελευταίο μέλος θέσαμε $p_1 = p_1|_{T_{x_o}M \times T_{b_o}\mathbb{R}^k}$, αν $g(x_o) = (\alpha_o, b_o)$.

Απόδειξη. i) $\Rightarrow$ ii): Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.2, υπάρχουν περιοχές U_o, V_o και αμφιδιαφορία g όπως στο Διάγραμμα 1.12, σελ. 24. Οι περιοχές αυτές προέκυψαν από κατάλληλη σμίκρυνση των χαρτών (U, φ) και (V, ψ) που αναφέρονται στην απόδειξη του Λήμματος 1.3.2, δηλαδή $U_o \subset U$ και $V_o \subset V$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τον χάρτη $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ με $\psi_o := \psi|_{V_o}$. Η κατασκευή του (U_o, φ_o) είναι πιο πολύπλοκη και προκύπτει από κατάλληλη "συμπλήρωση" του Διαγράμματος 1.12 στο επόμενο διάγραμμα.



Διάγραμμα 1.16

Ακριβέστερα, θέτουμε $\varphi_o := (\psi_o \times id_{W_o}) \circ g$, οπότε $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$, αφού φ_o είναι αμφιδιαφορία. Επειδή ήδη $f(U_o) \subset V_o$, ορίζεται η τοπική παράσταση της f [ως προς $(U_o, \varphi_o), (V_o, \psi_o)$] $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1}: \psi_o(V_o) \times W_o \rightarrow \psi_o(V_o)$, για την οποίαν έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} &= \psi_o \circ f \circ ((\psi_o \times id_{W_o}) \circ g)^{-1} \\ &= \psi_o \circ (f \circ g^{-1}) \circ (\psi_o^{-1} \times id_{W_o}) \\ &= \psi_o \circ p_1|_{V_o \times W_o} \circ (\psi_o^{-1} \times id_{W_o}) \\ &= \tilde{p}_1|_{\psi_o(V_o) \times W_o}, \end{aligned}$$

όπως ακριβώς ζητούσαμε.

ii) $\Rightarrow$ iii): Θέτοντας $B := V_o$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$(1.3.7) \quad \sigma(y) := \varphi_o^{-1}(\psi_o(y), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))); \quad y \in B,$$

όπου $\tilde{p}_2: \psi_o(V_o) \times W_o \rightarrow W_o$ η προβολή στον δεύτερο παράγοντα (σε επίπεδο ευκλειδειών χώρων). Διαπιστώνουμε ότι:

a) Η σ είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση, αφού $\sigma = \varphi_o^{-1} \circ (\psi_o, c)$, δηλαδή είναι σύνθεση $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεων, όπου c είναι η σταθερή απεικόνιση $c(y) := \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))$.

b) Ισχύει η σχέση $f \circ \sigma = id_B$, επειδή, για κάθε $y \in B$ είναι

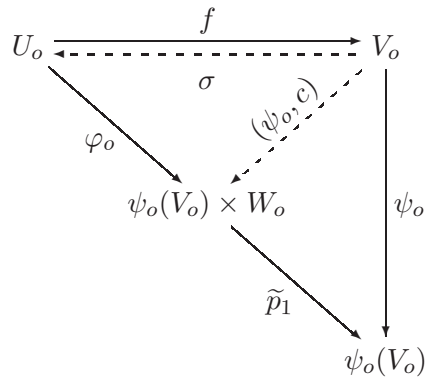
$$\begin{aligned} f(\sigma(y)) &= (f \circ \varphi_o^{-1})(\psi_o(y), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= (\psi_o^{-1} \circ \tilde{p}_1)(\psi_o(y), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= y. \end{aligned}$$

c) Ιδιαίτερος, στο $f(x_o)$, είναι

$$\begin{aligned} \sigma(f(x_o)) &= \varphi_o^{-1}(\psi_o(f(x_o)), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= \varphi_o^{-1}[(\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(x_o)), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))] \\ &= \varphi_o^{-1}(\tilde{p}_1(\varphi_o(x_o)), \tilde{p}_2(\varphi_o(x_o))) \\ &= \varphi_o^{-1}(\varphi_o(x_o)) = x_o. \end{aligned}$$

Επομένως, η σ πληροί τις ιδιότητες της εκφώνησης και αποδεικνύει την iii).

Παρενθετικά αναφέρουμε ότι η κατασκευή της σ προκύπτει από το Διάγραμμα 1.16 της προηγούμενης σελίδας χωρίς τη χρήση της g [δηλαδή μέσω του (υπο)Διαγράμματος 1.12 (σελ. 24) που δεν περιέχεται στη συνθήκη ii)], όπως φαίνεται και στο επόμενο διάγραμμα.



Διάγραμμα 1.17

iii) $\Rightarrow$ i): Θέτουμε, για ευκολία, $y_o := f(x_o)$. Παραγωγίζοντας την $f \circ \sigma = id_B$ στο y_o , βρίσκουμε ότι $T_{y_o}(f \circ \sigma) = T_{y_o}id_B$, ή

$$(1.3.8) \quad id_{T_{y_o}N} \equiv id_{T_{y_o}B} \equiv T_{y_o}id_B = T_{\sigma(y_o)}f \circ T_{y_o}\sigma = T_{x_o}f \circ T_{y_o}\sigma$$

$$\begin{array}{ccc}
 T_{y_o} N & \xrightarrow{T_{y_o} \sigma} & T_{x_o} M \\
 & \searrow id & \downarrow T_{x_o} f \\
 & & T_{y_o} N
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.18

από την οποίαν προκύπτει ότι $T_{x_o} f$ είναι επί (και, παρεπιπτόντως, η $T_{y_o} \sigma$ 1-1). Άρα καταλήγουμε στην i), οπότε κλείνει η απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι χάρτες της ii) στην πραγματικότητα είναι τέτοιοι ώστε $f(U_o) = V_o$. Πράγματι, από την τοπική παράσταση $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1$ προκύπτει ότι $f|_{U_o} = \psi_o^{-1} \circ \tilde{p}_1 \circ \varphi_o$, άρα η $f: U_o \rightarrow V_o$ είναι επί, απ' όπου προκύπτει ο ισχυρισμός.

1.3.4 Ορισμός. Μία C^∞ -απεικόνιση σ , όπως στο Θεώρημα 1.3.3, λέγεται **τοπική τομή της f** . Ιδιαίτερος, επειδή $\sigma(f(x_o)) = x_o$, λέμε ότι η σ έχει (ή ικανοποιεί την) **αρχική συνθήκη** $(x_o, f(x_o))$.

1.3.5 Πρόρισμα. Αν η f είναι εμβάπτιση στο x_o , τότε η τοπική τομή-της σ , με αρχική συνθήκη $(x_o, f(x_o))$, είναι εμφύτευση στο $f(x_o)$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του 1-1 της $T_{y_o} \sigma$ (με $y_o = f(x_o)$), που προέκυψε στο τελευταίο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 1.3.3. $\square$

1.3.6 Πρόρισμα. Κάθε εμβάπτιση $f: M \rightarrow N$ έχει τοπική τομή, για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $(x, f(x))$, $x \in M$.

Απόδειξη. Προφανής συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.3. $\square$

1.3.7 Πρόρισμα. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι C^∞ -απεικόνιση, τότε το σύνολο

$$\mathcal{S} := \{x \in M : \text{η } f \text{ είναι εμβάπτιση στο } x\}$$

είναι ανοιχτό υποσύνολο του M .

Απόδειξη. Εστω τυχόν $x_o \in \mathcal{S}$. Τότε, κατά το Θεώρημα 1.3.3, υπάρχουν χάρτες (U_o, φ_o) και (V_o, ψ_o) με $x_o \in U_o$ και έτσι ώστε $\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1$. Επομένως, για οποιοδήποτε $x \in U_o$, οι προηγούμενοι χάρτες ικανοποιούν την ii) του θεωρήματος, άρα η f είναι εμβάπτιση σε κάθε x , δηλαδή η f είναι εμβάπτιση σ' ολόκληρο το U_o . Συνεπώς, $x_o \in U_o \subset \mathcal{S}$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. $\square$

1.3.8 Πρόρισμα. Κάθε εμβάπτιση είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω μία εμβάπτιση $f: M \rightarrow N$ και ένα τυχόν ανοιχτό $A \subset M$. Έχουμε δει ότι για τυχόν $x_o \in M$ υπάρχουν κατάλληλοι χάρτες (U_o, φ_o) και (V_o, ψ_o) των x_o και $f(x_o)$, ώστε

$$\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1: \varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o \longrightarrow \psi_o(V_o),$$

οπότε $f|_{U_o} = \psi_o^{-1} \circ \tilde{p}_1 \circ \varphi_o$. Όμως, οι ψ_o, φ_o και $\tilde{p}_1$ είναι ανοιχτές απεικονίσεις, άρα και η $f|_{U_o}$ είναι ανοιχτή. Συνεπώς, για κάθε $x \in A$, θα υπάρχει (όπως πριν) ανοιχτό $U_x \subset M$, έτσι ώστε η $f|_{U_x}$ να είναι ανοιχτή απεικόνιση, οπότε $f(A \cap U_x) \subset N$ ανοιχτό (αφού $A \cap U_x \subset U_x$ ανοιχτό). Επειδή ακόμη $A = \bigcup_{x \in A} (A \cap U_x)$, τελικά θα είναι

$$f(A) = f\left(\bigcup_{x \in A} (A \cap U_x)\right) = \bigcup_{x \in A} f(A \cap U_x)$$

ανοιχτό υποσύνολο του N , πράγμα που αποδεικνύει και το πόρισμα. $\square$

1.3.9 Ορισμός. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι εμβάπτιση και $y \in f(M) \subset N$, τότε το σύνολο $f^{-1}(\{y\}) \equiv f^{-1}(y) \subset M$ καλείται **νήμα** (fiber) της f στο (ή πάνω από το) σημείο y .

Προφανώς μπορούμε να ορίσουμε το νήμα $f^{-1}(y)$, για οποιοδήποτε $y \in N$. Αν όμως η f δεν είναι επί, μπορούμε να βρούμε νήματα κενά. Τέτοια νήματα, βέβαια, δεν έχουν καμιά σημασία εδώ.

1.3.10 Θεώρημα. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι εμβάπτιση, τότε, για κάθε $y \in f(M)$, το νήμα $f^{-1}(y)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M με

$$\dim(f^{-1}(y)) = \dim M - \dim N = m - n =: k \quad (m \geq n)$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x_o \in f^{-1}(y)$. Επειδή η f είναι εμβάπτιση στο x_o , υπάρχουν χάρτες $(U_o, \varphi_o) \in \mathcal{A}$, $(V_o, \psi_o) \in \mathcal{B}$ και περιοχή W_o , όπως στη ii) του Θεωρήματος 1.3.3 (με $x_o \in U_o$ και $f(x_o) = y \in V_o$). Ιδιαίτερως, έχουμε δει ότι

$$\varphi_o(U_o) = \psi_o(V_o) \times W_o, \quad \psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση ("συμμετρία")

$$s: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n: (\alpha, b) \mapsto (b, \alpha),$$

η οποία είναι $\mathcal{C}^\infty$ -αμφιδιαφόριση, καθώς και την απεικόνιση

$$\mu = id_{\mathbb{R}^k} \times \tau_{-\psi_o(y)}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n: (\alpha, b) \mapsto (\alpha, b - \psi_o(y)).$$

Είναι άμεσον ότι $\tau_{-\psi_o(y)}$ και μ είναι αμφιδιαφορίσεις, οπότε μπορούμε να ορίσουμε και τον χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $U := U_o$ και $\varphi = \mu \circ s \circ \varphi_o$ ($x_o \in U$). Για τον τελευταίο χάρτη ισχύει ότι

$$(1.3.9) \quad \begin{aligned} \varphi(U) &= \mu(s(\varphi_o(U_o))) = \mu(s(\psi_o(V_o) \times W_o)) \\ &= \mu(W_o \times \psi_o(V_o)) = W_o \times P, \end{aligned}$$

όπου $P := \tau_{-\psi_o(y)}(\psi_o(V_o))$, το οποίον είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Από το άλλο μέρος, βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 \circ s^{-1}: W_o \times \psi_o(V_o) \longrightarrow \psi_o(V_o).$$

Ακόμη είναι προφανές ότι $U \cap f^{-1}(y) = f_U^{-1}(y)$, αν θέσουμε $f_U = f|_U$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap f^{-1}(y)) &= \varphi(f_U^{-1}(y)) = (\mu \circ s)(\varphi_o(f_U^{-1}(y))) \\ &= (\mu \circ s)(\varphi_o(f_U^{-1}(\{\psi_o^{-1}(\psi_o(y))\}))) \\ &= (\mu \circ s)((\psi_o \circ f|_{U=U_o} \circ \varphi^{-1})^{-1}(\{\psi_o(y)\})) \\ &= (\mu \circ s)(\tilde{p}_1^{-1}(\{\psi_o(y)\})) \\ &= (\mu \circ s)(\{\psi_o(y)\} \times W_o) \\ &= \mu(W_o \times \{\psi_o(y)\}) \\ &= W_o \times 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία, μαζί με την (1.3.9), αποδεικνύει ότι ο χάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ικανοποιεί την **ΥΠ. 2** της Πρότασης 1.1.2. Παρόμοια ισχύουν και για κάθε άλλο σημείο του $f^{-1}(y)$, χρησιμοποιώντας ακριβώς τον ίδιο χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Άρα η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η σχέση $\varphi_o(f_U^{-1}(\{y\})) = (\psi_o \circ f \circ \varphi_o^{-1})^{-1}(\{\psi_o(y)\})$ που χρησιμοποιήθηκε στο τελευταίο μέρος της προηγούμενης απόδειξης, αποδεικνύεται στοιχειωδώς.

1.3.11 Πρόρισμα. Έστω $f: M \rightarrow N$ μία εμβάπτιση και τυχόν $y \in f(M)$. Αν συμβολίσουμε με $Y := f^{-1}(y)$ το νήμα της f στο y , τότε ισχύει η θεμελιώδης σχέση

$$(1.3.10) \quad T_x i(T_x Y) = \ker(T_x f), \quad \forall x \in Y,$$

όπου $i: Y \hookrightarrow M$ η εμφύτευση. Ιδιαίτερος, μετά την ταύτιση $T_x Y \equiv T_x i(T_x Y)$ [βλ. σχετικά και τα Πορίσματα 1.1.9 και 1.1.10], μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(1.3.10') \quad T_x Y \equiv \ker(T_x f).$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $u \in T_x i(T_x Y)$. Τότε υπάρχει $v \in T_x Y$, τέτοιο ώστε $u = T_x i(v)$, οπότε

$$(1.3.11) \quad T_x f(u) = T_x f(T_x i(v)) = T_x (f \circ i)(v).$$

Όμως, για κάθε $z \in Y = f^{-1}(\{y\})$, είναι $(f \circ i)(z) = f(z) = y$, δηλαδή η $f \circ i$ είναι σταθερή απεικόνιση, οπότε η (1.3.11) συνεπάγεται ότι $T_x f(u) = 0$ ή $u \in \ker(T_x f)$ και

$$(1.3.12) \quad T_x i(T_x Y) \leq \ker(T_x f).$$

Επειδή η f είναι εμβάπτιση, βάσει του Θεωρήματος 1.3.10 και του Πορίσματος 1.1.9, χουμε ότι

$$\dim(\ker(T_x f)) = m - n = \dim(T_x Y) = \dim(T_x i(T_x Y)).$$

Η τελευταία και η (1.3.12) αποδεικνύουν τις (1.3.10) και (1.3.10'). $\square$

1.3.12 Σχόλια. Μία εμβάπτιση διαθέτει (μέσω των τοπικών τομών) **τοπικά δεξιά αντίστροφο**, ενώ οι εμφυτεύσεις διαθέτουν τοπικά αριστερή αντίστροφο (βλ. Πρόταση 1.2.4). Επίσης, είδαμε ότι τα νήματα $f^{-1}(\{y\})$ είναι κανονικές υποπολλαπλότητες του πεδίου ορισμού. Πιο γενικά, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(N)$ ή η $f^{-1}(P)$, αν $P \subset N$ κανονική υποπολλαπλότητα, δεν είναι αναγκαία κανονική υποπολλαπλότητα του πεδίου ορισμού M . Κάτι τέτοιο απαιτεί ιδιαίτερες συνθήκες επί της f (εγκαρσιότητα), όπως μελετούμε στην επόμενη παράγραφο.

1.3.13 Ασκήσεις.

1. Αν M και N είναι C^∞ -πολλαπλότητες, τότε οι προβολές $p_M: M \times N \rightarrow M$ και $p_N: M \times N \rightarrow N$ είναι εμβάπτισεις.
2. Η προβολή $\pi: TM \rightarrow M$ της εφαπτόμενης δέσμης είναι εμβάπτιση.
3. Αν $f_i: M_i \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) είναι εμβάπτισεις, τότε η $f_1 \times f_2$ είναι επίσης εμβάπτιση.
4. Αν M είναι συμπαγής πολλαπλότητα, N συνεκτική πολλαπλότητα Hausdorff και $f: M \rightarrow N$ εμβάπτιση, τότε η f είναι απεικόνιση επί.
5. Αν M είναι συμπαγής πολλαπλότητα, τότε δεν υπάρχει εμβάπτιση $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.
6. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι εμβάπτιση και $\dim M = \dim N$, τότε για κάθε $y \in f(M)$, το νήμα $f^{-1}(y)$ έχει ως σχετική τοπολογία την διακριτική.

7. Έστω $f: M \rightarrow N$ εμβάπτιση επί και $g: N \rightarrow P$ απεικόνιση τέτοια ώστε η $g \circ f$ να είναι C^∞ . Τότε η g είναι C^∞ -απεικόνιση.
8. Μια εμβάπτιση διαθέτει τοπικά δεξιά αντίστροφο.
9. Να αποδειχτεί, με χρήση εμβαπτίσεων, ότι η σφαίρα S^2 και το γράφημα Γ_f μιας C^∞ -απεικόνισης $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κανονικές υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}$ και $M \times \mathbb{R}$ αντιστοίχως (βλ. σχετικά και τις Ασκήσεις 1.1.15).

1.4 Εγκάρσιες απεικονίσεις

Σταθεροποιούμε και πάλι δύο διαφορετικές πολλαπλότητες $M = (M, \mathcal{A})$ και $N \equiv (N, \mathcal{B})$

1.4.1 Ορισμός. Έστω $f: M \rightarrow N$ C^∞ -απεικόνιση και $W \subset N$ κανονική υποπολλαπλότητα. Η f λέγεται **εγκάρσια** (tranverse /transversal) **προς την W στο x** (συμβολισμός: $f \overline{\cap}_x W$) αν ισχύει μία από τις επόμενες συνθήκες:

- (I) $f(x) \notin W$,
- (II) $f(x) \in W$ και $T_{f(x)}N = T_x f(T_x M) + T_{f(x)}W$

Η f θα λέγεται **εγκάρσια στην W** (συμβ: $f \overline{\cap} W$) αν είναι εγκάρσια προς την W σε κάθε $x \in M$

Αντί για την παραπάνω ορολογία, χρησιμοποιούμε συχνά και την έκφραση "η f τέμνει την W εγκάρσια (στο x)".

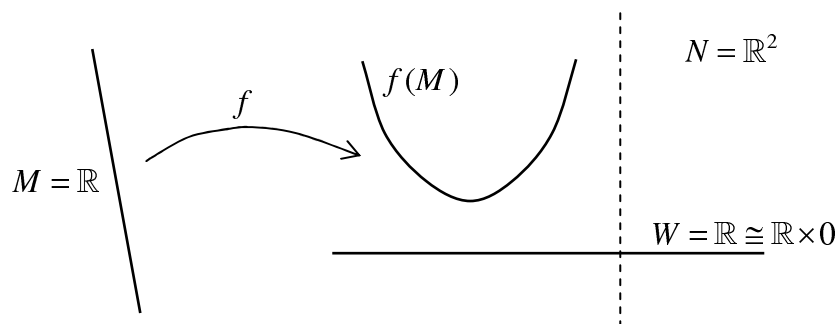
Πριν προχωρήσουμε, μερικά σχόλια: Στη συνθήκη (II) του προηγούμενου ορισμού χρησιμοποιείται η ταύτιση

$$T_{f(x)}W \equiv T_{f(x)}i(T_{f(x)}W) \leq T_{f(x)}N,$$

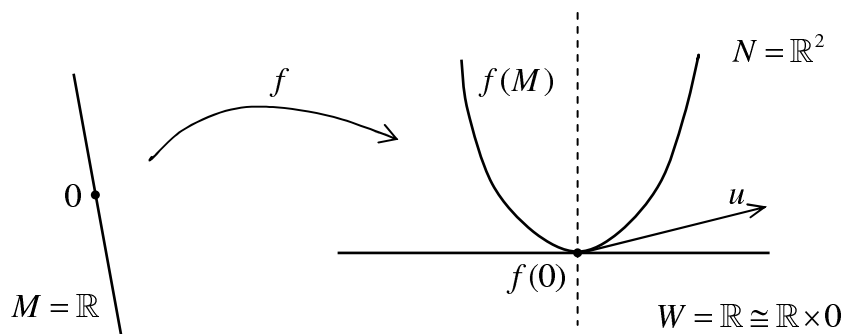
όπου $i: W \hookrightarrow N$ είναι η εμφύτευση.

Ακόμη επισημαίνουμε ότι το άθροισμα της συνθήκης (II) δεν είναι κατ' ανάγκην το ευθύ άθροισμα.

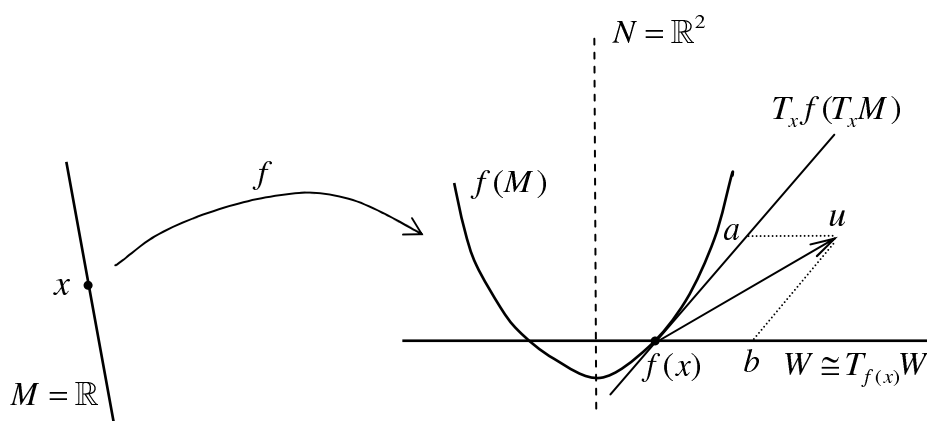
Μερικές περιπτώσεις εγκαρσίων απεικονίσεων παρουσιάζονται στα σχήματα της επόμενης σελίδας.



Σχήμα 1.4



Σχήμα 1.5



Σχήμα 1.6

Στην περίπτωση του Σχήματος 1.4 έχουμε ότι $f \overline{\cap} W$, αφού για κάθε $x \in M$ είναι $f(x) \notin W$.

Στο Σχήμα 1.5 έχουμε ότι $f \overline{\cap}_x W$, για κάθε $x \neq 0$. Ιδιαίτέρως, για κάθε $x = 0$, έχουμε ότι $T_o f(T_o M) \cong \mathbb{R} \cong T_{f(o)} W$. Συνεπώς, τυχόν στοιχείο $u \in T_{f(o)} N \cong \mathbb{R}^2$ δεν μπορεί να παρασταθεί ως $a + b$, με $a \in T_o f(T_o M)$ και $b \in T_{f(o)} W$, αφού $T_o f(T_o M) \equiv T_{f(o)} W \equiv \mathbb{R}$.

Τέλος, στην περίπτωση του Σχήματος 1.6, έχουμε ότι $f \overline{\cap} W$. Αυτό είναι προφανές για κάθε x με $f(x) \notin f(M) \cap W$. Για τα σημεία x με $f(x) \in f(M) \cap W$ έχουμε τη συνθήκη (III). Πράγματι, τυχόν $u \in T_{f(x)} N \cong \mathbb{R}^2$ μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα όπως στο σχήμα, δηλαδή $u = a + b$ με $a \in T_x f(T_x M) \cong \mathbb{R}$ και $b \in T_{f(x)} W \cong \mathbb{R}$.

1.4.2 Λήμμα. Για f και W όπως στον Ορισμό 1.4.1, με $\dim N = n$ και $\dim W = k$, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- i) $f \overline{\cap} W$ [με $f(x) \in W$].
- ii) Υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U \subset M$ του x και χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, έτσι ώστε $f(U) \subset V$, $\psi(V) = B_1 \times B_2$, όπου $B_1 \subset \mathbb{R}^k$, $B_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ ανοιχτά σύνολα, $\psi(V \cap W) = B_1 \times 0$, $\psi(f(x)) = (0, 0)$, και η απεικόνιση

$$\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f: U \longrightarrow B_2$$

να είναι εμβάπτιση στο x . Η $\tilde{p}_2: B_1 \times B_2 \rightarrow B_2$ είναι (προφανώς) η προβολή στον δεύτερο παράγοντα.

Απόδειξη. Εφ' όσον W είναι κανονική υποπολλαπλότητα της N , για το σημείο $y := f(x) \in W$ θα μπορούμε να βρούμε χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ [βλ. (ΥΠ. 2), στην Πρόταση 1.1.2,] που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\psi(V) = B_1 \times B_2, \quad \psi(V \cap W) = B_1 \times 0, \quad \psi(y) = (0, 0),$$

όπως στην εκφώνηση [ιδιαίτέρως, η τελευταία επιτυγχάνεται πάντοτε με κατάλληλη μεταφορά του χάρτη της (ΥΠ. 2)]. Θέτουμε $U := f^{-1}(V)$, οπότε $x \in U$ και $f(U) \subset V$. Ακόμη, αφού $\dim W = k$, θα είναι $\dim T_{f(x)} W = k$ καθώς και $\dim(\ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi))) = k$, επειδή

$$T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi): T_{f(x)} N \longrightarrow T_{p_2(\psi(f(x)))} B_2 \cong \mathbb{R}^{n-k}$$

είναι επί [αφού $T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi) = (p_2|_{T_{(\cdot)} B_1 \times T_{(\cdot)} B_2}) \circ T_{f(x)} \psi$ είναι απεικόνιση επί], οπότε

$$\begin{aligned} \dim(\ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi))) &= \dim T_{f(x)} N - \dim(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)(T_{f(x)} N)) \\ &= n - (n - k) = k. \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, αν

$$u = [(\alpha, f(x))] \in T_{f(x)}W$$

όπου $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \cap W$ είναι μία C^∞ -καμπύλη με $\alpha(0) = f(x)$, βρίσκουμε ότι

$$T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)(u) = [\tilde{p}_2 \circ \psi \circ \alpha, (\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(x)] = [(0, 0)] = 0,$$

άρα

$$T_{f(x)}W \leq \ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)).$$

Επειδή όμως

$$\dim T_{f(x)}W = \dim(\ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi))) = k,$$

τελικά είναι

$$T_{f(x)}W = \ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)).$$

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f \overline{\cap}_x W &\Leftrightarrow T_x f(T_x M) + T_{f(x)}W = T_{f(x)}N \\ &\Leftrightarrow T_x f(T_x M) + \ker(T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi)) = T_{f(x)}N \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} T_{f(x)}(\tilde{p}_2 \circ \psi) \circ T_x f = T_x(\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f) \quad \text{είναι επί.} \quad \square \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισοδυναμία ($\stackrel{*}{\Leftrightarrow}$) της προηγούμενης απόδειξης χρησιμοποιήσαμε το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη αποτελεί στοιχειώδη άσκηση της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΑΣΚΗΣΗ Α: Αν $h: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ είναι γραμμική απεικόνιση και $g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$ γραμμικός επιμορφισμός τότε ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\text{Η απεικόνιση } g \circ h \text{ είναι επί} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{F} = \text{Im}(h) + \ker(g).$$

1.4.3 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $f: M \rightarrow N$ C^∞ -απεικόνιση και $W \subset N$ κανονική υποπολλυπλότητα με $\dim W = k$. Εάν $f \overline{\cap} W$, τότε ισχύουν τα εξής: i) Η $f^{-1}(W)$ είναι κανονική υποπολλυπλότητα.

ii) Οι πολυπλότητες W και $f^{-1}(W)$ έχουν την ίδια συνδιάσταση.

iii) $T_{x_o}(f^{-1}(W)) = (T_{x_o}f)^{-1}(T_{f(x_o)}W)$.

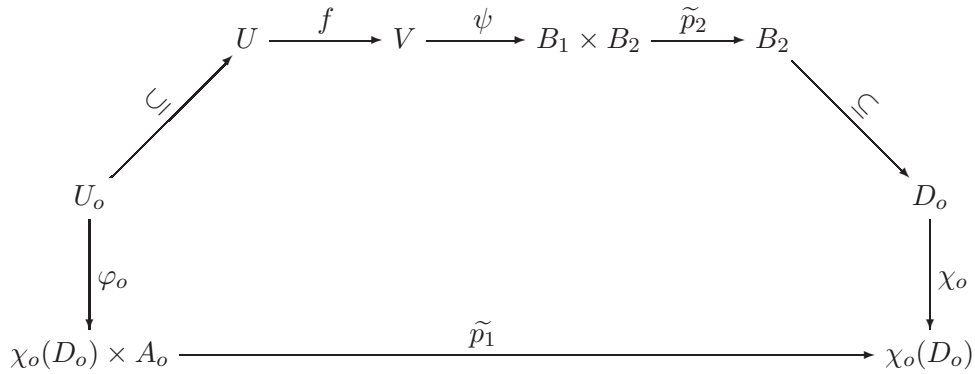
Απόδειξη. Δείχνουμε ότι ισχύει η i). Έστω τυχόν $x_o \in f^{-1}(W)$. Επειδή $f \overline{\cap}_{x_o} W$, κατά το Λήμμα 1.4.2, υπάρχουν $U, (V, \psi)$ και B_1, B_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες της ii) του ίδιου λήμματος και, ιδιαιτέρως, η

$$\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f: M \supset U \longrightarrow B_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$$

να είναι εμβάπτιση στο x_o . Επομένως, κατά την ii) του Θεωρήματος 1.3.3, θα υπάρχουν χάρτες (U_o, φ_o) της ανοιχτής υποπολλαπλότητας U (άρα και της M), με $x_o \in U_o$, και (D_o, χ_o) της $B_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$, έτσι ώστε $\varphi_o(U_o) = \chi_o(D_o) \times A_o$ (όπου A_o ανοιχτή περιοχή του 0 στην $\mathbb{R}^{n-k}$), $\chi_o(0) = 0$ [‡] και

$$(1.4.1) \quad \chi_o \circ (p_2 \circ \psi \circ f) \circ \varphi_o^{-1} = \tilde{p}_1: \chi_o(D_o) \times A_o \longrightarrow \chi_o(D_o).$$

(βλ. και το επόμενο διάγραμμα).



Διάγραμμα 1.19

Θα δείξουμε ότι μέσω του χάρτη (U_o, φ_o) ικανοποιείται η συνθήκη **ΥΠ. 2** της Πρότασης 1.1.2 για την $f^{-1}(W)$ και το x_o .

Εκ κατασκευής, $\varphi_o(U_o) = \chi_o(D_o) \times A_o$. Προφανώς, $x_o \in U_o \cap f^{-1}(W)$. Θα δείξουμε ακόμη ότι

$$(1.4.2) \quad \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W)) = 0 \times A_o.$$

Πράγματι, αν $z \in U_o \cap f^{-1}(W)$, τότε $f(z) \in W$. Επομένως,

$$\tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ (\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f) \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ \tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(z),$$

ή, επειδή $\psi(V \cap W) = B_1 \times 0$, [βλ. και συνθήκη ii) του Λήμματος 1.4.2]

$$\tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = \chi_o(0),$$

άρα, λόγω της σχέσης και υποσημείωσης ([‡]),

$$\tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = 0,$$

[‡]Αυτό γίνεται, ως συνήθως, με κατάλληλη μεταφορά.

απ' όπου $\varphi_o(z) \in 0 \times A_o$, που σημαίνει ότι

$$(1.4.3) \quad \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W)) \subset 0 \times A_o.$$

Για την αντίστροφη της (1.4.3), θεωρούμε ένα $(0, a) \in 0 \times A_o$. Αφού $\varphi_o(U_o) = \chi_o(D_o) \times A_o$ και ισχύει η (1.4.1), θα υπάρχει $z \in U_o$ με $\varphi_o(z) = (0, a)$ και έτσι ώστε

$$0 = \tilde{p}_1(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ \tilde{p}_2 \circ \psi \circ f \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(z)) = (\chi_o \circ \tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(z).$$

Επομένως,

$$(\tilde{p}_2 \circ \psi \circ f)(z) = \chi_o^{-1}(0) = 0,$$

κι επειδή $\psi(f(z)) \in \psi(V) = B_1 \times B_2$, θα είναι $(\psi \circ f)(z) \in B_1 \times 0$ ή [βλ. και πάλι τη συνθήκη ii) του Λήμματος 1.4.2]

$$f(z) \in \psi^{-1}(B_1 \times 0) = V \cap W,$$

άρα $f(z) \in W$ και $z \in f^{-1}(W)$. Επειδή ήδη $z \in U_o$, τελικά βρίσκουμε ότι $z \in U_o \cap f^{-1}(W)$, οπότε $(0, a) = \varphi_o(z) \in \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W))$, δηλαδή

$$(1.4.4) \quad 0 \times A_o \subset \varphi_o(U_o \cap f^{-1}(W)).$$

Η τελευταία μαζί με την (1.4.3) αποδεικνύει την (1.4.2).

Τα προηγούμενα αποδεικνύουν ότι έχουμε δομή υποπολλαπλότητας επί του W . [Πιο τυπικά, για να βρισκόμαστε σε απόλυτη συμφωνία με την **ΥΠ. 2**, θα πρέπει να πάρουμε τον χάρτη $(U_o, s \circ \varphi_o)$, όπου s η συμμετρία $0 \times A_o \xrightarrow{\cong} A_o \times 0$].

Δείχνουμε τώρα τη ii). Από τους χάρτες (U_o, φ_o) της προηγούμενης απόδειξης φαίνεται ότι η $f^{-1}(W)$ εφοδιάζεται με χάρτες, των οποίων η εικόνα είναι ανοιχτά σύνολα της μορφής $A_o \subset \mathbb{R}^{m-n-k}$. Άρα, $\dim f^{-1}(W) = m - n - k$ και

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} f^{-1}(W) &:= \dim M - \dim f^{-1}(W) \\ &= m - (m - n + k) = n - k \\ &= \dim N - \dim W \\ &= \operatorname{codim} W. \end{aligned}$$

Για την iii) προχωρούμε ως εξής: Σύμφωνα με την Άσκηση 1.1.15 (2), έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} u = [(\alpha, x_o)] \in T_{x_o}(f^{-1}(W)) &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\alpha) \subset f^{-1}(W) \Leftrightarrow \\ \operatorname{Im}(f \circ \alpha) \subset W &\Leftrightarrow T_{x_o}f(u) = [(f \circ \alpha, f(x_o))] \in T_{f(x_o)}W, \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο και ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

1.4.4 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $f: X \rightarrow Z$ και $g: Y \rightarrow Z$ είναι C^∞ -απεικονίσεις (με ίδιο πεδίο τιμών). Τότε, για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ με $f(x) = g(y)$, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- i) $(f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z$
- ii) $T_z Z = T_x f(T_x X) + T_y g(T_y Y)$, αν $z = f(x) = g(y)$.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε προηγουμένως το εξής αλγεβρικό αποτέλεσμα, του οποίου η επαλήθευση είναι στοιχειώδης.

ΑΣΚΗΣΗ Β: Αν $\mathbb{E}$ και $\mathbb{F}$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του γραμμικού χώρου $\mathbb{G}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} = (\mathbb{E} \times \mathbb{F}) + \Delta_{\mathbb{G}} \Leftrightarrow \mathbb{G} = \mathbb{E} + \mathbb{F}.$$

Απόδειξη της Πρότασης 1.4.4. Έστω τυχόν $(x, y) \in X \times Y$ με $f(x) = g(y) := z$, δηλαδή $(f(x), g(y)) \in \Delta_Z$. Εφόσον Δ_Z είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $Z \times Z$ [βλ. Παράδειγμα 1.1.13(1)], σύμφωνα με την συνθήκη ii) του Ορισμού 1.4.1, έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$(f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z \Leftrightarrow T_{(f \times g)(x,y)}(Z \times Z) = T_{(x,y)}(f \times g)(T_{(x,y)}(X \times Y)) + T_{(f \times g)(x,y)} \Delta_Z,$$

ή, μετά τις απαραίτητες ταυτίσεις,

$$(f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z \Leftrightarrow T_{f(x)} Z \times T_{g(y)} Z = (T_x f(T_x X) \times T_y g(T_y Y)) + T_{(f(x), g(y))} \Delta_Z.$$

Άρα, βάσει της Άσκησης 1.1.15(10) και της παραπάνω Β,

$$\begin{aligned} (f \times g) \overline{\Pi}_{(x,y)} \Delta_Z &\Leftrightarrow T_z Z \times T_z Z = (T_x f(T_x X) \times T_y g(T_y Y)) + \Delta_{T_z Z} \\ &\Leftrightarrow T_z Z = T_x f(T_x X) \times T_y g(T_y Y), \end{aligned}$$

που ολοκληρώνουν την απόδειξη. $\square$

1.4.5 Πρόσχημα. Αν f και g είναι C^∞ -απεικονίσεις όπως στην Πρόταση 1.4.4 και μία εξ αυτών είναι εμβάπτιση, τότε $(f \times g) \overline{\Pi} \Delta_Z$.

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή της προηγούμενης Πρότασης $\square$

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την κατασκευή του νηματικού γινομένου, που χρησιμοποιείται και στα Κεφάλαια 2 και 3.

1.4.6 Ορισμός. Θεωρούμε δύο απεικονίσεις $f: X \rightarrow Z$ και $g: Y \rightarrow Z$. Καλούμε **νηματικό γινόμενο** των f και g (ή ακόμη και νηματικό γινόμενο των X, Y μέσω των f, g) το σύνολο

$$X \times_Z Y := \{(x, y) : f(x) = g(y)\}.$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $X \times_Z Y \subset X \times Y$ και ορίζονται οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} f_*: X \times_Z Y &\longrightarrow Y & \text{με} & \quad f_* := p_2|_{X \times_Z Y}, \\ g_*: X \times_Z Y &\longrightarrow X & \text{με} & \quad g_* := p_1|_{X \times_Z Y}, \end{aligned}$$

όπου p_1, p_2 είναι οι προβολές του $X \times Y$ στον πρώτο και δεύτερο παράγοντα αντιστοίχως.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{f_*} & Y \\ g_* \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Διάγραμμα 1.20

1.4.7 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $f: X \rightarrow Z$ και $g: Y \rightarrow Z$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεις και η g εμβάπτιση. Τότε το νηματικό γινόμενο $X \times_Z Y$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της $X \times Y$ και οι f_*, g_* είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεις.

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι $X \times_Z Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_Z)$. Επειδή η Δ_Z είναι κανονική υποπολλαπλότητα του $Z \times Z$ [βλ. Παράδειγμα 1.1.13(1)] και $(f \times g) \overline{\cap} \Delta_Z$ (βλ. Πρόταση 1.4.5), το πρώτο συμπέρασμα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.4.3. Η διαφορισμότητα των f_* και g_* είναι συνέπεια της διαφορισμότητας των p_1, p_2 και της Πρότασης 1.1.11. $\square$

1.4.8 Ασκήσεις.

1. Αν $f: X \rightarrow Z, g: Y \rightarrow Z$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεις, W κανονική υποπολλαπλότητα της Z και $g \overline{\cap} W$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f \overline{\cap} (g^{-1}(W)) \Leftrightarrow (g \circ f) \overline{\cap} W.$$

2. Δύο κανονικές υποπολλαπλότητες X και Y της πολλαπλότητας M θα λέγονται **εγκάρσιες** αν η κανονική εμφύτευση $i: X \hookrightarrow M$ είναι εγκάρσια στην Y . Επομένως για δύο εγκάρσιες υποπολλαπλότητες X, Y ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

- i) $X \cap Y$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της M .
- ii) $T_z(X \cap Y) = (T_z X) \cap (T_z Y), \quad \forall z \in X \cap Y.$

3. Ισχύει η ισοδυναμία των επομένων συνθηκών:

- i) $f \overline{\cap}_x W$, όπου $f: M \rightarrow N$ και $W \subset N$ κανονική υποπολλαπλότητα.
- ii) Αν $q: T_{f(x)}N \rightarrow T_{f(x)}N/T_{f(x)}W$ είναι η κανονική απεικόνιση (στο πηλίκον), τότε η απεικόνιση $q \circ T_x f$ είναι *επί*,

$$\begin{array}{ccc}
 T_x M & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} N \\
 & \searrow T_x f & \downarrow q \\
 & & T_{f(x)} N / T_{f(x)} W
 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.21

μετά την ταύτιση $T_{f(x)}W \equiv T_{f(x)}i(T_{f(x)}W) \leq T_{f(x)}N$, όπου i η εμφύτευση $W \hookrightarrow N$.

- 4. Να επαληθευτούν οι ισχυρισμοί των Ασκήσεων Α (σελ. 38) και Β (σελ. 41).
- 5. Να αποδειχτεί πλήρως το Πόρισμα 1.4.5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

Διανυσματικές Δέσμες

They [vector bundles] played an increasingly important role in modern mathematics, culminating in the sophisticated subject K-theory, which studies equivalence classes of vector bundles over a given space.

D. W. KAHN [[16](#), p. 38]

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις βασικές ιδιότητες των διανυσματικών δεσμών και των μορφισμών τους. Μεταξύ των άλλων, εξετάζουμε τις απεικονίσεις μεταφοράς, μέσω των οποίων (ανα)κατασκευάζεται πλήρως μία διανυσματική δέσμη, ενώ μεγάλο μέρος του κεφαλαίου αφιερώνεται στην κατασκευή διαφόρων σημαντικών διανυσματικών δεσμών, που χρειάζονται στη συνέχεια.

2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Η έννοια που εισάγεται εδώ αποτελεί γενίκευση της έννοιας της εφαπτόμενης δέσμης.

2.1.1 Ορισμός. Έστω X, E δύο C^∞ -πολλαπλότητες και $\pi: E \rightarrow X$ μία C^∞ -απεικόνιση. Έστω ακόμη ότι το σύνολο

$$(\Delta\Delta. 1) \quad E_x := \pi^{-1}(x)$$

έχει δομή διανυσματικού χώρου, για κάθε $x \in X$. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X και, για κάθε $i \in I$, υπάρχουν $n(i) \in \mathbb{N}$ και μια C^∞ -αμφιδιαφόριση

$$\tau_i: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(i)},$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη :

Το διάγραμμα

$$(\Delta\Delta. 2) \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times \mathbb{R}^{n(i)} \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & U_i \end{array}$$

Διάγραμμα 2.1

είναι μεταθετικό και οι περιορισμοί της τ_i στα νήματα

$$\tau_{ix} := p_2 \circ \tau_i|_{E_x} : E_x \longrightarrow \mathbb{R}^{n(i)}$$

είναι γραμμικές απεικονίσεις.

Τότε η τριάδα $\ell = (E, \pi, X)$ λέγεται (C^∞ - **διαφορίσιμη**) **διανυσματική δέσμη** (vector bundle), η πολλαπλότητα E **ολικός χώρος** (total space), η X **βάση** (base space), η απεικόνιση π **προβολή** (projection), οι αντίστροφες εικόνες $\pi^{-1}(x) = E_x$ **νήματα** (fibers) και η οικογένεια $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ **απλοποιούσα κάλυψη** (trivializing cover). Κάθε (U_i, τ_i) της κάλυψης αποτελεί ένα **απλοποιούν ζεύγος** (trivialization/trivializing pair)

Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n(i) = n$, για κάθε $i \in I$, λέμε ότι η ℓ έχει **νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$** .

2.1.2 Παρατηρήσεις. 1) Από τον ορισμό προκύπτει ότι η απεικόνιση π είναι επί και οι απεικονίσεις τ_{ix} είναι γραμμικοί ισομορφισμοί.

2) Αν (U, τ) είναι απλοποιούν ζεύγος και $V \subset U$ ανοικτό, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι $(V, \tau|_{\pi^{-1}(V)})$ είναι επίσης απλοποιούν ζεύγος.

3) Όπως και στο σύνολο των n -διαστάτων C^k -ατλάντων επί ενός συνόλου X , έτσι και στο σύνολο των απλοποιουσών καλύψεων μιας δεδομένης τριάδας (E, π, X) ορίζονται σχέσεις διάταξης μέσω του περιέχεσθαι, και ισοδυναμίας μέσω της συμβιβαστότητας. Αποδεικνύεται ότι κάθε απλοποιούσα κάλυψη περιέχεται σε μια μοναδική απλοποιούσα κάλυψη που είναι μεγιστικό στοιχείο ως προς την διάταξη του περιέχεσθαι. Στη διεθνή βιβλιογραφία, συνήθως δεν γίνεται αναφορά σε μέγιστες απλοποιούσες καλύψεις, για τεχνικούς όμως λόγους είναι σκόπιμο να δουλεύει κανείς με αυτές. Στα επόμενα, όταν θεωρούμε απλοποιούσα κάλυψη θα εννοούμε μέγιστη απλοποιούσα κάλυψη.

4) Στη συνέχεια θα θεωρούμε πάντοτε δέσμες με νήματα σταθερού τύπου $\mathbb{R}^n$. Η παραδοχή αυτή δεν προκαλεί σοβαρή βλάβη της γενικότητας, γιατί πάνω από κάθε συνεκτική συνιστώσα της βάσης μιας διανυσματικής δέσμης τα νήματα είναι σταθερού τύπου [βλ. Άσκηση 2.7 (2) στο τέλος του κεφαλαίου αυτού].

5) Η σχέση (ΔΔ. 2) χαρακτηρίζει τη δέσμη ως **τοπικώς τετριμμένη** (locally trivial). Η ορολογία αυτή θα εξηγηθεί πλήρως από το επόμενο Παράδειγμα 2.1.3 (1), την έννοια του ισομορφισμού διανυσματικών δεσμών (Ορισμός 2.1.4), και το Παράδειγμα 2.1.6 (4).

6) Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι η $\pi: E \rightarrow X$ είναι εμβάπτιση. Συνεπώς, κάθε E_x είναι (κανονική) υποπολλαπλότητα του E και

$$\dim E_x = n = \dim E - \dim X = \dim(U \times \mathbb{R}^n) - \dim U,$$

όπου (U, τ) απλοποιούν ζεύγος που περιέχει το x .

2.1.3 Παραδείγματα. 1) Η **τετριμμένη δέσμη** (the trivial bundle) $(X \times \mathbb{R}^n, p_1, X)$, όπου X είναι μια διαφορική πολλαπλότητα. Σ' αυτήν την περίπτωση μια (όχι μεγίστη) απλοποιούσα κάλυψη αποτελείται από το (ολικό) απλοποιούν ζεύγος $(X, id_{X \times \mathbb{R}^n})$.

2) Η **εφαπτόμενη δέσμη** (the tangent bundle) (TX, π, X) μιας διαφορικής πολλαπλότητας X : Αν m είναι η διάσταση της X , τα νήματα $\pi^{-1}(x)$ είναι οι εφαπτόμενοι χώροι $T(X, x) = T_x X$, άρα έχουν δομή m -διάστατου πραγματικού διανυσματικού χώρου. Μια απλοποιούσα κάλυψη αποτελεί η οικογένεια

$$\{(U, (\pi, \overline{\varphi})) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

όπου

$$(\pi, \overline{\varphi}): \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m : v \mapsto (\pi(v), \overline{\varphi}(v))$$

και

$$\overline{\varphi}(v) = D(\varphi \circ \alpha)(0), \text{ αν } v = [(\alpha, x)] \in T(X, x).$$

Πράγματι, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{(\pi, \overline{\varphi})} & U \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U \end{array}$$

Διάγραμμα 2.2

είναι μεταθετικό και ο περιορισμός της $(\pi, \overline{\varphi})$ σε κάθε νήμα $\pi^{-1}(x) = T(X, x)$ είναι η απεικόνιση

$$\overline{\varphi} = p_2 \circ (\pi, \overline{\varphi}) : T(X, x) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

που είναι γραμμική.

2.1.4 Ορισμός. Έστω $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2$, διανυσματικές δέσμες. Ένα ζεύγος (f, g) διαφορίσιμων απεικονίσεων $f: E_1 \rightarrow E_2$ και $g: X_1 \rightarrow X_2$ λέγεται **μορφισμός διανυσματικών δεσμών** (vector bundle morphism) αν ισχύουν οι συνθήκες:

Το διάγραμμα

(ΜΔΔ. 1)

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.3

είναι μεταθετικό.

Για κάθε $x \in X$, ο περιορισμός της f στο νήμα E_{1x} ,

(ΜΔΔ. 2)

$$f_x: E_{1x} \longrightarrow E_{2g(x)},$$

είναι γραμμική απεικόνιση.

Εξάλλου, ένας μορφισμός $(f, g): \ell_1 \rightarrow \ell_2$ θα λέγεται **ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών** (vector bundle isomorphism), αν υπάρχει $(f', g'): \ell_2 \rightarrow \ell_1$ μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έτσι ώστε

$$f \circ f' = id_{E_2}, \quad f' \circ f = id_{E_1}, \quad g \circ g' = id_{X_2}, \quad g' \circ g = id_{X_1}.$$

2.1.5 Παρατηρήσεις. 1) Το μεταθετικό διάγραμμα της συνθήκης **(ΜΔΔ. 1)** μας εξασφαλίζει ότι

$$f(E_{1x}) \subseteq E_{2g(x)}, \quad \forall x \in X_1,$$

άρα και το καλά ορισμένο της απεικόνισης f_x της συνθήκης **(ΜΔΔ. 2)**.

2) Αν $(f, g): \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι ισομορφισμός, τότε οι f, g είναι αμφιδιαφορίσεις και η f_x ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, για κάθε $x \in X$. Αλλά και αντίστροφα, αν $(f, g): \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έτσι ώστε οι f, g να είναι αμφιδιαφορίσεις, τότε το (f, g) είναι ισομορφισμός [βλ. Άσκηση 2.7 (5) στο τέλος του κεφαλαίου].

3) Μια διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ θα λέγεται **τετριμμένη** (trivial), αν υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών

$$(\Phi, id_X): \ell \longrightarrow (X \times \mathbb{R}^n, p_1, X).$$

Στην περίπτωση αυτή, το ζεύγος (X, Φ) είναι ολικό απλοποιούν ζεύγος.

2.1.6 Παραδείγματα. 1) Για κάθε διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$, το ζεύγος (id_E, id_X) είναι ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών.

2) Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2, 3$, είναι διανυσματικές δέσμες και

$$(f_i, g_i): \ell_i \longrightarrow \ell_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

είναι (ισο)μορφισμοί διανυσματικών δεσμών, τότε το

$$(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1): \ell_1 \longrightarrow \ell_3$$

είναι (ισο)μορφισμός διανυσματικών δεσμών.

3) Αν $(f, g): \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έτσι ώστε οι f, g να είναι αμφιδιαφορίσεις, τότε το $(f^{-1}, g^{-1}): \ell_2 \rightarrow \ell_1$ είναι μορφισμός.

4) Αν (U, τ) είναι απλοποιούν ζεύγος μιας $\ell = (E, \pi, X)$, τότε το ζεύγος (τ, id_U) είναι ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών δεσμών

$$\ell_U = (\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U) \quad \text{και} \quad (U \times \mathbb{R}^n, p_1, U).$$

Αυτό εξηγεί τον όρο "τοπικώς τετριμμένη" για την δέσμη ℓ .

5) Έστω M, N διαφορίσιμες πολλαπλότητες και $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε το ζεύγος (df, f) είναι μορφισμός από την (TM, π_M, M) στην (TN, π_N, N) . Αν η f είναι αμφιδιαφόριση, τότε το (df, f) είναι ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών.

Θυμίζουμε ότι $df = Tf: TM \rightarrow TN$ είναι το ολικό διαφορικό της f .

Οι διανυσματικές δέσμες, οι μορφισμοί τους και η σύνθεση που ορίζεται στο Παράδειγμα 2.1.6 (2), αποτελούν την **κατηγορία των διανυσματικών δεσμών**, που θα συμβολίσουμε με VB . Αν σταθεροποιήσουμε μια πολλαπλότητα $(X, \mathcal{A})$ και θεωρήσουμε μόνο τις δέσμες με βάση X και τους μορφισμούς που αφήνουν τη βάση αναλλοίωτη (δηλαδή $g = id_X$) παίρνουμε μια υποκατηγορία της VB που θα συμβολίζουμε με $VB(X)$.

2.2 Απεικονίσεις μεταφοράς

Ας δούμε τώρα αναλυτικά τι συμβαίνει στην τομή δύο απλοποιούντων ζευγών $(U_i, \tau_i), (U_j, \tau_j)$ μιας απλοποιούσας κάλυψης $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ της διανυσματικής δέσμης $\ell = (E, \pi, X)$, με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Πρώτα παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί των τ_i, τ_j στο σύνολο

$$\pi^{-1}(U_i \cap U_j) = \bigcup_{x \in U_i \cap U_j} E_x$$

έχουν εικόνα ακριβώς το σύνολο $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε και το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tau_j \circ \tau_i^{-1}} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \tau_i^{-1} \quad \nearrow \tau_j & \\ & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ p_1 \swarrow & \downarrow \pi & \searrow p_1 \\ & U_i \cap U_j & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.4

του οποίου όλα τα τρίγωνα είναι μεταθετικά. Αν τώρα $(x, h) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$, τότε

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = (A(x, h), B(x, h)),$$

όπου $A = p_1 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}$ και $B = p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}$. Όμως,

$$\begin{aligned} A(x, h) &= p_1 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = \pi \circ \tau_i^{-1}(x, h) = p_1(x, h) = x, \\ B(x, h) &= p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) = p_2 \circ \tau_j(v = \tau_i^{-1}(x, h)) = \tau_{jx}(v). \end{aligned}$$

Επειδή $v = \tau_i^{-1}(x, h) = \tau_{ix}^{-1}(h) \in E_x$, τελικά

$$B(x, h) = \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(h)$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, η απεικόνιση $\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ είναι σύνθεση δύο γραμμικών ισομορφισμών, δηλαδή

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

2.2.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{U_i, \tau_i\}_{i \in I}$. Τότε οι απεικονίσεις

$$T_{ji}: U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}): x \mapsto \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1},$$

όπου $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, λέγονται **απεικονίσεις μεταφοράς** (transition functions) της ℓ ως προς την απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$.

Όπως θα δούμε στο Θεώρημα 2.2.6, οι απεικονίσεις μεταφοράς $\{T_{ji}\}_{i,j \in I}$ καθορίζουν τη δομή της διανυσματικής δέσμης.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού είναι ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς ικανοποιούν την σχέση

$$(2.2.1) \quad T_{kj}(x) \circ T_{ji}(x) = T_{ki}(x),$$

για κάθε $i, j, k \in I$ με $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ και $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Την ιδιότητα αυτή εκφράζουμε λέγοντας ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς αποτελούν **σύγκυκλο** (cocycle). Επίσης, από την (2.2.1) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} T_{ii}(x) &= id_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in U_i \quad \text{και} \quad \forall i \in I, \\ T_{ij}(x) &= T_{ji}(x)^{-1}, \quad \forall i, j \in I \quad \text{με} \quad U_i \cap U_j \neq \emptyset \quad \text{και} \quad x \in U_i \cap U_j. \end{aligned}$$

2.2.2 Πρόταση. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Τότε, για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, η απεικόνιση μεταφοράς

$$T_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

είναι διαφορίσιμη.

Υπενθυμίζουμε ότι $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ανοικτή υποπολλαπλότητα του $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ που είναι διανυσματικός χώρος, άρα και διαφορική πολλαπλότητα, διάστασης n^2 . Το $GL(n, \mathbb{R})$ καλείται και **δομική ομάδα** (structure group) της δέσμης $\ell = (E, \pi, X)$.

Η Πρόταση 2.2.2 είναι άμεσο αποτέλεσμα του επομένου αποτελέσματος:

2.2.3 Λήμμα. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$ μια απεικόνιση, τέτοια ώστε, για κάθε $x \in U$, η μερική απεικόνιση

$$f_x: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\kappa : h \mapsto f_x(h) := f(x, h)$$

να είναι γραμμική. Τότε η f είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν η

$$F: U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\kappa) : x \mapsto f_x$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Στο χώρο $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\kappa)$ θεωρούμε τον ολικό χάρτη

$$\Phi: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\kappa) \longrightarrow \mathbb{R}^{n \cdot \kappa},$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$\Phi(g) = (g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n)) \in \underbrace{\mathbb{R}^\kappa \times \dots \times \mathbb{R}^\kappa}_{n\text{-παράγοντες}},$$

όπου $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Η F είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν είναι διαφορίσιμη η απεικόνιση

$$\Phi \circ F: U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \cdot \kappa} : x \mapsto (f_x(e_1), f_x(e_2), \dots, f_x(e_n)).$$

Παρατηρούμε ότι αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε κάθε απεικόνιση

$$x \longmapsto f_x(e_i) = f_{e_i}(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

είναι διαφορίσιμη ως μερική απεικόνιση της f , οπότε η $\Phi \circ F$ (άρα και η F) είναι διαφορίσιμη.

Αντίστροφα, έστω ότι η F είναι διαφορίσιμη. Τότε η διαφορισιμότητα της $\Phi \circ F$ συνεπάγεται ότι κάθε

$$x \longmapsto f_x(e_i) = f(x, e_i)$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση του x . Άρα, για $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$f(x, h) = f\left(x, \sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i f_x(e_i),$$

δηλαδή η f είναι διαφορίσιμη. □

Αποτέλεσμα του ανωτέρω λήμματος είναι και η επόμενη πρόταση, που είναι ανάλογη της Πρότασης 2.2.2 αλλά αφορά τους μορφισμούς.

2.2.4 Πρόταση. Έστω $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$ διανυσματικές δέσμες με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(i)}$ ($i = 1, 2$) και $(f, g): \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν $(U_1, \tau_1), (U_2, \tau_2)$ είναι απλοποιούντα ζεύγη των ℓ_1, ℓ_2 , αντιστοίχως, με $g(U_1) \subseteq U_2$, τότε η

$$U_1 \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}): x \mapsto \tau_{2g(x)} \circ f_x \circ \tau_{1x}^{-1}$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η σύνθεση

$$U_1 \times \mathbb{R}^{n(1)} \xrightarrow{\tau_1^{-1}} \pi_1^{-1}(U_1) \xrightarrow{f} \pi_2^{-1}(U_2) \xrightarrow{\tau_2} U_2 \times \mathbb{R}^{n(2)} \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}^{n(2)}$$

είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων και, για κάθε $x \in U_i$, ο περιορισμός

$$\tau_{2g(x)} \circ f_x \circ \tau_{1x}^{-1}: \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n(2)}$$

είναι γραμμική απεικόνιση. Επομένως, εφαρμόζεται το Λήμμα 2.2.3. $\square$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για την κατασκευή διανυσματικών δεσμών με δεδομένα νήματα.

2.2.5 Πρόταση. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διάστασης m , E σύνολο, $\pi: E \rightarrow X$ απεικόνιση, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάθλυψη του X . Έστω ακόμη ότι, για κάθε $i \in I$, υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\tau_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U_i \end{array}$$

Διάγραμμα 2.5

και τέτοια ώστε, για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, η σύνθεση

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

να είναι C^∞ -αμφιδιαφόριση, και, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός της

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

να είναι γραμμικός ισομορφισμός. Τότε υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη δομή διαφορικής πολυπλοκότητας επί του E , τέτοια ώστε η τριάδα $\ell = (E, \pi, X)$ να γίνεται διανυσματική δέσμη με απλοποιούσα κάθληψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$.

Απόδειξη. Κάθε υποσύνολο $\pi^{-1}(U_i)$ του E έρχεται μέσω της τ_i σε 1-1 και επί αντιστοιχία με την πολλαπλότητα $U_i \times \mathbb{R}^n$, άρα έχει μια μονοσήμαντα ορισμένη διαφορίσιμη δομή, δηλαδή ένα άτλαντα $\mathcal{A}_i$ έτσι ώστε η τ_i να γίνεται C^∞ -αμφιδιαφόριση. Παρατηρούμε ότι οι τομές $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτές υποπολλαπλότητες των $\pi^{-1}(U_i)$ και $\pi^{-1}(U_j)$, για κάθε $i, j \in I$, με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \subseteq & \pi^{-1}(U_i) \\ \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \subseteq & U_i \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 2.6

Πράγματι κάθε τ_i ως αμφιδιαφόριση είναι και ομοιομορφισμός, άρα το

$$\pi^{-1}(U_i \cap U_j) = \tau_i^{-1}((U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n)$$

είναι ανοιχτό στο $\pi^{-1}(U_i)$. Ανάλογα και το $\pi^{-1}(U_j)$. Στη συνέχεια, θεωρούμε την τομή $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$, εφοδιασμένη με τις προηγούμενες διαφορικές δομές, που προκύπτουν από τους αντίστοιχους άτλαντες $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$, και την ταυτοτική απεικόνιση

$$id: (\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_i) \longrightarrow (\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_j).$$

Αυτή έχει τοπική παράσταση

$$\tau_j \circ id \circ \tau_i^{-1}: U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n,$$

που είναι εξ υποθέσεως αμφιδιαφόριση. Άρα οι δύο διαφορικές δομές συμπίπτουν, δηλαδή

$$(\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_i) = (\pi^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{A}_j),$$

επομένως ο E δέχεται διαφορική δομή βάσει του Λήμματος της Συγκόλλησης (βλ. Παράρτημα **A**), και η δομή αυτή είναι η μοναδική που κάνει τις τ_i αμφι-διαφορίσεις.

Ως προς την προηγούμενη δομή η π είναι διαφορίσιμη γιατί τοπικά γράφεται ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων, λόγω της μεταθετικότητας του Διαγράμματος 2.5 (σελ. **53**).

Τέλος, η οικογένεια $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ ορίζει μία απλοποιούσα κάλυψη. Πράγματι, κάθε νήμα E_x δέχεται δομή διανυσματικού χώρου μέσω της απεικόνισης $\tau_{ix}: E_x \rightarrow \mathbb{R}^n$, για $x \in U_i$. Η δομή αυτή είναι ανεξάρτητη του i , γιατί αν $x \in U_i \cap U_j$, εξ υποθέσεως $\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ είναι γραμμική (βλ. ανάλογη απόδειξη στον ορισμό της γραμμικής δομής του εφαπτόμενου χώρου στο [4]). Η **(ΔΔ.2)** έχει ήδη αποδειχθεί. $\square$

Ερχόμαστε τώρα στο βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου:

2.2.6 Θεώρημα. Έστω X μια διαφορική πολυπλοκότητα, $n \in \mathbb{N}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του X και $\{T_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{R})\}_{i,j \in I}$ ένας σύγκυκλος του X , ως προς την ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ και με τιμές στο $GL(n, \mathbb{R})$, δηλαδή ισχύει η ιδιότητα **(2.2.1)**. Τότε υπάρχει μια διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ με απεικονίσεις μεταφοράς τις $\{T_{ij}\}$. Η ℓ είναι μοναδική ως προς ένα ισομορφισμό διανυσματικών δεσμών.

Απόδειξη. Στο σύνολο

$$A = \{(i, x, h) \mid i \in I, x \in U_i, h \in \mathbb{R}^n\}$$

θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(i, x, h) \sim (j, y, k) \Leftrightarrow x = y \text{ και } T_{ji}(x)(h) = k.$$

Θέτουμε $E := A / \sim$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi: E \longrightarrow X: [(i, x, h)] \mapsto x.$$

Επίσης, για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\tau_i: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n: [(j, y, k)] \mapsto (y, T_{ij}(y)(k)).$$

Η τ_i είναι καλά ορισμένη και 1-1:

$$\begin{aligned} [(j, y, k)] &= [(j', y', k')] \Leftrightarrow \\ y &= y' \text{ και } T_{j'j}(y)(k) = k' \Leftrightarrow \\ y &= y' \text{ και } T_{ij'}(y)(k') = T_{ij'}(y) \circ T_{j'j}(y)(k) = T_{ij}(y)(k) \Leftrightarrow \\ \tau_i([(j, y, k)]) &= \tau_i([(j', y', k')]). \end{aligned}$$

Η τ_i είναι επί επειδή

$$(x, h) \in U_i \times \mathbb{R}^n \Rightarrow [(i, x, h)] \in \pi^{-1}(U_i) \quad \text{και} \quad \tau_i[(i, x, h)] = (x, h).$$

Προφανώς, $p_1 \circ \tau_i = \pi$. Απ' το άλλο μέρος, αν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

δίνει ότι

$$\begin{aligned} \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h) &= \tau_j([(i, x, h)]) = (x, T_{ji}(x)(h)) \\ &= (p_1, \text{ev} \circ (T_{ji} \circ p_1, p_2))(x, h), \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι η $\tau_j \circ \tau_i^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση, ως σύνθεση $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεων (άρα και $\mathcal{C}^\infty$ -αμφιδιαφόριση).

Επιπλέον, αν $x \in U_i \cap U_j$, τότε, για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$, είναι

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(h) = \tau_{jx}(\tau_i^{-1}(x, h)) = \tau_{jx}([(i, x, h)]) = T_{ji}(x)(h),$$

δηλαδή

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} = T_{ji}(x) \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5, οπότε η $\ell = (E, \pi, X)$ είναι διανυσματική δέσμη με απεικονίσεις μεταφοράς ακριβώς τις $\{T_{ij}\}$.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι, αν $\bar{\ell} = (\bar{E}, X, \bar{\pi})$ είναι και μία άλλη διανυσματική δέσμη με απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \bar{\tau}_i)\}_{i \in I}$ και απεικονίσεις μεταφοράς $\{\bar{T}_{ij}\}$, τότε οι δέσμες ℓ και $\bar{\ell}$ είναι ισόμορφες. Πράγματι, για κάθε $i \in I$, θεωρούμε την απεικόνιση $f_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \bar{\pi}^{-1}(U_i)$, όπου $f_i = \bar{\tau}_i^{-1} \circ \tau_i$, η οποία είναι αμφιδιαφορίσιμη. Επειδή, από τον ορισμό των απεικονίσεων μεταφοράς,

$$\begin{aligned} (\tau_j \circ \tau_i^{-1})(x, h) &= (x, \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(h)) = (x, T_{ji}(x)(h)), \\ (\bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1})(x, h) &= (x, \bar{\tau}_{jx} \circ \bar{\tau}_{ix}^{-1}(h)) = (x, \bar{T}_{ji}(x)(h)), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in U_i \cap U_j$ και $h \in \mathbb{R}^n$, προκύπτει ότι $\tau_j \circ \tau_i^{-1} = \bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}$, απ' όπου

$$f_j = \bar{\tau}_j^{-1} \circ \tau_j = \bar{\tau}_i^{-1} \circ \tau_i = f_i,$$

υπεράνω κάθε τομής $U_i \cap U_j$. Συνεπώς ορίζεται η απεικόνιση $f: E \rightarrow \bar{E}$ με $f|_{\pi^{-1}(U_i)} = f_i$, η οποία είναι αμφιδιαφόριση. Αποδεικνύεται αμέσως ότι το ζεύγος (f, id_X) είναι ισομορφισμός μεταξύ των ℓ και $\bar{\ell}$. $\square$

2.3 Κατασκευές ορισμένων διανυσματικών δεσμών

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε την κατασκευή μερικών διανυσματικών δεσμών, οι οποίες έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και χρησιμοποιούνται σε επόμενα μέρη των σημειώσεων.

2.3.1 Η δέσμη των γραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης

Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Για κάθε νήμα E_x , θεωρούμε τον δυϊκό διανυσματικό χώρο $E_x^* = L(E_x, \mathbb{R})$, δηλ. τον χώρο των γραμμικών μορφών επί του E_x . Συμβολίζουμε με E^* ή με $L(E, \mathbb{R})$ τη διακεκριμένη ένωση

$$E^* \equiv L(E, \mathbb{R}) := \bigcup_{x \in X} L(E_x, \mathbb{R}) = \bigcup_{x \in X} E_x^*.$$

Επίσης, συμβολίζουμε με $\bar{\pi}$ την φυσική προβολή

$$E^* \longrightarrow X \quad \text{με} \quad \bar{\pi}(f) = x, \text{ αν } f \in E_x^*.$$

Τότε η τριάδα $\ell^* = (E^*, \bar{\pi}, X)$ εφοδιάζεται με δομή διανυσματικής δέσμης με νήματα τύπου $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$.

Πράγματι, για κάθε $i \in I$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\bar{\tau}_i: \bar{\pi}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : u \mapsto (x := \bar{\pi}(f), u \circ \tau_{ix}^{-1}).$$

Είναι άμεσο ότι κάθε $\bar{\tau}_i$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση, καθώς και ότι $p_1 \circ \bar{\tau}_i = \bar{\pi}$. Επίσης, αν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η σύνθεση

$$\bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

δίνει ότι, για κάθε $(x, f) \in U_i \cap U_j \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}(x, f) &= \bar{\tau}_j(u := f \circ \tau_{ix}) = (x, f \circ \tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}) \\ &= (x, \sigma(f, T_{ij}(x))) = (p_1, \sigma \circ (p_2, T_{ij} \circ p_1))(x, f), \end{aligned}$$

όπου

$$\sigma: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : (f, g) \mapsto f \circ g,$$

T_{ij} οι απεικονίσεις μεταφοράς της αρχικής δέσμης ℓ , και p_1, p_2 οι κανονικές προβολές του $(U_i \cap U_j) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ στους αντίστοιχους παράγοντες. Επομένως, η

$\bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη (άρα και αμφιδιαφόριση) και, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός-της $\bar{\tau}_j \circ \bar{\tau}_i^{-1}$ είναι η απεικόνιση

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}): f \mapsto f \circ T_{ij}(x) = f \circ c$$

με $c \in GL(n, \mathbb{R})$ σταθερά, άρα είναι γραμμικός ισομορφισμός. Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5.

Η ℓ^* λέγεται και **δυϊκή δέσμη** (dual bundle) της ℓ . Στην περίπτωση που η ℓ είναι η εφαπτόμενη δέσμη (TX, π, X) , μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας X , η ℓ^* , είναι η **συνεφαπτόμενη δέσμη** (cotangent bundle) (T^*X, π^*, X) .

2.3.2 Η δέσμη των διγραμμικών μορφών διανυσματικής δέσμης

Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Για κάθε E_x θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $L_2(E_x, \mathbb{R})$ των διγραμμικών μορφών $E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$, και συμβολίζουμε με $L_2(E, \mathbb{R})$ τη διακεκριμένη ένωση

$$L_2(E, \mathbb{R}) := \bigcup_{x \in X} L_2(E_x, \mathbb{R}).$$

Συμβολίζουμε, επίσης, με $\tilde{\pi}$ την φυσική προβολή

$$\tilde{\pi}: L_2(E, \mathbb{R}) \longrightarrow X \quad \text{με} \quad \tilde{\pi}(u) = x, \text{ αν } u \in L_2(E_x, \mathbb{R}).$$

Τότε η τριάδα $(L_2(E, \mathbb{R}), \tilde{\pi}, X)$ εφοδιάζεται με δομή διανυσματικής δέσμης με νήματα τύπου $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Πράγματι, για κάθε $i \in I$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\tilde{\tau}_i: \tilde{\pi}^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}): u \mapsto (x := \tilde{\pi}(u), u \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})).$$

Προφανώς, κάθε $\tilde{\tau}_i$ είναι 1-1, επί και $p_1 \circ \tilde{\tau}_i = \tilde{\pi}$. Εξάλλου, αν $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η σύνθεση $\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ σε ένα σημείο $(x, h) \in (U_i \cap U_j) \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ είναι

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}(x, h) &= \tilde{\tau}_j(u := h \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix})) \\ &= (x, h \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}) \circ (\tau_{jx}^{-1} \times \tau_{jx}^{-1})) \\ &= (x, h \circ ((\tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}) \times (\tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}))) \\ &= (x, h \circ (T_{ij}(x) \times T_{ij}(x))). \end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με s την τρι-γραμμική απεικόνιση

$$s: L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \\ (h, f, g) \mapsto h \circ (f \times g),$$

τότε η $\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ γράφεται με τη μορφή

$$\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1} = (p_1, s \circ (p_2, T_{ij} \circ p_1, T_{ij} \circ p_1)),$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη (και αμφιδιαφόριση).

Τέλος, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός $\tilde{\tau}_{jx} \circ \tilde{\tau}_{ix}^{-1}$ είναι η απεικόνιση

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : b \mapsto b \circ (T_{ij}(x) \times T_{ij}(x)),$$

που είναι γραμμικός ισομορφισμός. Το αποτέλεσμα πλέον προκύπτει από την Πρόταση 2.2.5.

Εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν g_x είναι εσωτερικό γινόμενο του νήματος E_x της αρχικής δέσμης ℓ , τότε $g_x \in L_2(E_x, \mathbb{R})$. Άρα, μια δομή Riemann της δέσμης ℓ (δηλαδή μια οικογένεια εσωτερικών γινομένων $\{g_x\}_{x \in X}$), είναι μια τομή της δέσμης των διγραμμικών μορφών της ℓ , με την ιδιότητα κάθε g_x να είναι επιπλέον, εσωτερικό γινόμενο (βλ. λεπτομέρειες στην § 6.1). Αποδεικνύεται ότι η διαφορισμότητα της δομής Riemann (όπως συνήθως ορίζεται στην γεωμετρία Riemann) είναι ισοδύναμη με την διαφορισμότητα της

$$g: X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}) : x \mapsto g(x) = g_x.$$

Η ύπαρξη, λοιπόν, μιας διαφορίσιμης δομής Riemann σε μια δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ ανάγεται στην ύπαρξη μιας διαφορίσιμης ολικής τομής $g: X \rightarrow L_2(E, \mathbb{R})$, τέτοιας ώστε κάθε $g(x)$ να είναι εσωτερικό γινόμενο.

2.3.3 Το ευθύ άθροισμα (ή άθροισμα Whitney) διανυσματικών δεσμών

Έστω $\ell_\kappa = (E_\kappa, \pi_\kappa, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(\kappa)}$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_{\kappa i})\}_{i \in I}$, $\kappa = 1, 2$. Θεωρούμε το σύνολο

$$E_1 \oplus E_2 := \bigcup_{x \in X} E_{1x} \oplus E_{2x}$$

και την απεικόνιση

$$\pi: E_1 \oplus E_2 \longrightarrow X : (u_1, u_2) \mapsto \pi(u_1, u_2) := \pi_1(u_1) = \pi_2(u_2).$$

Η υπόθεση ότι οι απλοποιήσεις $\{U_i, \tau_{\kappa i}\}_{i \in I}$ ($\kappa = 1, 2$.) ορίζονται πάνω από την ίδια ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X , δεν αποτελεί βλάβη της γενικότητας, αφού, σε διαφορετική περίπτωση, μπορούμε πάντα να θεωρήσουμε τις τομές των δύο ανοιχτών καλύψεων. Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\tau_i: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)},$$

μέσω της σχέσης

$$\tau_i(u_1, u_2) := (x = \pi(u_1, u_2), \tau_{1ix}(u_1), \tau_{2ix}(u_2)).$$

Είναι άμεσον ότι κάθε τ_i είναι απεικόνιση 1-1 και επί με $p_1 \circ \tau_i = \pi$. Αν $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση

$$\tau_j \circ \tau_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)},$$

σε ένα σημείο $(x, h, \kappa) \in U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$, δίνει ότι

$$\begin{aligned} \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, h, \kappa) &= \tau_j(\tau_{1ix}^{-1}(h), \tau_{2ix}^{-1}(\kappa)) \\ &= (x, \tau_{1j} \circ \tau_{1i}^{-1}(x, h), \tau_{2j} \circ \tau_{2i}^{-1}(x, h)), \end{aligned}$$

άρα η $\tau_j \circ \tau_i^{-1}$ είναι (αμφι)διαφορίσιμη. Επίσης, αν $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} = (\tau_{1jx} \circ \tau_{1ix}^{-1}) \times (\tau_{2jx} \circ \tau_{2ix}^{-1})$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός, οπότε ισχύουν πάλι οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5. Επομένως η τριάδα $(E_1 \oplus E_2, \pi, X)$ είναι διανυσματική δέσμη, που καλείται *ευθύ άθροισμα ή άθροισμα Whitney* των ℓ_1 και ℓ_2 .

2.3.4 Η δέσμη των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ των νημάτων δύο δεσμών.

Έστω $\ell_\kappa = (E_\kappa, \pi_\kappa, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(\kappa)}$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_{\kappa i})\}_{i \in I}$, $\kappa = 1, 2$. Θεωρούμε το σύνολο

$$L(E_1, E_2) := \bigcup_{x \in X} L(E_{1x}, E_{2x})$$

και την απεικόνιση

$$\pi: L(E_1, E_2) \longrightarrow X \text{ με } \pi(f) = x, \text{ αν } f \in L(E_{1x}, E_{2x}).$$

Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)})$$

μέσω της σχέσης

$$\varphi_i(f) := (x := \pi(f), \tau_{2ix} \circ f \circ \tau_{1ix}^{-1}), \quad f \in L(E_{1x}, E_{2x}).$$

Είναι άμεσον ότι κάθε φ_i είναι αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση που ικανοποιεί τη σχέση $p_1 \circ \varphi_i = \pi$. Εξάλλου, αν $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η σύνθεση

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}) \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}),$$

υπολογισμένη σε ένα $(x, f) \in (U_i \cap U_j) \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)})$, είναι

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, f) &= \varphi_j(\tau_{2ix}^{-1} \circ f \circ \tau_{1ix}) \\ &= (x, \tau_{2jx} \circ \tau_{2ix}^{-1} \circ f \circ \tau_{1ix} \circ \tau_{1jx}^{-1}) \\ &= (x, T_{ij}^2(x) \circ f \circ T_{ij}^1(x)) \\ &= (p_1, \sigma \circ (T_{ij}^2 \circ p_1, p_2, T_{ij}^1 \circ p_1))(x, f), \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \sigma: L(\mathbb{R}^{n(2)}, \mathbb{R}^{n(2)}) \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}) \times L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(1)}) &\longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}): \\ (f, g, h) &\mapsto \sigma(f, g, h) := f \circ g \circ h. \end{aligned}$$

Η σ είναι τρι-γραμμική, άρα διαφορίσιμη, επομένως η $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ είναι (αμφι)διαφορίσιμη. Τέλος, για κάθε $x \in U_i \cap U_j$, ο περιορισμός

$$\varphi_{jx} \circ \varphi_{ix}^{-1} = \sigma \circ (T_{ij}^2(x), \cdot, T_{ij}^1(x))$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5 και η $(L(E_1, E_2), \pi, X)$ είναι διανυσματική δέσμη.

Οι προηγούμενες κατασκευές διανυσματικών δεσμών και πολλές άλλες (όπως του τανυστικού γινομένου διανυσματικών δεσμών κλπ.) ενοποιούνται με χρήση ορισμένων εννοιών της Θεωρίας Κατηγοριών (βλ., π.χ., [1], [19, Chap. 3, § 4]).

2.4 Η αντίστροφη εικόνα διανυσματικής δέσμης

Ερχόμαστε τώρα σε μια άλλη πολύ χρήσιμη κατασκευή.

2.4.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$, Y μια διαφορική πολλαπλότητα και $f: Y \rightarrow X$ διαφορίσιμη απεικόνιση.

Ονομάζουμε **αντίστροφη εικόνα** ή **ανάκρουση (pull-back)** της ℓ μέσω της f την τριάδα

$$f^*(\ell) := (f^*(E), \pi', Y),$$

όπου (βλ. Ορισμό 1.4.6 του νηματικού γινομένου)

$$f^*(E) := Y \times_X E := \{(y, u) \in Y \times E : f(y) = \pi(u) \in X\},$$

$$\pi' = p_1|_{f^*(E)} : f^*(E) \longrightarrow Y.$$

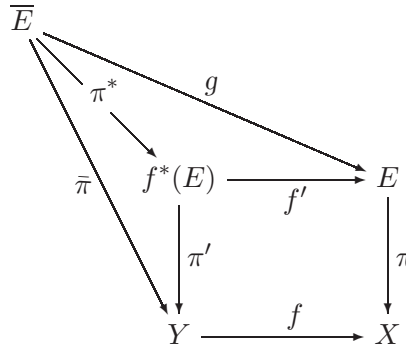
2.4.2 Θεώρημα. Με τους προηγούμενους ορισμούς/συμβολισμούς ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

- i) Η τριάδα $f^*(\ell)$ δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$.
- ii) Αν $f' := p_2|_{f^*(E)} : f^*(E) \rightarrow E$, τότε το ζεύγος (f', f) είναι μορφισμός μεταξύ των διανυσματικών δεσμών $f^*(\ell)$ και ℓ .
- iii) Η $f^*(\ell)$ έχει την επόμενη **καθολική ιδιότητα της αντίστροφης εικόνας** (universal property): Για κάθε διανυσματική δέσμη $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, Y)$ και κάθε μορφισμό $(g, f) : \bar{\ell} \rightarrow \ell$, υπάρχει μοναδική διαφορίσιμη απεικόνιση $\pi^* : \bar{E} \rightarrow f^*(E)$, τέτοια ώστε το

$$(\pi^*, id_Y) : \bar{\ell} \longrightarrow f^*(\ell)$$

να είναι μορφισμός και να ισχύει η σχέση $f' \circ \pi^* = g$.

Το τελευταίο συμπέρασμα απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Διάγραμμα 2.7

Απόδειξη. i): Υποθέτουμε ότι $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ είναι μία απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Θεωρούμε την ανοιχτή κάλυψη $\{V_i := f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ του Y και, για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi_i : \pi'^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n : (y, u) \mapsto (y, \tau_{if(y)}(u)).$$

Η φ_i είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και $p_1 \circ \varphi_i = \pi'$. Έστω $i, j \in I$ με $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ (άρα και $U_i \cap U_j \neq \emptyset$). Τότε η απεικόνιση

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: V_i \cap V_j \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i \cap V_j \times \mathbb{R}^n,$$

υπολογισμένη σε ένα σημείο (y, h) , δίνει ότι

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y, h) &= \varphi_j(y, \tau_{if(y)}^{-1}(h)) = (y, \tau_{jf(y)} \circ \tau_{if(y)}^{-1}(h)) \\ &= (y, (T_{ji} \circ f(y))(h)) = (p_1, ev \circ (T_{ji} \circ f \circ p_1, p_2))(y, h), \end{aligned}$$

δηλαδή η $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ είναι (αμφι)διαφορίσιμη. Τέλος, για κάθε $y \in V_i \cap V_j$, ο περιορισμός

$$\varphi_{jy} \circ \varphi_{iy}^{-1} = \tau_{jf(y)} \circ \tau_{if(y)}^{-1} = T_{ji}(f(y))$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Άρα το i) προκύπτει από την Πρόταση 2.2.5.

Για το ii) εργαζόμαστε ως εξής: Έστω $i \in I$. Η διαφορισιμότητα της f' στο $\pi'^{-1}(V_i)$ είναι ισοδύναμη με την διαφορισιμότητα της "τοπικής παράστασης" $\tau_i \circ f' \circ \varphi_i^{-1}$, εφ' όσον οι φ_i, τ_i είναι αμφιδιαφορίσιμες (βλ. και το επόμενο Διάγραμμα 2.8). Πράγματι, για κάθε $(y, h) \in V_i \times \mathbb{R}^n$, είναι

$$\begin{aligned} \tau_i \circ f' \circ \varphi_i^{-1}(y, h) &= \tau_i \circ f'(y, \tau_{if(y)}^{-1}(h)) = \tau_i(\tau_{if(y)}^{-1}(h)) \\ &= \tau_i \circ \tau_i^{-1}(f(y), h) = (f(y), h), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} V_i \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} & \pi'^{-1}(V_i) & \xrightarrow{f'} & \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p_1 & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \swarrow p_1 \\ & & V_i & \xrightarrow{f} & U_i & & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.8

απ' όπου προκύπτει ότι η $\tau_i \circ f' \circ \varphi_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Επίσης, προφανώς, $\pi \circ f' = f \circ \pi'$. Τέλος, ο περιορισμός της f' σε τυχόν νήμα

$$f^*(E)_y := \{(z, u) \in Y \times E : f(z) = \pi(u), \pi'(z, u) = y\} = \{y\} \times E_{f(y)}$$

είναι η απεικόνιση

$$f'_y : \{y\} \times E_{f(y)} \longrightarrow E_{f(y)} : (y, v) \mapsto v,$$

που είναι γραμμική.

Για την iii) ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi^*: \bar{E} \longrightarrow f^*(E) : u \mapsto \pi^*(u) := (\bar{\pi}(u), g(u)).$$

Η π^* είναι καλά ορισμένη, γιατί, για κάθε $u \in \bar{E}$, είναι $f(\bar{\pi}(u)) = \pi(g(u))$, δηλαδή $(\bar{\pi}(u), g(u)) \in f^*(E)$, αφού (g, f) είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών. Προφανώς $f' \circ \pi^* = g$. Επίσης το ζεύγος

$$(\pi^*, id_Y) : \bar{\ell} \longrightarrow f^*(\ell)$$

είναι μορφισμός. Πράγματι, η μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} \bar{E} & \xrightarrow{\pi^*} & f^*(E) \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi' \\ Y & \xrightarrow{id_Y} & Y \end{array}$$

Διάγραμμα 2.9

είναι προφανής και ο περιορισμός της π^* στο νήμα $\bar{E}_y$ συμπίπτει με την γραμμική απεικόνιση $g|_{\bar{E}_y}$. Για τη διαφορισιμότητα της π^* , παρατηρούμε ότι αν (V_i, ψ_i) , και (V_i, φ_i) είναι απλοποιούντα ζεύγη των $\bar{\ell}$ και $f^*(\ell)$, αντιστοίχως, τότε αυτή είναι ισοδύναμη (σύμφωνα και με το Διάγραμμα 2.10) με την διαφορισιμότητα της $\varphi_i \circ \pi^* \circ \psi_i^{-1}$, για κάθε $i \in I$.

$$\begin{array}{ccccccc} V_i \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi_i^{-1}} & \bar{\pi}^{-1}(V_i) & \xrightarrow{\pi^*} & \pi'^{-1}(V_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & V_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p_1 & \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi' & \swarrow p_1 & \\ & & V_i & \xrightarrow{id} & V_i & & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.10

Όμως, για $(y, h) \in V_i \times \mathbb{R}^m$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \pi^* \circ \psi_i^{-1}(y, h) &= \varphi_i \circ \pi^*(u := \psi_i^{-1}(y, h)) = \varphi_i(y = \bar{\pi}(u), g(u)) \\ &= (y, \tau_{if(y)} \circ g(u)) = (y, p_2 \circ \tau_i \circ g \circ \psi_i^{-1}(y, h)), \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη. Αυτό κλείνει την απόδειξη. $\square$

2.5 Οι ιδιότητες της κατηγορίας $VB(X)$

Σ' ολόκληρη την παράγραφο αυτή σταθεροποιούμε μια πολλαπλότητα $X \equiv (X, \mathcal{A})$ και θεωρούμε τις διαφορίσιμες διανυσματικές δέσμες με βάση X και μορφισμούς του τύπου (f, id_X) , δηλαδή περιοριζόμαστε στην κατηγορία $VB(X)$ (βλ. σχόλια και συμβολισμούς στο τέλος της § 2.1, σελ. 50 και Παράρτημα Β').

Για ευκολία, θα συμβολίζουμε με f και ένα μορφισμό $(f, id_X): \ell \rightarrow \ell'$ αλλά και την απεικόνιση $f: E \rightarrow E'$ μεταξύ των αντιστοιχών ολικών χώρων.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αν συμβολίσουμε με $\mathcal{O}$ την τετριμμένη δέσμη

$$\mathcal{O} := (X \times \{0\}, p_1, X)$$

που έχει νήματα τύπου $\{0\}$, τότε, για κάθε $\ell \in VB(X)$, τα σύνολα των μορφισμών $Mor(\mathcal{O}, \ell)$ και $Mor(\ell, \mathcal{O})$ είναι μονοσύνολα. Η δέσμη $\mathcal{O}$ είναι η μοναδική με αυτήν την ιδιότητα. Λέμε ότι η $\mathcal{O}$ είναι **μηδενικό αντικείμενο** (zero object) της κατηγορίας $VB(X)$.

Σχετικά με τα σύνολα των μορφισμών $Mor(\ell_1, \ell_2)$, για τυχαίες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$, έχουμε την επόμενη

2.5.1 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f, g: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμοί. Τότε η απεικόνιση

$$f + g: E_1 \longrightarrow E_2 : u \mapsto f(u) + g(u)$$

είναι μορφισμός και η αντιστοιχία

$$(f, g) \longmapsto f + g$$

ορίζει μία πράξη στο σύνολο $Mor(\ell_1, \ell_2)$, τέτοια ώστε:

- i) $(Mor(\ell_1, \ell_2), +)$ είναι αβελιανή ομάδα.
- ii) Για κάθε $\ell_3 \in VB(X)$, η σύνθεση

$$Mor(\ell_1, \ell_2) \times Mor(\ell_2, \ell_3) \longrightarrow Mor(\ell_1, \ell_3) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

είναι επιμεριστική, δηλαδή

$$\begin{aligned} g \circ (f_1 + f_2) &= g \circ f_1 + g \circ f_2, \\ (g_1 + g_2) \circ f &= g_1 \circ f + g_2 \circ f, \end{aligned}$$

για κάθε $f, f_1, f_2 \in Mor(\ell_1, \ell_2)$ και $g, g_1, g_2 \in Mor(\ell_2, \ell_3)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνον ότι $f + g$ και $g \circ f$ είναι μορφισμοί. Εστω $(U, \tau_1), (U, \tau_2)$ απλοποιούντα ζεύγη των ℓ_1, ℓ_2 . Αρκεί να δείξουμε ότι $\tau_2 \circ (f + g) \circ \tau_1^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Αν $\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)}$ είναι οι τύποι των νημάτων των ℓ_1, ℓ_2 , αντιστοίχως, τότε η

$$\tau_2 \circ (f + g) \circ \tau_1^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n(2)},$$

υπολογισμένη σε ένα $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)}$ με $\tau_1^{-1}(x, h) = u$, δίνει

$$\begin{aligned} \tau_2 \circ (f + g) \circ \tau_1^{-1}(x, h) &= \tau_2(f(u) + g(u)) \\ &= (x, \tau_{2x} \circ f_x \circ \tau_{1x}^{-1}(h) + \tau_{2x} \circ g_x \circ \tau_{1x}^{-1}(h)) \\ &= (p_1, p_2 \circ \tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1} + p_2 \circ \tau_2 \circ g \circ \tau_1^{-1})(x, h), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη.

Για τη διαφορισιμότητα της $g \circ f$ θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη (U_i, τ_i) οφ $\ell_i, i = 1, 2, 3$. Επειδή $\tau_3 \circ g \circ \tau_2^{-1}$ ανδ $\tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1}$ είναι διαφορίσιμες, εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} &(\tau_3 \circ (g \circ f) \circ \tau_1^{-1})(x, h) = \\ &= [x, (\tau_{3x} \circ g \circ \tau_{2x}^{-1}) \circ (\tau_{2x} \circ f \circ \tau_{1x}^{-1})(h)] \\ &= [x, \underbrace{(p_2 \circ \tau_3 \circ g \circ \tau_2^{-1})}_G \underbrace{(x, p_2 \circ \tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1}(x, h))}_F] \\ &= (x, G(x, F(x, h))) = (p_1, G \circ (p_1, F))(x, h), \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη. Οι υπόλοιπες ιδιότητες ελέγχονται αμέσως. $\square$

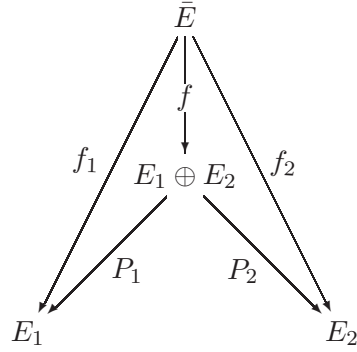
2.5.2 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και το άθροισμα Whitney $\ell = (E_1 \oplus E_2, \pi, X)$ των ℓ_1, ℓ_2 . Εστω

$$P_k : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_k : (u_1, u_2) \mapsto u_k.$$

Τότε $P_k \in Mor(\ell, \ell_k)$ και η τριάδα (ℓ, P_1, P_2) έχει την επόμενη **καθοδική ιδιότητα του γινομένου** (universal property of product): Για κάθε $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in VB(X)$ και κάθε ζεύγος μορφισμών $f_k : \bar{\ell} \rightarrow \ell_k$ ($k = 1, 2$), υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f \equiv (f, id_X) : \bar{\ell} \rightarrow \ell$ με την ιδιότητα

$$P_k \circ f = f_k, \quad k = 1, 2,$$

όπως και στο διάγραμμα της επόμενης σελίδας.



Διάγραμμα 2.11

Απόδειξη. Θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη (U, τ_k) των ℓ_k ($k = 1, 2$), και το αντίστοιχο (U, τ) της ℓ (βλ. την κατασκευή του αθροίσματος Whitney 2.3.3).

Για τη διαφορισιμότητα της P_k αρκεί να δείξουμε ότι η

$$\tau_k \circ P_k \circ \tau^{-1}: U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(k)}$$

είναι διαφορίσιμη. Ομως, σε κάθε $(x, h_1, h_2) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$ είναι

$$\begin{aligned}
 \tau_k \circ P_k \circ \tau^{-1}(x, h_1, h_2) &= \tau_k \circ P_k(\tau_1^{-1}(x, h_1), \tau_2^{-1}(x, h_2)) \\
 &= \tau_k(\tau_k^{-1}(x, h_k)) = (x, h_k),
 \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη. Η σχέση $\pi_k \circ P_k = \pi$ είναι προφανής, όπως και η γραμμικότητα της P_k στα νήματα. Άρα $P_k \in \text{Mor}(\ell, \ell_k)$.

Εστω τώρα $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in VB(X)$ με νήματα τύπου $\mathbb{R}^m$ και $f_k \in \text{Mor}(\bar{\ell}, \ell_k)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f: \bar{E} \longrightarrow E_1 \oplus E_2 : u \mapsto (f_1(u), f_2(u)).$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη, θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη $(U, \bar{\tau})$ της $\bar{\ell}$ και (U, τ) της ℓ [που αντιστοιχεί στα (U, τ_1) , (U, τ_2)] και την απεικόνιση

$$\tau \circ f \circ \bar{\tau}^{-1}: U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}.$$

Αρκεί να δείξουμε τη διαφορισιμότητα της τελευταίας. Πράγματι, για οποιοδήποτε $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^m$, με $u := \bar{\tau}^{-1}(x, h)$, είναι

$$\begin{aligned}
 \tau \circ f \circ \bar{\tau}^{-1}(x, h) &= \tau \circ f(u) = \tau(f_1(u), f_2(u)) \\
 &= (x, \tau_{1x} \circ f_1(u), \tau_{2x} \circ f_2(u)) \\
 &= (x, p_2 \circ \tau_1 \circ f_1 \circ \bar{\tau}^{-1}(x, h), p_2 \circ \tau_2 \circ f_2 \circ \bar{\tau}^{-1}(x, h))
 \end{aligned}$$

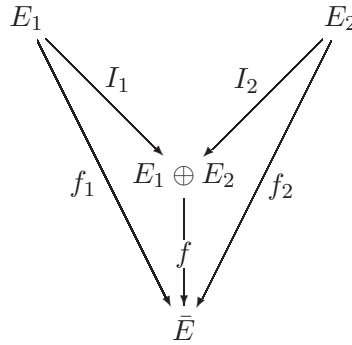
που είναι διαφορίσιμη, λόγω της διαφορισιμότητας των f_k . Η σχέση $\pi \circ f = \bar{\pi}$ και η γραμμικότητα της f στα νήματα είναι άμεσες, άρα η $f \in \text{Mor}(\bar{\ell}, \ell)$. Η μοναδικότητα της f είναι αποτέλεσμα των σχέσεων $P_k \circ f = f_k$, που προφανώς ισχύουν. $\square$

2.5.3 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in \text{VB}(X)$, $k = 1, 2$, και το άθροισμα Whitney $\ell = (E_1 \oplus E_2, \pi, X)$ των ℓ_1, ℓ_2 . Εστω

$$I_1: E_1 \longrightarrow E : u \mapsto (u, 0) \text{ και } I_2: E_2 \longrightarrow E : u \mapsto (0, u).$$

Τότε $I_k \in \text{Mor}(\ell_k, \ell)$ και η τριάδα (ℓ, I_1, I_2) έχει την ακόλουθη **καθοδική ιδιότητα του συγγινομένου** (universal property of the coproduct): Για κάθε $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in \text{VB}(X)$ και κάθε ζεύγος μορφισμών $f_k: \ell_k \rightarrow \bar{\ell}$ ($k = 1, 2$), υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f: \ell \rightarrow \bar{\ell}$ με την ιδιότητα

$$f \circ I_k = f_k.$$



Διάγραμμα 2.12

Απόδειξη. Όπως στην προηγούμενη πρόταση, θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη (U, τ_k) των ℓ_k και το αντίστοιχο (U, τ) της ℓ . Η απεικόνιση

$$\tau \circ I_1 \circ \tau_1^{-1}: U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)},$$

σε κάθε $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)}$, δίνει ότι

$$\tau \circ I_1 \circ \tau_1^{-1}(x, h) = \tau(\tau_1^{-1}(x, h), 0) = (x, \tau_{1x}(\tau_{1x}^{-1}(h)), \tau_{2x}(0)) = (x, h, 0),$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη και συνεπάγεται την διαφορισιμότητα της I_1 . Ανάλογα για την I_2 . Η σχέση $\pi \circ I_k = \pi_k$ και η γραμμικότητα στα νήματα είναι προφανείς. Άρα $I_k \in \text{Mor}(\ell_k, \ell)$.

Αν τώρα $\bar{\ell} = (\bar{E}, \bar{\pi}, X) \in VB(X)$ με νήματα τύπου $\mathbb{R}^m$ και $f_k \in Mor(\ell_k, \bar{\ell})$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$f: \ell \longrightarrow \bar{\ell}: (u_1, u_2) \mapsto f(u_1, u_2) := (f_1(u_1), f_2(u_2)) \equiv f_1(u_1) + f_2(u_2),$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι, αν $(u_1, u_2) \in E_{1x} \oplus E_{2x}$, τότε $f_1(u_1), f_2(u_2) \in \bar{E}_x$, και, για δύο διανυσματικούς χώρους $\mathbb{E}, \mathbb{F}$, ισχύει η ταύτιση $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F} \equiv \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ (μέσω ισομορφίας). Για να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη, θεωρούμε τα απλοποιούντα ζεύγη (U, τ) της ℓ και $(U, \bar{\tau})$ της $\bar{\ell}$, καθώς και την απεικόνιση

$$\bar{\tau} \circ f \circ \tau^{-1}: U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m.$$

Τότε, για κάθε $(x, h_1, h_2) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^{n(2)}$, θα είναι

$$\begin{aligned} \bar{\tau} \circ f \circ \tau^{-1}(x, h_1, h_2) &= \bar{\tau} \circ f(\tau_{1x}^{-1}(h_1), \tau_{2x}^{-1}(h_2)) \\ &\equiv \bar{\tau}(f_1 \circ \tau_{1x}^{-1}(h_1) + f_2 \circ \tau_{2x}^{-1}(h_2)) \\ &= (x, \bar{\tau}_x \circ f_{1x} \circ \tau_{1x}^{-1}(h_1) + \bar{\tau}_x \circ f_{2x} \circ \tau_{2x}^{-1}(h_2)) \\ &= (x, p_2 \circ \bar{\tau} \circ f_1 \circ \tau_1^{-1}(x, h_1) + p_2 \circ \bar{\tau} \circ f_2 \circ \tau_2^{-1}(x, h_2)), \end{aligned}$$

απ' όπου συνάγεται η διαφορίσιμότητα της f . Η σχέση $\bar{\pi} = f \circ \pi$ και η γραμμικότητα στα νήματα είναι άμεσες. Η μοναδικότητα της f είναι αποτέλεσμα των σχέσεων $f \circ I_k = f_k$, που προφανώς ισχύουν. $\square$

Η ύπαρξη του μηδενικού αντικειμένου $\mathcal{O}$, η αλγεβρική δομή αβελιανής ομάδας των συνόλων $Mor(\ell_1, \ell_2)$ και η ύπαρξη του αθροίσματος Whitney για κάθε ζεύγος δεσμών, με τις καθολικές ιδιότητες του γινομένου και του συνγινομένου, σημαίνουν ότι η $VB(X)$ είναι **προσθετική κατηγορία** (additive category), για κάθε διαφορική πολλαπλότητα X .

Οπως θα δούμε στην Παράγραφο 2.6, οι πυρήνες των μορφισμών δεν δέχονται πάντα δομή διανυσματικής δέσμης. Έχουμε όμως την επόμενη

2.5.4 Θεώρημα. Εστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $p: \ell \rightarrow \ell$ ένας **προβολέας**, δηλαδή ένας μορφισμός με $p^2 = p$. Τότε η τριάδα

$$\left(\ker p := \bigcup_{x \in X} \ker p_x, \pi|_{\ker p}, X \right),$$

δέχεται δομή διαφορίσιμης διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η κανονική εμφύτευση $i: \ker p \hookrightarrow E$ να είναι μορφισμός στην $VB(X)$.

Απόδειξη. Εστω ότι η ℓ έχει νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$. Εστω $x_o \in X$ και (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ με $x_o \in U$. Τότε η απεικόνιση

$$P := \tau \circ p \circ \tau^{-1} : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

έχει την ιδιότητα $P^2 = P$, δηλαδή η P είναι προβολέας της τετριμμένης δέσμης $(U \times \mathbb{R}^n, p_1, U)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto f(x) := id_{\mathbb{R}^n} - P_x - P_{x_o} + 2P_{x_o} \circ P_x,$$

που είναι διαφορίσιμη (βλ. Πρόταση 2.2.4 και Λήμμα 2.2.3), και θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, f(x)(h)),$$

που είναι επίσης διαφορίσιμη (Λήμμα 2.2.3). Ακόμη, στην τετριμμένη δέσμη $(U \times \mathbb{R}^n, p_1, U)$ ορίζουμε τον μορφισμό

$$P_o : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, P_{x_o}(h)).$$

Διαπιστώνεται αμέσως ότι $(U \times \ker P_{x_o}, p_1, U)$ είναι επίσης τετριμμένη δέσμη και η κανονική εμφύτευση

$$I_o : U \times \ker P_o \hookrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, h)$$

είναι μορφισμός δεσμών.

Θεωρούμε τώρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} \bigcup_{x \in U} \ker P_x & \xhookrightarrow{I} & U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P} & U \times \mathbb{R}^n \\ F|_{\bigcup_{x \in U} \ker P_x} \downarrow & & \downarrow F & & \downarrow F \\ U \times \ker P_{x_o} & \xhookrightarrow{I_o} & U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P_o} & U \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 2.13

όπου I είναι επίσης η αντίστοιχη κανονική εμφύτευση. Το δεξιά τετράγωνο είναι μεταθετικό. Πράγματι, για κάθε $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^n$, είναι

$$\begin{aligned} F \circ P(x, h) &= F(x, P_x(h)) = (x, f(x)(P_x(h))) \\ &= (x, id_{\mathbb{R}^n}(P_x(h)) - P_x(P_x(h)) - P_{x_o}(P_x(h)) + \\ &\quad + 2P_{x_o}(P_x(P_x(h)))) \\ &= (x, P_x(h) - P_x(h) - P_{x_o}(P_x(h)) + 2P_{x_o}(P_x(h))) \\ &= (x, P_{x_o}(P_x(h))), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}
 P_o \circ F(x, h) &= P_o(x, id_{\mathbb{R}^n}(h) - P_x(h) - P_{x_o}(h) + 2P_{x_o}(P_x(h))) \\
 &= (x, P_{x_o}(h - P_x(h) - P_{x_o}(h) + 2P_{x_o}(P_x(h)))) \\
 &= (x, P_{x_o}(h) - P_{x_o}(P_x(h)) - P_{x_o}(h) + 2P_{x_o}(P_x(h))) \\
 &= (x, P_{x_o}(P_x(h))).
 \end{aligned}$$

Επίσης, επειδή σε κάθε νήμα είναι και $F_x(\ker P_x) \leq \ker P_{x_o}$, βλέπουμε ότι και το αριστερό τετράγωνο του ανωτέρω διαγράμματος είναι μεταθετικό.

Παρατηρούμε τώρα ότι $f(x_o) = id_{\mathbb{R}^n} \in GL(n, \mathbb{R})$, άρα, λόγω συνεχείας της f , υπάρχει ανοικτή περιοχή $V_o \subseteq U$ του x_o , τέτοια ώστε $f(V_o) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Άρα μπορεί να οριστεί η διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\alpha \circ f: V_o \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) : x \mapsto (f(x))^{-1},$$

(α είναι η απεικόνιση “αντιστροφή”, που είναι αμφιδιαφόριση στις ομάδες Lie, βλ. [4]) και εξ αυτής η διαφορίσιμη απεικόνιση

$$F^{-1}: V_o \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V_o \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, f(x)^{-1}(h)).$$

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο των ζευγών που κατασκευάζονται όπως το (V_o, F) είναι μία απλοποιούσα κάλυψη του $(\bigcup_{x \in U} \ker P_x, p_1, U)$, εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.2.5. Ελέγχεται αμέσως ότι ο περιορισμός

$$F: \bigcup_{x \in V_o} \ker P_x \longrightarrow V_o \times \ker P_{x_o}$$

είναι 1-1 και επί, άρα ορίζει αμφιδιαφόριση, καθώς και ότι κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 \bigcup_{x \in V_o} \ker P_x & \xrightarrow{F} & V_o \times \ker P_{x_o} \\
 & \searrow p_1 & \swarrow p_1 \\
 & V_o &
 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.14

Εστω τώρα $x_1 \in U$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned}
 g: U &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto g(x) := id_{\mathbb{R}^n} - P_x - P_{x_1} + 2P_{x_1} \circ P_x, \\
 G: U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, g(x)(h)), \\
 P_1: U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, P_{x_1}(h)).
 \end{aligned}$$

Όπως προηγουμένως, υπάρχει ανοιχτό $V_1 \subseteq U$ με $x_1 \in V_1$, έτσι ώστε ο περιορισμός $G|_{V_1 \times \mathbb{R}^n}$ να είναι αμφιδιαφόριση. Αν $V_o \cap V_1 \neq \emptyset$, τότε η απεικόνιση (βλ. και το επόμενο διάγραμμα)

$$G \circ F^{-1} : (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n$$

είναι αμφιδιαφόριση, όπως και ο περιορισμός-της

$$G \circ F^{-1} : (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_o} \longrightarrow (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_1}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_1} & \xrightarrow{I_1} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P_1} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n \\
 \uparrow G & & \uparrow G & & \uparrow G \\
 \bigcup_{x \in V_o \cap V_1} \ker P_x & \xrightarrow{I} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n \\
 \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F \\
 (V_o \cap V_1) \times \ker P_{x_o} & \xrightarrow{I_o} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P_o} & (V_o \cap V_1) \times \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.15

Εξάλλου, ο περιορισμός της $G \circ F^{-1}$ σε ένα νήμα $\{x\} \times \ker P_{x_o}$, με $x_o \in V_o \cap V_1$, συμπίπτει με τον ισομορφισμό $g(x) \circ f(x)^{-1}$. Αρα το σύνολο των ζευγών (V_o, F) είναι απλοποιούσα κάλυψη του

$$\left(\bigcup_{x \in U} \ker P_x, p_1, U \right).$$

Τώρα είναι άμεσον ότι τα ζεύγη $(V_o, F \circ \tau)$ αποτελούν απλοποιούσα κάλυψη του $(\ker p, \pi, X)$, και η εμφύτευση $i : \ker p \hookrightarrow E$ είναι μορφισμός στην $VB(X)$. $\square$

Εφόσον η $VB(X)$ είναι προσθετική κατηγορία και κάθε προβολέας έχει πυρήνα μέσα στην $VB(X)$, αυτό σημαίνει ότι η $VB(X)$ είναι επιπλέον **ψευδο-αβελιανή κατηγορία**.

2.6 Ακριβείς ακολουθίες - Διασπάσεις

Είδαμε ότι, υπό προϋποθέσεις (Πρόταση 2.5.4), ο πυρήνας ενός μορφισμού έχει δομή διανυσματικής δέσμης. Αλλά, ο πυρήνας και η εικόνα τυχόντος μορφισμού δεν δέχονται γενικά δομή διανυσματικής δέσμης. Π.χ., αν $X = I = [0, 1]$ και $\ell = (I \times \mathbb{R}, p_1, I)$, τότε η απεικόνιση $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow I \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x, xy)$ είναι μορφισμός δεσμών. Όμως ο πυρήνας της f έχει νήμα διάστασης 0 σε κάθε $x \neq 0$ και διάστασης 1 στο $x = 0$, άρα δεν είναι τοπικά τετριμμένος. Ανάλογα και η εικόνα.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν δομή διανυσματικής δέσμης στην εικόνα ή τον πυρήνα ενός μορφισμού από την κατηγορία $VB(X)$. Μια σημαντική εφαρμογή της παραγράφου αυτής βρίσκεται στο Κεφάλαιο 5.

Ακολουθούμε πάντοτε τις συμβάσεις στην αρχή της § 2.5 (σελ. 65)

2.6.1 Ορισμός. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2, 3$, με νήματα τύπου $\mathbb{R}^{n(k)}$ και $f_k: \ell_k \rightarrow \ell_{k+1}$ μορφισμοί διανυσματικών δεσμών. Μία ακολουθία της μορφής

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f_1} \ell_2$$

καλείται **ακριβής** (exact sequence), εαν $n(1) \leq n(2)$ και υπάρχουν απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in I}$, $k = 1, 2$, πάνω από την ίδια ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X , έτσι ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f_1} & \pi_2^{-1}(U_i) \\ \tau_{1i} \downarrow & & \downarrow \tau_{2i} \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} & \xrightarrow{I} & U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.16

για κάθε $i \in I$, όπου

$$(2.6.1) \quad I: U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} : (x, h) \mapsto (x, h, 0)$$

συμβολίζει την κανονική εμφύτευση.

Ανάλογα, λέμε ότι η ακολουθία

$$\ell_2 \xrightarrow{f_2} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι **ακριβής**, εαν $n(2) \geq n(3)$ και υπάρχουν απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in I}$, $k = 2, 3$, έτσι ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \pi_2^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f_2} & \pi_3^{-1}(U_i) \\ \tau_{2i} \downarrow & & \downarrow \tau_{3i} \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} & \xrightarrow{P} & U_i \times \mathbb{R}^{n(3)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.17

για κάθε $i \in I$, όπου

$$(2.6.2) \quad P: U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(3)} : (x, h, k) \mapsto (x, h)$$

είναι η κανονική προβολή.

Τέλος, λέμε ότι η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f_1} \ell_2 \xrightarrow{f_2} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι **ακριβής**, ή και ότι είναι μιά **σύντομη ακριβής ακολουθία** (short exact sequence), αν οι ακολουθίες

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f_1} \ell_2 \quad \text{και} \quad \ell_2 \xrightarrow{f_2} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβείς και $\text{Im } f_1 = \ker f_2$.

2.6.2 Παράδειγμα. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X)$, $k = 1, 2$, διανυσματικές δέσμες. Αν ℓ είναι το άθροισμα Whitney των ℓ_1, ℓ_2 (βλ. § 2.3.3), $P_k: \ell \rightarrow \ell_k$ η κανονική προβολή (Πρόταση 2.5.2) και $I_k: \ell_k \rightarrow \ell$ η κανονική εμφύτευση (Πρόταση 2.5.3), τότε, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι ακολουθίες

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{I_1} \ell \xrightarrow{P_2} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}, \\ \mathcal{O} &\longrightarrow \ell_2 \xrightarrow{I_2} \ell \xrightarrow{P_1} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O} \end{aligned}$$

είναι σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

2.6.3 Ορισμός. Εστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $S \subseteq E$. Λέμε ότι η τριάδα $(S, \pi|_S, X)$ είναι **υποδέσμη** της ℓ , αν δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η κανονική εμφύτευση $i: S \hookrightarrow E$ να είναι μορφισμός στην $VB(X)$.

2.6.4 Παράδειγμα. Στο Παράδειγμα 2.6.2 οι τριάδες $(I_k(E_k), \pi|_{I_k(E_k)}, X)$ είναι υποδέσμες της ℓ .

Αποδεικνύουμε τώρα το επόμενο βασικό συμπέρασμα.

2.6.5 Θεώρημα. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, εάν και μόνον εάν η f είναι 1-1.

Απόδειξη. Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο θεωρούμε $a \in X$ και αντίστοιχα απλοποιούνται ζεύγη (U, τ_k) , $k = 1, 2$, των ℓ_k με $a \in U$. Σχηματίζουμε την "τοπική παράσταση"

$$F = \tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1}: U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(2)}$$

της f μέσω των τ_1, τ_2 , και τον περιορισμό-της στο νήμα υπεράνω του a

$$F_a := \tau_{2a} \circ f_a \circ \tau_{1a}^{-1}: \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n(2)}.$$

Από την υπόθεση, κάθε f_x ($x \in X$), είναι 1-1, άρα και η F_a είναι 1-1. Επομένως, το $F_a(\mathbb{R}^{n(1)})$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n(2)}$ διάστασης $n(1)$. Εστω V ένα συμπλήρωμα του $F_a(\mathbb{R}^{n(1)})$ στο $\mathbb{R}^{n(2)}$, δηλαδή ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n(2)}$ διάστασης $n(2) - n(1)$, έτσι ώστε $\mathbb{R}^{n(2)} = F_a(\mathbb{R}^{n(1)}) \oplus V \equiv F_a(\mathbb{R}^{n(1)}) \times V$. Θέτουμε

$$\bar{\tau}_2 := (id_U \times F_a^{-1} \times id_V) \circ \tau_2: \pi_2^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V.$$

Η απεικόνιση

$$id_U \times F_a^{-1} \times id_V: U \times F_a(\mathbb{R}^{n(1)}) \times V \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V$$

είναι αμφιδιαφόριση και ο περιορισμός της σε κάθε νήμα είναι ο ισομορφισμός $F_a^{-1} \times id_V$, άρα το $(U, \bar{\tau}_2)$ είναι απλοποιούν ζεύγος της ℓ_2 συμβιβαστό με τη δομή της. Ας συμβολίσουμε τώρα με $\bar{F}$ την τοπική παράσταση

$$\bar{F} := \bar{\tau}_2 \circ f \circ \tau_1^{-1}: U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V.$$

Τα προηγούμενα συνοψίζονται στο επόμενο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & \pi_2^{-1}(U) & & \\
 \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau_2 & \searrow \bar{\tau}_2 & \\
 & & U \times F_a(\mathbb{R}^{n(1)}) \times V & \xrightarrow{id_U \times F_a^{-1} \times id_V} & U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V \\
 & \nearrow F & & \nearrow \bar{F} & \\
 U \times \mathbb{R}^{n(1)} & & & &
 \end{array}$$

Διάγραμμα 2.18

Για να πετύχουμε το στόχο μας, πρέπει να τροποποιήσουμε κατάλληλα τα (U, τ_1) και $(U, \bar{\tau}_2)$, έτσι ώστε η νέα τοπική παράσταση της f να είναι η I [βλ. (2.6.1)]. Έτσι, παρατηρούμε ότι, επειδή η $\bar{F}_x = \bar{F}(x, \cdot): \mathbb{R}^{n(1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n(1)} \times V$ είναι γραμμική απεικόνιση, η $\bar{F}$ μπορεί να πάρει τη μορφή

$$(2.6.3) \quad \bar{F}: U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V : (x, h) \mapsto (x, f_1(x)(h), f_2(x)(h)),$$

όπου οι απεικονίσεις

$$f_1: U \rightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(1)}) \quad \text{και} \quad f_2: U \rightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)}, V)$$

είναι διαφορίσιμες. Ορίζουμε και την απεικόνιση

$$(2.6.4) \quad H: U \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)} \times V, \mathbb{R}^{n(1)} \times V) : x \mapsto H(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ f_2(x) & id_V \end{pmatrix},$$

όπου $0: V \rightarrow \mathbb{R}^{n(1)}$ η μηδενική απεικόνιση. Ελέγχεται στοιχειωδώς ότι πράγματι η $H(x)$ είναι γραμμική απεικόνιση. Επίσης, είναι προφανές ότι η H είναι διαφορίσιμη, άρα και η

$$(2.6.5) \quad \bar{H}: U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V : (x, h, k) \mapsto \left(x, H(x) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right)$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Παρατηρούμε τώρα ότι, στο $a \in U$,

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(a, h) &= (id_U \times F_a^{-1} \times id_V)(F(a, h)) \\
 &= (id_U \times F_a^{-1} \times id_V)(a, F_a(h), 0) \\
 &= (a, h, 0),
 \end{aligned}$$

οπότε, βάσει της (2.6.3),

$$f_1(a) = id_{\mathbb{R}^{n(1)}} \quad \text{και} \quad f_2(a) = 0,$$

επομένως

$$H(a) = \begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^{n(1)}} & 0 \\ 0 & id_V \end{pmatrix} \in GL(n(2), \mathbb{R}) \subset L(\mathbb{R}^{n(1)} \times V, \mathbb{R}^{n(1)} \times V).$$

Αρα υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_o του a , με $U_o \subseteq U$, και έτσι ώστε $H(x) \in GL(n(2), \mathbb{R})$, για κάθε $x \in U_o$, δηλαδή η $H(x)$ είναι αντιστρέψιμη για κάθε $x \in U_o$. Επομένως, η απεικόνιση

$$H^{-1}: U_o \longrightarrow L(\mathbb{R}^{n(1)} \times V, \mathbb{R}^{n(1)} \times V) : x \mapsto H(x)^{-1}$$

είναι διαφορίσιμη (αφού $H^{-1} = \alpha \circ H$, όπου α είναι η απεικόνιση αντιστροφής), άρα και η

$$\bar{H}^{-1}: U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V \longrightarrow U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V : (x, h, k) \mapsto \left(x, H(x)^{-1} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right)$$

είναι αμφιδιαφόριση επειδή έχει διαφορίσιμη αντίστροφη ακριβώς την απεικόνιση $\bar{H}|_{U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V}$. Ακόμη, ο περιορισμός της $\bar{H}^{-1}$ σε κάθε νήμα υπεράνω του x ($x \in U_o$), είναι ο ισομορφισμός $H(x)^{-1}$, άρα το $(U_o, \bar{H}^{-1} \circ \bar{\tau}_2)$ είναι απλοποιούν ζεύγος της ℓ_2 , συμβιβαστό με τη δομή της.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U_o) & \xrightarrow{f} & \pi_2^{-1}(U_o) & & \\ \downarrow \tau_1 & & \downarrow \bar{\tau}_2 & \searrow \bar{H}^{-1} \circ \bar{\tau}_2 & \\ & & U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V & \xrightarrow{\bar{H}^{-1}} & U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} \times V \\ & \nearrow \bar{F} & & \nearrow I & \\ U_o \times \mathbb{R}^{n(1)} & & & & \end{array}$$

Διάγραμμα 2.19

Μένει να δείξουμε ότι η τοπική παράσταση της f μέσω των $(U_o, \tau_1|_{\pi_1^{-1}(U_o)})$ και $(U_o, \bar{H}^{-1} \circ \bar{\tau}_2)$ είναι η I , όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 2.17. Πράγματι, για

κάθε $(x, h) \in U_o \times \mathbb{R}^{n(1)}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \bar{H}^{-1} \circ \bar{\tau}_2 \circ f \circ \tau_1^{-1}(x, h) &= \bar{H}^{-1} \circ \bar{F}(x, h) \\
 &= \bar{H}^{-1}(x, f_1(x)(h), f_2(x)(h)) \\
 [\text{βλ. (2.6.4)}] \quad &= \bar{H}^{-1}\left(x, H(x) \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
 [\text{βλ. (2.6.5)}] \quad &= \bar{H}^{-1}(\bar{H}(x, h, 0)) = (x, h, 0) \\
 [\text{βλ. (2.6.1)}] \quad &= I(x, h),
 \end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει η συνθήκη του Ορισμού 2.6.1. $\square$

Παρατηρούμε ότι, λόγω του Θεωρήματος 2.6.5, ο Ορισμός 2.6.1 για την ακρίβεια της ακολουθίας $\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$ ισοδυναμεί με την απλούστατη συνθήκη ότι η f είναι 1-1, ή, ισοδύναμα, ότι κάθε f_x είναι 1-1. Η απαίτηση όμως που διατυπώνεται στον Ορισμό 2.6.1 είναι πιο "λειτουργική" και μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την σχέση των τοπικών δομών των ℓ_1, ℓ_2 . Εξάλλου η συνθήκη του Ορισμού 2.6.1 χρησιμοποιείται ως ορισμός της ακρίβειας στις διανυσματικές δέσμες *άπειρης διάστασης*, όπου το 1-1 της f στα νήματα είναι *ασθενέστερο* και δεν αρκεί για την εξαγωγή βασικών συμπερασμάτων των διανυσματικών δεσμών τέτοιας διάστασης.

Ανάλογα με το Θεώρημα 2.6.5, έχει κανείς και το επόμενο

2.6.6 Θεώρημα. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Η ακολουθία

$$\ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής, εάν και μόνον εάν η f είναι επί. $\square$

Η ακρίβεια της ακολουθίας

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

και η έννοια της υποδέσμης (Ορισμός 2.6.3) συνδέονται, όπως δείχνει η επόμενη

2.6.7 Πρόταση. i) Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, τότε $(\text{Im } f, \pi_2|_{\text{Im } f}, X)$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 .

ii) Εστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $S \subseteq E$. Αν $\ell_S := (S, \pi|_S, X)$ είναι υποδέσμη της ℓ , τότε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_S \xrightarrow{i} \ell$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του i) υποθέτουμε ότι ο τύπος νήματος της ℓ_k είναι $\mathbb{R}^{n(k)}$. Από την ακρίβεια της ακολουθίας $\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$, έχουμε ότι υπάρχουν απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in J}$ των ℓ_k , έτσι ώστε, για κάθε $i \in J$, το τετράγωνο του επόμενου διαγράμματος να είναι μεταθετικό (συμβολίζουμε με J το σύνολο των δεικτών για να αποφύγουμε τη σύγχυση με την εμφύτευση I στο ίδιο διάγραμμα).

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f} & \pi_2^{-1}(U_i) & & \\ \tau_{1i} \downarrow & & \tau_{2i} \downarrow & \searrow & \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} & \xrightarrow{I} & U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{P} & U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.20

Εδώ $I(x, h) = (x, h, 0)$, για κάθε $(x, h) \in U_i \times \mathbb{R}^{n(1)}$ και $m = n(2) - n(1)$.

Παρατηρούμε ότι, για $u \in \pi_2^{-1}(U_i)$, έχουμε ότι

$$u \in \text{Im } f \Leftrightarrow \tau_{2i}(u) \in U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \{0\}.$$

Αρα η απεικόνιση

$$\bar{\tau}_{2i} := \tau_{2i}|_{\pi_2^{-1}(U_i) \cap \text{Im } f} : \pi_2^{-1}(U_i) \cap \text{Im } f \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \{0\}$$

είναι 1-1 και επί. Το ίδιο και η απεικόνιση

$$P \circ \bar{\tau}_{2i} : \pi_2^{-1}(U_i) \cap \text{Im } f \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(1)},$$

όπου τώρα η P συμβολίζει τον περιορισμό της προβολής (2.6.2) στο σύνολο $U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \{0\}$, με αντίστροφη την I .

Θα δείξουμε ότι τα ζεύγη $(U_i, P \circ \bar{\tau}_{2i})$ σχηματίζουν απλοποιούσα κάλυψη του $(\text{Im } f, \pi_2|_{\text{Im } f}, X)$. Πράγματι, αν $i, j \in J$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε

$$(P \circ \bar{\tau}_{2j}) \circ (P \circ \bar{\tau}_{2i})^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n(1)}$$

είναι η απεικόνιση

$$P \circ \bar{\tau}_{2j} \circ \bar{\tau}_{2i}^{-1} \circ I = P \circ (\tau_{2j} \circ \tau_{2i}^{-1}) \circ I,$$

άρα είναι (αμφι)διαφορίσιμη, και οι περιορισμοί της στα νήματα είναι οι γραμμικοί ισομορφισμοί $P_x \circ (\tau_{2jx} \circ \tau_{2ix}^{-1}) \circ I_x$. Προφανώς, $p_1 \circ (P \circ \bar{\tau}_{2i}) = \pi_2|_{\text{Im } f}$, για κάθε $i \in J$, επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5, και η $(\text{Im } f, \pi_2|_{\text{Im } f}, X)$ δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης.

Για την απεικόνιση $i: \text{Im } f \rightarrow E_2$ είναι, προφανώς, $\pi_2 \circ i = \pi_2|_{\text{Im } f}$ και οι περιορισμοί i_x στα νήματα είναι γραμμικές απεικονίσεις. Για την διαφορισμότητα της i , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η τοπική παράστασή της, μέσω των απλοποιήσεων $(U, P \circ \bar{\tau}_{2i})$ και (U_i, τ_{2i}) , είναι η

$$\tau_{2i} \circ i \circ (P \circ \bar{\tau}_{2i})^{-1} = \tau_{2i} \circ \tau_{2i}^{-1} \circ I = I,$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Η απόδειξη του ii) είναι προφανής από το Θεώρημα 2.6.5. $\square$

2.6.8 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν η ακολουθία

$$\ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής, τότε ο $\ker f$ δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ker f \xrightarrow{i} \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής.

Απόδειξη. Εστω ότι $\mathbb{R}^{n(1)} = \mathbb{R}^{n(2)} \times \mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^{n(2)}$ είναι οι τύποι των νημάτων ($m = n(1) - n(2)$) και $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in J}$ οι απλοποιούσες καλύψεις των ℓ_k που ικανοποιούν την ακρίβεια της δοθείσας ακολουθίας και κάνουν μεταθετικό το δεξιό τετράγωνο του επομένου διαγράμματος.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U_i) \cap \ker f & \xrightarrow{i} & \pi_1^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f} & \pi_2^{-1}(U_i) \\ \downarrow \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i} & & \downarrow \tau_{1i} & & \downarrow \tau_{2i} \\ U_i \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\hat{P}} & U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{P} & U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \end{array}$$

Διάγραμμα 2.21

Για ένα $u \in \pi_1^{-1}(U_i)$, παρατηρούμε ότι

$$u \in \ker f \Leftrightarrow \tau_{1i}(u) \in U_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^m.$$

Συμβολίζουμε με

$$\hat{P}: U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} : (x, h, k) \mapsto (x, k)$$

την κανονική 1-3-προβολή, και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\tau}_{1i} := \tau_{1i}|_{\ker f \cap \pi_1^{-1}(U_i)}: \pi_1^{-1}(U_i) \cap \ker f \longrightarrow U_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^m,$$

οπότε συμπληρώνουμε το διάγραμμα με το αριστερό τετράγωνο, που είναι και αυτό μεταθετικό.

Τότε η $\hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i}$ είναι απεικόνιση 1-1 και επί (με την $\hat{P}$ περιορισμένη τώρα στο $U_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^m$) και $p_1 \circ \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i} = \pi_1|_{\ker f}$.

Θα δείξουμε ότι τα ζεύγη $(U_i, \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i})$ αποτελούν απλοποιούσα κάλυψη του $\ker f$. Πράγματι, αν $(U_j, \bar{\tau}_{1j})$ είναι ένα άλλο τέτοιο ζεύγος με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε

$$(\hat{P} \circ \bar{\tau}_{1j}) \circ (\hat{P} \circ \bar{\tau}_{1i})^{-1} = \hat{P} \circ \bar{\tau}_{1j} \circ \tau_{1i}^{-1} \circ \hat{I},$$

όπου

$$\hat{I}: U_i \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n(2)} \times \mathbb{R}^m : (x, k) \mapsto (x, 0, k),$$

άρα είναι (αμφι)διαφορίσιμη. Προφανώς ο περιορισμός σε κάθε νήμα είναι γραμμικός (ισο)μορφισμός, άρα ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2.5.

Η ακρίβεια της ακολουθίας

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ker f \xrightarrow{i} \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι αποτέλεσμα της Πρότασης 2.6.7 (ii) και του Ορισμού 2.6.1. $\square$

Ανάλογα με την Πρόταση 2.6.8, έχουμε και την

2.6.9 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός. Αν η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, τότε η τριάδα $\ell_2/\text{Im } f = (E_2/\text{Im } f, \pi, X)$, με

$$E_2/\text{Im } f = \bigcup_{x \in X} E_{2x}/\text{Im } f_x$$

και $\pi : E_2/\text{Im } f \rightarrow X$ η φυσική προβολή, δέχεται δομή διανυσματικής δέσμης, έτσι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \xrightarrow{p} \ell_2/\text{Im } f \longrightarrow \mathcal{O},$$

να είναι ακριβής, όπου

$$p : E_2 \longrightarrow E_2/\text{Im } f : u \mapsto u + f_x(E_{1x}), \quad u \in E_{2x}.$$

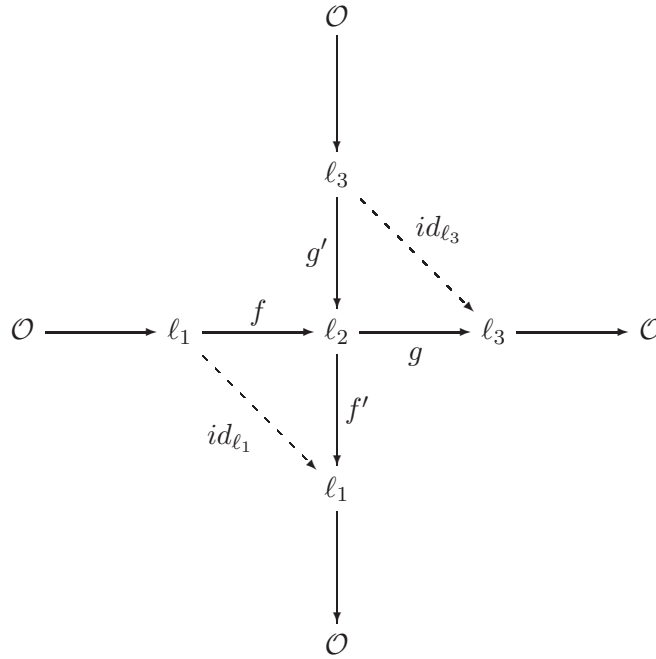
2.6.10 Ορισμός. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2, 3$, και $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$, $g : \ell_2 \rightarrow \ell_3$ μορφισμοί, τέτοιοι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \xrightarrow{g} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής. Λέμε ότι η ανωτέρω ακριβής ακολουθία **διασπάται** αν υπάρχουν μορφισμοί $g' : \ell_3 \rightarrow \ell_2$ και $f' : \ell_2 \rightarrow \ell_1$, τέτοιοι ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_3 \xrightarrow{g'} \ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής και $g \circ g' = id_{\ell_3}$, $f' \circ f = id_{\ell_1}$, όπως στο επόμενο διάγραμμα.



Διάγραμμα 2.22

Αποδεικνύουμε και το επίσης χρήσιμο συμπέρασμα.

2.6.11 Λήμμα. Αν $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός, και $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση, τότε η απεικόνιση

$$\psi \cdot f: E_1 \longrightarrow E_2 : u \mapsto \psi(\pi(u)) \cdot f(u)$$

ορίζει μορφισμό διανυσματικών δεσμών στην $VB(X)$.

Απόδειξη. Προφανώς $\pi_2 \circ (\psi \cdot f) = \pi_1$ και οι περιορισμοί $(\psi \cdot f)_x$ στα νήματα είναι γραμμικές απεικονίσεις. Για τη διαφορισμότητά της, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν $(U, \tau_1), (U, \tau_2)$ είναι απλοποιούντα ζεύγη των ℓ_1, ℓ_2 , αντιστοίχως, τότε η τοπική παράσταση

$$\tau_2 \circ (\psi \cdot f) \circ \tau_1^{-1} : U \times \mathbb{R}^{n(1)} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n(2)},$$

υπολογισμένη σε ένα $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^{n(1)}$, είναι

$$\begin{aligned} \tau_2 \circ (\psi \cdot f) \circ \tau_1^{-1}(x, h) &= \tau_2(\psi(\pi_1(\tau_1^{-1}(x, h))) \cdot f(\tau_1^{-1}(x, h))) \\ &= \tau_2(\psi(x) \cdot f(\tau_1^{-1}(x, h))) = (x, (p_2 \circ \tau_2)(\psi(x) \cdot f(\tau_1^{-1}(x, h)))) \\ &= (x, \psi(x) \cdot (p_2 \circ \tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1})(x, h)), \quad [\text{αφού } \psi(x) \in \mathbb{R}] \end{aligned}$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη. □

Πριν αποδείξουμε την ύπαρξη διάσπασης μιας ακριβούς ακολουθίας, χρειαζόμαστε τις επόμενες προκαταρκτικές έννοιες.

Έστω X είναι ένας τοπολογικός χώρος. Μια οικογένεια $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ λέγεται **διαμέριση της μονάδας** του X (partition of unity) αν $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι ανοιχτή τοπικά πεπερασμένη κάλυψη του X και κάθε $\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$ είναι συνεχής συνάρτηση με

$$\begin{aligned} \overline{\{x \in X : \psi_i(x) \neq 0\}} &\subset U_i, \quad \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} \psi_i(x) &= 1, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Τοπικά πεπερασμένη κάλυψη σημαίνει ότι κάθε $x \in X$ έχει μια περιοχή, η οποία τέμνει πεπερασμένο πλήθος από τα ανοιχτά σύνολα της $\{U_i\}_{i \in I}$.

Απ' το άλλο μέρος, ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται **παρασυμπαγής** (paracompact), αν είναι Hausdorff και κάθε ανοιχτή κάλυψη $\mathfrak{A}$ του X δέχεται τοπικά πεπερασμένη **εκλέπτυνση** (refinement) $\mathfrak{B}$, δηλ. η $\mathfrak{B}$ είναι επίσης ανοιχτή κάλυψη του X και, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$, υπάρχει $A \in \mathfrak{A}$ με $B \subset A$.

Θα δεχτούμε χωρίς απόδειξη το επόμενο αποτέλεσμα :

Αν X είναι παρασυμπαγής C^∞ -πολληλαπλότητα, τότε, για κάθε ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του X , υπάρχει C^∞ -διαμέριση της μονάδας $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in J}$ υποκείμενη στην $\{U_i\}$, δηλαδή η $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in J}$ είναι τέτοια ώστε $J \subset I$, $\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$ να είναι C^∞ -απεικόνιση και $V_i \subset U_i$, για κάθε $i \in J$.

Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε συνθήκες ύπαρξης διασπάσεων ακριβών ακολουθιών.

2.6.12 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και μορφισμός $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$. Εστω ακόμη ότι η βάση X δέχεται διαφορίσιμες διαμερίσεις της μονάδας. Αν η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2$$

είναι ακριβής, τότε υπάρχει μορφισμός $f': \ell_2 \rightarrow \ell_1$, τέτοιος ώστε η ακολουθία

$$\ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$$

να είναι ακριβής και $f' \circ f = id_{\ell_1}$ (βλ. και Διάγραμμα 2.22, σελ. 82).

Απόδειξη. Εστω $\mathbb{R}^{n(1)}, \mathbb{R}^{n(2)} = \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^m$ οι τύποι των νημάτων των ℓ_1, ℓ_2 και οι τοπικά πεπερασμένες απλοποιούσες καλύψεις $\{(U_i, \tau_{ki})\}_{i \in J}$, που ικανοποιούν τη συνθήκη του Ορισμού 2.6.1 (χρησιμοποιούμε το J ως σύνολο δεικτών για διαφοροποίηση από την εμφύτευση I , όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.6.7). Για κάθε $i \in J$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$f'_i := \tau_{1i}^{-1} \circ P \circ \tau_{2i} : \pi_2^{-1}(U_i) \longrightarrow \pi_1^{-1}(U_i).$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_i) & \xrightleftharpoons[f'_i]{f} & \pi_2^{-1}(U_i) \\ \tau_{1i} \downarrow & & \downarrow \tau_{2i} \\ U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} & \xrightleftharpoons[P]{I} & U_i \times \mathbb{R}^{n(1)} \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Διάγραμμα 2.23

Η f'_i είναι μορφισμός (τετριμμένων) δεσμών και (υπεράνω του $\pi_1^{-1}(U_i)$)

$$\begin{aligned} f'_i \circ f &= \tau_{1i}^{-1} \circ P \circ \tau_{2i} \circ f \\ &= \tau_{1i}^{-1} \circ P \circ \tau_{2i} \circ \tau_{2i}^{-1} \circ I \circ \tau_{1i} \\ &= \tau_{1i}^{-1} \circ P \circ I \circ \tau_{1i} \\ &= \tau_{1i}^{-1} \circ \tau_{1i} = id_{\pi_1^{-1}(U_i)}. \end{aligned}$$

[βλ. (2.6.1), (2.6.2)]

Εστω τώρα $\{\psi_i\}_{i \in J}$ μια διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας υποκειμένη στην κάλυψη $\{U_i\}_{i \in J}$ του X . Το γινόμενο $\psi_i \cdot f'_i: \pi_2^{-1}(U_i) \rightarrow \pi_1^{-1}(U_i)$ είναι μορφισμός, που επεκτείνεται σε μορφισμό $\psi_i \cdot f'_i: E_2 \rightarrow E_1$ μέσω του τύπου

$$\psi_i \cdot f'_i(u) := \begin{cases} \psi_i(\pi_2(u)) \cdot f'_i(u), & \forall u \in \pi_2^{-1}(U_i), \\ 0, & \forall u \notin \pi_2^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Θέτουμε

$$f' := \sum_i \psi_i \cdot f'_i: E_2 \longrightarrow E_1.$$

Η f' είναι μορφισμός ως άθροισμα μορφισμών (Πρόταση 2.5.1) και

$$f' \circ f = \left(\sum_i \psi_i \cdot f'_i \right) \circ f = \sum_i \psi_i \cdot (f'_i \circ f) = \sum_i \psi_i \cdot id_{\pi_1^{-1}(U_i)} = id_{E_1}.$$

Από τη σχέση $f' \circ f = id_{E_1}$ συνάγεται ότι η f' είναι απεικόνιση επί, άρα (κατά το Θεώρημα 2.6.6) και η ακολουθία $\ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$ είναι ακριβής. $\square$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η

2.6.13 Πρόταση. Εστω $\ell_k = (E_k, \pi_k, X) \in VB(X)$, $k = 1, 2$, και μορφισμός $g: \ell_1 \rightarrow \ell_2$. Εστω ακόμη ότι η βάση X είναι παρασυμπαγής. Αν η ακολουθία

$$\ell_1 \xrightarrow{g} \ell_2 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής, τότε υπάρχει μορφισμός $g': \ell_2 \rightarrow \ell_1$, τέτοιος ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_2 \xrightarrow{g'} \ell_1$$

να είναι ακριβής και $g \circ g' = id_{\ell_2}$.

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

2.6.14 Θεώρημα. Εστω X παρασυμπαγής πολυθλαπλότητα. τότε κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία στην $VB(X)$ διασπάται.

Απόδειξη. Εστω

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \xrightarrow{g} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

μια σύντομη ακριβής ακολουθία στην κατηγορία $VB(X)$. Θεωρούμε ένα μορφισμό $f': \ell_2 \rightarrow \ell_1$, για τον οποίον $f' \circ f = id_{\ell_1}$ και η ακολουθία

$$\ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής (Πρόταση 2.6.12). Τότε $\ker f'$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 [βλ. Προτάσεις 2.6.8 και 2.6.7 (ii)]. Εξάλλου, για κάθε $x \in X$, με απλή γραμμική άλγεβρα, αποδεικνύεται εύκολα ότι $E_{2x} = \operatorname{Im} f_x \oplus \ker f'_x$. Επειδή και η $\operatorname{Im} f$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 , έχουμε ότι

$$E_2 = \operatorname{Im} f \oplus \ker f'.$$

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\operatorname{Im} f = \ker g$, εύκολα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι $g|_{\ker f'}: \ker f' \rightarrow E_3$ είναι απεικόνιση 1-1 και επί. Ορίζουμε τώρα την

$$g' := i \circ (g|_{\ker f'})^{-1}: E_3 \longrightarrow E_2,$$

όπου $i: \ker f' \hookrightarrow E_2$ είναι η κανονική εμφύτευση. Τότε ο g' είναι ο ζητούμενος μορφισμός για να συμπληρωθεί η $\ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O}$ στην σύντομη ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_3 \xrightarrow{g'} \ell_2 \xrightarrow{f'} \ell_1 \longrightarrow \mathcal{O},$$

μέσω της οποίας παίρνουμε το Διάγραμμα 2.22 της σελ. 82, που κλείνει και την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

Επειδή $E_1 \cong \operatorname{Im} f$ και $\ker f' \cong E_3$, ένα παραπροϊόν της προηγούμενης απόδειξης είναι το

2.6.15 Πόρισμα. *Αν η σύντομη ακριβής ακολουθία*

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ell_1 \xrightarrow{f} \ell_2 \xrightarrow{g} \ell_3 \longrightarrow \mathcal{O}$$

διασπάται, τότε

$$\ell_2 \cong \ell_1 \oplus \ell_3.$$

2.7 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

1. Αν $\ell = (E, \pi, X)$ είναι διανυσματική δέσμη, δείξτε ότι η $\pi: E \rightarrow X$ είναι εμβάπτιση.
2. Δείξτε ότι σε κάθε συνεκτική συνιστώσα της βάσης μιας διανυσματικής δέσμης τα νήματα είναι σταθερού τύπου.
3. Δείξτε ότι κάθε νήμα E_x μιας διανυσματικής δέσμης $\ell = (E, \pi, X)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της E , άρα έχει διαφορετική δομή. Επίσης έχει διαφορετική δομή ως διανυσματικός χώρος. Δείξτε ότι οι δύο διαφορετικές δομές συμπίπτουν.

4. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2$, είναι διανυσματικές δέσμες, να δείξετε ότι $\ell_1 \times \ell_2 := (E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, X_1 \times X_2)$ είναι διανυσματική δέσμη.
5. Έστω $(f, g) : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έτσι ώστε οι f, g να είναι αμφιδιαφορίσεις. Δείξτε ότι το ζεύγος $(f^{-1}, g^{-1}) : \ell_2 \rightarrow \ell_1$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.
6. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X)$ είναι διανυσματικές δέσμες πάνω από την ίδια βάση X ($i = 1, 2$), να εξετάσετε αν η απεικόνιση

$$EV : L(E_1, E_2) \oplus E_1 \longrightarrow E_2 : (f, u) \longrightarrow f(u)$$

είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.

7. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X) \in VB(X)$, $i = 1, 2, 3$, να εξετάσετε αν η απεικόνιση

$$COM : L(E_1, E_2) \oplus L(E_2, E_3) \longrightarrow L(E_1, E_3) : (f, g) \longrightarrow f \circ g$$

είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.

8. Αν $\ell = (E, \pi, X)$ είναι διανυσματική δέσμη και $f : E \rightarrow E$ μορφισμός στην $VB(X)$, τέτοιος ώστε η f να είναι 1-1 και επί, δείξτε ότι f είναι ισομορφισμός στην $VB(X)$.
9. Δείξτε ότι το σύνολο $Lis(E, E)$ των ισομορφισμών $f : E \rightarrow E$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του ολικού χώρου $L(E, E)$ (βλ. Παράδειγμα 2.3.4).
10. Έστω $\ell_1 \oplus \ell_2 = (E_1 \oplus E_2, \pi, X)$ το άθροισμα Whitney των διανυσματικών δεσμών $\ell_i = (E_i, \pi_i, X)$, $i = 1, 2$. Δείξτε ότι οι κανονικές προβολές

$$P_i : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_i$$

είναι εμβαπτίσεις και οι κανονικές εμφυτεύσεις

$$I_i : E_i \longrightarrow E_1 \oplus E_2, \quad i = 1, 2,$$

είναι εμφυτεύσεις.

11. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη. Δείξτε ότι οι απεικονίσεις

$$+ : E \oplus E \longrightarrow E : (u, v) \mapsto u + v$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E : (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u \equiv \lambda u$$

είναι διαφορίσιμες. Μπορείτε να τις ερμηνεύσετε ως μορφισμούς διανυσματικών δεσμών;

12. Θεωρείστε την διανυσματική δέσμη $\ell_1 \times \ell_2$ (βλ. την προηγούμενη Άσκηση 4), όπου $\ell_i = (E_i, \pi_i, X_i)$, $i = 1, 2$, είναι διανυσματικές δέσμες. Δείξτε ότι τα ζεύγη

$$(P_i, p_i): \ell_1 \times \ell_2 \longrightarrow \ell_i,$$

όπου $P_i: E_1 \times E_2 \rightarrow E_i$ και $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ οι συνήθεις προβολές, είναι μορφισμοί διανυσματικών δεσμών. Να εξετάσετε αν η τριάδα

$$(\ell_1 \times \ell_2, (P_1, p_1), (P_2, p_2))$$

ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του γινομένου στην κατηγορία VB .

13. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του X και $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$ δύο σύγκυκλοι πάνω από την κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ με τιμές στο $GL(n, \mathbb{R})$. Οι δύο σύγκυκλοι λέγονται **ισοδύναμοι** αν υπάρχουν διαφορίσιμες απεικονίσεις $h_i: U_i \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, τέτοιες ώστε

$$g'_{ji}(x) = h_j(x)^{-1} \circ g_{ji}(x) \circ h_i(x),$$

για κάθε $i, j \in I$, και $x \in U_i \cap U_j$.

Να αποδείξετε ότι οι δύο σύγκυκλοι $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$ ορίζουν ισόμορφες διανυσματικές δέσμες πάνω από το X (Θεώρημα 2.2.6), εάν και μόνον εάν είναι ισοδύναμοι.

14. Έστω $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ ένας μορφισμός δεσμών στην $VB(X)$. Δείξτε ότι οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- i) $\text{Im} f$ είναι υποδέσμη της ℓ_2 .
- ii) $\ker f$ είναι υποδέσμη της ℓ_1 .
- iii) Οι διαστάσεις των νημάτων της $\text{Im} f$ είναι τοπικά σταθερές.
- iv) Οι διαστάσεις των νημάτων του $\ker f$ είναι τοπικά σταθερές.

15. Πως πρέπει να διατυπωθεί η Πρόταση 2.2.5, αν κάθε E_x έχει γραμμική δομή που θέλουμε να διατηρηθεί; Στο τέλος της απόδειξης της ίδιας πρότασης να δικαιολογηθεί το μονοσήμαντο της δομής γραμμικού χώρου επί του E_x .
16. Δείξτε ότι μια διανυσματική δέσμη είναι τετριμμένη, εάν και μόνον εάν η δομική της ομάδα ανάγεται στην $\{id_{\mathbb{R}^n}\}$.
17. Να αποδειχθούν οι Προτάσεις 2.6.9 και 2.6.13.
18. Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες της απόδειξης του Θεωρήματος 2.6.14.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

Πρωτεύουσες Δέσμες

Principal bundles constitute, in a certain sense, a geometric generalization of the notion of Lie group. In fact ... a principal bundle looks like a collection of copies of the structural group G , sitting over the base manifold M ...

C. VON WESTENHOLZ [36, p. 131]

Οι πρωτεύουσες δέσμες έχουν δομή συνθετότερη από αυτήν των διανυσματικών δεσμών καθ' όσον τα νήματά τους είναι ισόμορφα με μία ομάδα Lie, αντί ενός γραμμικού χώρου, όπως συμβαίνει στις διανυσματικές δέσμες. Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις θεμελιώδεις ιδιότητες των πρωτευουσών δεσμών, τους μορφισμούς, τις συναρτήσεις μεταφοράς, μέσω των οποίων (ανα)κατασκευάζεται μία πρωτεύουσα δέσμη, καθώς και την αντίστροφη εικόνα (pull-back) μιας πρωτ-

εύουσας δέσμης μέσω διαφορίσιμης απεικόνισης.

3.1 Διαφορίσιμες δράσεις

Επειδή η δομή μίας πρωτεύουσας δέσμης σχετίζεται με τις ομάδες Lie και τις διαφορίσιμες δράσεις, στην παράγραφο αυτή θυμίζουμε μερικά βασικά συμπεράσματα από την θεωρία των τελευταίων, τις οποίες θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στις (προπτυχιακές) Σημειώσεις μας [4].

3.1.1 Ορισμός. Έστω M μία C^∞ -πολλαπλότητα και G μία ομάδα Lie. Μια C^∞ -**δράση** της G επί της M **από τα δεξιά** (ή **δεξιά δράση**) είναι μια C^∞ -απεικόνιση

$$\delta: M \times G \longrightarrow M : (x, g) \mapsto \delta(x, g)$$

η οποία έχει τις ιδιότητες

$$(\Delta. 1) \quad \delta(x, e) = x, \quad \forall x \in M$$

$$(\Delta. 2) \quad \delta(\delta(x, g_1), g_2) = \delta(x, g_1 \cdot g_2), \quad \forall x \in M \text{ και } g_1, g_2 \in G.$$

Πολλές φορές, για διευκόλυνση, γράφουμε

$$(3.1.1) \quad \delta(x, g) = x \cdot g.$$

Φυσικά, το δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας δεν συμβολίζει κάποιο πολλαπλασιασμό.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της (3.1.1), οι ιδιότητες (Δ. 1) και (Δ. 2) γράφονται αντίστοιχα με τη μορφή:

$$\begin{aligned} x \cdot e &= x \\ (x \cdot g_1) \cdot g_2 &= x \cdot (g_1 \cdot g_2) \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες ιδιότητες σημαίνουν ότι:

- 1) Η δράση με το ουδέτερο στοιχείο του G αφήνει αμετάβλητα τα στοιχεία της πολλαπλότητας M .
- 2) Η δράση, επί ενός $x \in M$, διαδοχικά με τα στοιχεία g_1 και g_2 έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τη δράση του γινομένου $(g_1 \cdot g_2)$ επί του x .

Ανάλογα προς τη δεξιά δράση ορίζεται και η **αριστερή δράση** $G \times M \longrightarrow M$.

Τη μερική απεικόνιση

$$\delta_g: M \longrightarrow M : x \mapsto \delta_g(x) = x \cdot g$$

συμβολίζουμε συχνά και με R_g και την καλούμε **δεξιά μετατόπιση** του X κατά $g \in G$. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι δεν πρόκειται για τη δεξιά μετατόπιση μιας ομάδας Lie, παρ' όλο που χρησιμοποιούμε ίδιο συμβολισμό και ορολογία. Η R_g είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη την $R_{g^{-1}}$.

3.1.2 Ορισμός. Μια δράση (όπως στον Ορισμό 3.1.1) λέγεται **ελεύθερη** όταν ισχύει η συνθήκη

$$\text{αν } \delta(x, g) = x, \text{ για κάποιο } x \in M \text{ και } g \in G, \text{ τότε } g = e.$$

Επίσης, η δ λέγεται **μεταβατική** (αντίστοιχα **γνήσια μεταβατική**) αν

$$\forall (x, y) \in M \times M \quad \exists \text{ (αντίστοιχα } \exists!) g \in G : y = x \cdot g = \delta(x, g).$$

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση R_g , η συνθήκη για να είναι η δ ελεύθερη διατυπώνεται και ως εξής:

Αν η R_g διαθέτει κάποιο σταθερό σημείο (δηλαδή υπάρχει $x \in M : R_g(x) = x$), τότε $g = e$. Με άλλα λόγια, μόνον η $R_e = id_M$ διαθέτει σταθερά σημεία.

Παρόμοια, συμβολίζοντας με δ_x τη μερική απεικόνιση (της δ)

$$\delta_x : G \longrightarrow M : g \mapsto \delta_x(g) := \delta(x, g) = x \cdot g,$$

διαπιστώνουμε ότι

Η δ είναι μεταβατική τότε και μόνον τότε αν, για κάθε $x \in M$, η δ_x είναι απεικόνιση επί. Ιδιαίτερα, αν η δ είναι γνήσια μεταβατική, τότε η δ_x είναι 1-1 και επί, για κάθε $x \in M$.

3.1.3 Ορισμός. Για μια δράση δ , η **τροχιά** $\mathcal{O}_x$ του $x \in M$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{O}_x := \{\delta(x, g) = x \cdot g \mid g \in G\} := x \cdot G.$$

3.1.4 Πρόταση. Έστω δ μια δράση (όπως στον Ορισμό 3.1.1). Ορίζουμε τη σχέση (στο M):

$$x \sim y \Leftrightarrow y = x \cdot g, \text{ για κάποιο } g \in G \text{ [ισοδύναμα: } y \in \mathcal{O}_x]$$

Τότε η " $\sim$ " είναι σχέση ισοδυναμίας και, για κάθε $x \in M$, είναι $[x] = \mathcal{O}_x$.

Απόδειξη. Ήμεση εφαρμογή των ορισμών και των (Δ. 1) και (Δ. 2) της δράσης. $\square$

3.1.5 Πρόγραμμα. Αν η πολυπλοκότητα M δέχεται μία δράση, τότε οι τροχιές ορίζουν μια διαμέριση της M .

3.1.6 Παραδείγματα. 1) Μια ομάδα G δρα φυσιολογικά στον εαυτόν της μέσω του πολλαπλασιασμού της, δηλαδή

$$\delta: G \times G \longrightarrow G : (a, b) \mapsto \delta(a, b) := a \cdot b.$$

2) Έστω ότι M είναι πολλαπλότητα και G ομάδα Lie. Τότε η G δρα επί του $M \times G$ μέσω της απεικόνισης

$$\delta((x, g), g') \equiv (x, g) \cdot g' := (x, g \cdot g').$$

Πριν κλείσουμε τη σύντομη αυτή παράγραφο, ας θυμίσουμε και την έννοια του πεδίου Killing: Αν $X \in \mathcal{L}(G)$, δηλαδή το X είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο C^∞ -διανυσματικό πεδίο της ομάδας Lie G , τότε σ' αυτό αντιστοιχεί (μέσω της δράσης δ), ένα C^∞ -διανυσματικό πεδίο X^* της M [δηλαδή $X^* \in \mathcal{X}(M)$], που ορίζεται από τη σχέση

$$(3.1.2) \quad X^*(x) := T_e \delta_x(X_e) = T_e \delta_x(X(e))$$

Το X^* καλείται **πεδίο Killing**, το οποίον αντιστοιχεί στο X .

3.1.7 Παρατήρηση. Μπορούμε να ορίσουμε τη δράση μιας ομάδας G επί τυχόντος συνόλου $M \neq \emptyset$, όπως και τη δράση μιας τοπολογικής ομάδας επί ενός τοπολογικού χώρου M , και να πάρουμε ανάλογα συμπεράσματα. Στις περιπτώσεις αυτές δεν ορίζεται, φυσικά, η έννοια του πεδίου Killing.

3.1.8 Ασκήσεις.

1. Να διατυπωθούν και να αποδειχθούν τα ανάλογα συμπεράσματα για αριστερές δράσεις.
2. Να δείξετε ότι κάθε δεξιά δράση ορίζει και μία αριστερή δράση και αντίστροφα.
3. Να επαληθευτούν οι ισοδύναμες συνθήκες για την ελεύθερη και τη (γνήσια) μεταβατική δράση, που δίνονται μετά τον Ορισμό 3.1.2.
4. Να αποδειχτεί πλήρως η Πρόταση 3.1.4.
5. Να επαληθεύσετε ότι η δ του Παραδείγματος 3.1.6(2) ορίζει πράγματι μία (δεξιά) C^∞ -δράση.

6. Έστω μία δράση $\delta: M \times G \rightarrow M$. Για ένα $x \in M$, καλούμε **ομάδα ισοτροπίας** του x το σύνολο $G_x = \{g \in G : x \cdot g = x\}$. Να δείξετε ότι:
- i) Το G_x είναι υποομάδα του G .
 - ii) Αν M είναι πολλαπλότητα Hausdorff, τότε το G_x είναι κλειστή υποομάδα του G .
 - iii) Η δράση είναι ελεύθερη εάν και μόνον εάν $G_x = \{e\}$, $\forall x \in M$.
7. Αν η δράση είναι μεταβατική, τότε το M διαθέτει μόνον μία τροχιά.
8. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε $x \in M$ και $g \in G$, ισχύει η σχέση

$$G_{x \cdot g} = g^{-1} \cdot G_x \cdot g.$$

Ιδιαίτερος, αν η δράση είναι μεταβατική, τότε οι ομάδες ισοτροπίας είναι μεταξύ τους συζυγείς.

9. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\delta: G \times G \rightarrow G$ (όπου G είναι ομάδα Lie) με

$$\delta(x, \alpha) = a^{-1} \cdot x \cdot a$$

ορίζει μία δεξιά C^∞ -δράση του G επί του εαυτού του.

10. Έστω $\delta: M \times G \rightarrow M$ μία δράση και τυχόν $x \in M$. Ορίζουμε το πηλίκο

$$G/G_x := \{G_x \cdot g \mid g \in G\}$$

Τότε ισχύουν τα επόμενα:

- i) Υπάρχει μία απεικόνιση $f: G/G_x \rightarrow M$, τέτοια ώστε $f \circ q = \delta_x$, όπου $q: G \rightarrow G/G_x$ είναι η κανονική απεικόνιση (προβολή).
- ii) Η f είναι 1-1 και $f(G/G_x) = \mathcal{O}_x$.
- iii) Αν η δ είναι μεταβατική, τότε η f είναι και απεικόνιση επί, άρα

$$M \cong G/G_x,$$

δηλαδή το M είναι **ομογενής χώρος**.

3.2 Πρωτεύουσες (ή κύριες) δέσμες

3.2.1 Ορισμός. Μία **πρωτεύουσα ή κύρια (νηματική) δέσμη** (principal fibre bundle) είναι μία τετράδα $\ell = (P, G, B, \pi)$, όπου P και B είναι C^∞ -πολλαπλότητες, $\pi: P \rightarrow B$ C^∞ -απεικόνιση και G μια ομάδα Lie, που δρα διαφορισίμα επί της P (από δεξιά), έτσι ώστε να ισχύει η επόμενη συνθήκη:

Για κάθε $x \in B$, υπάρχει ανοιχτό $U \subset B$ με $x \in U$, και *αμφιδιαφόριση*

$$\Psi: U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U),$$

η οποία έχει τις ιδιότητες:

i) Το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\Psi} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

Διάγραμμα 3.1

ii) $\Psi((y, g) \cdot g') = \Psi(y, g \cdot g') = \Psi(y, g) \cdot g', \quad \forall y \in U \text{ και } g, g' \in G.$

3.2.2 Σχόλια. 1) Η αμφιδιαφορισιμότητα της απεικόνισης Ψ , στον προηγούμενο ορισμό, νοείται ως προς τη δομή της πολλαπλότητας που διαθέτει το $U \times G$, και τη δομή της (ανοιχτής) υποπολλαπλότητας που διαθέτει το $\pi^{-1}(U)$, ως ανοιχτό υποσύνολο του P .

2) Στην ιδιότητα ii) η έκφραση $(y, g) \cdot g'$ συμβολίζει τη δράση του g' επί του (y, g) , ως αποτέλεσμα της δράσης $(U \times G) \times G \rightarrow U \times G$, η οποία ορίζεται όπως στο Παράδειγμα 3.1.6(2). Ανάλογα, το $\Psi(y, g) \cdot g'$ είναι το αποτέλεσμα της δράσης της G επί του P . Εδώ η ii) σημαίνει ότι, για οποιοδήποτε $g' \in G$, $\Psi(y, g) \cdot g' = \Psi(y, g \cdot g') \in \pi^{-1}(U)$.

Το Σχόλιο 3.2.2(2) οδηγεί στην

3.2.3 Πρόταση. Αν U είναι το ανοιχτό σύνολο του προηγούμενου ορισμού, τότε για κάθε $p \in \pi^{-1}(U)$ και $g \in G$ είναι $p \cdot g \in \pi^{-1}(U)$.

Απόδειξη. Λόγω του επί της απεικόνισης Ψ , θα υπάρχουν $y \in U$ και $h \in G$, έτσι ώστε $p = \Psi(y, h)$. Άρα, σύμφωνα με την ιδιότητα ii), έχουμε ότι

$$p \cdot g = \Psi(y, h) \cdot g = \Psi((y, h) \cdot g) = \Psi(y, h \cdot g) \in \pi^{-1}(U). \quad \square$$

3.2.4 Πόρισμα. Αν συμβολίσουμε με $\delta: P \times G \rightarrow P$ τη δράση του G επί του P , τότε η απεικόνιση

$$\delta_U: \pi^{-1}(U) \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U), \quad \text{με } \delta_U(p, g) = \delta(p, g),$$

ορίζει C^∞ -δράση του G επί του $\pi^{-1}(U)$.

Απόδειξη. Η δ_U παίρνει τιμές στο $\pi^{-1}(U)$ σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.3. Επίσης είναι C^∞ , ως περιορισμός διαφορίσιμης απεικόνισης επί ανοικτού υποσυνόλου του πεδίου ορισμού ($\pi^{-1}(U) \times G \subset P \times G$), που παίρνει τιμές σε (ανοιχτή) υποπολλαπλότητα του πεδίου τιμών (βλ. Πρόταση 1.1.12). Η επαλήθευση των ιδιοτήτων της δράσης είναι προφανής, από τον ορισμό της δ_U . $\square$

3.2.5 Πρόρισμα. Αν, με τους συμβολισμούς του Ορισμού 3.2.1, θέσουμε

$$(3.2.1) \quad \boxed{\Phi := \Psi^{-1}},$$

τότε ισχύει η σχέση

$$(3.2.2) \quad \Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g, \quad \forall (p, g) \in \pi^{-1}(U) \times G.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $p \in \pi^{-1}(U)$. Λόγω του επί της απεικόνισης Ψ , θα υπάρχει $(y, h) \in U \times G$, έτσι ώστε $p = \Psi(y, h)$. Άρα, για οποιοδήποτε $g \in G$,

$$\begin{aligned} \Phi(p \cdot g) &= \Phi(\Psi(y, h) \cdot g) = \Phi(\Psi(y, h \cdot g)) = (\Phi \circ \Psi)(y, h \cdot g) \\ &= (y, h \cdot g) = (y, h) \cdot g = \Psi^{-1}(p) \cdot g = \Phi(p) \cdot g. \end{aligned} \quad \square$$

3.2.6 Ορολογία. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ μία κύρια δέσμη. Τότε το P καλείται **ολικός χώρος**, το G **δομική ομάδα**, το B **βάση** και η απεικόνιση π **προβολή**. Επίσης, το $P_x := \pi^{-1}(x)$ καλείται **νήμα** (πάνω από το $x \in B$). Κάθε ζεύγος (U, Φ) ή (U, Ψ) καλείται **απλοποιούν ζεύγος**.

Η ιδιότητα ii) του Ορισμού 3.2.1 και η (3.2.2) χαρακτηρίζουν τις Ψ και Φ , αντιστοίχως, ως **G -ισομεταβλητές** (ως προς τις αντίστοιχες δράσεις του G επί των πεδίων ορισμού και τιμών των απεικονίσεων αυτών).

Τέλος, η ιδιότητα i) του Ορισμού 3.2.1 χαρακτηρίζει τη δέσμη ως **τοπικώς τετριμμένη** [πρβλ. την αντίστοιχη ιδιότητα των διανυσματικών δεσμών, Παρατήρηση 2.1.2 (5)]. Αυτό θα κατανοηθεί καλλίτερα αφού ορίσουμε και την έννοια του μορφισμού μεταξύ πρωτευουσών δεσμών.

Σημειώνουμε εδώ ότι τα πεδία ορισμού των απλοποιούντων ζευγών αποτελούν, προφανώς, ανοιχτή κάλυψη της βάσης B .

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο συμπέρασμα θυμίζουμε (βλ. Ορισμό 1.3.1) ότι μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ καλείται **εμβάπτιση** στο $x \in X$ αν $T_x f: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$. Αν η f είναι εμβάπτιση σε κάθε $x \in X$, τότε καλείται απλώς **εμβάπτιση**.

3.2.7 Πρόταση. Η προβολή π είναι απεικόνιση επί και εμβάπτιση.

Απόδειξη. i) Έστω τυχόν $x \in B$. Τότε θα υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) με $x \in U$. Άρα, για οποιοδήποτε $g \in G$, το $p := \Psi(x, g)$ έχει την ιδιότητα $\pi(p) = x$ (βλ. μεταθετικό Διάγραμμα 3.1, σελ. 94), άρα η π είναι απεικόνιση επί.

ii) Αν τώρα $p \in P$ είναι τυχόν σημείο με $\pi(p) = x$ και θεωρήσουμε το ίδιο μεταθετικό Διάγραμμα 3.1, που προκύπτει από το (U, Ψ) με $x \in U$, θα είναι $\pi = p_1 \circ \Phi$, δηλαδή η π είναι εμβάπτιση ως σύνθεση εμβάπτισεων. Αλλιώς: Παραγωγίζοντας την $\pi = p_1 \circ \Phi$, βρίσκουμε ότι

$$(3.2.3) \quad T_p \pi = T_p(p_1 \circ \Phi) = T_{\Phi(p)} p_1 \circ T_p \Phi = \left(p_1|_{T_x B \times T_g G} \right) \circ T_p \Phi,$$

αν $\Phi(p) = (x, g)$. Επειδή το δεύτερο μέλος της (3.2.3) είναι απεικόνιση επί, έχουμε τελικά ότι η $T_p \pi$ είναι επί, δηλαδή η π είναι εμβάπτιση στο p και παρόμοια σε κάθε σημείο του P . $\square$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.10, αποδεικνύουμε αμέσως το

3.2.8 Πρόρισμα. Τα νήματα μιας πρωτεύουσας δέσμης είναι μη κενές κανονικές υποπολιπλαπλότητες του ολικού χώρου P . Ιδιαίτερα, αν η B είναι χώρος Hausdorff, τότε κάθε νήμα είναι κλειστή υποπολιπλαπλότητα του P .

3.2.9 Παραδείγματα. 1) Αν M είναι C^∞ -πολλαπλότητα και G ομάδα Lie, τότε η τετράδα $(M \times G, G, M, p_1)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη [εδώ τώρα η δράση είναι αυτή του Παραδείγματος 3.1.6(2)]. Η δέσμη αυτή καλείται **η τετριμμένη πρωτεύουσα δέσμη** (με βάση M και δομική ομάδα G).

2) Με τις υποθέσεις του προηγούμενου παραδείγματος, αν U είναι τυχόν ανοιχτό υποσύνολο της M , τότε η $(U \times G, G, U, p_1)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη (: η τετριμμένη πρωτεύουσα δέσμη με βάση U και δομική ομάδα G).

3) Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη και το U είναι πεδίο ορισμού ενός απλοποιούντος ζεύγους, τότε και η

$$(\pi^{-1}(U), G, U, \pi|_{\pi^{-1}(U)})$$

είναι πρωτεύουσα δέσμη.

4) Αν (P_i, G_i, B_i, π_i) είναι πρωτεύουσες δέσμες ($i = 1, 2$), τότε και η

$$(P_1 \times P_2, G_1 \times G_2, B_1 \times B_2, \pi_1 \times \pi_2)$$

είναι πρωτεύουσα δέσμη.

Σημείωση. Οι πρωτεύουσες δέσμες είναι τοπικά τετριμμένες (βλ. την Ορολογία 3.2.6, αλλά όχι πάντοτε και ολικά τετριμμένες. Για ένα παράδειγμα μη τετριμμένης δέσμης πάνω από τον κύκλο S^1 παραπέμπουμε στο [8]. Ένα άλλο παράδειγμα μη τετριμμένης δέσμης είναι η δέσμη των *πλαισίων* μιας διαφορικής πολλαπλότητας, που θα κατασκευάσουμε στο Παράδειγμα 3.6.5.

3.2.10 Θεώρημα. Αν $p \in P$ είναι τυχόν σημείο του ολικού χώρου με $\pi(p) = x$, τότε ισχύει η σχέση

$$\pi^{-1}(x) = \mathcal{O}_p = p \cdot G$$

(βλ. και τον συμβολισμό του Ορισμού 3.1.3).

Απόδειξη. Έστω (U, Φ) ένα απλοποιούν ζεύγος με $x \in U$, όπου

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G.$$

Τότε, για οποιοδήποτε $q \in \mathcal{O}_p$ θα είναι $q = p \cdot g$, για κάποιο $g \in G$. Επειδή $p \in \pi^{-1}(U)$, θα είναι και $q = p \cdot g \in \pi^{-1}(U)$ (βλ. Πρόταση 3.2.3), άρα, βάσει της (3.2.2),

$$\Phi(q) = \Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g.$$

Επομένως, η τελευταία μετασχηματίζεται στην [βλ. και Άσκηση 3.2.18 (2) στο τέλος της παραγράφου]

$$(\pi(q), p_2(\Phi(q))) = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) \cdot g = (\pi(p), p_2(\Phi(p) \cdot g)),$$

απ' όπου $\pi(q) = \pi(p) = x$, οπότε $q \in \pi^{-1}(x)$ και $\mathcal{O}_p \subset \pi^{-1}(x)$.

Αντίστροφα, αν $q \in \pi^{-1}(x)$, θα είναι $\pi(q) = x$ και $\Phi(q) = (x, p_2(\Phi(q)))$. Παρόμοια, $\Phi(p) = (x, p_2(\Phi(p)))$. Επειδή $p_2(\Phi(q)), p_2(\Phi(p)) \in G$, υπάρχει (μοναδικό) $g \in G$ έτσι ώστε $p_2(\Phi(q)) = p_2(\Phi(p)) \cdot g$. Επομένως, σύμφωνα με τον συμβολισμό του Πορίσματος 3.2.5,

$$q = \Phi^{-1}(x, p_2(\Phi(q))) = \Psi(x, p_2(\Phi(p)) \cdot g) = \Psi(x, p_2(\Phi(p))) \cdot g = p \cdot g,$$

δηλαδή $q \in \mathcal{O}_p$ και $\pi^{-1}(x) \subset \mathcal{O}_p$, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα. $\square$

3.2.11 Πόρισμα. Ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

i) Για κάθε $x \in B$, το αντίστοιχο νήμα έχει τη μορφή $\pi^{-1}(x) = p \cdot G$, όπου p είναι τυχόν στοιχείο με $\pi(p) = x$.

ii) Για κάθε $p \in P$ και $g \in G$, είναι $\pi(p \cdot g) = \pi(p)$, δηλαδή $p \cdot g \in \pi^{-1}(x)$, αν $\pi(p) = x$.

iii) Τα νήματα ορίζουν μία διαμέριση του P :

$$P = \bigcup_{x \in B} \pi^{-1}(x) = \bigcup_{p \in P} \mathcal{O}_p.$$

Απόδειξη. Η i) είναι αναδιατύπωση του Θεωρήματος 3.2.10.

Για τη ii) παρατηρούμε ότι αν $\pi(p) = x$, τότε $p \in \pi^{-1}(x)$. Συνεπώς

$$p \cdot g \in p \cdot G = \mathcal{O}_p = \pi^{-1}(x) \quad \text{και} \quad \pi(p \cdot g) = x.$$

Η iii) είναι προφανής (βλ. επίσης και το ανάλογο Πόρισμα 3.1.5). $\square$

3.2.12 Πρόταση. Αν συμβολίσουμε με $\delta: P \times G \rightarrow P$ τη $\mathcal{C}^\infty$ -δράση του G επί του P και, για ένα σταθεροποιημένο $x \in X$, θέσουμε

$$\delta^x(p, g) := \delta(p, g) = p \cdot g, \quad (p, g) \in \pi^{-1}(x) \times G,$$

τότε η δ^x ορίζει μία $\mathcal{C}^\infty$ -δράση του G επί του νήματος $\pi^{-1}(x)$.

Απόδειξη. Πρώτα διαπιστώνουμε ότι $\delta^x(p, g) \in \pi^{-1}(x)$, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.11. Άρα παίρνουμε την απεικόνιση $\delta^x: \pi^{-1}(x) \times G \rightarrow \pi^{-1}(x)$. Επειδή $\pi^{-1}(x)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της P (Πρόταση 3.2.8), η δ^x είναι $\mathcal{C}^\infty$ ως άμεση συνέπεια της διαφορισιμότητας της δ και των Προτάσεων 1.1.11 και 1.1.12. $\square$

3.2.13 Σχόλιο. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι "η δράση διατηρεί τα νήματα". Αυτό βέβαια συνάγεται και από το Πόρισμα 3.2.8 (ii).

3.2.14 Θεώρημα. Έστω (U, Φ) απλοποιούν ζεύγος της πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

- i) $\Phi(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times G$, για κάθε $x \in U$.
- ii) Αν θέσουμε

$$(3.2.4) \quad \boxed{\Phi_x := p_2 \circ \Phi|_{\pi^{-1}(x)}}$$

τότε η $\Phi_x: \pi^{-1}(x) \rightarrow G^\dagger$ είναι αμφιδιαφόριση και G -ισομεταβλητή ως προς τη δράση του G επί του $\pi^{-1}(x)$ (κατά την Πρόταση 3.2.12) και την δράση του G επί του G [κατά το Παράδειγμα 3.1.6 (1)].

Απόδειξη. i) Έστω $p \in \pi^{-1}(x)$. Τότε

$$\Phi(p) = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) = (x, p_2(\Phi(p))) \in \{x\} \times G,$$

δηλαδή $\Phi(\pi^{-1}(x)) \subset \{x\} \times G$.

Αντίστροφα, για τυχόν $(x, g) \in \{x\} \times G \subset U \times G$, λόγω του επί της Φ θα υπάρχει $q \in \pi^{-1}(U)$ με $\Phi(q) = (x, g)$. Επομένως

$$x = p_1(x, g) = (p_1 \circ \Phi)(q) = \pi(q),$$

δηλαδή $q \in \pi^{-1}(x)$. Άρα, $(x, g) = \Phi(q)$ με $q \in \pi^{-1}(x)$, που συνεπάγεται ότι

$$\{x\} \times G \subset \Phi(\pi^{-1}(x))$$

[†]Εδώ, προφανώς, η Φ_x δεν είναι μερική απεικόνιση.

και οδηγεί, με την αντίστροφη σχέση, στο πρώτο συμπέρασμα.

Για τη ii) ας δείξουμε πρώτα ότι η Φ_x είναι G -ισομεταβλητή. Πράγματι, για κάθε $p \in \pi^{-1}(x)$ και $g \in G$ είναι [βλ. και (3.2.2)]

$$\begin{aligned}\Phi_x(p \cdot g) &= p_2(\Phi(p \cdot g)) = p_2(\Phi(p) \cdot g) = p_2((\pi(p), p_2(\Phi(p))) \cdot g) \\ &= p_2(x, p_2(\Phi(p)) \cdot g) = p_2(\Phi(p)) \cdot g = \Phi_x(p) \cdot g.\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της αμφιδιαφορισιμότητας της Φ_x αποδεικνύουμε κατά σειρά τα εξής συμπεράσματα:

α) Η Φ_x είναι 1-1 : Έστω ότι $\Phi_x(p) = \Phi_x(q)$, για δύο $p, q \in \pi^{-1}(x)$. Τότε

$$\Phi(p) = (x, \Phi_x(p)) = (x, \Phi_x(q)) = \Phi(q)$$

από όπου και $p = q$ [βλ. και την Άσκηση 3.2.18 (2)].

β) Η Φ_x είναι επί: Για τυχόν $g \in G$, ορίζουμε το

$$p := \Psi(x, g) = \Phi^{-1}(x, g) \in \pi^{-1}(U).$$

Αλλά $\pi(p) = (\pi \circ \Psi)(x, g) = x$, άρα $p \in \pi^{-1}(x)$. Συνεπώς,

$$\Phi_x(p) = p_2(\Phi(p)) = p_2(x, g) = g,$$

που αποδεικνύει το επί.

γ) Η Φ_x είναι C^∞ ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων $p_2: U \times G \rightarrow G$ και $\Phi|_{\pi^{-1}(x)}$. Η τελευταία είναι C^∞ ως περιορισμός C^∞ -απεικόνισης σε κανονική υποπολλαπλότητα.

δ) Αποδεικνύεται αμέσως (Άσκηση !) ότι

$$\boxed{\Phi_x^{-1}(g) = \Psi(x, g), \quad \forall g \in G,}$$

άρα

$$\Phi_x^{-1} = \Psi \circ (c_x, id_G), \quad \text{όπου } c_x: G \longrightarrow U: g \mapsto x \text{ (σταθερά),}$$

οπότε έχουμε και τη διαφορισιμότητα της Φ_x^{-1} , που ολοκληρώνει την απόδειξη της ii) και του θεωρήματος. $\square$

3.2.15 Πόρισμα. Μέσω της Φ_x , κάθε νήμα $\pi^{-1}(x)$ αποκτά τη δομή ομάδας Lie εις τρόπον ώστε η Φ_x να είναι ισομορφισμός ομάδων Lie.

3.2.16 Πρόταση. Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη τότε:

- i) Η δράση της G επί της P είναι ελεύθερη.
- ii) Η δράση της G επί των νημάτων είναι γνήσια μεταβατική.

Απόδειξη. i) Έστω $p \in P$ και $g \in G$ με $p = p \cdot g$. Αν $\pi(p \cdot g) = \pi(p) = x$, θα υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) με $x \in U$. Επομένως, η $p = p \cdot g$ συνεπάγεται την [βλ. και Θεώρημα 3.2.14 (ii)]

$$\Phi_x(p) = \Phi_x(p \cdot g) = \Phi_x(p) \cdot g,$$

δηλαδή βρίσκουμε ότι $\Phi_x(p) = \Phi_x(p) \cdot g$ (στην ομάδα G), άρα $g = e$.

ii) Αν πάρουμε τυχόντα $p, q \in \pi^{-1}(x)$, τότε $\Phi_x(p), \Phi_x(q) \in G$ άρα υπάρχει $g \in G$ με

$$\Phi_x(q) = \Phi_x(p) \cdot g = \Phi_x(p \cdot g),$$

οπότε (αφού η Φ_x είναι ισομορφισμός) $q = p \cdot g$. Το g είναι μονοσήμαντα ορισμένο γιατί αν είναι $p \cdot g = q = p \cdot g'$, τότε θα είναι και

$$(3.2.5) \quad \Phi_x(p \cdot g) = \Phi_x(p \cdot g') \quad \text{ή} \quad \Phi_x(p) \cdot g = \Phi_x(p) \cdot g'$$

(στην G), άρα $g = g'$. □

3.2.17 Παρατηρήσεις. 1) Η δράση του G επί του P δεν είναι (γενικά) μεταβατική. Πράγματι, αν πάρουμε δύο τυχόντα $p, q \in P$ με αντίστοιχες προβολές $\pi(p) = x \neq y = \pi(q)$, δηλαδή τα p, q να βρίσκονται σε διαφορετικά νήματα. Αν υπήρχε $g \in G$ με $q = p \cdot g$, τότε (σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.11) θα ήταν

$$y = \pi(q) = \pi(p \cdot g) = \pi(p) = x$$

(δηλαδή αναγκαία τα p, q θα έπρεπε να βρίσκονται στο ίδιο νήμα), πράγμα που είναι άτοπο.

2) Μια άλλη απόδειξη της γνησιότητας της μεταβατικής δράσης στα νήματα (βλ. απόδειξη του ii) της Πρότασης 3.2.16):

$$\begin{aligned} p \cdot g = p \cdot g' &\Leftrightarrow (p \cdot g)g^{-1} = (p \cdot g')g^{-1} \\ &\Leftrightarrow p \cdot (g \cdot g^{-1}) = p \cdot (g' \cdot g^{-1}) \\ &\Leftrightarrow p \cdot e = p \cdot (g' \cdot g^{-1}) \\ &\Leftrightarrow p = p \cdot (g' \cdot g^{-1}) \\ (\text{δράση ελεύθερη}) \quad &\Leftrightarrow g' \cdot g^{-1} = e \\ &\Leftrightarrow g' = g. \end{aligned}$$

3) Ένας άλλος ορισμός της Φ_x είναι και ο επόμενος:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= i_x \circ \Phi, \text{ όπου } i_x \text{ είναι η αμφιδιαφόριση(!)} \\ \{x\} \times G &\longrightarrow G: (x, g) \mapsto g. \end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο, τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 3.2.14, είναι προφανή. Ακολουθήσαμε όμως την προηγούμενη αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος για εξοικείωση με τη γενικότερη συμπεριφορά των Φ και Ψ .

3.2.18 Ασκήσεις.

1. Να επαληθεύσετε ότι τα Παραδείγματα 3.2.9 ορίζουν πράγματι πρωτεύουσες δέσμες.
2. Να δείξετε ότι $\Phi(p) = (\pi(p), p_2(\Phi(p)))$ και κατά συνέπεια, αν $\pi(p) = x$, τότε $\Phi(p) = (x, \Phi_x(p))$.
3. Να δείξετε ότι η συνθήκη του Ορισμού 3.2.1 ισοδυναμεί με την επόμενη:
Για κάθε $x \in B$, υπάρχει ανοιχτό $U \subset B$ με $x \in U$ και αμφιδιαφόριση

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G,$$

με τις ιδιότητες:

i) Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times G \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

Διάγραμμα 3.2

είναι μεταθετικό.

ii) Για κάθε $p \in \pi^{-1}(U)$, $g \in G$, είναι $p \cdot g \in \pi^{-1}(U)$ και ισχύει η σχέση

$$\Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g$$

4. Να δείξετε ότι $\Phi_x^{-1}(g) = \Phi^{-1}(x, g) = \Psi(x, g)$.
5. Αν $x \neq y$, τότε $\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(y) = \emptyset$
6. Στον ολικό χώρο P μιας πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$ ορίζουμε τη σχέση

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G : q = p \cdot g.$$

Να δείξετε ότι:

i) Η " $\sim$ " είναι σχέση ισοδυναμίας.

ii) Αν P/G είναι ο αντίστοιχος χώρος-πηλίκο, τότε το P/G βρίσκεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τη βάση B . Πως ερμηνεύονται οι κλάσεις ισοδυναμίας και το P/G ;

iii) Το P/G εφοδιάζεται με τη δομή πολλαπλότητας, αμφιδιαφορικής προς τη B , της οποίας η κανονική τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία πηλίκου.

7. Να αποδειχτεί το Πόρισμα 3.2.15.

8. Να αποδειχτεί ότι η προβολή π μιας πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι εμβάπτιση χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ii) του Λήμματος 1.3.2 και τη συνθήκη iii) του Θεωρήματος 1.3.3.

9. Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη και $A \subset B$ ανοιχτό, τότε και η τετράδα $(P|_A, G, B, \pi')$, όπου

$$P|_A := \pi^{-1}(A) \text{ και } \pi' = \pi|_{\pi^{-1}(A)},$$

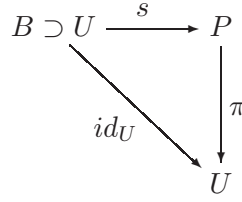
είναι επίσης πρωτεύουσα δέσμη.

3.3 Οι τομές μιας πρωτεύουσας δέσμης

Στη συνέχεια θεωρούμε μια πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$. Συχνά λέμε και γράφουμε *η δέσμη ℓ ή P* , υπονοώντας ολόκληρη την προηγούμενη τετράδα και εφ' όσον βέβαια δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σε ότι αφορά και τα υπόλοιπα στοιχεία της δέσμης.

Είδαμε στην Πρόταση 3.2.7 ότι η π είναι εμβάπτιση, άρα κατά τη συνθήκη iii) του Θεωρήματος 1.3.3 και τον Ορισμό 1.3.4, η π διαθέτει τοπικές τομές και μάλιστα με δοσμένες αρχικές συνθήκες. Γενικώς τις τομές της π θα τις λέμε και τομές της δέσμης, όπως τυπικά θα ορίσουμε και πιο κάτω. Η σχετικά απλή τοπική δομή της δέσμης και οι ιδιότητες της προηγούμενης § 3.2 επιτρέπουν να βρούμε εύκολα τις τομές της δέσμης, με δοσμένες αρχικές συνθήκες, χωρίς προσφυγή στη γενική θεωρία των εμβάπτσεων.

3.3.1 Ορισμός. Μία C^∞ -(τοπική) **τομή** της πρωτεύουσας δέσμης είναι μία C^∞ -απεικόνιση $s: U \rightarrow P$, με $U \subset B$ ανοιχτό, και τέτοια ώστε $\pi \circ s = id_U$. Δηλαδή το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό



Διάγραμμα 3.3

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει αμέσως ότι

$$(3.3.1) \quad s(U) \subset \pi^{-1}(U) \quad \text{και} \quad s(x) \in \pi^{-1}(x).$$

Συμβολίζουμε με

$$(3.3.2) \quad \Gamma(U, P)$$

το σύνολο των $\mathcal{C}^\infty$ -τομών της δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$, με πεδίο ορισμού το $U \subset B$. Αν $U = B$, τότε η s καλείται **ολική τομή**.

Όπως σχολιάσαμε και πριν την Πρόταση 3.2.7, αν θεωρήσουμε όλα τα απλοποιούντα ζεύγη, σύμφωνα με τη συνθήκη του Ορισμού 3.2.1 παίρνουμε μία ανοιχτή κάλυψη της βάσης. Για διευκόλυνση, ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία οικογένεια απλοποιούντων ζευγών

$$(3.3.3) \quad \mathcal{C} = \{(U_i, \Psi_i) : i \in I\},$$

την οποίαν καλούμε **απλοποιούσα κάλυψη** της πρωτεύουσας δέσμης

3.3.2 Ορισμός. Οι **φυσικές τομές** της δέσμης ℓ (ως προς την απλοποιούσα κάλυψη $\mathcal{C}$) είναι οι απεικονίσεις

$$(3.3.4) \quad s_i : U_i \longrightarrow P : x \mapsto s_i(x) = \Psi_i(x, e), \quad x \in U_i.$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει αμέσως ότι πραγματικά οι s_i είναι $\mathcal{C}^\infty$ -τομές της ℓ , δηλαδή [με τον συμβολισμό (3.3.2)] $s_i \in \Gamma(U_i, P)$.

3.3.3 Λήμμα. Αν $s \in \Gamma(U, P)$, με $U \subset B$ τυχόν ανοιχτό, και $g \in G$, τότε και $s \cdot g \in \Gamma(U, P)$, όπου

$$(3.3.5) \quad (s \cdot g)(x) := s(x) \cdot g = \delta(s(x), g); \quad x \in U,$$

και $\delta : P \times G \rightarrow P$ η δράση της δομικής ομάδας στον ολικό χώρο της δέσμης.

Απόδειξη. Από την (3.3.5) προκύπτει ότι $s \cdot g = \delta \circ (s, c_g)$, όπου c_g η σταθερή απεικόνιση

$$U \longrightarrow G: x \mapsto c_g(x) = g,$$

άρα η $s \cdot g$ είναι C^∞ -απεικόνιση. Από το άλλο μέρος, για κάθε $x \in U$, είναι [βλ. Πρόρισμα 3.2.11 (ii)]

$$\pi((s \cdot g)(x)) = \pi(s(x) \cdot g) = \pi(s(x)) = x,$$

δηλαδή $\pi \circ (s \cdot g) = id_U$, που δείχνει ότι η $s \cdot g$ είναι τομή της P . $\square$

3.3.4 Πρόταση. Έστω τυχόν $p_o \in P$ με $\pi(p_o) = x_o$. Τότε υπάρχει $s \in \Gamma(U, P)$, για κάποιο $U \subset B$ ανοιχτό, με $s(x_o) = p_o$ και $x_o \in U$.

Απόδειξη. Έστω $(U_i, \Psi_i) \in \mathcal{C}$ απλοποιούν ζεύγος με $x_o \in U_i$ και $s_i \in \Gamma(U_i, P)$ η αντίστοιχη φυσική τομή της P . Επειδή p_o και $s_i(x_o)$ είναι στοιχεία του ίδιου νήματος $\pi^{-1}(x_o)$ [βλ. σχέσεις (3.3.1)], υπάρχει (μοναδικό)

$$g_o \in G \quad \text{με} \quad p_o = s_i(x_o) \cdot g_o$$

[βλ. επίσης και Πρόταση 3.2.16 (ii)]. Συνεπώς, για $U = U_i$, βάσει του Λήμματος 3.3.3 έχουμε ότι

$$s := s_i \cdot g_o \in \Gamma(U, P) \quad \text{και} \quad s(x_o) = p_o. \quad \square$$

Είδαμε προηγουμένως ότι κάθε απλοποιούν ζεύγος προσδιορίζει μια (φυσική) τομή s_i και απ' αυτήν (με κατάλληλη δράσης με στοιχεία της G) παράγονται και άλλες τομές (βλ. Λήμμα 3.3.3 και Άσκηση 3.3.10 (4) στο τέλος αυτής της Παραγράφου). Θα δούμε τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή οι τομές ορίζουν απλοποιούντα ζεύγη. Πριν απ' αυτό χρειαζόμαστε το επόμενο βασικό συμπέρασμα, για την ορολογία του οποίου παραπέμπουμε στον Ορισμό 1.4.6.

3.3.5 Λήμμα. Θεωρούμε το νηματικό γινόμενο

$$P \times_B P = \{(p, q) \in P \times P : \pi(p) = \pi(q)\},$$

και ορίζουμε την απεικόνιση

$$k: P \times_B P \longrightarrow G,$$

με $k(p, q) \in G$ να είναι το μοναδικό [βάσει της Πρότασης 3.2.16 (ii)] στοιχείο του G με την ιδιότητα $q = p \cdot k(p, q)$. Τότε η k είναι C^∞ -απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω τυχόν $(p_o, q_o) \in P \times_B P$ και $x_o := \pi(p_o) = \pi(q_o)$. Αν (U, Φ) είναι ένα απλοποιούν ζεύγος με $x_o \in U$, τότε θεωρούμε τον περιορισμό της k επί του $\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)$, που είναι ανοιχτό υποσύνολο του $P \times_B P$ επειδή Δ_U είναι ανοιχτό υποσύνολο του Δ_B (αφού $\Delta_U = \Delta_B \cap (U \times U)$) και

$$\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U) = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_U) \subset (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_B) = P \times_B P.$$

[Εδώ θυμίζουμε ότι το $P \times_B P$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ -πολλαπλότητα σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4.7, ή το Θεώρημα Α.4, σελ. 248 (στο Παράρτημα Α)]. Τότε, για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)$, η $q = p \cdot k(p, q)$ συνεπάγεται ότι [βλ. και τη σχέση (3.2.2)]

$$\Phi(q) = \Phi(p \cdot k(p, q)) = \Phi(p) \cdot k(p, q),$$

ή, σύμφωνα με την Άσκηση 3.2.18(2),

$$(\pi(q), p_2(\Phi(q))) = (\pi(p), p_2(\Phi(p))) \cdot k(p, q) = (\pi(p), p_2(\Phi(p)) \cdot k(p, q)),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$p_2(\Phi(q)) = p_2(\Phi(p)) \cdot k(p, q),$$

ή (επειδή η τελευταία ισχύει στο G)

$$(3.3.6) \quad k(p, q) = (p_2(\Phi(p)))^{-1} \cdot p_2(\Phi(q)).$$

Ουσιαστικά η τελευταία αποδεικνύει τη διαφορισμότητα της k στο (p_o, q_o) (ακριβέστερα σε ολόκληρο το $\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)$), και ανάλογα και σε κάθε άλλο σημείο του $P \times_B P$. Πράγματι η (3.3.6) γράφεται τυπικά με τη μορφή

$$k = \gamma \circ ((\alpha \circ p_2 \circ \Phi) \times (p_2 \circ \Phi))|_{\pi^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U)},$$

όπου γ και α είναι οι απεικονίσεις γινόμενο και αντιστροφή της ομάδας G , άρα έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Για μian άλλη απόδειξη βλ. και την § Α.5, σελ. 251 (Παράρτημα Α).

3.3.6 Πρόταση. Έστω $s \in \Gamma(\bar{U}, P)$ τυχούσα $\mathcal{C}^\infty$ -τομή της P , για ένα οποιοδήποτε ανοιχτό $\bar{U} \subset B$. Τότε η s ορίζει ένα απλοποιούν ζεύγος $(\bar{U}, \bar{\Psi})$ ως προς το οποίο η s είναι η αντίστοιχη φυσική τομή.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\Psi}: \bar{U} \times G \longrightarrow \pi^{-1}(\bar{U}) : (x, g) \mapsto \bar{\Psi}(x, g) = s(x) \cdot g, \quad (x, g) \in \bar{U} \times G.$$

Πραγματικά, η $\bar{\Psi}$ παίρνει τιμές στο $\pi^{-1}(\bar{U})$ επειδή

$$\pi(\bar{\Psi}(x, g)) = \pi(s(x) \cdot g) = \pi(s(x)) = x \in \bar{U},$$

και είναι C^∞ επειδή

$$\bar{\Psi}(x, g) = \delta(s(x), g) = (\delta_{\bar{U}} \circ (s \times id_G))(x, g),$$

δηλαδή η $\bar{\Psi}$ είναι σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων. Θυμίζουμε ότι $\delta_{\bar{U}}$ ορίζεται στο Πόρισμα 3.2.4.

Η $\bar{\Psi}$ είναι απεικόνιση 1-1 επειδή

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x, g) &= \bar{\Psi}(x', g') \\ \Leftrightarrow s(x) \cdot g &= s(x') \cdot g' \\ \Leftrightarrow \pi(s(x) \cdot g) &= \pi(s(x') \cdot g') \end{aligned}$$

άρα $x = x'$. Εξάλλου, η ίδια υπόθεση συνεπάγεται ότι

$$s(x) \cdot g = s(x') \cdot g' = s(x) \cdot g',$$

ή, ισοδύναμα,

$$s(x) = (s(x') \cdot g') \cdot g^{-1} = s(x) \cdot (g \cdot g^{-1}),$$

απ' όπου προκύπτει ότι και $g = g'$ (αφού η δράση είναι ελεύθερη κατά την Πρόταση 3.2.16). Επομένως καταλήγουμε στο ότι $(x, g) = (x', g')$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό για το 1-1.

Η $\bar{\Psi}$ είναι απεικόνιση επί: Έστω τυχόν $p \in \pi^{-1}(\bar{U})$. Αναζητούμε ένα ζεύγος $(x, g) \in \bar{U} \times G$ τέτοιο ώστε

$$(3.3.7) \quad p = \bar{\Psi}(x, g) = s(x) \cdot g.$$

Αν υπάρχει τέτοιο (x, g) , θα πρέπει $\pi(p) = x$. Συνεπώς το ζητούμενο x είναι ακριβώς το $\pi(p)$. Απ' το άλλο μέρος, επειδή $p, s(x) \in \pi^{-1}(x)$ και η δράση στα νήματα είναι γνήσια μεταβατική (βλ. Πρόταση 3.2.16), το g είναι το μοναδικό στοιχείο του G που ικανοποιεί την (3.3.7), συνεπώς το g προσδιορίζεται από την

$$(3.3.8) \quad g = k(s(x), p) = k(s(\pi(p)), p).$$

Οι προηγούμενοι συλλογισμοί ουσιαστικά προσδιορίζουν και την $\bar{\Phi} = \bar{\Psi}^{-1}$:

$$\bar{\Phi}(p) = (\pi(p), k(s(\pi(p)), p)).$$

Ελέγχουμε στοιχειωδώς ότι πραγματικά η $\bar{\Phi}$ είναι η αντίστροφη της $\bar{\Psi}$, ενώ η διαφορισμότητα της προκύπτει (βάσει του ορισμού της) από τη σχέση

$$\bar{\Phi} = (\pi, k \circ (s \circ \pi, id_{\pi^{-1}(\bar{U})})),$$

που είναι συνδυασμός C^∞ -απεικονίσεων. Άρα, τελικά, η $\bar{\Psi}$ είναι αμφιδιαφόριση. Επιπλέον, έχει τις ιδιότητες

$$(\pi \circ \bar{\Psi})(x, g) = \pi(s(x) \cdot g) = \pi(s(x)) = x, \quad \forall (x, g) \in U \times G,$$

δηλαδή $\pi \circ \bar{\Psi} = p_1|_{U \times G}: U \times G \rightarrow U$, και

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}((x, g) \cdot g') &= \bar{\Psi}(x, g \cdot g') = s(x) \cdot (g \cdot g') \\ &= (s(x) \cdot g) \cdot g' = \bar{\Psi}(x, g) \cdot g', \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η $\bar{\Psi}$ είναι G -ισομεταβλητή. Επομένως το $(\bar{U}, \bar{\Psi})$ είναι απλοποιούν ζεύγος. Τέλος, αν συμβολίσουμε με $\bar{s}$ την φυσική τομή ως προς το $(\bar{U}, \bar{\Psi})$, τότε (βλ. Ορισμό 3.3.2)

$$\bar{s}(x) = \bar{\Psi}(x, e) := s(x) \cdot e = s(x), \quad \forall x \in \bar{U},$$

η οποία αποδεικνύει και τον τελευταίο ισχυρισμό. (Για μια παραλλαγή της απόδειξης βλ. επίσης και την § Α'.3, σελ. 247 του Παραρτήματος Α'.) $\square$

Τα προηγούμενα συνοψίζονται στο

3.3.7 Θεώρημα. Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των απλοποιούντων ζευγών της ℓ και του συνόλου των τοπικών C^∞ -τομών της ℓ .

3.3.8 Πόρισμα. i) Η τετριμμένη δέσμη $(B \times G, G, B, p_1)$ διαθέτει ολικές τομές.
ii) Αν μία τυχούσα πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ διαθέτει ολική C^∞ -τομή $s \in \Gamma(B, P)$, τότε υπάρχει απλοποιούν ζεύγος της μορφής (B, Ψ) με

$$\Psi: B \times G \xrightarrow{\cong} P.$$

Απόδειξη. Η i) είναι προφανής. Για την ii) εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.6. $\square$

3.3.9 Παρατήρηση. Η ii) του Πορίσματος 3.3.8 αποδεικνύει ότι η ℓ είναι (ολικά) τετριμμένη δέσμη, σύμφωνα με την ορολογία της επόμενης παραγράφου. Θα επανέλθουμε επ' αυτού στα Σχόλια 3.4.9 και στο Θεώρημα 3.4.10.

3.3.10 Ασκήσεις.

1. Να επαληθευτούν οι σχέσεις (3.3.1).
2. Να επαληθευτεί ότι οι φυσικές τομές s_i είναι πράγματι $\mathcal{C}^\infty$ - τομές της ℓ .
3. Αν (U_i, Ψ_i) είναι απλοποιούν ζεύγος και s_i η αντίστοιχη φυσική τομή, τότε κάθε άλλη τομή $s \in \Gamma(U_i, P)$ προκύπτει από την s_i και μάλιστα κατά τρόπο μονοσήμαντο.
4. Αν $s \in \Gamma(U, P)$ και $g \in \mathcal{C}^\infty(U, P)$, όπου $U \subset B$ ανοιχτό, τότε και η απεικόνιση

$$s \cdot g: U \longrightarrow P \quad \text{με} \quad (s \cdot g)(x) = s(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in U,$$

ορίζει επίσης ένα στοιχείο του $\Gamma(U, G)$.

5. Αν $s, s' \in \Gamma(U, P)$ και $U \subset B$ ανοιχτό, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση $g \in \mathcal{C}^\infty(U, G)$ έτσι ώστε $s' = s \cdot g$.
6. Να αποδειχτεί πλήρως το Θεώρημα 3.3.7 και να συμπληρωθεί η απόδειξη του Πορίσματος 3.3.8.
7. Ποιές είναι οι φυσικές τομές της τετριμμένης δέσμης;
8. Να δείξετε ότι, αν $U \subset B$ είναι ανοιχτό, το $\mathcal{C}^\infty(U, G)$ είναι ομάδα, η οποία δρα (από τα δεξιά) επί του $\Gamma(U, P)$. Είναι η προηγούμενη δράση γνήσια μεταβατική;
9. Να δείξετε ότι το απλοποιούν ζεύγος της Πρότασης 3.3.6 είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

3.4 Μορφισμοί πρωτευουσών δεσμών

Ένας μορφισμός μεταξύ πρωτευουσών δεσμών πρέπει (σύμφωνα με την γενική θεωρία κατηγοριών) να περιγράφεται από μια ή περισσότερες απεικονίσεις, που θα αντανakλούν την ιδιαίτερη ιδιότητα των αντικειμένων της κατηγορίας αυτής, δηλαδή των πρωτευουσών δεσμών. Επομένως, ο ακόλουθος ορισμός είναι απολύτως φυσιολογικός.

3.4.1 Ορισμός. Ένας **μορφισμός** μεταξύ των πρωτευουσών δεσμών

$$\ell_1 = (P_1, G_1, B_1, \pi_1) \quad \text{και} \quad \ell_2 = (P_2, G_2, B_2, \pi_2)$$

είναι μια τριάδα (f, φ, h) , όπου

$$f: P_1 \longrightarrow P_2 \quad \text{και} \quad h: B_1 \longrightarrow B_2$$

είναι C^∞ -απεικονίσεις και $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ μορφισμός ομάδων Lie, εις τρόπον ώστε να ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$(\mathbf{ΜΠΔ. 1}) \quad \pi_2 \circ f = h \circ \pi_1$$

δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{h} & B_2 \end{array}$$

Διάγραμμα 3.4

είναι μεταθετικό, και

$$(\mathbf{ΜΠΔ. 2}) \quad f(p \cdot g) = f(p) \cdot \varphi(g), \quad \forall (p, g) \in P_1 \times G_1.$$

3.4.2 Παρατηρήσεις. 1) Η **(ΜΠΔ. 1)** συνεπάγεται ότι η f **διατηρεί τα νήματα** δηλαδή, για οποιοδήποτε $x \in B_1$, ισχύει η σχέση

$$(3.4.1) \quad f(\pi_1^{-1}(x)) \subseteq \pi_2^{-1}(h(x)).$$

2) Η **(ΜΠΔ. 2)** σημαίνει ότι η f **διατηρεί τις δράσεις**. Τυπικά, αν αυτές είναι αντίστοιχα οι δ_1 και δ_2 , τότε

$$f(\delta_1(p, g)) = \delta_2(f(p), \varphi(g)), \quad (p, g) \in P_1 \times G_1.$$

Η απεικόνιση $h: B_1 \rightarrow B_2$ ορίζεται πλήρως από τις f και g , όπως προκύπτει από τα επόμενο

3.4.3 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $\ell_i = (P_i, G_i, B_i, \pi_i), i = 1, 2$, είναι πρωτεύουσες δέσμες, $f: P_1 \rightarrow P_2$ C^∞ -απεικόνιση και $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ μορφισμός ομάδων Lie, έτσι ώστε να ισχύει η **(ΜΠΔ. 2)**. Τότε υπάρχει μοναδική C^∞ -απεικόνιση $h: B_1 \rightarrow B_2$ έτσι ώστε η τριάδα (f, φ, h) να είναι μορφισμός μεταξύ των ℓ_1 και ℓ_2 .

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση h μέσω της σχέσης

$$(3.4.2) \quad h(x) := \pi_2(f(p)); \quad x \in B_1,$$

όπου p είναι τυχόν σημείο της P_1 με $\pi_1(p) = x$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι η h είναι καλά ορισμένη. Πραγματικά, αν πάρουμε οποιοδήποτε άλλο $q \in P_1$ με $\pi_1(q) = x$, τότε, κατά την Πρόταση 3.2.16(ii), θα είναι $q = p \cdot g$ ($g \in G$). Άρα, λόγω της (ΜΠΔ. 2) και του Πορίσματος 3.2.11(ii), έχουμε ότι

$$\pi_2(f(q)) = \pi_2(f(p \cdot g)) = \pi_2(f(p) \cdot \varphi(g)) = \pi_2(f(p)),$$

που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό.

Η διαφορισιμότητα της h ελέγχεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε τυχόν απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) και καλέσουμε s_U την αντίστοιχη φυσική τομή (βλ. Ορισμό 3.3.2, τότε η (3.4.2), μαζί με τα σχόλια για το καλώς ορισμένο της h , οδηγούν στην

$$h(x) = \pi_2(f(s_U(x))); \quad \forall x \in U,$$

δηλαδή $h_U = \pi_2 \circ f \circ s_U$, που σημαίνει ότι η h_U είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση. Επειδή αυτό συμβαίνει για όλα τα απλοποιούντα ζεύγη και τα πεδία ορισμού τους καλύπτουν ολόκληρη τη βάση B , καταλήγουμε στην ολική διαφορισιμότητα της απεικόνισης h .

Η (3.4.2) συνεπάγεται αμέσως την (ΜΠΔ. 1), άρα η τριάδα (f, φ, h) είναι πραγματικά μορφισμός μεταξύ των ℓ_1 και ℓ_2 .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει και μία άλλη $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση $h': B_1 \rightarrow B_2$, έτσι ώστε και η τριάδα (f, φ, h') να είναι μορφισμός της ℓ_1 στην ℓ_2 . Τότε από την (ΜΠΔ. 1), και για της δύο προηγούμενες τριάδες, προκύπτει ότι

$$(3.4.3) \quad h \circ \pi_1 = h' \circ \pi_1.$$

Επομένως, αν $x \in B_1$ είναι τυχόν σημείο, θα υπάρχει $p \in P$ με $\pi(p) = x$ (βλ. Πρόταση 3.2.7) και, βάσει της (3.4.3),

$$h(x) = h(\pi_1(p)) = h'(\pi_1(p)) = h'(x).$$

Δηλαδή καταλήγουμε στην $h = h'$, που ολοκληρώνει και την απόδειξη. $\square$

3.4.4 Πόρισμα. Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία από το σύνολο των μορφισμών μεταξύ των πρωτευουσών δεσμών ℓ_1 και ℓ_2 επί του συνόλου των ζευγών (f, φ) όπως στο Θεώρημα 3.4.3.

3.4.5 Ορισμός. Ένας μορφισμός (f, φ, h) μεταξύ των ℓ_1 και ℓ_2 λέγεται **ισομορφισμός** αν οι f, h είναι αμφιδιαφορίσεις και η φ είναι ισομορφισμός ομάδων Lie. Επίσης, αν $B_1 = B_2 = B$ και $h = id_B$, ο μορφισμός (f, φ, id_B) λέγεται **B-μορφισμός**. Αν $G_1 = G_2 = G$ και $\varphi = id_G$, ο (f, id_G, h) λέγεται **G-μορφισμός**. Τέλος αν $B_1 = B_2 = B$, $G_1 = G_2 = G$, $h = id_B$ και $\varphi = id_G$, ο μορφισμός (f, id_G, id_B) λέγεται **G-B-μορφισμός**.

3.4.6 Θεώρημα. Κάθε G - B -μορφισμός (f, id_G, id_B) της $\ell_1 = (P_1, G, B, \pi_1)$ στην $\ell_2 = (P_2, G, B, \pi_2)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.4.5 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι αμφι-διαφόριση. Προς τούτο αποδεικνύουμε πρώτα τα επόμενα συμπεράσματα:

i) Η f είναι απεικόνιση 1-1. Πραγματικά, αν p και q είναι τυχόντα σημεία του P_1 με $f(p) = f(q)$, τότε η (ΜΠΔ. 1) συνεπάγεται ότι

$$\pi_1(p) = \pi_2(f(p)) = \pi_2(f(q)) = \pi_1(q),$$

δηλαδή τα p, q ανήκουν στο ίδιο νήμα. Επειδή η δράση στα νήματα είναι γνήσια μεταβατική (Πρόταση 3.2.16), υπάρχει (μοναδικό) $g \in G$ έτσι ώστε $q = p \cdot g$. Επομένως, η (ΜΠΔ. 2) οδηγεί στην

$$f(p) = f(q) = f(p \cdot g) = f(p) \cdot g,$$

απ' όπου, επειδή η δράση είναι ελεύθερη (Πρόταση 3.2.16), $g = e$. Άρα $p = q$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

ii) Η f είναι επί: Έστω τυχόν $q \in P_2$ με $\pi_2(q) =: x$. Επειδή ισχύει η 3.4.1, για τυχόν $p_o \in \pi_1^{-1}(x)$, τα $f(p_o)$ και q ανήκουν στο νήμα $\pi_2^{-1}(x)$. Άρα υπάρχει (μοναδικό) $g \in G$ με

$$q = f(p_o) \cdot g = f(p_o \cdot g).$$

Επομένως, το $p = p_o \cdot g$ είναι σημείο της P_1 με $f(p) = q$, δηλαδή η f είναι επί. Σημειώνουμε ότι $g = k_2(f(p_o), q)$ (βλ. Λήμμα 3.3.5).

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι υπάρχει f^{-1} και $f^{-1}(q) = p_o \cdot k(f(p_o), q)$, για ένα αυθαίρετο $p_o \in \pi_1^{-1}(x)$, όπου $x = \pi(q)$. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι C^∞ δείχνοντας ότι είναι C^∞ σε τυχόν $q_o \in P_2$: Αν $\pi_2(q_o) = x_o$, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) της P_1 με $x_o \in U$, και συμβολίζουμε με s_U τη φυσική τομή της P_1 πάνω από το U . Η προηγούμενη μέθοδος απόδειξης του επί της f ουσιαστικά μας επιτρέπει να εκφράσουμε με βολικό τρόπο την $f^{-1}|_{\pi_2^{-1}(U)}$. Πριν απ' αυτό παρατηρούμε ότι η έκφραση

$$f^{-1}(q_o) = p_o \cdot g$$

(που προκύπτει από την κατασκευή του επί της f), όπου $p_o \in \pi_1^{-1}(x_o)$ και $g \in G$ προσδιορίζόμενο από τη σχέση $q_o = f(p_o) \cdot g$, μπορεί να αντικατασταθεί από την

$$(3.4.4) \quad f^{-1}(q_o) = s_U(x_o) \cdot g'$$

(αφού το p_o είναι αυθαίρετο), όπου τώρα όμως το νέο g' προσδιορίζεται από την

$$(3.4.5) \quad q_o = f(s_U(x_o)) \cdot g'.$$

Εάν λοιπόν συμβολίσουμε με k_2 την απεικόνιση του Λήμματος 3.3.5 για την δέσμη ℓ_2 , οι (3.4.4) και (3.4.5) οδηγούν στην

$$f^{-1}(q_o) = s_U(x_o) \cdot k_2(f(s_U(x_o)), q_o), \quad \text{με } x_o = \pi_2(q_o).$$

Την ίδια διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε και για οποιοδήποτε $q \in \pi_2^{-1}(U)$, οπότε καταλήγουμε στην ανάλογη έκφραση

$$\begin{aligned} f^{-1}(q) &= s_U(\pi_2(q)) \cdot k_2(f(s_U(\pi_2(q))), q) \\ &= \delta_1(s_U(\pi_2(q)), k_2(f(s_U(\pi_2(q))), q)), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(3.4.6) \quad f^{-1}|_{\pi_2^{-1}(U)} = \delta_1 \circ (s_U \circ \pi_2, k_2 \circ (f \circ s_U \circ \pi_2, id_{P_2}))|_{\pi_2^{-1}(U)}$$

όπου $\delta_1: P_1 \times G \rightarrow P_1$ η δράση του G στην P_1 . Η (3.4.6) είναι C^∞ -απεικόνιση, άρα η f^{-1} είναι C^∞ στο q_o . Παρόμοια αποδεικνύεται η διαφορισμότητα της f^{-1} σε κάθε σημείο της P_2 , οπότε κλείνει η απόδειξη. $\square$

3.4.7 Παραδείγματα. 1) Η τριάδα (id_P, id_G, id_B) είναι G - B -(ισο)-μορφισμός της (P, G, B, π) στον εαυτόν της.

2) Αν $\ell_i = (P_i, G_i, B_i, \pi_i)$, $i = 1, 2, 3$, είναι πρωτεύουσες δέσμες και

$$(f_i, \varphi_i, h_i): \ell_i \longrightarrow \ell_{i+1} \quad (i = 1, 2)$$

μορφισμοί πρωτευουσών δεσμών, τότε η τριάδα

$$(f_2 \circ f_1, \varphi_2 \circ \varphi_1, h_2 \circ h_1)$$

είναι μορφισμός της ℓ_1 στην ℓ_3 .

3) Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη και (U, Ψ) απλοποιούν ζεύγος, τότε η τριάδα (Ψ, id_G, id_U) είναι G - U -μορφισμός της τετριμμένης δέσμης $(U \times G, G, U, p_1)$ στην πρωτεύουσα δέσμη $(\pi^{-1}(U), G, U, \pi|_{\pi^{-1}(U)})$ [βλ. σχετικά και τα Παραδείγματα 3.2.9 (2) και 3.2.9 (3)]. Προφανώς εδώ έχουμε ισομορφισμό με αντίστροφο μορφισμό τον (Φ, id_G, id_U) .

4) Ας υποθέσουμε ότι μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ διαθέτει **ολικό** απλοποιούν ζεύγος (B, Ψ) , δηλαδή η $\Psi: B \times G \xrightarrow{\sim} P$ είναι G -ισομεταβλητή αμφιδιαφόριση με $\pi \circ \Psi = p_1$ (όπως, π.χ. στην περίπτωση του Πορίσματος 3.3.8). Τότε η τριάδα (Ψ, id_G, id_B) είναι G - B -(ισο)-μορφισμός της (ολικής) τετριμμένης δέσμης $(B \times G, G, B, p_1)$ στην $\ell = (P, G, B, \pi)$. Για το αντίστροφο βλ. Άσκηση 3.4.12 (7).

3.4.8 Ορισμός. Μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ λέγεται **τετριμμένη** αν είναι G - B -ισόμορφη με την τετριμμένη δέσμη $(B \times G, G, B, p_1)$.

3.4.9 Σχόλια. Η προηγούμενη ορολογία και τα πιο πάνω παραδείγματα ξεκαθαρίζουν πλήρως τώρα την Ορολογία 3.2.6. Ακριβέστερα, οι συνθήκες i) και ii) του Ορισμού 3.2.1 σημαίνουν [όπως δείχνει και το Παράδειγμα 3.4.7 (3)] ότι η $(\pi^{-1}(U), G, U, \pi|_{\pi^{-1}(U)})$ είναι τετριμμένη δέσμη, άρα η $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι τοπικά τετριμμένη, δηλαδή τετριμμένη στο "τμήμα" της πάνω από το U του απλοποιούντος ζεύγους. Και παρόμοια για όλα τα πεδία ορισμού των απλοποιούντων ζευγών. Συνεπώς, η βάση B διαθέτει μίαν ανοιχτή κάλυψη, πάνω από τα ανοιχτά σύνολα της οποίας η δέσμη είναι (τοπικά) τετριμμένη.

Αντίθετα, η περίπτωση να είναι μία πρωτεύουσα δέσμη τετριμμένη (ολικά) δεν απαντάται συχνά, παρ' όλο που κάτι τέτοιο θα ήταν πολύ επιθυμητό, αφού στην περίπτωση αυτή θα είχαμε μια πολύ απλή δομή για τη δέσμη (βλ. και Άσκηση 3.4.12 (7)). Φυσικά μία τέτοια περίπτωση εξασφαλίζει η ύπαρξη ολικών τομών.

Για την πληρότητα (και για την επεξήγηση της Παρατήρησης 3.3.9) συμπληρώνουμε το Πόρισμα 3.3.8 με το επόμενο:

3.4.10 Θεώρημα. Μια πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι τετριμμένη τότε και μόνον τότε αν διαθέτει C^∞ -ολικές τομές.

Απόδειξη. Αν η δέσμη είναι τετριμμένη, τότε υπάρχει ένας G - B -ισομορφισμός (f, id_G, id_B) της δέσμης στην τετριμμένη δέσμη $(B \times G, G, B, p_1)$. Επομένως, αν $s_o: B \rightarrow B \times G$ είναι η φυσική τομή της τελευταίας, δηλαδή $s_o := (x, e)$, τότε $f \circ s_o \in \Gamma(B, P)$. [Φυσικά μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλες ολικές τομές (!)]

Αντίστροφα, αν υπάρχει ολική τομή, τότε ορίζεται απλοποιούν ζεύγος (B, Ψ) όπως στο Πόρισμα 3.3.8 (ii). Επομένως η τριάδα (Ψ, id_G, id_B) είναι G - B -ισομορφισμός της τετριμμένης δέσμης επί της $\ell = (P, G, B, \pi)$. $\square$

3.4.11 Σχόλιο. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα δεν ισχύει για διανυσματικές δέσμες. Κάθε διανυσματική δέσμη διαθέτει μια ολική τομή, τη *μηδενική* (βλ. Λήμμα 5.1.2),

$$\Omega: X \longrightarrow E : x \mapsto \Omega(x) := 0_x \in E_x,$$

χωρίς φυσικά όλες οι δέσμες αυτής της κατηγορίας να είναι και απαραίτητα ολικά τετριμμένες. Ένα κλασσικό παράδειγμα μη τετριμμένης διανυσματικής δέσμης είναι η ταινία του Möbius.

3.4.12 Ασκήσεις.

1. Αν (f, φ, h) είναι ισομορφισμός πρωτευουσών δεσμών, να επαληθευτεί ότι και $(f^{-1}, \varphi^{-1}, h^{-1})$ είναι (ισο)μορφισμός.
2. Να δοθεί μία άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3 με την εξής διαδικασία: Για κάθε απλοποιούν ζεύγος (U, Ψ) της ℓ_1 , με αντίστοιχη φυσική τομή s_U , ορίζουμε την απεικόνιση $h_U := \pi_2 \circ f \circ s_U$. Δείξτε ότι η h κατασκευάζεται ακριβώς από τις h_U .
3. Να επαληθεύσετε τη σχέση (3.4.1).
4. Αν (f, φ, h) είναι μορφισμός πρωτευουσών δεσμών με φ ισομορφισμό ομάδων Lie και h αμφιδιαφόριση, τότε η f είναι αμφιδιαφόριση και η (f, φ, h) ισομορφισμός.
5. Αν (f, φ, id_B) είναι μορφισμός μεταξύ των πρωτευουσών δεσμών $\ell = (P, G, B, \pi)$ και $\ell' = (P', G', B, \pi')$, τότε, για κάθε $s \in \Gamma(U, P)$, συνάγεται ότι $f \circ s \in \Gamma(U, P')$, όπου U είναι οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο της βάσης B .
6. Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 5 και την υπόθεση ότι U είναι πεδίο ορισμού απλοποιούντων ζευγών για τις P και P' , να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική $g \in C^\infty(U, G')$ με την ιδιότητα $f \circ s_U = s'_U \cdot g$, όπου s_U και s'_U οι φυσικές τομές των P και P' υπεράνω του U .
7. Αν $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη, $U \subset B$ ανοιχτό και

$$f: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

C^∞ -απεικόνιση τέτοια ώστε η τριάδα (f, id_G, id_U) να είναι μορφισμός πρωτευουσών δεσμών (ποιών ;), τότε το ζεύγος (U, f) είναι απλοποιούν ζεύγος. Γενικότερα, πότε και πώς μπορούμε να πάρουμε ένα **ολικό** απλοποιούν ζεύγος (B, f) ;

8. Έστω (f, id_G, id_B) ένας αυτομορφισμός της $\ell = (P, G, B, \pi)$. Δείξτε ότι στον (f, id_G, id_B) αντιστοιχεί κατα τρόπον αμφιμονοσήμαντο μία C^∞ -απεικόνιση $F: P \rightarrow G$, που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} F(p \cdot g) &= g^{-1} \cdot F(p) \cdot g, & \forall (p, g) \in P \times G, \\ f(p) &= p \cdot F(p), & \forall p \in P. \end{aligned}$$

και αντίστροφα. [Ένας τέτοιος αυτομορφισμός λέγεται **μετασχηματισμός βαθμίδας** (gauge transformation) και έχει ιδιαίτερη σημασία για τη σύγχρονη Θεωρητική Φυσική]

9. Αν (f, φ, h) είναι μορφισμός μεταξύ των πρωτευουσών δεσμών $\ell = (P, G, B, \pi)$ και $\ell' = (P', G', B', \pi')$, τότε ισχύει η σχέση

$$\varphi \circ k = k' \circ (f \times f)|_{P \times_B P}.$$

3.5 Η αντίστροφη εικόνα πρωτεύουσας δέσμης

Όπως και στην περίπτωση των διανυσματικών δεσμών § 2.4, ξεκινώντας από μια δοσμένη πρωτεύουσα δέσμη με βάση B θα κατασκευάσουμε μια νέα δέσμη με βάση B' , όταν η τελευταία συνδέεται με τη B μέσω μιάς $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνισης. Η βασική αυτή κατασκευή ικανοποιεί μιά καθολική ιδιότητα και έχει σημαντικές εφαρμογές.

Θεωρούμε μιά πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ και υποθέτουμε ότι δίνεται μιά $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση $h: B' \rightarrow B$. Θεωρούμε, επίσης το νηματικό γινόμενο

$$h^*(P) := B' \times_B P := \{(x', p) \in B' \times P : h(x') = \pi(p)\}$$

και τις αντίστοιχες απεικονίσεις (προβολές)

$$\pi^* := p_1|_{h^*(P)}: h^*(P) \longrightarrow B', \quad h^* := p_2|_{h^*(P)}: h^*(P) \longrightarrow P$$

(βλ. Ορισμό 1.4.6). Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4.7, η $h^*(P)$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ -πολλαπλότητα, και οι π^*, h^* είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεις.

Επί της $h^*(P)$ ορίζεται η δράση

$$\delta^*: h^*(P) \times G \longrightarrow h^*(P) : ((x', p), g) \mapsto (x', p \cdot g)$$

η οποία είναι $\mathcal{C}^\infty$, αφού

$$\delta^* = (pr_1, \delta \circ (pr_2, pr_3)).$$

3.5.1 Ορισμός. Η τετράδα $h^*(\ell) \equiv \ell^* := (h^*(P), G, B', \pi^*)$ καλείται **αντίστροφη εικόνα** (inverse image) ή **ανάκρουση** (pull-back) της ℓ μέσω της h .

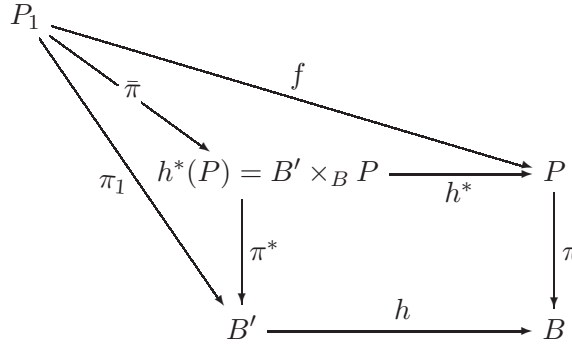
3.5.2 Θεώρημα. Ισχύουν τα επόμενα:

- i) Η ℓ^* είναι πρωτεύουσα δέσμη με νήματα ισόμορφα προς τα νήματα της ℓ .
- ii) Η τριάδα (h^*, id_G, h) είναι G -μορφισμός της ℓ^* στην ℓ .
- iii) Η ℓ^* ικανοποιεί την επόμενη **καθολική ιδιότητα** (universal property): Αν $\ell_1 = (P_1, G, B', \pi_1)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη και $(f, id_G, h): \ell_1 \rightarrow \ell$ μορφισμός πρωτευουσών δεσμών, τότε υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος G - B' -(ισο)μορφισμός

$$(\bar{\pi}, id_G, id_{B'}): \ell_1 = (P_1, G, B', \pi_1) \longrightarrow \ell^* = (h^*(P), G, B', \pi^*),$$

τέτοιος ώστε $f = h^* \circ \bar{\pi}$.

Το τελευταίο συμπέρασμα συνοψίζεται στο διάγραμμα:



Διάγραμμα 3.5

Απόδειξη. i) Κατασκευάζουμε τα απλοποιούντα ζεύγη της ℓ^* ως εξής: Αν $x' \in B'$ είναι τυχόν σημείο της B' με $h(x') = x$, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος $(U, \Psi) \equiv (U, \Phi)$ της ℓ με $x \in U$. Θέτοντας $V := h^{-1}(U)$, διαπιστώνουμε ότι $\pi^{*-1}(V) = V \times_U \pi^{-1}(U)$, οπότε ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Psi' : V \times G \longrightarrow \pi^{*-1}(V) : (y, g) \mapsto \Psi'(y, g) := (y, \Psi(h(y), g))$$

Η Ψ' είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση επειδή παίρνει τη μορφή

$$\Psi' = (p_1|_{V \times G}, \Psi \circ (h \times id_G)|_{V \times G}).$$

Επιπλέον, όπως ελέγχουμε στοιχειδώς, έχει ως αντίστροφη την $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση

$$\Phi' : \pi^{*-1}(V) \longrightarrow V \times G : \Phi'(y, p) := (y, (p_2 \circ \Phi)(p)), \quad \forall (y, p) \in \pi^{*-1}(V).$$

Συνεπώς η Ψ' είναι αμφιδιαφόριση και ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Ορισμού 3.2.1, δηλαδή είναι G -ισομεταβλητή και $\pi^* \circ \Psi' = p_1|_{V \times G}$ (τα τελευταία αποτελέσματα είναι άμεσα).

Για το τυχόν $x'_o \in B'$, με $h(x'_o) = x_o \in B$, το αντίστοιχο νήμα είναι:

$$\begin{aligned}
 \pi^{*-1}(x'_o) &= \{(y, p) \in h^*(P) : \pi^*(y, p) = x'_o\} \\
 &= \{(x'_o, p) \in B' \times P : h(x'_o) = x_o = \pi(p)\} \\
 &= \{x'_o\} \times \pi^{-1}(x_o)
 \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\pi^{*-1}(x'_o) \cong \pi^{-1}(x_o) = \pi^{-1}(h(x'_o))$, άρα αποδεικνύεται η το πρώτο συμπέρασμα.

ii) Για τυχόν $(y, p) \in h^*(P) = B' \times_B P$ είναι $h(y) = \pi(p)$, άρα

$$(\pi \circ h^*)(y, p) = \pi(p) = h(y) = (h \circ \pi^*)(y, p),$$

δηλαδή $\pi \circ h^* = h \circ \pi^*$. Επίσης,

$$h^*((y, p) \cdot g) = h^*(y, p \cdot g) = p \cdot g = h^*(y, p) \cdot g,$$

δηλαδή η h^* είναι G -ισομεταβλητή, όποτε καταλήγουμε στον Ορισμό 3.4.1 και αποδεικνύεται το δεύτερο συμπέρασμα.

iii) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\pi}: P_1 \longrightarrow h^*(P) = B' \times_B P : p_1 \mapsto \bar{\pi}(p_1) := (\pi_1(p_1), f(p_1)).$$

Επομένως, η $\bar{\pi}$ είναι μία C^∞ -απεικόνιση, τέτοια ώστε $f = h^* \circ \bar{\pi}$. Επιπλέον, από τον ίδιο ορισμό, έχουμε ότι

$$\pi^* \circ \bar{\pi} = \pi_1 \equiv id_{B'} \circ \pi_1$$

και, για κάθε $(p_1, g) \in P_1 \times G$,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(p_1 \cdot g) &= (\pi_1(p_1 \cdot g), f(p_1 \cdot g)) = (\pi_1(p_1), f(p_1) \cdot g) \\ &= (\pi_1(p_1), f(p_1)) \cdot g = \bar{\pi}(p_1) \cdot g, \end{aligned}$$

δηλαδή διαπιστώνουμε ότι $(\bar{\pi}, id_G, id_{B'})$ είναι πράγματι G - B -ισομορφισμός.

Ας υποθέσουμε τέλος, ότι υπάρχει και μία άλλη απεικόνιση $\tilde{\pi}: P_1 \rightarrow h^*(P)$ με τις ίδιες ιδιότητες, δηλαδή $f = h^* \circ \tilde{\pi}$ και $(\tilde{\pi}, id_G, id_{B'})$ να είναι μορφισμός, πράγμα που συνεπάγεται ότι $\pi^* \circ \tilde{\pi} = \pi_1$. Επειδή μπορούμε να γράψουμε ότι $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$ και $\bar{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$, όπου $\tilde{\pi}_i = p_i|_{h^*(P)} \circ \tilde{\pi}$ και $\pi_i = p_i|_{h^*(P)} \circ \bar{\pi}$ ($i = 1, 2$), ο ορισμός των π^* και h^* , σε συνδυασμό με τις υποθέσεις για την $\tilde{\pi}$ (και τις ανάλογες της $\bar{\pi}$), οδηγεί στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1 &= p_1|_{h^*(P)} \circ \tilde{\pi} = \pi^* \circ \tilde{\pi} = \pi_1 = \pi^* \circ \bar{\pi} = p_1|_{h^*(P)} \circ \bar{\pi} = \pi_1, \\ \tilde{\pi}_2 &= p_2|_{h^*(P)} \circ \tilde{\pi} = h^* \circ \tilde{\pi} = f = h^* \circ \bar{\pi} = p_2|_{h^*(P)} \circ \bar{\pi} = \pi_2, \end{aligned}$$

απ' όπου καταλήγουμε στην

$$\tilde{\pi} = (\pi_1, f) = \bar{\pi},$$

με την οποία και ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

3.5.3 Παρατηρήσεις. 1) Στο προηγούμενο θεώρημα, η ύπαρξη του G - B' -μορφισμού $(\bar{\pi}, id_G, id_{B'})$ συνεπάγεται ότι οι δέσμες ℓ_1 και $h^*(P)$ είναι ισόμορφες. Δηλαδή, αν δοθούν η δέσμη ℓ και η βάση B' , ο μορφισμός $h: B' \rightarrow B$ καθορίζει μονοσήμαντα, ως προς έναν ισομορφισμό, και την δέσμη $h^*(\ell)$ και τον μορφισμό $(h^*, id_G, h): h^*(\ell) \rightarrow \ell$.

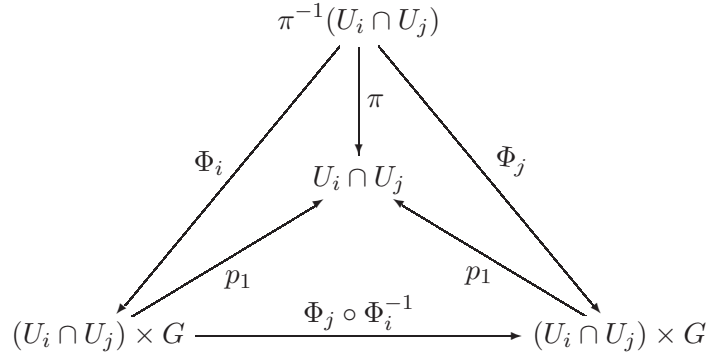
2) Για μια αυτοτελή απόδειξη βασισμένη στην τοπική δομή της πρωτεύουσας δέσμης (χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος 1.4.7, που έγινε στην προκαταρκτική συζήτηση που προηγήθηκε του Ορισμού 3.5.1 και της εκφώνησης του Θεωρήματος 3.5.2), παραπέμπουμε στην § A.6, σελ.251, του Παραρτήματος A.

3.6 Οι απεικονίσεις μεταφοράς

Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ μία πρωτεύουσα δέσμη και $\mathcal{C} = \{(U_i, \Psi_i) : i \in I\}$ απλοποιούσα κάλυψη αυτής. Θυμίζουμε ότι $\Phi_i := \Psi_i^{-1}$.

Για $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ορίζεται η απεικόνιση

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times G \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times G$$



Διάγραμμα 3.6

Αν $(b, g) \in (U_i \cap U_j) \times G$, θέτουμε $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b', g')$, οπότε, μέσω και του προηγούμενου μεταθετικού διαγράμματος, έχουμε ότι

$$b' = p_1 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = \pi \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = p_1(b, g) = b$$

και

$$g' = p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_{ib}^{-1}(g) = \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(g).$$

Δηλαδή, καταλήγουμε στη σχέση

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b, \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(g)).$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή οι απεικονίσεις $\Phi_{jb}, \Phi_{ib}^{-1}$ είναι G -ισομεταβλητές,

$$\Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(g) = (\Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1})(e) \cdot g = (p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, e)) \cdot g.$$

Ορίζουμε τώρα τις απεικονίσεις

$$(3.6.1) \quad g_{ji}: U_i \cap U_j \longrightarrow G : b \mapsto \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(e) = p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, e),$$

για κάθε $i, j \in I$, με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Οι απεικονίσεις αυτές είναι διαφορίσιμες, αφού

$$g_{ji}(b) = p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} \circ (id_{U_i \cap U_j}, c_e)(b),$$

όπου $c_e(b) = e$, για κάθε $b \in U_i \cap U_j$. Επίσης οι g_{ji} συνδέονται με τις απλοποιούσες απεικονίσεις Φ_i μέσω του τύπου

$$(3.6.2) \quad \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b, g_{ji}(b) \cdot g).$$

3.6.1 Ορισμός. Οι παραπάνω απεικονίσεις $g_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ καλούνται **απεικονίσεις μεταφοράς** (transition functions) της ℓ , ως προς την απλοποιούσα κάλυψη $\mathcal{C}$.

3.6.2 Πρόταση. Οι απεικονίσεις μεταφοράς αποτελούν **σύγκυκλο**, δηλαδή

$$g_{ki}(b) = g_{kj}(b) \cdot g_{ji}(b),$$

για κάθε $i, j, k \in I$ και $b \in U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Για κάθε $b \in U_i \cap U_j \cap U_k$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g_{ki}(b) &= \Phi_{kb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(e) = \Phi_{kb} \circ \Phi_{jb}^{-1} \circ \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(e) \\ &= (\Phi_{kb} \circ \Phi_{jb}^{-1})(g_{ji}(b)) = (\Phi_{kb} \circ \Phi_{jb}^{-1})(e) \cdot g_{ji}(b) \\ &= g_{kj}(b) \cdot g_{ji}(b) \end{aligned}$$

□

3.6.3 Πρόσχημα. Οι απεικονίσεις μεταφοράς ικανοποιούν τις σχέσεις:

- i) $g_{ii}(b) = e, \quad \forall b \in U_i \text{ και } i \in I.$
- ii) $g_{ij}(b) = (g_{ji}(b))^{-1}, \quad \forall i, j \in I \text{ και } b \in U_i \cap U_j.$

Θα συνδέσουμε τώρα τις απεικονίσεις μεταφοράς με τις φυσικές τομές της δέσμης πάνω από την ίδια απλοποιούσα κάλυψη $\mathcal{C}$ (βλ. Ορισμό 3.3.2). Θυμίζουμε ότι, για κάθε $i \in I$, η αντίστοιχη φυσική τομή είναι η

$$s_i: U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) : b \mapsto \Phi_i^{-1}(b, e) = \Psi_i(b, e).$$

Αν τώρα $b \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε η $s_i(b) = \Phi_i^{-1}(b, e)$ συνεπάγεται ότι

$$\Phi_{jb}(s_i(b)) = \Phi_{jb} \circ \Phi_i^{-1}(b, e) = g_{ji}(b),$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$s_i(b) = \Phi_{jb}^{-1}(g_{ji}(b)) = \Phi_{jb}^{-1}(e) \cdot g_{ji}(b) = s_j(b) \cdot g_{ji}(b).$$

Επομένως, οι φυσικές τομές και οι απεικονίσεις μεταφοράς συνδέονται με τη σχέση

$$(3.6.3) \quad s_j(b) = s_i(b) \cdot g_{ij}(b), \quad b \in U_i \cap U_j,$$

για κάθε $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

3.6.4 Θεώρημα. Έστω B C^∞ -πολλαπλότητα, G ομάδα Lie, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του B και $\{g_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow G\}_{i,j \in I}$ σύγκυκλος της B (ως προς την προηγούμενη κάλυψη, με τιμές στην ομάδα G). Τότε υπάρχει μοναδική, ως προς ισομορφισμό, πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ με απεικονίσεις μεταφοράς τις δοθείσες $\{g_{ji}\}$.

Απόδειξη. Έστω το σύνολο

$$E := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times U_i \times G).$$

Στο E ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(i, b, g) \sim (j, b', g') \Leftrightarrow b = b' \text{ και } g' = g_{ji}(b) \cdot g,$$

οπότε και $b = b' \in U_i \cap U_j$.

Συμβολίζουμε με $P := E / \sim$ τον αντίστοιχο χώρο πηλίκου. Ο E , ως διακεκριμένη ένωση τοπολογικών χώρων, είναι τοπολογικός χώρος, άρα το P εφοδιάζεται με την τοπολογία-πηλίκου. Επίσης, συμβολίζουμε με ϱ την κανονική απεικόνιση

$$\varrho: E \longrightarrow P : (i, b, g) \mapsto [(i, b, g)].$$

Θεωρούμε ακόμη και την απεικόνιση (προβολή)

$$\pi: P \longrightarrow B : [(i, b, g)] \mapsto b.$$

Είναι άμεσον ότι η π είναι καλά ορισμένη. Εξάλλου, από τις ιδιότητες της τοπολογίας-πηλίκου, η π είναι συνεχής τότε και μόνον τότε αν η $\pi \circ \varrho$ είναι συνεχής. Η

τελευταία όμως έχει τη μορφή $\pi \circ \varrho: E \rightarrow B: (i, b, g) \mapsto b$, που είναι πραγματικά συνεχής. Επομένως, η π είναι συνεχής.

Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$\Phi_i: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G: [(j, b, g)] \mapsto (b, g_{ij}(b) \cdot g),$$

που δίνει το μεταθετικό τρίγωνο

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times G \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U_i \end{array}$$

Διάγραμμα 3.7

Ισχύουν τα εξής:

Η Φ_i είναι καλά ορισμένη: Πράγματι, αν $[(j, b, g)] = [(k, b', g')]$, τότε $b = b'$ και $g' = g_{kj}(b) \cdot g$, οπότε

$$\begin{aligned} \Phi_i([(j, b, g)]) &= (b, g_{ij}(b) \cdot g) = \\ (b', g_{ik}(b) \cdot g_{kj}(b) \cdot g) &= (b', g_{ik}(b) \cdot g') = \Phi_i([(k, b', g')]). \end{aligned}$$

Η Φ_i είναι 1-1:

$$\begin{aligned} \Phi_i([(j, b, g)]) &= \Phi_i([(k, b', g')]) \Rightarrow \\ (b, g_{ij}(b) \cdot g) &= (b', g_{ik}(b') \cdot g') = (b', g_{ij}(b') \cdot g_{jk}(b') \cdot g') \Rightarrow \\ b &= b' \text{ και } g = g_{jk}(b') \cdot g' \Rightarrow [(j, b, g)] &= [(k, b', g')]. \end{aligned}$$

Η Φ_i είναι επί: Πράγματι, για κάθε $(b, g) \in U_i \times G$, ισχύει ότι

$$\Phi_i([(i, b, g)]) = (b, g_{ii}(b) \cdot g) = (b, g).$$

Άρα κάθε $\pi^{-1}(U_i)$ εφοδιάζεται μέσω της Φ_i με δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας, αμφιδιαφορικής προς το $U_i \times G$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $i, j \in I$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Το $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα και της $\pi^{-1}(U_i)$ και της $\pi^{-1}(U_j)$. Για να δείξουμε ότι οι δύο διαφορετικές δομές του $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ συμπίπτουν, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times G \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times G: (b, g) \mapsto (b, g_{ji}(b) \cdot g)$$

είναι αμφιδιαφόριση, πράγμα που προφανώς ισχύει. Άρα υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη διαφορική δομή στο P έτσι ώστε η Φ_i να είναι αμφιδιαφόριση, για κάθε $i \in I$ (βλ. και σχετικό Σχόλιο 3.6.6 στο τέλος αυτής της παραγράφου).

Η διαφορισιμότητα της π εξασφαλίζεται από τη μεταθετικότητα Διαγράμματος 3.7 (σελ. 121), για κάθε $i \in I$

Απ' το άλλο μέρος, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η G δρά διαφορίσιμα επί της P . Πράγματι, η απεικόνιση

$$\delta: P \times G \longrightarrow P : [(i, b, g)], h \mapsto [(i, b, g)] \cdot h := [(i, b, gh)]$$

είναι καλά ορισμένη, επειδή

$$\begin{aligned} [(i, b, g)] = [(j, b', g')] &\Rightarrow b = b' \text{ και } g' = g_{ji}(b) \cdot g \\ &\Rightarrow [(i, b, gh)] = [(j, b', g'h)], \end{aligned}$$

για κάθε $h \in G$. Επίσης, ορίζει μία δράση (άμεση απόδειξη), και είναι διαφορίσιμη, αφού πάνω από κάθε $\pi^{-1}(U_i)$ παίρνει την αντίστοιχη μορφή

$$\delta = \Phi_i^{-1} \circ \delta_i \circ (\Phi_i \times id_G),$$

όπου $\delta_i: U_i \times G \rightarrow U_i$ η φυσιολογική δράση, δηλαδή η δ_i είναι σύνθεση διαφορίσιμων, και οδηγεί στη διαφορισιμότητα της δ .

Ακόμη, κάθε Φ_i είναι G -ισομεταβλητή:

$$\begin{aligned} \Phi_i([(j, b, g)] \cdot h) &= \Phi_i([(j, b, gh)]) = (b, g_{ij}(b) \cdot gh) \\ &= (b, g_{ij}(b) \cdot g) \cdot h = \Phi_i([(j, b, g)]) \cdot h. \end{aligned}$$

Αποδείχτηκε λοιπόν ότι η $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη με απλοποιούντα ζεύγη τα (U_i, Φ_i) , $i \in I$.

Για τις απεικονίσεις μεταφοράς G_{ji} αυτής της δέσμης διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} G_{ji}(b) &= \Phi_{jb} \circ \Phi_{ib}^{-1}(e) = p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, e) \\ &= p_2 \circ \Phi_j([(i, b, e)]) = p_2(b, g_{ji}(b) \cdot e) = g_{ji}(b), \end{aligned}$$

όπως ακριβώς ζητούσαμε.

Έστω τώρα (P', G, B, π') είναι και μία άλλη δέσμη με απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \Phi'_i)\}_{i \in I}$ και απεικονίσεις μεταφοράς τις $\{g_{ij}\}$. Τότε, για κάθε $i \in I$, ορίζουμε τη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f_i := \Phi_i^{-1} \circ \Phi'_i: \pi'^{-1}(U_i) \longrightarrow \pi^{-1}(U_i),$$

όπως στο επόμενο διαγράμμα.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi'^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\quad f_i \quad} & \pi^{-1}(U_i) \\
 & \searrow \Phi'_i & \downarrow \Phi_i \\
 & & U_i \times G
 \end{array}$$

Διάγραμμα 3.8

Παρατηρούμε ότι, αν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, τότε

$$(3.6.4) \quad f_i|_{\pi'^{-1}(U_i \cap U_j)} = f_j|_{\pi'^{-1}(U_i \cap U_j)}.$$

Πράγματι, η προηγούμενη σχέση ισοδυναμεί με την

$$(3.6.5) \quad \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}|_{(U_i \cap U_j) \times G} = \Phi'_j \circ \Phi_i'^{-1}|_{(U_i \cap U_j) \times G}.$$

Όμως, για κάθε $(b, g) \in (U_i \cap U_j) \times G$ είναι

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(b, g) = (b, g_{ji}(b) \cdot g) = \Phi'_j \circ \Phi_i'^{-1}(b, g)$$

[βλ. σχέση (3.6.2)], οπότε καταλήγουμε στις (3.6.5) και (3.6.4). Άρα ορίζεται μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f': P' \rightarrow P$, θέτοντας

$$f'|_{\pi'^{-1}(U_i)} := f_i, \quad \forall i \in I.$$

Θα δείξουμε ότι η τριάδα (f', id_G, id_B) ορίζει έναν G - B -(ισο)μορφισμό της μορφής

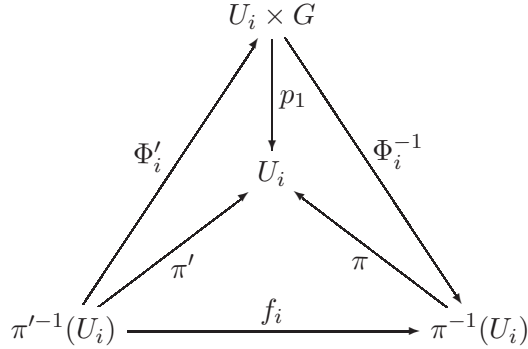
$$(P', G, B, \pi') \longrightarrow (P, G, B, \pi).$$

Για το σκοπό αυτό ελέγχουμε πρώτα ότι το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 P' & \xrightarrow{\quad f' \quad} & P \\
 & \searrow \pi' & \downarrow \pi \\
 & & B
 \end{array}$$

Διάγραμμα 3.9

είναι μεταθετικό. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της f' και τη μεταθετικότητα των δύο επάνω τριγώνων (για κάθε $i \in I$), του επομένου διαγράμματος, που συμπληρώνει το Διάγραμμα 3.9 της προηγούμενης σελίδας.



Διάγραμμα 3.10

Τέλος, για οποιαδήποτε $p' \in P'$ και $g \in G$, θα υπάρχει κάποιο $i \in I$ έτσι ώστε $\pi'(p' \cdot g) = \pi'(p') \in U_i$, οπότε η G -ισομεταβλητότητα των Φ_i και Φ'_i συνεπάγεται την

$$f(p' \cdot g) = (\Phi_i^{-1} \circ \Phi'_i)(p' \cdot g) = \Phi_i^{-1}(\Phi'_i(p') \cdot g) = f(p) \cdot g,$$

άρα η f είναι και G -ισομεταβλητή. Επομένως οι (P', G, B, π') και (P, G, B, π) είναι ισόμορφες πρωτεύουσες δέσμες, οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

3.6.5 Παράδειγμα. Η δέσμη των πλαισίων μιας πολλαπλότητας.

Θεωρούμε την διαφορική πολλαπλότητα $M \equiv (M, \mathcal{A})$ διάστασης m . Για κάθε $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} g_{ji}: U_i \cap U_j &\longrightarrow G := GL(m, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)). \end{aligned}$$

Κάθε g_{ji} είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση των $\mathcal{C}^\infty$ - απεικονίσεων $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ και φ_i . Η οικογένεια $\{g_{ji}\}_{i \in I}$ αποτελεί σύγκυκλο. Πράγματι, αν $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, τότε

$$\begin{aligned} g_{ki}(x) &= D(\varphi_k \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) \\ &= D(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) \\ &= D(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(x)) \circ D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)) \\ &= g_{kj}(x) \circ g_{ji}(x), \end{aligned}$$

όπου βέβαια η σύνθεση είναι τώρα η πράξη της ομάδας $\text{Lie } G = GL(m, \mathbb{R})$. Συνεπώς, βάσει του Θεωρήματος 3.6.4, υπάρχει μία μοναδική πρωτεύουσα δέσμη $(P, GL(m, \mathbb{R}), M, \pi)$ με απεικονίσεις μεταφοράς τις $\{g_{ji}\}_{i \in I}$. Η δέσμη αυτή λέγεται **δέσμη των πλαισίων** (frame bundle) της πολλαπλότητας M . Συνηθίζεται να θέτουμε $P = \mathcal{F}(M)$, άρα η δέσμη συμβολίζεται πλήρως ως $(\mathcal{F}(M), GL(m, \mathbb{R}), M, \pi)$.

Μία υλοποίηση της δέσμης των πλαισίων, με στοιχεία της αρχικής πολλαπλότητας M , περιγράφεται στη βασική Άσκηση 3.6.8 στο τέλος αυτής της παραγράφου.

3.6.6 Σχόλιο. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6.4 δείξαμε ότι κάθε $\pi^{-1}(U_i)$ διαθέτει δομή πολλαπλότητας και πιο κάτω ότι το $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ ως ανοιχτή υποπολλαπλότητα της $\pi^{-1}(U_i)$ έχει την ίδια δομή με αυτήν της ανοιχτής υποπολλαπλότητας της $\pi^{-1}(U_j)$. Επομένως ισχύουν οι συνθήκες του παρακάτω Λήμματος της Συγκόλλησης, οπότε το

$$P = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

εφοδιάζεται με τη δομή C^∞ -πολλαπλότητας

3.6.7 Λήμμα (της Συγκόλλησης). Έστω X τυχόν σύνολο με

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

όπου $X_i \subset X$ με τις εξής ιδιότητες:

- i) Κάθε X_i είναι C^∞ -πολλαπλότητα.
 - ii) $\forall i, j \in I$, το $X_i \cap X_j$ είναι ανοιχτό υποσύνολο των X_i και X_j .
 - iii) Η διαφορική δομή του $X_i \cap X_j$, ως ανοιχτής υποπολλαπλότητας της X_i , συμπίπτει με τη διαφορική δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας της X_j .
- Τότε το X είναι C^∞ -πολλαπλότητα και κάθε X_i είναι ανοιχτή υποπολλαπλότητα του X .

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο Παράρτημα Α', § Α.1, σελ.245, ενώ στην § Α.2, σελ.246, δίνεται και μια άλλη (ισοδύναμη) διατύπωση του ίδιου λήμματος.

3.6.8 Άσκηση. Έστω $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα. Για κάθε $x \in M$ θεωρούμε το σύνολο B_x των βάσεων του εφαπτόμενου χώρου $T_x M$ και την διακεκριμένη ένωσή τους

$$B := \bigsqcup_{x \in M} B_x.$$

Θεωρούμε τη φυσική προβολή

$$\hat{\pi}: B \longrightarrow M: \{v_1, \dots, v_m\} \longmapsto x := \pi(v_1) = \dots = \pi(v_m),$$

αν $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι βάση του $T_x M$ και $\pi: TM \rightarrow M$ η προβολή της εφαπτόμενης δέσμης. Επίσης, για κάθε χάρτη $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$, ορίζουμε το ζεύγος $(\hat{\pi}^{-1}(U_i), \hat{\Phi}_i)$, με

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_i: \hat{\pi}^{-1}(U_i) &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \times GL(m, \mathbb{R}) : \\ \{v_1, \dots, v_n\} &\longmapsto (\varphi_i(\pi(v_1)), (\lambda_{kj})), \end{aligned}$$

όπου (λ_{kj}) είναι ο αντιστρεπτός πίνακας, ο οποίος προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\bar{\varphi}_i(v_k) = \sum_{j=1}^m \lambda_{kj} e_j.$$

($\bar{\varphi}_i$ είναι ο γνωστός γραμμικό ισομορφισμός $T_x M \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$.)

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς και υποθέσεις, να αποδειχθούν τα επόμενα :

- i) Κάθε ζεύγος $(\hat{\pi}^{-1}(U_i), \hat{\Phi}_i)$ είναι χάρτης του B .
- ii) Αν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, οι χάρτες $(\hat{\pi}^{-1}(U_i), \hat{\Phi}_i)$ και $(\hat{\pi}^{-1}(U_j), \hat{\Phi}_j)$ είναι διαφορίσιμα συμβιβαστοί.
- iii) Αν $\mathcal{B}$ είναι ο μέγιστος άτλαντας που αντιστοιχεί στο B , τότε η απεικόνιση $\hat{\pi}: (B, \mathcal{B}) \rightarrow (M, \mathcal{A})$ είναι C^∞ .
- iv) Η ομάδα Lie $GL(m, \mathbb{R})$ δρα διαφορίσιμα επί του B .
- v) Η τετράδα $(B, GL(m, \mathbb{R}), M, \hat{\pi})$ είναι πρωτεύουσα δέσμη με απλοποιούσα κάλυψη την

$$\{(\hat{\pi}^{-1}(U_i), (\varphi_i^{-1} \times id_{GL(m, \mathbb{R})}) \circ \hat{\Phi}_i) \mid (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}\}.$$

- vi) Οι απεικονίσεις μεταφοράς $\{G_{ji}\}_{i \in I}$ της προηγούμενης δέσμης ορίζονται ως εξής:

$$G_{ji}: U_i \cap U_j \longrightarrow GL(m, \mathbb{R}) : x \mapsto D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x)).$$

Συγκρίνετε τις $\{G_{ji}\}$ με τις $\{g_{ji}\}$ του Παραδείγματος 3.6.5 και διατυπώστε το συμπέρασμα που προκύπτει από τη σύγκριση αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4

Συνοχές σε Πρωτεύουσες Δέσμες

To the uninitiated, it would seem that the use of fiber bundles and connections to describe the basic forces of nature is a half-baked scheme devised by some clique of mathematicians bent on producing an application for their work. However, physicists themselves found these notions forced upon them by their own perception of nature.

D. BLEECKER [8, p. xiii]

Το κεφάλαιο αυτό, όπως δηλώνει και ο τίτλος του, είναι αφιερωμένο στις συνοχές σε πρωτεύουσες δέσμες. Οι συνοχές αυτές οφείλονται στον Ch. Ehresmann και αποτελούν γενίκευση της έννοιας της (γραμμικής) συνοχής σε μία διαφορετική πολλαπλότητα ή, γενικότερα, σε μία διανυσματική δέσμη. Η τελευταία περίπτω-

ση εξετάζεται στο Κεφάλαιο 6. Οι συνοχές σε πρωτεύουσες δέσμες είναι θεμελιώδεις για τη μελέτη της Θεωρίας Βαθμίδος (Gauge Theory), η οποία —από την άποψη της Φυσικής— οδηγεί στη Θεωρία Yang-Mills, με στόχο τη Θεωρία του Ενοποιημένου Πεδίου. Εδώ περιοριζόμαστε στις βασικές ιδιότητες της συνοχής, σε μερικούς ισοδύναμους ορισμούς και την έννοια της παράλληλης μετατόπισης. Άλλα σημαντικά θέματα, όπως η μορφή καμπυλότητας, η σύνδεση γραμμικών συνοχών και συνοχών σε πρωτεύουσες δέσμες, το Θεώρημα της Ολονομίας και η Θεωρία Chern-Weil θα συμπληρωθούν σε μελλοντικό στάδιο.

4.1 Προκαταρκτικά

4.1.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ μία πρωτεύουσα δέσμη. Για ένα σταθερό $g \in G$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$R_g: P \longrightarrow P : p \mapsto R_g(p) := p \cdot g \equiv pg.$$

Η R_g καλείται **δεξιά μεταφορά** ή **μετατόπιση** (right translation) της P (κατά $g \in G$).

Η R_g είναι αμφιδιαφόριση. Πράγματι, αν δ είναι η (δεξιά) δράση της G επί της P , η R_g είναι ακριβώς η μερική απεικόνιση δ_g , η οποία είναι 1-1, επί και C^∞ . Ελέγχουμε αμέσως ότι η αντίστροφη της R_g είναι η $R_{g^{-1}}$, που είναι επίσης C^∞ -απεικόνιση.

4.1.2 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη και $p \in P$ ένα σταθερό σημείο. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$(4.1.1) \quad \bar{p}: G \longrightarrow \pi^{-1}(b) : g \mapsto \bar{p}(g) := pg = p \cdot g,$$

όπου $b := \pi(p)$.

Επειδή $\bar{p} = \delta_p$, διαπιστώνουμε ότι η προηγούμενη απεικόνιση είναι 1-1, επί (άρα έχει αντίστροφη) και διαφορίσιμη. Για την διαφορισμότητα της αντίστροφης αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η $\bar{p}^{-1}$ δίνεται από τη σχέση $\bar{p}^{-1}(q) = k(p, q)$, για κάθε $q \in \pi^{-1}(b)$, αφού $q = p \cdot k(p, q)$. Συνεπώς η διαφορισμότητα της $\bar{p}^{-1}$ είναι συνέπεια της διαφορισμότητας της k (βλ. Λήμμα 3.3.5).

4.1.3 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη και $X \in \mathcal{L}(G)$ ένα δεδομένο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο του G . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$(4.1.2) \quad X^*: P \longrightarrow TP : p \mapsto X^*(p) := T_e \bar{p}(X_e).$$

Το X^* καλείται **πεδίο Killing** ή **θεμελιώδες διανυσματικό πεδίο** (fundamental or Killing vector field) του P , που αντιστοιχεί στο X μέσω της δράσης δ .

Σχετικά με την προηγούμενη ορολογία, παραπέμπουμε και στο εδάφιο που προηγείται της Παρατήρησης 3.1.7 καθώς και τα παρακάτω σχόλια.

Το X^* είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της P : Πρώτα βλέπουμε ότι, για κάθε $p \in P$ με $\pi(p) = b$, είναι

$$T_e \bar{p}(X_e) \in T_{\bar{p}(e)}(\pi^{-1}(b)) = T_p(\pi^{-1}(b)) \leq T_p P,$$

δηλαδή το X^* είναι διανυσματικό πεδίο του P .

Για τη διαφορισιμότητα του X^* παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} X^*(p) &= T_e \bar{p}(X_e) = T_e \delta_p(X_e) + T_p \delta_e(O_p) \\ &= T_{(p,e)} \delta(O_p, X_e) = T \delta \circ (\Omega, c)(p), \end{aligned}$$

όπου

$$\Omega: P \rightarrow TP : p \mapsto O_p$$

είναι το μηδενικό διανυσματικό πεδίο του P και c η σταθερή απεικόνιση

$$c: P \longrightarrow T_e G : p \mapsto X_e.$$

Άρα το X^* είναι $\mathcal{C}^\infty$ ως σύνθεση $\mathcal{C}^\infty$ -απεικονίσεων.

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathfrak{X}(P) : X \mapsto X^*$$

είναι μονομορφισμός αλγεβρών Lie.

Πριν προχωρήσουμε, να υπενθυμίσουμε ότι η άλγεβρα Lie $\mathcal{L}(G)$ των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων μιας ομάδας Lie G ταυτίζεται με τον εφαπτόμενο χώρο $T_e G$ (e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας) μέσω του γραμμικού ισομορφισμού

$$\mathcal{L}(G) \ni X \xrightarrow{\simeq} X_e \in T_e G.$$

Η προηγούμενη ισομορφία εφοδιάζει τον $T_e G$ με τη δομή άλγεβρας Lie (οπότε και ο παραπάνω ισομορφισμός είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie). Την τελευταία άλγεβρα Lie συμβολίζουμε με $\mathcal{G}$. Επομένως έχουμε τις ταυτίσεις (μέσω ισομορφισμών)

$$(4.1.3) \quad \mathcal{L}(G) \equiv T_e G \equiv \mathcal{G}.$$

Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη. Επειδή η π είναι εμβάπτιση, για κάθε $b \in B$ το αντίστοιχο νήμα $\pi^{-1}(b)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα της P και (βλ. Θεώρημα 1.3.10 και Πρόρισμα 1.3.11)

$$T_p(\pi^{-1}(b)) = \ker(T_p \pi), \quad \forall p \in \pi^{-1}(b).$$

4.1.4 Ορισμός. Ο χώρος $T_p(\pi^{-1}(b))$ καλείται **κάθετος υπόχωρος** (vertical subspace) του T_pP και συμβολίζεται ιδιαιτέρως με V_pP . Άρα

$$V_pP := T_p(\pi^{-1}(b)) = \ker(T_p\pi).$$

Από τους Ορισμούς 4.1.3 και 4.1.4, για κάθε $X \in \mathcal{L}(G)$ και για κάθε $p \in P$, το $X^*(p)$ είναι **κάθετο διάνυσμα** (vertical vector), δηλαδή

$$X^*(p) \in V_pP.$$

Επίσης, προκύπτει και ο γραμμικός ισομορφισμός

$$T_e\bar{p}: T_eG \xrightarrow{\cong} V_pP.$$

4.1.5 Ορισμός. Έστω G ομάδα Lie. Για ένα $g \in G$ ορίζουμε τον αντίστοιχο **εσωτερικό αυτομορφισμό του G** (inner automorphism)

$$I_g: G \longrightarrow G : a \mapsto I_g(a) := gag^{-1}.$$

Επειδή, όπως διαπιστώνουμε αμέσως,

$$I_g = r_{g^{-1}} \circ \ell_g = \ell_g \circ r_{g^{-1}},$$

όπου r_g και ℓ_g είναι αντιστοίχως η δεξιά και αριστερή μετατόπιση (μεταφορά) της ομάδας G κατά g , δηλαδή

$$r_g: G \longrightarrow G : a \mapsto ag, \quad \ell_g: G \longrightarrow G : a \mapsto ga,$$

έχουμε ότι η I_g είναι αμφιδιαφόριση.

Ορίζουμε επίσης την απεικόνιση.

$$Ad(g) := T_e I_g: T_eG \longrightarrow T_eG.$$

Προφανώς η $Ad(g)$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, οπότε ορίζεται και η απεικόνιση

$$Ad: G \longrightarrow Aut(T_eG) \equiv Aut(\mathcal{G}): g \mapsto Ad(g).$$

Η Ad λέγεται **συζυγής παράσταση της G** (adjoint representation) και είναι μορφισμός ομάδων Lie. Ιδιαίτέρως, αν $n = \dim G$, τότε $Aut(T_eG) \cong GL(n, \mathbb{R})$.

Υπενθυμίζοντας την ταύτιση (4.1.3) έχουμε τώρα και τις επόμενες χρήσιμες έννοιες.

4.1.6 Ορισμός. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και G ομάδα Lie με άλγεβρα Lie $\mathcal{G}$. Μια **διαφορική 1-μορφή επί της M με τιμές στη $\mathcal{G}$** ($\mathcal{G}$ -valued 1-form) είναι μια τομή της δέσμης των γραμμικών απεικονίσεων $L(TM, \mathcal{G})$ από την δέσμη TM στην τετριμμένη δέσμη $M \times \mathcal{G}$. Δηλαδή

$$\omega: M \longrightarrow L(TM, \mathcal{G}) \quad \text{με} \quad \bar{\pi} \circ \omega = id_X,$$

αν $\bar{\pi}$ είναι η προβολή της $L(TM, \mathcal{G})$. Αναλυτικότερα, για κάθε $x \in M$, $\omega(x) := \omega_x$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $\omega_x: T_x M \rightarrow \mathcal{G}$.

Προφανώς, η δέσμη $L(TM, \mathcal{G})$ αποτελεί γενίκευση του Παραδείγματος (κατασκευής της δέσμης γραμμικών μορφών) 2.3.1 για $E = TM$, ή ειδικότερη περίπτωση της κατασκευής 2.3.4, για $E_1 = TM$ και $E_2 = M \times \mathcal{G}$.

Γενικότερα, μια **διαφορική k -μορφή επί της M με τιμές στην $\mathcal{G}$** ($\mathcal{G}$ -valued k -form) ($k \in \mathbb{N}$) είναι μια τομή της δέσμης των k -γραμμικών απεικονίσεων από την δέσμη TM στη δέσμη $M \times \mathcal{G}$ (βλ. την ανάλογη κατασκευή στο Παράδειγμα 2.3.2), έτσι ώστε κάθε

$$\omega_x: T_x M \times \cdots \times T_x M \longrightarrow \mathcal{G}$$

να είναι *αντισυμμετρική k -γραμμική απεικόνιση*. Συμβολικά γράφουμε ότι $\omega \in \Lambda^k(M, \mathcal{G})$.

Αποδεικνύεται ότι μια $\omega \in \Lambda^k(M, \mathcal{G})$ είναι C^∞ τότε και μόνον τότε αν, για κάθε $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, η

$$(4.1.4) \quad \omega(X_1, \dots, X_k): M \longrightarrow \mathcal{G}: x \mapsto \omega_x(X_1(x), \dots, X_k(x))$$

είναι C^∞ -απεικόνιση.

4.1.7 Ορισμός. Θεωρούμε δύο διαφορικές 1-μορφές α, β επί της πολλαπλότητας M με τιμές στην άλγεβρα Lie $\mathcal{G}$ μιας ομάδας Lie G , δηλαδή $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M, \mathcal{G})$. Ονομάζουμε **εξωτερικό γινόμενο** (exterior or wedge product) των α, β τη διαφορική 2-μορφή $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2(M, \mathcal{G})$, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$(4.1.5) \quad (\alpha \wedge \beta)_x(u, v) := [\alpha_x(u), \beta_x(v)] - [\alpha_x(v), \beta_x(u)],$$

για κάθε $u, v \in T_x M$.

Επίσης, αν $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathcal{G})$, το **εξωτερικό διαφορικό** (exterior differential) της α είναι η διαφορική 2-μορφή $d\alpha \in \Lambda^2(M, \mathcal{G})$, που ορίζεται από τη σχέση

$$(4.1.6) \quad (d\alpha)(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]),$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Αποδεικνύεται ότι η $d\alpha$ είναι καλά ορισμένη διαφορική 2-μορφή, γιατί η τιμή της σε ένα σημείο $x \in M$, δηλαδή η διγραμμική αντισυμμετρική απεικόνιση $(d\alpha)_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathcal{G}$ εξαρτάται μόνο από την τιμή των X, Y στο x , δηλαδή από τα διανύσματα X_x και Y_x .

Για την πληρότητα, ας θυμήσουμε εδώ τι σημαίνει μια έκφραση της μορφής $X(\alpha(Y))$. Σύμφωνα με την (4.1.4) και τον ορισμό μιας συνάρτησης της μορφής $X(f)$, η παραπάνω έκφραση αποτελεί μια διαφορίσιμη απεικόνιση από την M στην $\mathcal{G}$, με

$$X(\alpha(Y))(x) = X_x(\alpha(Y)(x)) = X_x(\alpha_x(Y_x)),$$

για κάθε $x \in M$.

4.1.8 Ορισμός. Έστω $f: M \rightarrow N$ μία C^∞ -απεικόνιση και μια διαφορική 1-μορφή $\omega \in \Lambda^1(N, \mathcal{G})$. Ονομάζουμε **αντίστροφη εικόνα** (pull-back, image inverse) της ω μέσω της f τη διαφορική 1-μορφή $f^* \in \Lambda^1(M, \mathcal{G})$, που δίνεται από την σχέση

$$(f^*\omega)_x(u) := \omega_{f(x)}(T_x f(u)),$$

για κάθε $x \in M$ και $u \in T_x M$. Ανάλογα ισχύουν και για k -μορφές.

Η διαφορισιμότητα της $f^*\omega$ διαπιστώνεται ως εξής: Για τυχόν διανυσματικό πεδίο $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ και τυχόν $y \in N$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ((f^*\omega)(\eta))(y) &= (f^*\omega)_y(\eta(y)) = \omega_{f(y)}(T_y f(\eta(y))) \\ &= (\omega \circ f)(T_y f(\eta(y))) = (\omega \circ f)(y)(Tf(\eta(y))) \\ &= ev \circ (\omega \circ f, Tf \circ \eta)(y), \end{aligned}$$

δηλ. $(f^*\omega)(\eta) = ev \circ (\omega \circ f, Tf \circ \eta)$, που είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, επειδή η απεικόνιση εκτίμησης $ev: L(TM, \mathcal{G}) \times TM \rightarrow \mathcal{G}$ είναι διαφορίσιμη. Η τελευταία ιδιότητα προκύπτει από τη γενική κατασκευή της δέσμης 2.3.4.

4.2 Συνοχές

4.2.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη. Μια **συνοχή** (connection) είναι μία C^∞ -διαφορική 1-μορφή επί της P με τιμές στην άλγεβρα Lie $\mathcal{G} \equiv \mathcal{L}(G)$ της ομάδας Lie G , δηλαδή $\omega \in \Lambda^1(P, \mathcal{G})$, η οποία ικανοποιεί και τις επόμενες δύο συνθήκες:

$$(\omega.1) \quad \omega(X^*) = X, \quad \forall X \in \mathcal{L}(G),$$

$$(\omega.2) \quad R_g^* \omega = Ad(g^{-1})\omega, \quad \forall g \in G.$$

Η πρώτη σχέση σημαίνει ότι

$$\omega_p(X_p^*) = X = (\text{σταθερά}), \quad \forall p \in P,$$

ένώ η δεύτερη δίνει ότι

$$(R_g^* \omega)_p(u) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_p(u)), \quad \forall p \in P, \quad g \in G, \quad u \in T_p P$$

Η ω λέγεται επίσης και **μορφή συνοχής** (connection form). Ο λόγος της διπλής (ισοδύναμης) ορολογίας θα εξηγηθεί πιο κάτω (βλ. Παρατήρηση 4.2.8).

Στη συνέχεια θα θεωρούμε μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$, την οποία θα συμβολίζουμε (για ευκολία και εφ' όσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης) απλώς με ℓ .

4.2.2 Ορισμός. Έστω ω μια συνοχή επί της ℓ . Για κάθε $p \in P$ ονομάζουμε **οριζόντιο υπόχωρο** (horizontal subspace) του $T_p P$ τον

$$H_p P := \ker \omega_p \leq T_p P.$$

4.2.3 Πρόταση. Έστω ℓ πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με συνοχή ω . Τότε για κάθε $p \in P$, ισχύει η σχέση

$$T_p P = H_p P \oplus V_p P$$

Απόδειξη. Οι $H_p P$ και $V_p P$ είναι εξ ορισμού υπόχωροι του $T_p P$. Έστω τώρα ότι υπάρχει $u \in H_p P \cap V_p P$. Τότε

$$\omega_p(u) = 0 \quad \text{και} \quad u \in V_p = \ker T_p \pi = T_p(\pi^{-1}(b))$$

(βλ. Ορισμό 4.1.4). Εξ άλλου, αφού η απεικόνιση $\bar{p}: G \rightarrow \pi^{-1}(b)$ είναι αμφιδιαφόριση (βλ. Ορισμό 4.1.2 και τα σχόλιά του), το αντίστοιχο διαφορικό $T_e \bar{p}: T_e G \rightarrow T_p(\pi^{-1}(b))$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, άρα

$$\exists! v \in T_e G \equiv \mathcal{G} \quad \text{με} \quad T_e \bar{p}(v) = u.$$

Αν $X \in \mathcal{L}(G)$ είναι το μονοσήμαντα ορισμένο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της G με $X_e = v$, τότε,

$$\omega_p(X_p^*) = \omega_p(T_e \bar{p}(v)) = \omega_p(u) = 0,$$

επομένως, λόγω της (ω. 1),

$$0 = \omega_p(X_p^*) = \omega(X^*)(p) = X_e = v, \quad \text{άρα} \quad u = T_e \bar{p}(v) = 0,$$

που σημαίνει ότι $H_p P \cap V_p P = \{0\}$.

Ας πάρουμε τώρα τυχόν $u \in T_p P$ και ας θέσουμε $\omega_p(u) = X \in \mathcal{L}(G) \equiv \mathcal{G}$. Λόγω της (ω. 1), θα έχουμε ότι

$$\omega_p(X_p^*) = X = \omega_p(u),$$

απ' όπου $\omega_p(u - X_p^*) = 0$, άρα $u - X_p^* \in \ker \omega_p = H_p P$. Όμως $X_p^* \in V_p P$ (βλ. τα σχόλια μετά τον Ορισμό 4.1.4). Άρα η ισότητα

$$u = X_p^* + (u - X_p^*)$$

δίνει τη ζητούμενη ανάλυση του u , οπότε $T_p P \subseteq H_p P \oplus V_p P$, με την οποίαν κλείνει η απόδειξη. $\square$

4.2.4 Πρόρισμα. Με τις υποθέσεις της Πρότασης 4.2.3, κάθε $u \in TP$ δέχεται μια μονοσήμαντα ορισμένη ανάλυση

$$u = u^h + u^v,$$

όπου $u^h \in H_p P$ και $u^v \in V_p P$ είναι αντιστοίχως η οριζόντια και κάθετη συνιστώσα του u . Ανάλογα, κάθε διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}(P)$ έχει τη μονοσήμαντα ορισμένη ανάλυση

$$\xi = \xi^h + \xi^v,$$

όπου ξ^h, ξ^v είναι τα διανυσματικά πεδία του P με $\xi^h(p) = \xi_p^h \in H_p P$ και $\xi^v(p) = \xi_p^v \in V_p P$, για κάθε $p \in P$.

Στην Πρόταση 4.2.7 θα δείξουμε ότι τα ξ^h, ξ^v είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία.

4.2.5 Πρόρισμα. Με τις ίδιες υποθέσεις όπως προηγουμένως, η απεικόνιση

$$T_p \pi|_{H_p P}: H_p P \longrightarrow T_b B$$

είναι ισομορφισμός, για κάθε $b \in B$ και $p \in \pi^{-1}(b)$.

Απόδειξη. Αν $u, u' \in H_p P$ είναι διανύσματα με $T_p \pi(u) = T_p \pi(u')$, τότε $T_p \pi(u - u') = 0$, άρα $u - u' \in \ker T_p \pi = V_p P$. Όμως και $u - u' \in H_p P$. Συνεπώς $u - u' = 0$, απ' όπου προκύπτει ότι η απεικόνιση του πορίσματος είναι 1-1.

Για το επί της ίδιας απεικόνισης θεωρούμε μία τομή $s: U \subset B \rightarrow P$ με $s(b) = p$ (υπάρχει πάντοτε τέτοια σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.4), οπότε ορίζεται και το διαφορικό-της

$$T_b s: T_b U \equiv T_b B \longrightarrow T_p (\pi^{-1}(U)) \equiv T_p P.$$

Για τυχόν $w \in T_b B$ θέτουμε $u := T_b s(w) \in T_p P$. Επειδή $u = u^h + u^v$, για το $u^h \in H_p P$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_p \pi(u^h) &= T_p \pi(u^h + u^v) = T_p \pi(u) \\ &= T_p \pi(T_b s(w)) = T_b(\pi \circ s)(w) = w. \end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι, για τυχόν $w \in T_b B$, υπάρχει $u^h \in H_p P$, με $T_p \pi(u^h) = w$, που αποδεικνύει το ζητούμενο επί και κλείνει την απόδειξη. $\square$

4.2.6 Πρόταση. Οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους οριζόντιους υποχώρους της συνοχής ω , δηλαδή

$$T_p R_g(H_p P) = H_{pg} P,$$

για κάθε $p \in P$ και $g \in G$.

Απόδειξη. Έστω $u \in H_p P$, οπότε $\omega_p(u) = 0$. Για να δείξουμε ότι $T_p R_g(u) \in H_{pg} P$, αρκεί να δείξουμε ότι $\omega_{pg}(T_p R_g(u)) = 0$. Πράγματι [βλ. και (ω. 2)],

$$\omega_{pg}(T_p R_g(u)) = (R_g^* \omega)_p(u) = Ad(g^{-1})(\omega_p(u)) = Ad(g^{-1})(0) = 0,$$

από την οποίαν προκύπτει η

$$(4.2.1) \quad T_p R_g(H_p P) \subset H_{pg} P.$$

Βάσει της τελευταίας έχουμε και την ανάλογη $T_{pg} R_{g^{-1}}(H_{pg} P) \subset H_p P$, που ισοδυναμεί με την

$$(4.2.2) \quad H_{pg} P \subset (T_{pg} R_{g^{-1}})^{-1}(H_p P) = T_p R_g(H_p P).$$

Οι σχέσεις (4.2.1) και (4.2.2) αποδεικνύουν την πρόταση. $\square$

4.2.7 Πρόταση. Έστω ℓ πρωτεύουσα δέσμη με συνοχή ω και $\xi: P \rightarrow TP$ διανυσματικό πεδίο του P . Τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\xi \in \mathfrak{X}(P) \Leftrightarrow \xi^h \in \mathfrak{X}(P) \text{ και } \xi^v \in \mathfrak{X}(P).$$

Δηλαδή το ξ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο τότε και μόνον τότε τα ξ^h και ξ^v είναι διαφορίσιμα.

Απόδειξη. Προφανώς (Πόρισμα 4.2.4), αν $\xi^h, \xi^v \in \mathfrak{X}(P)$, τότε και $\xi \in \mathfrak{X}(P)$.

Το αντίστροφο απαιτεί περισσότερη ανάλυση. Ξεκινάμε με τη διαφορισμότητα του ξ^v . Εφ' όσον, για δοσμένο $p \in P$, $\xi_p^v = \xi^v(p) \in V_p P$, θα υπάρχει $X \in \mathcal{G}$

έτσι ώστε $\xi_p^v = T_e \bar{p}(X) = X_p^*$. [Προσοχή: Αν θεωρήσουμε ένα άλλο σημείο $q \neq p$, τότε για το ξ_q^v θα υπάρχει κάποιο $\mathcal{G} \ni Y \neq X$, ώστε $\xi_q^v = Y_q^*$]. Επειδή

$$\omega_p(\xi_p) = \omega_p(\xi_p^h) + \omega_p(\xi_p^v) = \omega(\xi_p^v) = \omega_p(X_p^*) = X,$$

προκύπτει ότι $X_e \equiv X = \omega(\xi)(p)$, οπότε

$$\begin{aligned} \xi_p^v &= T_e \bar{p}(X_e) = T_e \bar{p}(\omega(\xi)(p)) \\ \text{[τύπος Leibniz]} \quad &= T_e \delta_p(\omega(\xi)(p)) = T_{(p,e)} \delta(0_p, \omega(\xi)(p)) \\ &= T \delta \circ (\Omega, \omega(\xi))(p), \end{aligned}$$

δηλαδή $\xi^v = T \delta \circ (\Omega, \omega(\xi))$, που αποδεικνύει τη διαφορισμότητα του ξ^v . Θυμίζουμε ότι δ είναι η δράση του G επί του P και $\Omega: P \rightarrow TP$ το μηδενικό διανυσματικό πεδίο.

Η διαφορισμότητα του ξ^h προκύπτει αμέσως από τη σχέση $\xi - \xi^v$. $\square$

Συμπληρωματικά μπορούμε να βρούμε και μιαν άλλη έκφραση του ξ^v που εμφανίζεται σε πολλά βιβλία, η οποία ισχύει αν η G είναι ομάδα Lie πεπερασμένης διάστασης. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μία βάση $X_1, \dots, X_k$ της $\mathcal{G}$ (η οποία υπάρχει πάντοτε αφού η ομάδα G είναι παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα), όπου $k = \dim(G)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\omega(\xi)(p) = \sum_{i=1}^k \omega^i(\xi)(p) \cdot X_i, \quad \omega^i(\xi)(p) \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς, οι συντελεστές ορίζουν διαφορικές μορφές $\omega^i \in \Lambda^1(P, \mathbb{R})$. Επομένως, βασει και της (4.1.4),

$$\begin{aligned} \xi_p^v &= T_e \bar{p}(\omega(\xi)(p)) = T_e \bar{p} \left(\sum_{i=1}^k \omega^i(\xi)(p) \cdot X_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \omega^i(\xi)(p) \cdot T_e \bar{p}(X_i) = \sum_{i=1}^k \omega^i(\xi)(p) \cdot X_i^*(p), \end{aligned}$$

απ' όπου και η ζητούμενη διαφορισμότητα.

4.2.8 Παρατήρηση. Είδαμε στα προηγούμενα ότι, όταν μια πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ εφοδιάζεται με μια συνοχή ω , τότε κάθε εφαιπόμενος χώρος $T_p P$ διασπάται σε ένα ευθύ άθροισμα υποχώρων $H_p P \oplus V_p P$ (Πρόταση 4.2.3), έτσι ώστε οι οριζόντιοι υπόχωροι να διατηρούνται από τις δεξιές μετατοπίσεις (ακριβέστερα, από τα διαφορικά των μετατοπίσεων), όπως στην Πρόταση 4.2.6, και

η αντίστοιχη διάσπαση των διανυσματικών πεδίων να δίνει διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία (Πρόταση 4.2.7).

Πιο κάτω (βλ. Πρόταση 4.2.10) θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο: Αν υπάρχει μια απεικόνιση (διανομή – distribution), που σε κάθε $p \in P$ αντιστοιχεί έναν (οριζόντιο) υπόχωρο $H_p P$ του $T_p P$, έτσι ώστε να ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, δηλαδή $T_p P = H_p P \oplus V_p P$, οι συνιστώσες X^h, X^v κάθε διανυσματικού πεδίου $X \in \mathfrak{X}(P)$ να είναι διαφορίσιμες, και οι χώροι $H_p P$ να παραμένουν αναλλοίωτοι από τα διαφορικά των R_g , τότε υπάρχει μορφή συνοχής ω για την οποία ισχύει ότι

$$\ker \omega_p = H_p P, \quad \forall p \in P.$$

Ακριβώς μια τέτοια διανομή οριζοντίων χώρων καλείται **συνοχή**, ενώ η αντίστοιχη ω καλείται **μορφή συνοχής**. Λόγω όμως της αμφίδρομης διαδικασίας που περιγράψαμε, δεν κάνουμε διάκριση ανάμεσα στις συνοχές και τις αντίστοιχες μορφές τους και χρησιμοποιούμε αδιακρίτως και τους δύο όρους.

Ανάλογα προς την Πρόταση 4.2.6 έχουμε και την διατήρηση των καθέτων υποχώρων, μέσω των δεξιών μετατοπίσεων. Όμως εδώ δεν χρειάζεται η ύπαρξη συνοχής, αφού οι κάθετοι υπόχωροι ορίζονται ανεξάρτητα απ' αυτήν. Ακριβέστερα έχουμε την

4.2.9 Πρόταση. Σε οποιαδήποτε πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$, οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους κάθετους υποχώρους, δηλαδή

$$T_p R_g(V_p P) = V_{pg} P, \quad \forall p \in P, g \in G.$$

Απόδειξη. Έστω $u \in V_p P$. Επειδή, για κάθε $p \in P$, είναι $(\pi \circ R_g)(p) = \pi(pg) = \pi(p)$, δηλαδή $\pi \circ R_g = \pi$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_p R_g(u) \in V_{pg} P &\Leftrightarrow T_{pg} \pi(T_p R_g(u)) = 0 \\ &\Leftrightarrow T_p(\pi \circ R_g)(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow T_p \pi(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow u \in V_p P, \end{aligned}$$

βάσει της οποίας $T_p R_g(V_p P) \subset V_{pg} P$. Ανάλογα,

$$T_{pg} R_g^{-1}(V_{pg} P) = T_{pg} R_{g^{-1}}(V_{pg} P) \subset V_p P,$$

απ' όπου και $V_{pg} P \subset T_p R_g(V_p P)$, με την οποία κλείνει η απόδειξη. $\square$

4.2.10 Πρόταση. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη και $\{H_p P\}_{p \in P}$ μια οικογένεια υποχώρων των $T_p P$ με τις ιδιότητες:

$$i) T_p P = H_p P \oplus V_p P, \quad \forall p \in P.$$

ii) Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(P)$, οι μονοσήμαντα ορισμένες συνιστώσες-του ξ^v και ξ^h , που προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\xi = \xi^v + \xi^h \quad \text{και} \quad \xi_p^v = \xi^v(p) \in V_p P, \quad \xi_p^h = \xi^h(p) \in H_p P, \quad \forall p \in P,$$

ορίζουν διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία.

iii) Οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους υποχώρους $H_p P$.

Τότε υπάρχει μοναδική συνοχή ω , τέτοια ώστε $H_p P = \ker \omega_p$, για κάθε $p \in P$.

Απόδειξη. Έστω $p \in P$ και $u \in T_p P$. Αν ω είναι η ζητούμενη συνοχή, τότε θα πρέπει να είναι

$$\omega_p(u) = X_e \in T_e G,$$

για κάποιο διάνυσμα $X_e \in T_e G$. Όμως το X_e αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό $X \in \mathcal{L}(G)$ και αυτό με τη σειρά του ορίζει ένα (θεμελιώδες) πεδίο Killing $X^* \in \mathfrak{X}(P)$. Επομένως,

$$\omega_p(X_p^*) = X_e = \omega_p(u),$$

οπότε

$$u - X_p^* \in \ker \omega_p = H_p P \quad \text{ενώ} \quad X_p^* \in V_p P,$$

άρα

$$u - X_p^* = u^h \quad \text{και} \quad X_p^* = u^v.$$

Αλλά η διάσπαση $u = u^h + u^v$ είναι γνωστή, αφού είναι γνωστοί οι υπόχωροι $V_p P$, $H_p P$. Άρα είναι γνωστό το $u^v = X_p^*$. Για να προσδιορίσουμε το $X_e \equiv X$ [που ορίζει και την $\omega_p(u)$], αρκεί να θεωρήσουμε την

$$u^v = X_p^* = T_e \bar{p}(X_e),$$

από την οποία έχουμε ότι

$$\omega_p(u) = X_e = (T_e \bar{p})^{-1}(u^v).$$

Βάσει της αμφιδιαφορισιμότητας της $\bar{p}: G \rightarrow \pi^{-1}(b)$ (βλ. Ορισμό 4.1.2) και του Λήμματος 3.3.5, διαπιστώνουμε ότι, για οποιοδήποτε $q \in \pi^{-1}(b)$,

$$\begin{aligned} \bar{p}^{-1}(q) = g &\Leftrightarrow \bar{p}(g) = q \Leftrightarrow pg = q \\ &\Leftrightarrow k(p, q) = g \Leftrightarrow k_p(q) = g, \end{aligned}$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$\bar{p}^{-1} = k_p \quad \text{και} \quad (T_e \bar{p})^{-1} = T_p \bar{p}^{-1} = T_p k_p.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο ότι η ζητούμενη ω δίνεται από τη σχέση

$$(4.2.3) \quad \boxed{\omega_p(u) = T_p k_p(u^v) = T_p \bar{p}^{-1}(u^v), \quad \forall u \in T_p P.}$$

Είναι προφανές ότι κάθε $\omega_p: T_p P \rightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Για τη διαφορισμότητα της ω θεωρούμε τυχόν $\xi \in \mathfrak{X}(P)$ και βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \omega(\xi)(p) &= \omega_p(\xi_p) = T_p k_p(\xi_p^v) \\ &= T_p k_p(\xi_p^v) + T_p k_p(0_p) \\ [\text{τύπος Leibniz}] \quad &= T_{(p,p)} k(0_p, \xi_p^v) = T k \circ (\Omega, \xi^v)(p), \end{aligned}$$

δηλαδή $\omega(\xi) = T k \circ (\Omega, \xi^v)$, που αποδεικνύει τη διαφορισμότητα της $\omega(\xi)$, άρα και της ω .

Απόδειξη της **(ω. 1)**: Έστω τυχόν $X \in \mathcal{L}(G)$ και $X^* \in \mathfrak{X}(P)$ το αντίστοιχο πεδίο Killing. Τότε

$$\omega_p(X_p^*) = (T_e \bar{p})^{-1}(T_e \bar{p}(X_e)) = X_e \equiv X.$$

Απόδειξη της **(ω. 2)**: Για τυχόντα $p \in P$, $u \in T_p P$ και $g \in G$, οι Προτάσεις 4.2.6 και 4.2.9, καθώς και η σχέση (4.2.3), συνεπάγονται ότι

$$\begin{aligned} (R_g^* \omega)_p(u) &= \omega_{R_g(p)}(T_p R_g(u^v + u^h)) \\ &= \omega_{pg}(T_p R_g(u^v)) + \omega_{pg}(T_p R_g(u^h)) \\ &= \omega_{pg}(T_p R_g(u^v)) + 0 \\ &= T_{pg} k_{pg}(T_p R_g(u^v)) \\ &= T_p (k_{pg} \circ R_g)(u^v). \end{aligned}$$

Αλλά, για κάθε $q \in P$,

$$\begin{aligned} (k_{pg} \circ R_g)(q) &= k(pg, qg) = g' \\ &\Leftrightarrow pgg' = qg \Leftrightarrow pgg'g^{-1} = q \\ &\Leftrightarrow p \cdot I_g(g') = q \Leftrightarrow k(p, q) = I_g(g') \\ &\Leftrightarrow (I_g^{-1} \circ k)(p, q) = g' \\ &\Leftrightarrow (I_{g^{-1}} \circ k_p)(q) = g' = (k_{pg} \circ R_g)(q), \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην

$$k_{pg} \circ R_g = I_{g^{-1}} \circ k_p,$$

μέσω της οποίας βρίσκουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} (R_g^* \omega)_p(u) &= T_p(I_{g^{-1}} \circ k_p)(u^v) \\ &= (T_{k_p(p)} I_{g^{-1}} \circ T_p k_p)(u^v) \\ &= T_e I_{g^{-1}}(T_p k_p(u^v)) \\ &= Ad(g^{-1})(\omega_p(u)). \end{aligned}$$

Η ισότητα $H_p P = \ker \omega_p$ είναι άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού της ω_p . Τέλος το μονοσήμαντο της ω αποδεικνύεται ως εξής: Έστω ότι υπάρχει και μία άλλη συνοχή θ με τις ίδιες ιδιότητες. Τότε, για τυχόντα $p \in P$ και $u \in T_p P$ θα έχουμε ότι $\omega_p(u) = \omega_p(u^h + u^v) = \omega_p(u^v)$ και, ανάλογα, $\theta_p(u) = \theta_p(u^h + u^v) = \theta_p(u^v)$. Επειδή $u^v = X_p^*$, για κάποιο $X \in \mathcal{G}$, προκύπτει ότι

$$\omega_p(u) = \omega_p(X_p^*) = X = \theta_p(X_p^*) = \theta_p(u),$$

απ' όπου έχουμε το μονοσήμαντο της ω , με το οποίον κλείνει η απόδειξη. $\square$

Οι Προτάσεις 4.2.3, 4.2.6, 4.2.7 και 4.2.10 συνοψίζονται τώρα στο επόμενο βασικό αποτέλεσμα.

4.2.11 Θεώρημα. Έστω μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$. Η ℓ διαθέτει συνοχή ω , εάν και μόνον εάν υπάρχει μια οικογένεια $\{H_p P\}_{p \in P}$ υποχώρων των $T_p P$ (διανομή) με τις ιδιότητες:

- i) $T_p P = H_p P \oplus V_p P$ για κάθε $p \in P$.
- ii) Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(P)$, οι μονοσήμαντα ορισμένες συνιστώσες-του ξ^v και ξ^h , που προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\xi = \xi^v + \xi^h \quad \text{και} \quad \xi_p^v \in V_p P, \quad \xi_p^h \in H_p P, \quad \forall p \in P,$$

ορίζουν διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία.

- iii) Οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους υποχώρους $H_p P$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι κάτω από ορισμένες υποθέσεις, μια πρωτεύουσα δέσμη μπορεί να εφοδιαστεί με συνοχή. Πριν από αυτό θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα απλών πρωτευουσών δεσμών, οι οποίες εφοδιάζονται με αντίστοιχες χαρακτηριστικές συνοχές.

4.2.12 Παράδειγμα. Η φυσική συνοχή της τετριμμένης δέσμης.

Έστω B μία C^∞ -πολλαπλότητα και G ομάδα Lie. Θεωρούμε την τετριμμένη δέσμη $\ell_o = (B \times G, G, B, pr_1)$, όπου η G δρα στην $B \times G$ μέσω της απεικόνισης

$$\delta: (B \times G) \times G \longrightarrow B \times G: ((b, g), g') \mapsto (b, gg').$$

Με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.1.5, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\omega: B \times G \longrightarrow L(T(B \times G), \mathcal{G}),$$

που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\omega_{(b,g)}: T_b B \times T_g G \longrightarrow T_e G \equiv \mathcal{G} : (u, v) \mapsto T_g \ell_{g^{-1}}(v),$$

και θα δείξουμε ότι είναι συνοχή της ℓ_o .

Είναι φανερό ότι η ω είναι διαφορετική 1-μορφή της $B \times G$ με τιμές στην $\mathcal{G}$. Για τον έλεγχο της διαφορισιμότητάς της θεωρούμε τυχόν $X \in \mathfrak{X}(B \times G)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι $X = (X_1, X_2)$, όπου [μετά την ταύτιση $T(B \times G) \equiv TB \times TG$] $X_1 = p_1 \circ X: B \times G \rightarrow TB$ και $X_2 = p_2 \circ X: B \times G \rightarrow TG$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις (p_1, p_2 είναι οι αντίστοιχες προβολές του $TB \times TG$). Επομένως, η $\omega(X)$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \omega(X)(b, g) &= \omega_{(b,g)}(X_1(b, g), X_2(b, g)) \\ &= T_g \ell_{g^{-1}}(X_2(b, g)) \\ &= T_g \ell_{g^{-1}}(X_2(b, g)) + 0 \\ &= T_g \ell_{g^{-1}}(X_2(b, g)) + T_{g^{-1}} r_g(O_{g^{-1}}) \\ &= T_{(g,g^{-1})} \gamma(X_2(b, g), \Omega \circ \alpha(g)) \\ &= (T\gamma \circ (X_2, \Omega \circ \alpha \circ pr_2))(b, g), \end{aligned}$$

όπου γ η πράξη της ομάδας G , α η απεικόνιση αντιστροφής και Ω το μηδενικό διανυσματικό πεδίο της G . Οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύουν ότι η $\omega(X)$ είναι C^∞ -απεικόνιση, άρα και η ω .

Για την απόδειξη της (ω.1) παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $X \in \mathcal{L}(G)$ και για κάθε $p = (b, g) \in B \times G$, είναι

$$\bar{p}: G \longrightarrow \pi^{-1}(b) = pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times G : g' \mapsto (b, g)g' = (b, gg'),$$

δηλαδή $\bar{p}(g') = (C, \ell_g)(g')$, όπου $C(g') = b$ (σταθερά), για κάθε $g' \in G$, άρα

$$X_p^* = T_e \bar{p}(X_e) = T_e(C, \ell_g)(X_e) = (0, T_e \ell_g(X_e)).$$

Επομένως

$$\omega_p(X_p^*) = \omega_p(0, T_e \ell_g(X_e)) = T_g \ell_{g^{-1}}(T_e \ell_g(X_e)) = X_e \equiv X,$$

δηλαδή καταλήγουμε στην $\omega(X^*) = X$, για κάθε $X \in \mathcal{L}(G)$, όπως ζητούσαμε.

Για την (ω.2), παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $g' \in G$, είναι

$$R_{g'}(b, g) = (b, g)g' = (b, gg') = (id_B \times r_{g'})(b, g).$$

Άρα, και για κάθε $u = (u_1, u_2) \in T_{(b,g)}(B \times G) \equiv T_b B \times T_g G$,

$$\begin{aligned}
 (R_{g'}^* \omega)_{(b,g)}(u) &= \omega_{R_{g'}(b,g)}(T_{(b,g)} R_{g'}(u)) \\
 &= \omega_{(b,gg')}(T_{(b,g)}(id_B \times r_{g'})(u_1, u_2)) \\
 &= \omega_{(b,gg')}(u, T_g r_{g'}(u_2)) \\
 &= T_{gg'} \ell_{(gg')^{-1}}(T_g r_{g'}(u_2)) \\
 &= T_g(\ell_{g'^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}} \circ r_{g'})(u_2) \\
 &= T_g(r_{g'} \circ \ell_{g'^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}})(u_2) \\
 &= T_e(r_{g'} \circ \ell_{g'^{-1}})(T_g \ell_{g^{-1}}(u_2)) \\
 &= T_e I_{g'^{-1}}(\omega_{(b,g)}(u)) \\
 &= Ad(g'^{-1})(\omega_{(b,g)}(u)),
 \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την $(\omega, 2)$.

4.2.13 Παράδειγμα. Η αντίστροφη εικόνα συνοχής μέσω ενός G - B -ισομορφισμού.

Έστω $\ell_i = (P_i, G, B, \pi_i)$ ($i = 1, 2$) κύριες δέσμες και ω μία συνοχή της ℓ_2 . Αν $(f, id_G, id_B): \ell_1 \rightarrow \ell_2$ είναι ένας G - B -ισομορφισμός, θέτουμε

$$\omega' = f^* \omega.$$

Προφανώς η ω' είναι διαφορική 1-μορφή της P_1 . Η διαφορισμότητα της ελέγχεται ως εξής: Για τυχόν $X \in \mathfrak{X}(P_1)$, ορίζεται το $Y = Tf \circ X \circ f^{-1} \in \mathfrak{X}(P_2)$ (δηλ. το Y είναι το μοναδικό διανυσματικό πεδίο του P_2 που είναι f -συσχετισμένο με το X), οπότε, για κάθε $p \in P_1$

$$\begin{aligned}
 \omega'(X)(p) &= \omega'_p(X_p) = \omega_{f(p)}(T_p f(X_p)) \\
 &= \omega_{f(p)}(Tf \circ X \circ f^{-1})(f(p)g) \\
 &= \omega_{f(p)}(Y_{f(p)}) = (\omega(Y) \circ f)(p).
 \end{aligned}$$

Επομένως, η $\omega'(X)$, ως σύνθεση C^∞ -απεικονίσεων, είναι διαφορίσιμη, που αποδεικνύει τη διαφορισμότητα της ω' .

Για τις υπόλοιπες ιδιότητες της συνοχής προχωρούμε ως ακολούθως:

(ω. 1): Έστω $X \in \mathcal{L}(G)$. Τότε υπάρχουν τα αντίστοιχα πεδία Killing $X_1^* \in \mathfrak{X}(P_1)$ και $X_2^* \in \mathfrak{X}(P_2)$, αφού η G δρα και στις δύο πολλαπλότητες P_1 και P_2 . Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\omega'(X_1^*) = X$. Προς τούτο παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $p \in P$, είναι

$$(f \circ \bar{p})(g) = f(pg) = f(p) \cdot g = \overline{f(p)}(g), \quad \forall g \in G.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\omega'_p(X_{1,p}^*) &= \omega_{f(p)}(T_p f(X_{1,p}^*)) = \omega_{f(p)}(T_p f(T_e \bar{p}(X_e))) \\ &= \omega_{f(p)}(T_e(f \circ \bar{p})(X_e)) = \omega_{f(p)}(T_e \overline{f(p)}(X_e)) \\ &= \omega_{f(p)}(X_{2,f(p)}^*) = X.\end{aligned}$$

($\omega.2$): Ας συμβολίσουμε με R_g^1 και R_g^2 τις δεξιές μετατοπίσεις (κατά $g \in G$) των P_1 και P_2 , αντιστοίχως. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$(R_g^1)^* \omega' = \text{Ad}(g^{-1}) \omega', \quad \forall g \in G.$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι $f \circ R_g^1 = R_g^2 \circ f$, για κάθε $g \in G$. Επομένως, για κάθε $p \in P_1$ και $u \in T_p P_1$, είναι:

$$\begin{aligned}((R_g^1)^* \omega')_p(u) &= \omega'_{R_g^1(p)}(T_p R_g^1(u)) = \omega'_{pg}(T_p R_g^1(u)) \\ &= \omega_{f(pg)}(T_{pg} f \circ T_p R_g^1(u)) \\ &= \omega_{f(pg)}(T_p(f \circ R_g^1)(u)) \\ &= \omega_{f(p)g}(T_p(R_g^2 \circ f)(u)) \\ &= \omega_{f(p)g}(T_{f(p)} R_g^2 \circ T_p f(u)) \\ &= \omega_{R_g^2(f(p))}(T_{f(p)} R_g^2(T_p f(u))) \\ &= ((R_g^2)^* \omega)_{f(p)}(T_p f(u)) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})(\omega_{f(p)}(T_p f(u))) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})(\omega'_p(u)).\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο βασικό θεώρημα ύπαρξης συνοχής σε μία πρωτεύουσα δέσμη. Θα χρειαστούμε επίσης να ανατρέξουμε και στα περί διαμερίσεων της μονάδας και παρασυμπάγειας, που αναφέρονται στη σελίδα 83.

4.2.14 Θεώρημα. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη της οποίας η βάση B είναι παρασυμπαγής πολυπλοκότητα. Τότε η ℓ εφοδιάζεται με συνοχή ω .

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Για κάθε $i \in I$, θεωρούμε την πρωτεύουσα δέσμη

$$\ell_i = (\pi^{-1}(U_i), G, U_i, \pi|_{\pi^{-1}(U_i)})$$

και την αντίστοιχη τετριμμένη δέσμη

$$\ell_o^i = (U_i \times G, G, U_i, pr_1)$$

[βλ. Παραδείγματα 3.2.9(2) και (3)]. Είναι προφανές ότι

$$(\Phi_i, id_G, id_{U_i}): \ell_i \longrightarrow \ell_o^i$$

είναι G - U_i -ισομορφισμός. Αν ω_i συμβολίζει τη φυσική συνοχή της ℓ_o^i (βλ. Παράδειγμα 4.2.12), τότε η

$$\omega'_i = \Phi_i^* \omega_i$$

είναι συνοχή της ℓ_i , κατά το Παράδειγμα 4.2.13.

Έστω τώρα ότι $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in J}$ είναι μία C^∞ -διαμέριση της μονάδας υποκειμένη στην ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ της βάσης B . Θέτουμε

$$\omega := \sum_{i \in J} (\psi_i \circ \pi) \cdot \omega'_i.$$

Η ω είναι διαφορική 1-μορφή, ως γραμμικός συνδυασμός διαφορικών 1-μορφών. Επίσης είναι διαφορίσιμη: Αν $X \in \mathfrak{X}(P)$, τότε, για κάθε $p \in P$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \omega(X)(p) &= \omega_p(X_p) = \\ &= \sum_{i \in J} \psi_i(\pi(p)) \cdot \omega'_{ip}(X_p) = \left(\sum_{i \in J} (\psi_i \circ \pi) \cdot \omega'_i(X) \right) (p), \end{aligned}$$

απ' όπου και η ζητούμενη διαφορισιμότητα.

Αποδεικνύουμε τώρα τις ιδιότητες της συνοχής. Για ευκολία θα παραλείψουμε τους δείκτες στο σύμβολο του αθροίσματος.

(ω . 1): Για τυχόν $X \in \mathcal{L}(G)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \omega_p(X_p^*) &= \sum \psi_i(\pi(p)) \cdot \omega'_{ip}(X_p^*) = \\ &= \sum \psi_i(\pi(p)) \cdot X = \left(\sum \psi_i(\pi(p)) \right) \cdot X = 1 \cdot X = X. \end{aligned}$$

(ω . 2): Έστω $g \in G$. Τότε, για κάθε $p \in P$ και $u \in T_p P$, είναι

$$\begin{aligned} (R_g^* \omega)_p(u) &= \omega_{pg}(T_p R_g(u)) \\ &= \sum (\psi_i \circ \pi)(pg) \cdot \omega'_{ipg}(T_p R_g(u)) \\ &= \sum \psi_i(\pi(pg)) \cdot (R_g^* \omega'_i)_p(u) \\ &= \sum \psi_i(\pi(p)) \cdot Ad(g^{-1})(\omega'_{ip}(u)) \\ &= Ad(g^{-1}) \left(\sum (\psi_i \circ \pi)(p) \cdot \omega'_{ip}(u) \right) \\ &= Ad(g^{-1})(\omega_p(u)). \end{aligned}$$

□

4.3 Οριζόντιες Ανυψώσεις διανυσματικών πεδίων

Εδώ θα ασχοληθούμε με μια ειδική κατηγορία διανυσματικών πεδίων μιας πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$ εφοδιασμένης με μία συνοχή ω .

4.3.1 Ορισμός. Αν $\xi \in \mathcal{X}(B)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο (της βάσης), καλούμε **οριζόντια ανύψωση** του ξ ένα διανυσματικό πεδίο $\hat{\xi} \in \mathcal{X}(P)$ (του ολικού χώρου), με τις ιδιότητες

$$(\mathbf{HL\ 1}) \quad T_p \pi(\hat{\xi}(p)) = \xi(\pi(p)),$$

$$(\mathbf{HL\ 2}) \quad \hat{\xi}(p) \in H_p P,$$

για κάθε $p \in P$.

Επομένως, τα πεδία $\hat{\xi}$ και ξ είναι π -συσχετισμένα, με την επιπλέον ιδιότητα για το $\hat{\xi}$ να είναι οριζόντιο, δηλαδή να ισχύει η **(HL 2)**. Η ιδιότητα **(HL 1)** σημαίνει επίσης ότι το $\hat{\xi}$ προβάλλεται στο ξ .

4.3.2 Πρόταση. Με τους συμβολισμούς του προηγούμενου Ορισμού 4.3.1, για κάθε ξ υπάρχει ένα μονοσήμαντα ορισμένο αντίστοιχο $\hat{\xi}$.

Απόδειξη. Ας δείξουμε πρώτα τη μοναδικότητα του $\hat{\xi}$, για ένα δοσμένο ξ : Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη οριζόντια ανύψωση $\hat{\eta} \in \mathcal{X}(P)$ του ξ , τότε

$$T_p \pi(\hat{\eta}(p)) = \xi(\pi(p)) = T_p \pi(\hat{\xi}(p)), \quad \forall p \in P.$$

Επειδή η $T_p \pi|_{H_p P}: H_p P \rightarrow T_{\pi(p)} B$, είναι γραμμικός ισομορφισμός, προκύπτει ότι $\hat{\eta}(p) = \hat{\xi}(p) \in H_p P$, για κάθε $p \in P$, οπότε και $\hat{\eta} = \hat{\xi}$.

Για την κατασκευή της οριζόντιας ανύψωσης του ξ θέτουμε

$$\hat{\xi}(p) := (T_p \pi)^{-1}(\xi(\pi(p))), \quad p \in P.$$

Προφανώς, λόγω του ισομορφισμού $T_p \pi$, είναι $\hat{\xi}(p) \in H_p P$, για κάθε $p \in P$. Επιπλέον, εκ κατασκευής, το $\hat{\xi}$ προβάλλεται στο ξ .

Μένει να αποδειχθεί η διαφορισμότητα του $\hat{\xi}$. Αυτό γίνεται τοπικά σε μια περιοχή τυχόντος σημείου $p_o \in P$ με $\pi(p_o) = b_o \in B$. Για το p_o υπάρχει απλοποίηση (U, Φ) του P με $b_o \in U$ και $p_o \in \pi^{-1}(U)$. Θεωρούμε και την απεικόνιση $\eta: U \times G \rightarrow T(U \times G)$, που δίνεται από τη σχέση

$$\eta(b, g) := (\xi(b), 0_g) \in T_b U \times T_g G \equiv T_{(b, g)}(U \times G).$$

Το η είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της πολλαπλότητας $U \times G$, με τη διαφορισμότητα του να προκύπτει από την

$$\eta(b, g) = (\xi(b), 0_g) = (\xi(b), \Omega(g)) = (\xi \circ pr_1, \Omega \circ pr_2)(b, g); \quad (b, g) \in U \times G,$$

όπου Ω είναι το μηδενικό διανυσματικό πεδίο του G .

Συμβολίζουμε τώρα με $\hat{\eta}: \pi^{-1}(U) \rightarrow T(\pi^{-1}(U)) \equiv TP$ το (μοναδικό) διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο που είναι Φ -συσχετισμένο με το η (η επιλογή αυτού του συμβολισμού θα δικαιολογηθεί στη συνέχεια), δηλαδή $\hat{\eta} = T\Phi^{-1} \circ \eta \circ \Phi$. Παρατηρούμε ότι, για τυχόν $q \in \pi^{-1}(U)$ με $\Phi(q) = (b, g)$, είναι

$$\begin{aligned} T_q\pi(\hat{\eta}(q)) &= T_q\pi(T_{(b,g)}\Phi^{-1}(\eta(b, g))) \\ &= T_{(b,g)}(\pi \circ \Phi^{-1})(\eta(b, g)) = T_{(b,g)}pr_1(\eta(b, g)) \\ &= pr_1(\xi(b), 0_g) = \xi(b) = \xi(\pi(q)), \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι το $\hat{\eta}$ προβάλλεται στο $\xi|_U$ και είναι οριζόντιο διανυσματικό πεδίο, αφού $\hat{\eta}(q) = (T_q\pi)^{-1}(\xi(\pi(q))) \in H_qP$, πάλι λόγω του ισομορφισμού $T_q\pi: H_qP \rightarrow T_{\pi(q)}$. Δηλαδή το $\hat{\eta}$ είναι οριζόντιο ανύψωση του $\xi|_U$.

Από το άλλο μέρος, σύμφωνα με τον ορισμό του $\hat{\xi}$ και την παραπάνω σειρά σχέσεων,

$$\hat{\xi}(q) = (T_q\pi)^{-1}(\xi(\pi(q))) = \hat{\eta}(q), \quad q \in \pi^{-1}(U),$$

οπότε $\hat{\xi}|_{\pi^{-1}(U)} = \hat{\eta}$ που αποδεικνύει τη διαφορισμότητα του $\hat{\xi}$ στην περιοχή $\pi^{-1}(U)$ του p_o . Ανάλογα και για κάθε άλλο σημείο του P . Επομένως το $\hat{\xi}$ που κατασκευάσαμε είναι πράγματι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο, με το οποίο κλείνει η απόδειξη. $\square$

Ενώ κάθε διανυσματικό πεδίο της βάσης διαθέτει οριζόντια ανύψωση, ένα τυχόν οριζόντιο διανυσματικό πεδίο δεν είναι απαραίτητα (οριζόντια) ανύψωση ενός διανυσματικού πεδίου της βάσης. Αυτό είναι δυνατόν υπό ορισμένη προϋπόθεση, όπως φαίνεται στην επόμενη πρόταση.

4.3.3 Πρόταση. Έστω $\eta \in \mathcal{X}(P)$ ένα οριζόντιο διανυσματικό πεδίο αναληθοίωτο ως προς τις δεξιές μετατοπίσεις, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$T_pR_g(\eta_p) = \eta_{pg}; \quad p \in P, g \in G.$$

Τότε υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathcal{X}(B)$, έτσι ώστε $\eta = \hat{\xi}$. Με άλλα λόγια, κάθε δεξιά αναληθοίωτο οριζόντιο διανυσματικό πεδίο του ολικού χώρου P είναι οριζόντια ανύψωση ενός μοναδικού διανυσματικού πεδίου της βάσης B .

Απόδειξη. Για ένα $b \in B$, θέτουμε $\xi(b) := T_p\pi(\eta(p))$, όπου $p \in P$ είναι τυχόν σημείο με $\pi(p) = b$. Το ξ είναι διανυσματικό πεδίο του B καλά ορισμένο γιατί, αν πάρουμε και οποιοδήποτε $q \in P$ με $\pi(q) = b$, τότε υπάρχει $g \in G$, έτσι ώστε $q = pg$, οπότε

$$T_q\pi(\eta(q)) = T_{pg}\pi(\eta(pg)) = T_p(\pi \circ R_g)(\eta(p)) = T_p\pi(\eta(p)) = \xi(b).$$

Το ξ είναι διαφορίσιμο στην περιοχή U κάθε απλοποιούντος ζεύγους (U, Φ) . Πράγματι, για κάθε $b \in U$, είναι

$$\xi(b) = T_{s(b)}\pi(\eta(s(b))) = (T\pi \circ \eta \circ s)(b),$$

όπου s είναι η φυσική τομή που αντιστοιχεί στο (U, Φ) (βλ. Ορισμό 3.3.2). Επομένως, $\xi|_U = T\pi \circ \eta \circ s$, απ' όπου προκύπτει η διαφορισμότητα του ξ στο U και, ανάλογα, σε ολόκληρο το B .

Αν τώρα $\hat{\xi}$ είναι η οριζόντια ανύψωση του ξ , έχουμε ότι

$$T_p\pi(\hat{\xi}(p)) = \xi(\pi(p)) = T_p\pi(\eta(p)); \quad p \in P,$$

απ' όπου προκύπτει αμέσως ότι $\eta = \hat{\xi}$. □

Με χρήση της οριζόντιας ανύψωσης ενός διανυσματικού πεδίου, μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο αποτέλεσμα, που δίνει έναν άλλο χαρακτηρισμό της συνοχής σε μια πρωτεύουσα δέσμη, ισοδύναμο με το Θεώρημα 4.2.11. Ακριβέστερα έχουμε:

4.3.4 Θεώρημα. Έστω μία πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$. Η ℓ διαθέτει συνοχή ω , εάν και μόνον εάν υπάρχει μια οικογένεια $\{H_p P\}_{p \in P}$ υποχώρων των $T_p P$ (διανομή) με τις ιδιότητες:

- i) $T_p P = H_p P \oplus V_p P$, για κάθε $p \in P$.
- ii) Για κάθε $p \in P$ υπάρχει μία αντίστοιχη περιοχή $V \in \mathcal{N}_p$ και $n = \dim B$ το πλήθος οριζόντια διανυσματικά πεδία $\{X_1, \dots, X_n\}$ επί της V , τέτοια ώστε η οικογένεια $\{X_1(q), \dots, X_n(q)\}$ να αποτελεί βάση του $H_q P$, για κάθε $q \in V$.
- iii) Οι δεξιές μετατοπίσεις διατηρούν τους υποχώρους $H_p P$.

Πριν την απόδειξη, ας αναφέρουμε ότι η ιδιότητα ii) του θεωρήματος αποτελεί (εξ ορισμού) τη συνθήκη διαφορισμότητας της διανομής $P \ni p \mapsto H_p P$.

Θα χρειαστούμε το επόμενο γενικότερο συμπέρασμα.

4.3.5 Λήμμα. Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.3.4, για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(P)$, οι συνιστώσες ξ^v και ξ^h του ξ , που προκύπτουν από τη συνθήκη i), (βλ. επίσης και το Πρόσχημα 4.2.4) είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το ξ^h είναι διαφορίσιμο, οπότε θα είναι διαφορίσιμο και το ξ^v , αφού $\xi^v = \xi - \xi^h$. Για τούτο αρκεί να δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμο σε τυχόν σημείο $p_o \in P$. Για ένα τέτοιο p_o υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) , έτσι ώστε $p_o \in V := \pi^{-1}(U)$. Επομένως, βάσει της ii) για κάθε $q \in V$, το $\xi^h(q) \in T_q P$ γράφεται με τη μορφή

$$(4.3.1) \quad \xi^h(q) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(q) X_i(q), \quad \text{όπου } \lambda_i(q) \in \mathbb{R} \text{ και } n = \dim B.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\lambda_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες. Πράγματι, από την (4.3.1) προκύπτει ότι

$$T_q\pi(\xi(q)) = T_q\pi(\xi^v(q) + \xi^h(q)) = T_q\pi(\xi^h(q)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(q) T_q\pi(X_i(q)).$$

Επειδή τα $T_q(X_i(q))$, $i = 1, \dots, n$, αποτελούν βάση του T_qB (πάλι λόγω του γραμμικού ισομορφισμού $T_q\pi|_{H_qP}$), έχουμε ότι

$$\lambda_i(q) = pr_i(T_q\pi(\xi(q))) = (pr_i \circ T\pi \circ \xi)(q), \quad q \in V.$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει ότι πράγματι οι συντελεστες της (4.3.1) είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις, άρα και το ξ^h είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στην περιοχή V του p_o . Ανάλογα και σε κάθε άλλο σημείο του P . $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η ℓ εφοδιάζεται με μία συνοχή ω . Τότε ισχύουν οι ιδιότητες i) και iii), βάσει των Προτάσεων 4.2.3 και 4.2.6, αντιστοίχως.

Για τη ii): Έστω τυχόν $p \in P$. Αν $\pi(p) = b$ και (U, Φ) ένα απλοποιούν ζεύγος με $b \in U \subset B$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το U είναι (με κατάλληλη σμίκρυνση, αν χρειάζεται) πεδίο ορισμού ενός χάρτη (U, ϕ) του B . Θεωρούμε τα βασικά διανυσματικά πεδία

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(U); \quad i = 1, \dots, n,$$

και τις αντίστοιχες οριζόντιες ανυψώσεις τους

$$X_i = \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}} \right) \in \mathcal{X}(V); \quad i = 1, \dots, n.$$

Επειδή $T_q\pi|_{H_qP}: H_qP \rightarrow T_{\pi(q)}B$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ισχύει η σχέση

$$T_q\pi(X_i(q)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\pi(q)}; \quad i = 1, \dots, n, \quad q \in V,$$

καταλήγουμε στην ιδιότητα ii).

Το αντίστροφο αποδεικνύεται ακριβώς όπως στην Πρόταση 4.2.10. Ένα βασικό σημείο της απόδειξης αποτελεί η διαφορισιμότητα της ω [που ορίζεται από την (4.2.3)], και η οποία βασίζεται ουσιαστικά στη διαφορισιμότητα του ξ^v . Η τελευταία ιδιότητα εδώ εξασφαλίζεται από το Λήμμα 4.3.5. $\square$

4.4 Παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης

Υποθέτουμε ότι $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με μία συνοχή ω . Έισάγουμε τις επόμενες χρήσιμες έννοιες.

Αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι κλειστό διάστημα, μια καμπύλη $\alpha: I \rightarrow B$ θα λέγεται **(C^∞)-διαφορίσιμη**, αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα $J \subset \mathbb{R}$ με $I \subset J$, και C^∞ -καμπύλη $\tilde{\alpha}: J \rightarrow B$, τέτοια ώστε $\tilde{\alpha}|_I = \alpha$.

Έστω τώρα $I = [0, 1]$ και $\alpha: I \rightarrow B$ συνεχής καμπύλη. Η α λέγεται **κατά τμήματα διαφορίσιμη** (piece-wise differentiable) (βραχυγραφικά, **κ.τ.** C^∞) αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $t_i \in [0, 1]$ ($i = 0, \dots, k$), με $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, έτσι ώστε η $\alpha_i = \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow B$ να είναι διαφορίσιμη καμπύλη, για κάθε $i = 0, \dots, k-1$.

Τέλος, σε μια πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$ με συνοχή ω , θα λέμε ότι η κ.τ. C^∞ -καμπύλη $\hat{\alpha}: I = [0, 1] \rightarrow P$ είναι **οριζόντια ανύψωση** (horizontal lifting) της $\alpha: [0, 1] \rightarrow B$, αν ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$(i) \quad \pi \circ \hat{\alpha} = \alpha,$$

$$(ii) \quad \dot{\hat{\alpha}}(t) = (T_t \hat{\alpha}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in H_{\hat{\alpha}(t)},$$

για κάθε $t \in (t_i, t_{i+1})$ και $i = 0, \dots, k-1$.

Για λόγους τυπογραφικής ευκολίας, το βασικό διανυσματικό πεδίο $\frac{d}{dt}$ του $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με ∂ , οπότε

$$(4.4.1) \quad \partial_t = \partial(t) = \frac{d}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_t,$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

4.4.1 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με μία συνοχή ω , και $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow B$ κ.τ. C^∞ -καμπύλη. Τότε, για κάθε $p_o \in \pi^{-1}(\alpha(o))$, υπάρχει μια μοναδική οριζόντια ανύψωση $\hat{\alpha}$ της α με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}(0) = p_o$.

Απόδειξη. Περίπτωση i): Ας υποθέσουμε πρώτα ότι υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) της ℓ , τέτοιο ώστε $\alpha(I) \subset U$. Θέτουμε $\Phi(p_o) = (b_o, g_o)$ [προφανώς $b_o = \alpha(0)$] και θεωρούμε την κ.τ. C^∞ -καμπύλη

$$\gamma: I \longrightarrow P: t \mapsto \gamma(t) := \Phi^{-1}(\alpha(t), g_o).$$

Επειδή

$$\gamma(0) = \Phi^{-1}(\alpha(0), g_o) = \Phi^{-1}(b_o, g_o) = p_o$$

και

$$\pi \circ \gamma(t) = \pi \circ \Phi^{-1}(\alpha(t), g_o) = pr_1(\alpha(t), g_o) = \alpha(t),$$

η γ είναι ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\gamma(0) = p_o$. Όμως η γ δεν είναι απαραίτητως οριζόντια. Ας συμβολίσουμε λοιπόν με $\hat{\alpha}$ την ζητούμενη οριζόντια ανύψωση. Όμως, για κάθε $t \in [0, 1]$, τα $\hat{\alpha}(t)$ και $\gamma(t)$ είναι σημεία του ίδιου νήματος $\pi^{-1}(\alpha(t))$, άρα θα υπάρχει μοναδικό $g(t) \in G$, έτσι ώστε $\hat{\alpha}(t) = \gamma(t)g(t)$ (βλ. Πρόταση 3.2.16). Επομένως, ορίζεται μία καμπύλη $g: I \rightarrow G$, η οποία είναι κ.τ. C^∞ , αφού η σχέση $\Phi(\hat{\alpha}(t)) = \Phi(\gamma(t)g(t))$, συνεπάγεται την

$$g(t) = (pr_2 \circ \Phi \circ \gamma(t))^{-1} \cdot (pr_2 \circ \Phi \circ \hat{\alpha}(t)).$$

Επίσης $g(0) = e$, επειδή $\hat{\alpha}(0) = \gamma(0)$.

Προφανώς, αν μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την καμπύλη g , θα έχουμε άμέσως και την $\hat{\alpha}(t)$, αφού η γ είναι ήδη γνωστή.

Ας δούμε τώρα τι προκύπτει από την απαίτηση η $\hat{\alpha}$ να είναι οριζόντια. Διαφορίζοντας την ισότητα $\hat{\alpha} = \delta \circ (\gamma, g)$ (που προκύπτει από τη σχέση των ανυψώσεων $\hat{\alpha}$ και γ), βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}(t) &= (T_t \hat{\alpha})(\partial_t) = T_t(\delta \circ (\gamma, g))(\partial_t) \\ &= T_{(\gamma(t), g(t))} \delta(T_t \gamma(\partial_t), T_t g(\partial_t)) \\ &= T_{\gamma(t)} \delta_{g(t)}(\dot{\gamma}(t)) + T_{g(t)} \delta_{\gamma(t)}(\dot{g}(t)) \\ (4.4.2) \quad &= T_{\gamma(t)} R_{g(t)}(\dot{\gamma}(t)) + T_{g(t)} \overline{\gamma(t)}(\dot{g}(t)). \end{aligned}$$

Εξάλλου, από το $\dot{g}(t) \in T_{g(t)}G$ ορίζεται το $A_e := T_{g(t)}\ell_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)) \in T_e G$, άρα υπάρχει αντίστοιχο (του A_e) πεδίο $A \in \mathcal{L}(G)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} T_{g(t)} \overline{\gamma(t)}(\dot{g}(t)) &= T_{g(t)} \overline{\gamma(t)} \circ T_e \ell_{g(t)}(A_e) \\ &= T_e \overline{\gamma(t)g(t)}(A_e) \\ &= A_{\gamma(t)g(t)}^* = A_{\hat{\alpha}(t)}^*, \end{aligned}$$

οπότε η (4.4.2) μετασχηματίζεται στην

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = T_{\gamma(t)} R_{g(t)}(\dot{\gamma}(t)) + A_{\hat{\alpha}(t)}^*.$$

Υπολογίζοντας τη μορφή συνοχής στο τελευταίο διάνυσμα βρίσκουμε την

$$(4.4.3) \quad \omega_{\hat{\alpha}(t)}(\dot{\hat{\alpha}}(t)) = \omega_{\hat{\alpha}(t)}(T_{\gamma(t)} R_{g(t)}(\dot{\gamma}(t))) + \omega_{\hat{\alpha}(t)}(A_{\hat{\alpha}(t)}^*).$$

Έχουμε όμως ότι

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) \in H_{\alpha(t)}P \quad \text{και} \quad \omega_{\hat{\alpha}(t)}(A_{\hat{\alpha}(t)}^*) = A \equiv A_e,$$

άρα η (4.4.3) οδηγεί στην

$$\omega_{\hat{\alpha}(t)}(T_{\gamma(t)} R_{g(t)}(\dot{\gamma}(t))) + A_e = 0,$$

και, ισοδύναμα, στην

$$\begin{aligned} -A_e &= \omega_{\gamma(t)g(t)}(T_{\gamma(t)} R_{g(t)}(\dot{\gamma}(t))) \\ &= (R_{g(t)}^* \omega)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \\ &= Ad(g(t)^{-1})(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) \\ &= T_e I_{g(t)^{-1}}(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) \\ &= T_e(\ell_{g(t)^{-1}} \circ r_{g(t)})(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) \\ &= T_{g(t)} \ell_{g(t)^{-1}} \circ T_e r_{g(t)}(\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))). \end{aligned}$$

Επειδή θέσαμε $A_e = T_{g(t)} \ell_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t))$ και η $T_{g(t)} \ell_{g(t)^{-1}}$ είναι ισομορφισμός, από την προηγούμενη σειρά μετασχηματισμών προκύπτει η

$$(4.4.4) \quad -T_{g(t)} r_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)) = \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)),$$

δηλαδή καταλήγουμε σε μία διαφορική εξίσωση όπου η άγνωστη συνάρτηση είναι η $g(t)$. Η (4.4.4) είναι μία **εξίσωση με ολικό διαφορικό**, η οποία επιλύεται μονοσήμαντα για δεδομένη αρχική συνθήκη, οπότε υπολογίζεται η g και, όπως εξηγήσαμε, και η οριζόντια ανύψωση $\hat{\alpha}$, για την περίπτωση i). Για το παραπάνω είδος εξισώσεων και την επιλυσή τους παραπέμπουμε στο [10, Ch. III, § 3.17; Ch. III, § 6.7].

Περίπτωση ii): Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εικόνα $\alpha(I)$ δεν περιέχεται σε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, Φ) . Στην περίπτωση αυτή, για κάθε $b \in \alpha(I)$, υπάρχει απλοποιούν ζεύγος (U_b, Φ_b) με $b \in U_b$, οπότε

$$\alpha(I) \subset \bigcup_{b \in \alpha(I)} U_b.$$

Αφού όμως το $\alpha(I)$ είναι συμπαγές, η ανοιχτή κάλυψη $\{U_b\}_{b \in \alpha(I)}$ δέχεται πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_i := U_{b_i}\}_{i=1, \dots, k}$. Τότε υπάρχουν

$$\begin{aligned} t_o = 0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k = 1 &\in [0, 1] \quad \text{με} \quad t_i < t_{i+1}, \\ \text{έτσι ώστε} \quad \alpha([t_i, t_{i+1}]) &\subset U_i, \quad \forall i = 0, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Όπως στην περίπτωση i), βρίσκουμε την οριζόντια ανύψωση $\hat{\alpha}_o$ της καμπύλης (περιορισμού) $\alpha_o := \alpha|_{[t_o, t_1]}$, με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_o(0) = p_o$. Συνεχίζοντας διαδοχικά βρίσκουμε την οριζόντια ανύψωση της κάθε $\alpha_i := \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_i(t_i) = \hat{\alpha}_{i-1}(t_i)$. Η ένωση των καμπυλών $\hat{\alpha}_i$ είναι κατα τμήματα διαφορίσιμη οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}(0) = p_o$. $\square$

4.4.2 Ορισμός. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ πρωτεύουσα δέσμη με συνοχή ω και μία κ.τ. C^∞ -καμπύλη $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow B$ με $\alpha(0) = b_o$ και $\alpha(1) = b_1$. Για κάθε $p \in \pi^{-1}(b_o)$, συμβολίζουμε με $\hat{\alpha}_p$ τη μοναδική οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_p(0) = p$. Η απεικόνιση

$$\tau_\alpha: \pi^{-1}(b_o) \longrightarrow \pi^{-1}(b_1): p \mapsto \hat{\alpha}_p(1)$$

καλείται **παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος της α** (parallel displacement along α).

4.4.3 Λήμμα. Η παράλληλη μετατόπιση τ_α ικανοποιεί τη σχέση

$$\tau_\alpha \circ R_g = R_g \circ \tau_\alpha,$$

για κάθε $g \in G$. Αναλυτικότερα,

$$\tau_\alpha(pg) = \tau_\alpha(p) \cdot g; \quad p \in \pi^{-1}(b_o), g \in G.$$

Απόδειξη. Έστω $g \in G$ και $p \in \pi^{-1}(b_o)$. Τότε έχουμε τις σχέσεις

$$(\tau_\alpha \circ R_g)(p) = \tau_\alpha(pg) = \hat{\alpha}_{pg}(1),$$

$$(R_g \circ \tau_\alpha)(p) = R_g(\hat{\alpha}_p(1)) = \hat{\alpha}_p(1) \cdot g.$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\hat{\alpha}_{pg}(1) = \hat{\alpha}_p(1) \cdot g$. Αυτό προκύπτει από τη

γενικότερη σχέση

$$\hat{\alpha}_{pg}(t) = \hat{\alpha}_p(t) \cdot g, \quad t \in [0, 1].$$

Πράγματι, επειδή η $\hat{\alpha}_{pg}$ είναι η μοναδική οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_{pg}(0) = pg$, για να δείξουμε την ισότητα των απεικονίσεων $\hat{\alpha}_{pg}$ και $\hat{\alpha}_p \cdot g$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\hat{\alpha}_p \cdot g$ είναι οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη $(\hat{\alpha}_p \cdot g)(0) = \hat{\alpha}_p(0) \cdot g = pg$.

Η αρχική συνθήκη προφανώς είναι η ζητούμενη. Επίσης, η $\hat{\alpha}_p \cdot g$ είναι ανύψωση της α , αφού (βλ. Πρόταση 3.2.11)

$$\pi(\hat{\alpha}_p(t) \cdot g) = \pi(\hat{\alpha}_p(t)) = \alpha(t), \quad t \in I.$$

Τέλος, είναι οριζόντια καμπύλη επειδή [βλ. και σχέση (4.4.1)], για κάθε $t \in I$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{(\hat{\alpha}_p \cdot g)}(t) &= \dot{(R_g \circ \hat{\alpha}_p)}(t) = T_t(R_g \circ \hat{\alpha}_p)(\partial_t) \\ &= (T_{\hat{\alpha}_p(t)} R_g \circ T_t \hat{\alpha}_p)(\partial_t) \\ &= T_{\hat{\alpha}_p(t)} R_g(\dot{\hat{\alpha}_p}(t)) \in \\ &\in T_{\hat{\alpha}_p(t)} R_g(H_p P) = H_{\hat{\alpha}_p(t)g} P. \end{aligned}$$

□

4.4.4 Λήμμα. Με τις υποθέσεις του Ορισμού 4.4.2, η

$$\tau_\alpha: \pi^{-1}(\alpha(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(\alpha(1))$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση.

Απόδειξη. Ας σταθεροποιήσουμε ένα $p_o \in \pi^{-1}(\alpha(0))$. Θέτουμε

$$q_o := \tau_\alpha(p_o) \in \pi^{-1}(\alpha(1)).$$

Για κάθε $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$, υπάρχει ένα μοναδικό $g \in G$, τέτοιο ώστε $p = p_o \cdot g$. Επομένως, (βλ. Λήμμα 3.3.5) $g = k(p_o, p) = k_{p_o}(p)$, όπου η k_{p_o} είναι $\mathcal{C}^\infty$ -απεικόνιση. Εξάλλου, βάσει του Λήμματος 4.4.3 και του Ορισμού 4.1.2,

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(p) &= \tau_\alpha(p_o \cdot g) = \tau_\alpha(R_g(p_o)) = R_g(\tau_\alpha(p_o)) = \\ &= R_g(q_o) = q_o g = \overline{q_o}(k(p_o, p)) = (\overline{q_o} \circ k_{p_o})(p), \end{aligned}$$

δηλαδή $\tau_\alpha = \overline{q_o} \circ k_{p_o}$, η οποία είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Προφανώς, η διαφορισμότητα δεν εξαρτάται από την επιλογή του $p_o \in \pi^{-1}(\alpha(0))$ (γιατί;) $\square$

Επειδή σκοπός μας, στη συνέχεια, είναι να δείξουμε ότι η τ_α είναι αμφι-διαφόριση, χρειαζόμαστε πρώτα την έννοια της **αντίθετης καμπύλης** (inverse curve) α^{-1} μιας καμπύλης $\alpha: I \rightarrow B$. Ακριβέστερα, είναι

$$(4.4.5) \quad \alpha^{-1}: I \longrightarrow B: t \mapsto \alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t).$$

Προφανώς

$$\alpha^{-1} = \alpha \circ \mu,$$

όπου η μεταφορά

$$\mu: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: t \mapsto 1-t$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, και

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha.$$

Από τα προηγούμενα συνάγεται αμέσως ότι μία καμπύλη α είναι κ.τ. ($\equiv$ κατά τμήματα) $\mathcal{C}^\infty$ -καμπύλη, αν και μόνον αν η α^{-1} είναι κ.τ. $\mathcal{C}^\infty$ -καμπύλη. Επίσης, αν α είναι κ.τ. $\mathcal{C}^\infty$ -καμπύλη, η α^{-1} ορίζει την αντίστοιχη παράλληλη μετατόπιση

$$\tau_{\alpha^{-1}}: \pi^{-1}(\alpha^{-1}(0)) = \pi^{-1}(\alpha(1)) \longrightarrow \pi^{-1}(\alpha(0)) = \pi^{-1}(\alpha^{-1}(1)).$$

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς αποδεικνύεται το

4.4.5 Λήμμα. Για κάθε (κ.ι.) C^∞ -καμπύλη α , ισχύει η σχέση

$$\tau_{\alpha^{-1}} = \tau_\alpha^{-1}.$$

Απόδειξη. Έστω $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$ και $\hat{\alpha}_p$ η οριζόντια ανύψωση της α με αρχική συνθήκη p . Θεωρούμε την (αντίθετη) καμπύλη $(\hat{\alpha}_p)^{-1}$, για την οποία παρατηρούμε ότι:

i) Είναι ανύψωση της α^{-1} , επειδή

$$\pi \circ (\hat{\alpha}_p)^{-1} = \pi \circ \hat{\alpha}_p \circ \mu = \alpha \circ \mu = \alpha^{-1}.$$

ii) Είναι οριζόντια, διότι

$$\begin{aligned} \widehat{(\hat{\alpha}_p)^{-1}}(t) &= T_t(\hat{\alpha}_p)^{-1}(\partial_t) \\ &= T_t(\hat{\alpha}_p \circ \mu)(\partial_t) \\ &= T_{\mu(t)}\hat{\alpha}_p(\mu'(t) \cdot \partial_{\mu(t)}) \\ &= T_{\mu(t)}\hat{\alpha}_p((-1) \cdot \partial_{\mu(t)}) \\ &= -T_{(1-t)}\hat{\alpha}_p(\partial_{(1-t)}) \\ &= -\dot{\hat{\alpha}}_p(1-t) \in H_{\hat{\alpha}_p(1-t)}P. \end{aligned}$$

iii) Τέλος έχει αρχική συνθήκη

$$(\hat{\alpha}_p)^{-1}(0) = \hat{\alpha}_p(1) = \tau_\alpha(p).$$

Επομένως, η $\hat{\alpha}_p^{-1}$ είναι οριζόντια ανύψωση της α^{-1} με αρχική συνθήκη $\hat{\alpha}_p(1)$, οπότε (σύμφωνα με τους συμβολισμούς του Ορισμού 4.4.2) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(4.4.6) \quad (\hat{\alpha}_p)^{-1} = (\widehat{\alpha^{-1}})_{\hat{\alpha}_p(1)},$$

μέσω της οποίας βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} (\tau_{\alpha^{-1}} \circ \tau_\alpha)(p) &= \tau_{\alpha^{-1}}(\hat{\alpha}_p(1)) = \\ &= (\widehat{\alpha^{-1}})_{\hat{\alpha}_p(1)}(1) = (\hat{\alpha}_p)^{-1}(1) = \hat{\alpha}_p(0) = p, \end{aligned}$$

για κάθε $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$, δηλαδή καταλήγουμε στη σχέση

$$(4.4.7) \quad \tau_{\alpha^{-1}} \circ \tau_\alpha = id_{\pi^{-1}(\alpha(0))}.$$

Επειδή $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι

$$\tau_\alpha \circ \tau_{\alpha^{-1}}(q) = q, \quad \forall q \in \pi^{-1}(\alpha(1)),$$

δηλαδή

$$(4.4.8) \quad \tau_\alpha \circ \tau_{\alpha^{-1}} = id_{\pi^{-1}(\alpha(1))}.$$

Οι (4.4.7) και (4.4.8) κλείνουν την απόδειξη. $\square$

Τα δύο τελευταία λήμματα αποδεικνύουν ουσιαστικά το επόμενο βασικό συμπέρασμα :

4.4.6 Θεώρημα. Για κάθε (κατά τμήματα) C^∞ -καμπύλη $\alpha: I \rightarrow B$, η παράλληλη μετατόπιση $\tau_\alpha: \pi^{-1}(\alpha(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\alpha(1))$ είναι αμφιδιαφόριση (μεταξύ των σημειωμένων νημάτων).

4.4.7 Σχόλιο. Είδαμε ότι η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος μιας καμπύλης α ορίζει μια ισομορφία μεταξύ των νημάτων $\pi^{-1}(\alpha(0))$ και $\pi^{-1}(\alpha(1))$, που είναι ανεξάρτητη της χρησιμοποιούμενης απλοποιούσας κάλυψης, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι η ισομορφία αυτή είναι μία **εσωτερική** (intrinsic) ιδιότητα της δέσμης, η οποία εξαρτάται μόνον από την ύπαρξη της συνοχής.

Εδώ ας υπενθυμίσουμε ότι, μέσω απλοποιούντων ζευγών, έχουμε πάντοτε τις ισομορφίες

$$\pi^{-1}(\alpha(0)) \cong G \cong \pi^{-1}(\alpha(1)),$$

αλλά η ισομορφία μεταξύ των νημάτων δεν είναι εσωτερική, αφού προκύπτει από την εκλογή απλοποιούντων ζευγών.

4.4.8 Πρόρισμα. Υποθέτουμε ότι $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη εφοδιασμένη με μία συνοχή ω , και η βάση B είναι συνεκτική πολλαπλότητα. Τότε, για οποιαδήποτε σημεία $b, b' \in B$ με $b \neq b'$, υπάρχει μια εσωτερική ισομορφία $\tau: \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b')$.

Απόδειξη. Είναι γνωστό, από τη θεωρία των πολλαπλοτήτων, ότι για οποιαδήποτε σημεία b, b' μιας συνεκτικής διαφορικής πολλαπλότητας υπάρχει πάντοτε μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη α με αρχή το b και πέρας το b' . Συνεπώς ορίζεται η ισομορφία $\tau = \tau_\alpha$. $\square$

4.5 Ομάδες ολονομίας

Σ' αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι οι παράλληλες μετατοπίσεις κατά μήκος κλειστών κατά τμήματα διαφορισίων καμπυλών αποτελούν ομάδα.

Πριν απ' αυτό θα δούμε την παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος της σύνθεσης δύο (κ.τ.) διαφορισίων καμπυλών.

4.5.1 Ορισμός. Υποθέτουμε ότι $\alpha, \beta: I \rightarrow B$ είναι (κ.τ.) διαφορίσιμες καμπύλες. Καλούμε **γινόμενο** ή **σύνθεση** (composition or juxtaposition) των α και β την καμπύλη

$$\beta * \alpha = \begin{cases} \alpha(2t); & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1); & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Προφανώς, πρόκειται για την (κ.τ.) διαφορίσιμη καμπύλη που προκύπτει αν διαγράψουμε πρώτα την καμπύλη α και στη συνέχεια την β .

Για την παραλληλη μετατόπιση κατά μήκος της σύνθεσης καμπυλών έχουμε το επόμενο.

4.5.2 Λήμμα. Για κάθε $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$, ισχύει η σχέση

$$\left(\widehat{\beta * \alpha} \right)_p = \widehat{\beta}_q * \widehat{\alpha}_p,$$

όπου $q = \widehat{\alpha}_p(1)$.

Απόδειξη. Η $\widehat{\beta}_q * \widehat{\alpha}_p$ είναι οριζόντια καμπύλη ως σύνθεση οριζοντίων καμπυλών. Επίσης είναι ανύψωση της $\beta * \alpha$ επειδή

$$\pi \circ \left(\widehat{\beta}_q * \widehat{\alpha}_p \right)(t) = \begin{cases} \pi(\widehat{\alpha}_p(t)) = \alpha(t); & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \pi(\widehat{\beta}_q(t)) = \beta(t); & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} = \beta * \alpha.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι καμπύλες που εμφανίζονται στην ισότητα της εκφώνησης έχουν την ίδια αρχική συνθήκη:

$$\left(\widehat{\beta * \alpha} \right)_p(0) = p, \quad \left(\widehat{\beta}_q * \widehat{\alpha}_p \right)(0) = \widehat{\alpha}_p(0) = p.$$

Επομένως, λόγω του μονοσημάντου της οριζόντιας ανύψωσης για δοσμένη αρχική συνθήκη, καταλήγουμε στο συμπέρασμα του λήμματος. $\square$

4.5.3 Πρόταση. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς ισχύει η σχέση

$$\tau_{\beta * \alpha} = \tau_\beta \circ \tau_\alpha.$$

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε $p \in \pi^{-1}((\beta * \alpha)(0)) = \pi^{-1}(\alpha(0))$, από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\tau_{\beta * \alpha}(p) &= \left(\widehat{\beta * \alpha} \right)_p(1) = \left(\widehat{\beta}_q * \widehat{\alpha}_p \right)(1) = \widehat{\beta}_q(1), \\ (\tau_\beta \circ \tau_\alpha)(p) &= \tau_\beta(\widehat{\alpha}_p(1)) = \tau_\beta(q) = \widehat{\beta}_q(1),\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η ζητούμενη ισότητα παραλλήλων μετατοπίσεων. $\square$

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε κλειστές καμπύλες. Ακριβέστερα, μία καμπύλη $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow B$ καλείται **κλειστή** (closed) αν $\alpha(0) = \alpha(1)$. Επίσης συμβολίζουμε με $C(b)$ το σύνολο όλων των κατά τμήματα διαφορισίμων και κλειστών καμπυλών $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow B$ με $\alpha(0) = \alpha(1) = b$.

4.5.4 Θεώρημα. Το σύνολο $\Phi_b = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in C(b)\}$, με πράξη τη σύνθεση παραλλήλων μετατοπίσεων, αποτελεί ομάδα, υποομάδα της ομάδας των αμφιδιαφορίσεων $\text{Diff}(\pi^{-1}(b))$ του νήματος $\pi^{-1}(b)$.

Απόδειξη. Αμεση συνέπεια των Λημμάτων 4.4.4, 4.4.5, του Θεωρήματος 4.4.6 και της Πρότασης 4.5.3. Σημειώνουμε ότι το ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση $id_{\pi^{-1}(b)}$, η οποία ταυτίζεται με την παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος της σταθερής καμπύλης $\alpha(t) = b$, για κάθε $t \in I$. $\square$

Η ομάδα Φ_b καλείται **ομάδα ολονομίας** της συνοχής ω [επi της δέσμης $(P, G.B, \pi)$], **με σημείο αναφοράς το $b \in B$** (holonomy group with reference point $b \in B$).

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την ομάδα ολονομίας με σημείο αναφοράς ένα δεδομένο (και σταθεροποιημένο) $p \in P$ με $\pi(p) = b$. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την απεικόνιση $\lambda_p: \Phi_b \rightarrow G$, όπου η εικόνα $\lambda_p(\tau_\alpha)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\tau_\alpha(p) = p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha), \quad \forall \tau_\alpha \in \Phi_b.$$

Πιο τεχνικά, μπορούμε να γράψουμε ότι $\lambda_p(\tau_\alpha) = k(p, \tau_\alpha(p))$. Η λ_p είναι καλά ορισμένη επειδή το στοιχείο $\lambda_p(\tau_\alpha)$, που δίνεται από την παραπάνω σχέση, είναι μονοσήμαντα ορισμένο, αφού τα p και $\tau_\alpha(p)$ ανήκουν στο ίδιο νήμα $\pi^{-1}(b)$ (βλ. Πρόταση 3.2.16 και Λήμμα 3.3.5).

4.5.5 Πρόταση. Η απεικόνιση λ_p είναι μονομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $\tau_\alpha, \tau_\beta \in \Phi_b$ με $\lambda_p(\tau_\alpha) = \lambda_p(\tau_\beta)$. Τότε, για το σταθεροποιημένο p , έχουμε ότι

$$\tau_\alpha(p) = p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha) = p \cdot \lambda_p(\tau_\beta) = \tau_\beta(p).$$

Άρα, για τυχόν $q \in \pi^{-1}(b)$, θα υπάρχει (μοναδικό) $g \in G$ με $q = pg$, οπότε (βλ. Λήμμα 4.4.3)

$$\tau_\alpha(q) = \tau_\alpha(pg) = \tau_\alpha(p) \cdot g = \tau_\beta(p) \cdot g = \tau_\beta(pg) = \tau_\beta(q),$$

που αποδεικνύει ότι $\tau_\alpha = \tau_\beta$, δηλαδή η λ_p είναι απεικόνιση 1-1.

Για να δείξουμε ότι η λ_p είναι μορφισμός ομάδων παρατηρούμε πρώτα ότι

$$(\tau_\beta \circ \tau_\alpha)(p) = p \cdot \lambda_p(\tau_\beta \circ \tau_\alpha).$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$\begin{aligned} (\tau_\beta \circ \tau_\alpha)(p) &= \tau_\beta(\tau_\alpha(p)) = \tau_\beta(p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha)) = \\ &= \tau_\beta(p) \cdot \lambda_p(\tau_\alpha) = p \cdot \lambda_p(\tau_\beta) \cdot \lambda_p(\tau_\alpha). \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις του $(\tau_\beta \circ \tau_\alpha)(p)$ καταλήγουμε στη σχέση $\lambda_p(\tau_\beta \circ \tau_\alpha) = \lambda_p(\tau_\beta) \cdot \lambda_p(\tau_\alpha)$, που δείχνει ότι η λ_p είναι μορφισμός ομάδων και ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θέτοντας

$$\Phi_p := \lambda_p(\Phi_b)$$

παίρνουμε μία ομάδα, την οποίαν καλούμε **ομάδα ολονομίας** της ω , **με σημείο αναφοράς το** $p \in P$ (holonomy group with reference point $p \in P$).

Θα δώσουμε μιαν άλλη ερμηνεία της ομάδας Φ_p που βασίζεται στις οριζόντιες καμπύλες της P . Στην κατεύθυνση αυτή εισάγουμε την επόμενη σχέση ισοδυναμίας: Θα λέμε ότι δύο σημεία $p, q \in P$ είναι **ισοδύναμα**, συμβολικά γράφουμε $p \sim^h q$, αν αυτά συνδέονται με μία *οριζόντια* κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη, δηλαδή αν υπάρχει οριζόντια κ.τ. διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma: I \rightarrow P$ τέτοια ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma(1) = q$.

Σταθεροποιώντας, όπως πριν, το $p \in P$, ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{H}_p = \{g \in G \mid p \sim^h pg\}.$$

4.5.6 Θεώρημα. *Ισχύει σχέση $\Phi_p = \mathcal{H}_p$.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν στοιχείο του Φ_p . Αυτό θα έχει τη μορφή $\lambda_p(\tau_\alpha)$, για κάποιο $\tau_\alpha \in \Phi_b$, οπότε $\tau_\alpha(p) = p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha)$. Η οριζόντια ανύψωση $\hat{\alpha}_p$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\hat{\alpha}_p(0) = p \quad \text{και} \quad \hat{\alpha}_p(1) = \tau_\alpha(p) = p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha).$$

Άρα η $\hat{\alpha}_p$ είναι μία οριζόντια καμπύλη κ.τ. διαφορίσιμη με άκρα τα σημεία p και $p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha)$, δηλαδή $p \sim^h p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha)$, άρα $\lambda_p(\tau_\alpha) \in \mathcal{H}_p$, οπότε και $\Phi_p \subseteq \mathcal{H}_p$.

Αντιστρόφως. Έστω τυχόν $g \in \mathcal{H}_p$, οπότε $p \sim^h pg$. Αν γ είναι η οριζόντια καμπύλη με άκρα $\gamma(0) = p$ και $\gamma(1) = pg$, τότε (λόγω του μονοσημάντου της οριζόντιας ανύψωσης με δοσμένη αρχική συνθήκη) θα έχουμε ότι $\gamma = \hat{\alpha}_p$, όπου $\alpha = \pi \circ \gamma$. Επομένως, $p = \gamma(0) = \hat{\alpha}_p(0)$ και

$$(4.5.1) \quad pg = \gamma(1) = \hat{\alpha}_p(1) = \tau_\alpha(p).$$

Απ' το άλλο μέρος, $\tau_\alpha(p) = p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha)$. Η προηγούμενη σχέση μαζί με την (4.5.1) συνεπάγονται ότι $pg = p \cdot \lambda_p(\tau_\alpha)$. Συνεπώς $g = \lambda_p(\tau_\alpha)$, άρα $g \in \Phi_p$ και $\mathcal{H}_p \subseteq \Phi_p$, οπότε καταλήγουμε στη ζητούμενη ισότητα. $\square$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα δίνει μια απλούστερη ερμηνεία της ομάδας Φ_p : Είναι η υποομάδα της G , της οποίας τα στοιχεία g έχουν την ιδιότητα τα p και pg να συνδέονται με μια οριζόντια κ.τ. διαφορίσιμη καμπύλη.

Διατυπώνουμε τώρα και το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

4.5.7 Θεώρημα. *Η ομάδα ολονομίας Φ_p είναι ομάδα Lie, υποομάδα Lie της G .*

Για την απόδειξη του θεωρήματος, που υπερβαίνει το πλαίσιο αυτών των σημειώσεων, παραπέμπουμε στο [18]. Επίσης, για το απειροδιάστατο ανάλογο (στο πλαίσιο των πολλαπλοτήτων και πρωτευουσών δεσμών Banach) παραπέμπουμε στο [21].

Θα κλείσουμε αναφέροντας (χωρίς απόδειξη) ακόμη μερικές πληροφορίες για τις ομάδες ολονομίας (βλ. επίσης και [18], [27], [33]).

Αν στον ορισμό της ομάδας ολονομίας Φ_b περιοριστούμε σε καμπύλες α κ.τ. διαφορίσιμες, οι οποίες είναι επιπλέον *Ο-ομοιοτικές*, τότε παίρνουμε την **περιορισμένη ομάδα ολονομίας** (restricted holonomy group) Φ_b^0 και, μέσω της λ_p , την **περιορισμένη ομάδα ολονομίας** Φ_p^0 . Τα στοιχεία $g \in \Phi_p^0$ χαρακτηρίζονται τώρα από την ιδιότητα τα p και pg συνδέονται με οριζόντια καμπύλη της οποίας η προβολή στη βάση είναι Ο-ομοιοτική καμπύλη.

Αποδεικνύεται ότι και η Φ_p^0 είναι υποομάδα Lie της G , και συνεκτική συνιστώσα της Φ_p .

Ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι το *Θεώρημα της Ολονομίας*, μέσω του οποίου κατασκευάζεται η άλγεβρα Lie της ομάδας ολονομίας.

4.6 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

1. Να αποδειχθούν οι σχέσεις

$$T_p R_g(u^h) = [T_p R_g(u)]^h, \quad T_p R_g(u^v) = [T_p R_g(u)]^v,$$

για κάθε $u \in T_p P$.

2. Να αποδειχθεί η σχέση

$$T_p R_g(X_p^*) = [Ad(g^{-1})(X_e)]_{pg}^*,$$

για κάθε $X \in \mathcal{L}(G) \equiv \mathcal{G}$.

3. Να εξηγηθεί ο ισχυρισμός που κλείνει την απόδειξη του Λήμματος 4.4.4.

4. Να αποδειχθεί ότι μια οριζοντια καμπύλη $\alpha: I \rightarrow P$, με αρχή σημείο $p \in P$, είναι η οριζόντια ανύψωση καμπύλης $I \rightarrow B$, με αρχή $b = \pi(p)$.

5. Να αποδειχθεί η σχέση

$$\Phi_{p \cdot g} = g^{-1} \cdot \Phi_p \cdot g, \quad \forall (p, g) \in P \times B.$$

6. Θεωρούμε τις φυσικές τομές $\{s_i\}_{i \in I}$ μιάς πρωτεύουσας δέσμης P , ως προς μίαν απλοποιούσα κάλυψη $\mathcal{C} = \{U_i, \Phi_i\}_{i \in I}$. Αν ω είναι μία συνοχή επί της P , ορίζουμε τις **τοπικές μορφές συνοχής** (local connection forms) $\omega_i = s_i^* \omega \in \Lambda^1(U, \mathcal{G})$, $i \in I$. Να αποδειχθεί η επόμενη σχέση συμβιβαστότητας

$$\omega_{j,b}(v) = Ad(g_{ij}^{-1})\omega_{i,b}(v) + T_b(\lambda_{g_{ij}(b)^{-1}} \circ g_{ij})(v),$$

για κάθε $b \in U_i \cap U_j$ και κάθε $v \in T_b B$.

7. Θεωρούμε μία οικογένεια διαφορικών 1-μορφών $\omega_i \in \Lambda^1(U, \mathcal{G})$, $i \in I$, που ικανοποιεί τη σχέση συμβιβαστότητας της προηγούμενης άσκησης. Για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την απεικόνιση $g_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow G$, που δίνεται από τη σχέση

$$p = s_i(\pi(p)) \cdot g_i(p), \quad \forall p \in \pi^{-1}(U_i).$$

Τέλος, θέτουμε

$$\omega_p(u) = Ad(g_i(p)^{-1})((\pi^* \omega_i)_p(u)) + T_p(\lambda_{g_i^{-1}} \circ g_i)(u),$$

για κάθε $p \in P$, με $\pi(p) \in U_i$, και κάθε $u \in T_p P$. Να αποδειχθούν τα επόμενα:

- (i). Οι g_i είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις.
- (ii). Η ω είναι μία καλά ορισμένη διαφορική 1-μορφή επί της P με τιμές στην $\mathcal{G}$.
- (iii). Η ω είναι μορφή συνοχής, με τοπικές μορφές συνοχής ακριβώς τις δοθείσες ω_i .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

5

Ο Συναρτητής Τομή

When the basic concepts of category, functor, natural transformation and natural equivalence were first formulated by Eilenberg and MacLane they served immediately to provide the appropriate framework for describing the way in which algebraic tools were used, and could be used, in the study of topology.

I. BUCUR – A. DELEANU [[12](#), p. v]

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε ιδιαιτέρως την αλγεβρική δομή των διαφορισίμων (ολικών) τομών μιας διανυσματικής δέσμης. Οι τελευταίες αποτελούν ένα πρότυπο (module) υπεράνω της άλγεβρας $\mathbb{A}_X$ των διαφορισίμων συναρτήσεων στη βάση X της δέσμης. Απ' το άλλο μέρος, οι τομές εισάγουν ένα συναρτητή ανάμεσα στην

κατηγορία των διαφορισίμων διανυσματικών δεσμών $VB(X)$ και στην κατηγορία των $\mathbb{A}_X$ -προτύπων.

Το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου συνοψίζεται στο περιώνυμο θεώρημα Serre-Swan, το οποίον –περιγραφικά– αποδεικνύει ότι η κατηγορία των διανυσματικών δεσμών υπεράνω μιας συμπαγούς πολλαπλότητας X είναι ισοδύναμη (με την κατηγορική έννοια) με την κατηγορία των προβολικών πεπερασμένως παραγομένων προτύπων υπεράνω του $\mathbb{A}_X$. Η ισοδυναμία αυτή αποτελεί ένα από τα πιο ωραία παραδείγματα κατηγορικής ισοδυναμίας ανάμεσα σε μία διαφοροτοπολογική και μία αλγεβρική δομή.

Μερικές βασικές έννοιες, σχετικές με τις κατηγορίες και τους συναρτητές, καθώς και με τα προβολικά πρότυπα, περιέχονται στα Παραρτήματα **B'** και **F**, αντίστοιχως.

5.1 Οι τομές μιας διανυσματικής δέσμης

Στα επόμενα θεωρούμε μια διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και μία απλοποιούσα κάλυψή της $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{A}_X$ την άλγεβρα των C^∞ -συναρτήσεων επί του X με πραγματικές τιμές, δηλαδή

$$\mathbb{A}_X := C^\infty(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ διαφορίσιμη}\}$$

5.1.1 Ορισμός. Μια **τοπική τομή της** ℓ (local section) είναι μια απεικόνιση $\sigma: A \rightarrow E$ με $A \subset X$ και $\pi \circ \sigma = id_A$. Μια **ολική τομή** (global section) της ℓ είναι μια $\sigma: X \rightarrow E$ με $\pi \circ \sigma = id_X$.

Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε πάντοτε σε *διαφορίσιμες* τομές πάνω από *ανοιχτά υποσύνολα* του X . Το σύνολο των διαφορίσιμων τομών πάνω από ένα ανοιχτό $U \subseteq X$, θα το συμβολίζουμε με $\Gamma(U, E)$.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι μια τομή της ℓ είναι μια τομή της εμβάπτισης π . Αυτή η παρατήρηση εξασφαλίζει την ύπαρξη τοπικών τομών (και μάλιστα με ορισμένη αρχική συνθήκη), δηλαδή ότι, για κάθε $x \in X$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x , έτσι ώστε $\Gamma(U, E) \neq \emptyset$. Η δομή διανυσματικού χώρου στα νήματα όμως μας εξασφαλίζει την ύπαρξη διαφορίσιμης τομής σε οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το

5.1.2 Λήμμα. Για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό, είναι $\Gamma(U, E) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση

$$\Omega: U \longrightarrow E: x \mapsto 0_x,$$

όπου 0_x είναι το μηδενικό στοιχείο του E_x , είναι διαφορίσιμη τομή. Για την διαφορισιμότητα της σε ένα σημείο $x \in U$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει

απλοποιούν ζεύγος (V, τ) της ℓ με $x \in U \cap V$. Η Ω είναι διαφορίσιμη στο $U \cap V$ αν και μόνον αν η $\tau \circ \Omega: U \cap V \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη (βλ. και το επόμενο διάγραμμα)

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\tau} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\ \Omega \uparrow & \nearrow (id_{U \cap V}, c) & \\ U \cap V & & \end{array}$$

Διάγραμμα 5.1

Όμως, για κάθε $y \in U \cap V$, είναι

$$\tau \circ \Omega(y) = \tau(0_y) = (y, \tau_y(0_y)) = (y, 0) = (id, c)(y),$$

όπου $c(y) = 0$, σταθερά. □

Γενικεύοντας την απόδειξη για την διαφορισμότητα της Ω , έχουμε το επόμενο

5.1.3 Λήμμα. Η διαφορισμότητα μιας τομής σ πάνω από το πεδίο ορισμού U ενός απλοποιούντος ζεύγους (U, τ) είναι ισοδύναμη με την διαφορισμότητα της δεύτερης προβολής της σύνθεσης $\tau \circ \sigma$, δηλαδή της

$$\overline{\sigma}_\tau := p_2 \circ \tau \circ \sigma: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

5.1.4 Πρόταση. Για κάθε ανοιχτό υποσύνολο U του X , το σύνολο $\Gamma(U, E)$ είναι $\mathbb{A}_U$ -προτύπο, με τις κατά σημείον πράξεις.

Απόδειξη. Προφανώς, για κάθε $s, \sigma \in \Gamma(U, E)$ και $f \in \mathbb{A}_U$ η απεικόνιση

$$fs + \sigma: U \longrightarrow E: x \mapsto f(x)s(x) + \sigma(x)$$

είναι τομή. Επίσης, τα αξιώματα του $\mathbb{A}_U$ -προτύπου ελέγχονται αμέσως.

Αποδεικνύουμε την διαφορισμότητα της $fs + \sigma$ πάνω από ένα απλοποιούν ζεύγος (V, τ) , με $U \cap V \neq \emptyset$: Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.3, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} p_2 \circ \tau \circ (fs + \sigma)(x) &= \tau_x(f(x)s(x) + \sigma(x)) \\ &= f(x)\tau_x(s(x)) + \tau_x(\sigma(x)) \\ &= (f\overline{\tau}_\tau + \overline{\sigma}_\tau)(x). \end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $\Gamma(\ell)$ το σύνολο των διαφορισίμων ολικών τομών της ℓ , δηλαδή

$$\Gamma(\ell) := \Gamma(X, E).$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το $\Gamma(\ell)$ είναι $\mathbb{A}_X$ -πρότυπο.

5.1.5 Πρόταση. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X) \in VB(X)$, $i = 1, 2, 3$, και

$$Mor(\ell_1, \ell_2) := \{f: \ell_1 \rightarrow \ell_2 : \text{μορφισμός εν } VB(X)\},$$

$$Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)) := \{F: \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2) : \text{μορφισμός } \mathbb{A}_X\text{-προτύπων}\},$$

τότε η ισότητα

$$\Gamma(f)(s) := f \circ s, \quad \forall f \in Mor(\ell_1, \ell_2), s \in \Gamma(\ell_1),$$

ορίζει μια αντιστοιχία

$$\Gamma(f): \Gamma(\ell_1) \longrightarrow \Gamma(\ell_2),$$

η οποία έχει τις ιδιότητες

$$(5.1.1) \quad \Gamma(id_{\ell_1}) = id_{\Gamma(\ell_1)},$$

$$(5.1.2) \quad \Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f), \quad \forall f \in Mor(\ell_1, \ell_2), g \in Mor(\ell_2, \ell_3).$$

Επιπλέον, η απεικόνιση

$$\Gamma: Mor(\ell_1, \ell_2) \longrightarrow Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$$

είναι μορφισμός $\mathbb{A}_X$ -προτύπων.

Απόδειξη. Το $Mor(\ell_1, \ell_2)$ είναι $\mathbb{A}_X$ -πρότυπο (βλ. σχετικά Πρόταση 2.5.1 και Λήμμα 2.6.11). Επίσης, επαληθεύεται αμέσως ότι και το $Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$ είναι $\mathbb{A}_X$ -πρότυπο.

Διαπιστώνουμε ότι $\Gamma(f) \in Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$, για κάθε $f \in Mor(\ell_1, \ell_2)$. Πράγματι, αν $s, \sigma \in \Gamma(\ell_1)$ και $a \in \mathbb{A}_X$, τότε

$$\begin{aligned} \Gamma(f)(as + \sigma)(x) &= f \circ (as + \sigma)(x) \\ &= f_x(a(x) \cdot s(x) + \sigma(x)) \\ &= a(x) \cdot f_x(s(x)) + f_x(\sigma(x)) \\ &= (a \cdot (f \circ s) + (f \circ \sigma))(x), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή

$$\Gamma(f)(as + \sigma) = a \cdot (f \circ s) + (f \circ \sigma) = a \cdot \Gamma(f)(s) + \Gamma(f)(\sigma),$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό, και ταυτόχρονα ότι η Γ πράγματι παίρνει τιμές στο $Mor(\ell_1, \ell_2)$.

Οι σχέσεις (5.1.1) και (5.1.2) είναι προφανείς. Τέλος η Γ είναι μορφισμός $\mathbb{A}_X$ -προτύπων, δηλαδή

$$\Gamma(af + g) = a \cdot \Gamma(f) + \Gamma(g),$$

για κάθε $a \in \mathbb{A}_X$ και $f, g \in Mor(\ell_1, \ell_2)$. Πράγματι, για κάθε $s \in \Gamma(\ell_1)$ και $x \in X$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (\Gamma(af + g)(s))(x) &= ((af + g) \circ s)(x) \\ &= (a(f \circ s) + (g \circ s))(x) \\ &= a(x) \cdot (f \circ s)(x) + (g \circ s)(x) \\ &= (a \cdot \Gamma(f)(s) + \Gamma(g)(s))(x) \\ &= [(a \cdot \Gamma(f) + \Gamma(g))(s)](x), \end{aligned}$$

με την οποία αποδεικνύεται η τελευταία ιδιότητα της Γ . $\square$

Οι αντιστοιχίες

$$\ell \rightsquigarrow \Gamma(\ell),$$

$$Mor(\ell_1, \ell_2) \ni f \rightsquigarrow \Gamma(f) \in Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)),$$

που ικανοποιούν τις ιδιότητες (5.1.1) και (5.1.2), ορίζουν ένα **συναλλοίωτο συναρτητή** (covariant functor)

$$\Gamma: VB(X) \longrightarrow Mod(\mathbb{A}_X)$$

από την κατηγορία $VB(X)$ των διανυσματικών δεσμών, πάνω από σταθερή βάση X , στην κατηγορία $Mod(\mathbb{A}_X)$ των $\mathbb{A}_X$ -προτύπων. Ο Γ καλείται και **συναρτητής τομή** (section functor)

5.1.6 Πρόταση. Αν $\ell_i = (E_i, \pi_i, X) \in VB(X)$, $i = 1, 2$, τότε

$$\Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2) = \Gamma(\ell_1) \oplus \Gamma(\ell_2)$$

μέσω ισομορφίας.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$F: \Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2) \longrightarrow \Gamma(\ell_1) \oplus \Gamma(\ell_2) : s \mapsto (\Gamma(P_1)(s), \Gamma(P_2)(s)),$$

όπου $P_i: \ell_1 \oplus \ell_2 \rightarrow \ell_i$ είναι η κανονική προβολή στον αντίστοιχο παράγοντα (βλ. Πρόταση 2.5.2). Ελέγχουμε στοιχειωδώς ότι η F αποτελεί πράγματι ισομορφισμός $\mathbb{A}_X$ -προτύπων. $\square$

Οι σχέσεις

$$\begin{aligned}\Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2) &= \Gamma(\ell_1) \oplus \Gamma(\ell_2), \\ \Gamma(f + g) &= \Gamma(f) + \Gamma(g),\end{aligned}$$

σημαίνουν ότι ο συναρτητής $\Gamma: VB(X) \rightarrow Mod(\mathbb{A}_X)$ είναι **προσθετικός** (additive).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι (U, τ) είναι απλοποιούν ζεύγος της ℓ . Αν η ℓ έχει νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε την n -άδα των απεικονίσεων

$$\sigma_i: U \longrightarrow \pi^{-1}(U): x \mapsto \tau^{-1}(x, e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Προφανώς αυτές είναι διαφορίσιμες τοπικές τομές πάνω από το U , δηλαδή

$$\sigma_i \in \Gamma(U, E); \quad i = 1, \dots, n.$$

Επίσης, για κάθε $x \in U$, η οικογένεια

$$\{\sigma_i(x) := \tau_x^{-1}(e_i)\}_{1 \leq i \leq n}$$

είναι **βάση του** E_x .

Έστω $\sigma \in \Gamma(U, E)$. Επειδή $\sigma(x) \in E_x$, θα υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα στοιχεία $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x) \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \cdot \sigma_i(x).$$

Ορίζεται λοιπόν μια n -άδα απεικονίσεων $\alpha_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$(5.1.3) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i.$$

Οι α_i είναι διαφορίσιμες. Πράγματι, επειδή η σ είναι διαφορίσιμη, κατά το Λήμμα 5.1.3 θα είναι διαφορίσιμη και η

$$\overline{\sigma}_\tau := p_2 \circ \tau \circ \sigma: U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Οπότε, για κάθε $x \in U$,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_\tau(x) &= p_2 \circ \tau(\sigma(x)) = \tau_x(\sigma(x)) \\ &= \tau_x\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \cdot \sigma_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i \\ &= (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))\end{aligned}$$

που αποδεικνύει τη διαφορισμότητα κάθε α_i . Επομένως, για κάθε $\sigma \in \Gamma(U, E)$, υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη n -άδα $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{A}_U$, ώστε να ισχύει η σχέση (5.1.3). Με άλλα λόγια, η $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{A}_U$ -προτύπου $\Gamma(U, E)$ ή, ισοδύναμα,

$$\Gamma(U, E) \cong \mathbb{A}_U^n.$$

Αντικαθιστώντας το U με X καταλήγουμε στο

5.1.7 Θεώρημα. *Αν η $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ είναι τετριμμένη, τότε το $\Gamma(\ell)$ είναι ένα ελεύθερο, πεπερασμένως παραγόμενο $\mathbb{A}_X$ -πρότυπο. Ειδικότερα, αν η ℓ έχει νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\Gamma(\ell) \cong \mathbb{A}_X^n.$$

5.2 Η ισομορφία των $Mor(\ell_1, \ell_2)$ και $Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2))$

Θα μελετήσουμε τώρα αναλυτικότερα την αντιστοιχία

$$(5.2.1) \quad \Gamma : Mor(\ell_1, \ell_2) \longrightarrow Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)),$$

για δύο δεδομένες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$. Γνωρίζουμε ήδη ότι η Γ είναι μορφισμός $\mathbb{A}_X$ -προτύπων (Πρόταση 5.1.5). Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι είναι *ισομορφισμός $\mathbb{A}_X$ -προτύπων*.

5.2.1 Λήμμα. *Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, $U \subseteq X$ ανοιχτό και $s \in \Gamma(U, E)$. Τότε, για κάθε $x_o \in U$, υπάρχει ανοιχτό $U_o \subseteq U$ με $x_o \in U_o$ και $\tilde{s} \in \Gamma(\ell)$, έτσι ώστε*

$$\tilde{s}(x) = s(x), \quad \forall x \in U_o.$$

Δηλαδή, κάθε τοπική τομή επεκτείνεται κατάλληλα σε ολική τομή της δέσμης.

Απόδειξη. Έστω $x_o \in U$ και ανοιχτά U_o, V με $x_o \in U_o \subset \bar{U}_o \subset V \subset \bar{V} \subset U$, καθώς και διαφορίσιμη συνάρτηση $a \in \mathbb{A}_X$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} 0 &\leq a(x) \leq 1, & \forall x \in X, \\ a(\bar{U}_o) &= 1 & \text{και} & \quad a(V^c) = 0. \end{aligned}$$

(Υπάρχουν τέτοια ανοιχτά σύνολα και συνάρτηση a από την κατασκευή της *bump function*. Βλ., για παράδειγμα, [20]).

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η απεικόνιση $\tilde{s} : X \rightarrow E$, με

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} a(x) \cdot s(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

είναι η ζητούμενη ολική τομή. □

Εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, όπως φαίνεται και στην προηγούμενη απόδειξη, δεν επεκτείνουμε ακριβώς την $s \in \Gamma(U, E)$, αλλά τον περιορισμό της $s|_{U_o}$ στο ανοιχτό υποσύνολο U_o που περιέχει το υπόψη σημείο x_o . Επίσης, κάθε άλλο σημείο του U , θα ορίζει μια άλλη επέκταση.

5.2.2 Λήμμα. Η απεικόνιση (5.2.1) είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in Mor(\ell_1, \ell_2)$ με $\Gamma(f) = \Gamma(g)$. Θα δείξουμε ότι για τυχόν $u_o \in E_1$, είναι $f(u_o) = g(u_o)$: Έστω $x_o := \pi_1(u_o)$ και (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ_1 με $x_o \in U$. Τότε υπάρχει $s \in \Gamma(U, E_1)$ με $s(x_o) = u_o$. Πράγματι, αν $h_o = \tau_{x_o}(u_o) \in \mathbb{R}^n$, η

$$s: U \longrightarrow E : x \mapsto \tau^{-1}(x, h_o)$$

ορίζει (διαφορίσιμη) τομή που ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη. Αν θεωρήσουμε και μίαν αντίστοιχη ολική τομή $\tilde{s}$ όπως στο Λήμμα 5.2.1, διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \Gamma(f) = \Gamma(g) &\Rightarrow \Gamma(f)(\tilde{s}) = \Gamma(g)(\tilde{s}) \\ &\Rightarrow f \circ \tilde{s} = g \circ \tilde{s} \\ &\Rightarrow (f \circ \tilde{s})(x_o) = (g \circ \tilde{s})(x_o) \\ &\Rightarrow f(u_o) = g(u_o), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει ότι $f = g$. □

5.2.3 Λήμμα. Έστω $s \in \Gamma(\ell)$ και $x_o \in X$ με $s(x_o) = 0$. Τότε υπάρχουν $s_i \in \Gamma(\ell)$ και $a_i \in \mathbb{A}_X$ ($i = 1, \dots, k$), με $a_i(x_o) = 0$ και

$$s = \sum_{i=1}^k a_i s_i.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η ℓ έχει τύπο νήματος $\mathbb{R}^n$. Έστω (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ με $x_o \in U$. Για τον περιορισμό $s|_U$ υπάρχουν $b_i \in \mathbb{A}_U$, $i = 1, \dots, n$, έτσι ώστε

$$s|_U = \sum_{i=1}^n b_i s_i,$$

όπου $\{s_i\}_{1 \leq i \leq n}$ βάση του $\Gamma(U, E)$. Έστω τώρα U_o, V και a όπως στην απόδειξη του Λήμματος 5.2.1. Θέτουμε

$$\tilde{b}_i(x) := \begin{cases} a(x) \cdot b_i(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

και

$$\tilde{s}_i(x) := \begin{cases} a(x) \cdot s_i(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

Τότε $\tilde{b}_i \in \mathbb{A}_X$, $\tilde{s}_i \in \Gamma(\ell)$, $\tilde{b}_i(x_o) = 0$ [γιατί $b_i(x_o) = 0$] και

$$(5.2.2) \quad s(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x), \quad \forall x \in U_o.$$

Ονομάζουμε s' τη διαφορά

$$(5.2.3) \quad s' := s - \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \tilde{s}_i.$$

Θεωρούμε μια ανοιχτή περιοχή W του x_o με $\overline{W} \subset U_o$, και μία συνάρτηση $b \in \mathbb{A}_X$ με $b(x_o) = 0$, $b(W^c) = 1$. Τότε, για κάθε $x \in W \subset U_o$, είναι

$$\begin{aligned} s(x) &= b(x) \cdot s'(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x) \\ &= b(x) \cdot 0 + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x), \end{aligned}$$

λόγω της (5.2.2), ενώ, για κάθε $x \in W^c$,

$$\begin{aligned} s(x) &= b(x) \cdot s'(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x) \\ &= 1 \cdot s'(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \cdot \tilde{s}_i(x), \end{aligned}$$

λόγω της (5.2.3). Άρα

$$s = bs' + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \tilde{s}_i,$$

με $b(x_o) = \tilde{b}_i(x_o) = 0$. □

Όπως φαίνεται στην προηγούμενη απόδειξη, αν η ℓ έχει νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$, τότε $k = n + 1$, οπότε $(a_1, \dots, a_{n+1}) = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, b)$ και $(s_1, \dots, s_{n+1}) = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n, s')$. Επιπλέον, η έκφραση της s , όπως δίνεται στην εκφώνηση του λήμματος, δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

5.2.4 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $x \in X$. Θέτουμε

$$M_x := \{s \in \Gamma(\ell) : s(x) = 0\}.$$

Τότε το M_x είναι $\mathbb{A}_X$ -υποπρότυπο του $\Gamma(\ell)$ και

$$\Gamma(\ell)/M_x \cong E_x.$$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι M_x έχει δομή $\mathbb{A}_X$ -προτύπου. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi: \Gamma(\ell) \longrightarrow E_x : s \mapsto s(x)$$

και θα δείξουμε ότι είναι επιμορφισμός διανυσματικών χώρων. Δείχνουμε μόνο το επί της απεικόνισης Φ . Πράγματι, αν $u \in E_x$, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, τ) με $x \in U$, και την τοπική τομή $\sigma \in \Gamma(U, E)$ με $\sigma(x) = u$. (βλ. σχετικό ισχυρισμό στην απόδειξη του Λήμματος 5.2.2). Εφαρμόζοντας κατόπιν το Λήμμα 5.2.1, επεκτείνουμε τη σ σε μία $s \in \Gamma(X, E) = \Gamma(\ell)$, οπότε $\Phi(s) = u$. Επομένως $E_x \cong \Gamma(\ell)/\ker \Phi$. Όμως, $\ker \Phi = M_x$, οπότε έχουμε το αποτέλεσμα. $\square$

5.2.5 Λήμμα. Η απεικόνιση Γ , που δίνεται από την (5.2.1), είναι επί.

Απόδειξη. Έστω $F: \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2)$ ένας μορφισμός $\mathbb{A}_X$ -προτύπων. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ μορφισμός στην $VB(X)$, τέτοιος ώστε $\Gamma(f) = F$.

Παρατηρούμε ότι αν, για κάθε $x \in X$, θέσουμε

$$M_x^i := \{s \in \Gamma(\ell_i) : s(x) = 0\}, \quad i = 1, 2,$$

τότε θα είναι

$$(5.2.4) \quad F(M_x^1) \subseteq M_x^2.$$

Πράγματι, για τυχόν $s \in M_x^1$, από το Λήμμα 5.2.3 προκύπτει ότι $s = \sum_{i=1}^k a_i s_i$, με $a_i(x) = 0$, για κάθε ένα x χωριστά. Επομένως,

$$F(s) = \sum_{i=1}^k a_i F(s_i), \quad \text{με } a_i(x) = 0.$$

Άρα $F(s)(x) = 0$ και $F(s) \in M_x^2$. Μέσω της (5.2.4), για κάθε $x \in X$, εισάγεται ένας καλά ορισμένος μορφισμός διανυσματικών χώρων ($\mathbb{R}$ -γραμμική απεικόνιση)

$$\hat{f}_x: \Gamma(\ell_1)/M_x^1 \longrightarrow \Gamma(\ell_2)/M_x^2 : s + M_x^1 \mapsto F(s) + M_x^2,$$

ο οποίος επάγεται τον μορφισμό $f_x: E_{1x} \rightarrow E_{2x}$ μεταξύ των αντιστοιχών νημάτων, σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.4.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\ell_1)/M_x^1 & \xrightarrow{\hat{f}_x} & \Gamma(\ell_2)/M_x^2 \\ \hat{\Phi}_1 \downarrow & & \downarrow \hat{\Phi}_2 \\ E_{1x} & \xrightarrow{f_x} & E_{2x} \end{array}$$

Διάγραμμα 5.2

$[\hat{\Phi}_i]$ οι γραμμικοί ισομορφισμοί που επάγονται οι Φ_i ($i=1,2$) του Λήμματος 5.2.4].

Ένα $u \in E_{1x}$ αντιστοιχεί μέσω του ισομορφισμού $\hat{\Phi}_1$ στην κλάση $s + M_x^1$, όπου $s \in \Gamma(\ell_1)$ είναι τυχούσα τομή με $s(x) = u$. Η $\hat{f}_x$ απεικονίζει το $s + M_x^1$ στο $F(s) + M_x^2$ που αντιστοιχεί, μέσω του ισομορφισμού $\hat{\Phi}_2$ στο $F(s)(x) \in E_{2x}$. Δηλαδή

$$f_x(u) = F(s)(x).$$

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$f := \bigcup_{x \in X} f_x: E_1 \longrightarrow E_2.$$

Προφανώς $\pi_2 \circ f = \pi_1$ και οι περιορισμοί της f στα νήματα, δηλαδή οι απεικονίσεις f_x , είναι γραμμικές.

Για την διαφορισμότητα της f προχωρούμε ως εξής: Έστω $u_o \in E_{1x_o} \subset E_1$. Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη σε μια περιοχή του u_o . Εφόσον $x_o := \pi_1(u_o)$, θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U, τ) της ℓ_1 με $x_o \in U$, τις βασικές τομές $\{\sigma_i\}_{i=1, \dots, n(1)}$ της ℓ πάνω από το U , και τις ολικές επεκτάσεις τους $\tilde{\sigma}_i$ με $\tilde{\sigma}_i|_{U_o} = \sigma_i$, $x_o \in U_o \subseteq U$ (βλ. Λήμμα 5.2.1). Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο U_o , δείχνοντας ότι $f \circ \tau^{-1}$ είναι διαφορίσιμη στο $U_o \times \mathbb{R}^{n(1)}$. Πράγματι, για $(x, h) \in U_o \times \mathbb{R}^{n(1)}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f \circ \tau^{-1}(x, h) &= f_x(\tau_x^{-1}(h)) = f_x \left(\sum_{i=1}^{n(1)} h_i \cdot \tau_x^{-1}(e_i) \right) \\ &= f_x \left(\sum_{i=1}^{n(1)} h_i \cdot \sigma_i(x) \right) = \sum_{i=1}^{n(1)} h_i \cdot f_x(\tilde{\sigma}_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n(1)} h_i \cdot F(\tilde{\sigma}_i)(x), \end{aligned}$$

που είναι διαφορίσιμη έκφραση των x, h , αφού οι $F(\tilde{\sigma}_i)$ είναι διαφορίσιμες τομές.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι $\Gamma(f) = F$: Για κάθε $s \in \Gamma(\ell_1)$ και $x \in X$, είναι

$$\Gamma(f)(s)(x) = (f \circ s)(x) = f_x(s(x) = u) = F(s)(x),$$

με την οποίαν κλείνει η απόδειξη. $\square$

Έχουμε αποδείξει επομένως το επόμενο βασικό αποτέλεσμα :

5.2.6 Θεώρημα. Η απεικόνιση

$$\Gamma: Mor(\ell_1, \ell_2) \longrightarrow Mor(\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)) : f \mapsto \Gamma(f)$$

είναι ισομορφισμός $\mathbb{A}_X$ -προτύπων, για κάθε $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$.

Σύμφωνα με την κατηγορική ορολογία, το Θεώρημα 5.2.6 σημαίνει ότι ο συναρτητής τομή $\Gamma: VB(X) \rightarrow Mod(\mathbb{A}_X)$ είναι **πλήρως πιστός** (completely faithful).

Όπως συμβαίνει και με κάθε άλλο συναρτητή, αν οι δέσμες ℓ_1, ℓ_2 είναι ισομόρφες, τότε και οι εικόνες τους $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)$ είναι ισόμορφες. Πράγματι, αν

$$f: \ell_1 \longrightarrow \ell_2 \quad \text{και} \quad g: \ell_2 \longrightarrow \ell_1$$

είναι μορφισμοί εν $VB(X)$, με

$$g \circ f = id_{\ell_1} \quad \text{και} \quad f \circ g = id_{\ell_2},$$

τότε, λόγω των (5.1.1) και (5.1.2), είναι

$$\Gamma(g) \circ \Gamma(f) = \Gamma(g \circ f) = \Gamma(id_{\ell_1}) = id_{\Gamma(\ell_1)}$$

και, ανάλογα,

$$\Gamma(f) \circ \Gamma(g) = id_{\Gamma(\ell_2)},$$

δηλαδή ο $\Gamma(f): \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2)$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον $\Gamma(g) = \Gamma(f^{-1})$.

Το αντίστροφο συμπέρασμα, δηλαδή από ισόμορφες εικόνες να συνάγεται ότι είναι ισόμορφα και τα αρχικά αντικείμενα, δεν συμβαίνει για κάθε συναρτητή. Συμβαίνει όμως, όπως εδώ, όταν ο συναρτητής είναι πλήρως πιστός.

Πράγματι, έστω $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$, με $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)$ ισόμορφα στην κατηγορία των $\mathbb{A}_X$ -προτύπων $Mod(\mathbb{A}_X)$. Ας συμβολίσουμε με $F: \Gamma(\ell_1) \rightarrow \Gamma(\ell_2)$ τον ισομορφισμό και $G: \Gamma(\ell_2) \rightarrow \Gamma(\ell_1)$ τον αντίστροφό του. Από το επί της (5.2.1)

(βλ. Λήμμα 5.2.5), υπάρχουν μορφισμοί $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ και $g: \ell_2 \rightarrow \ell_1$ με $\Gamma(f) = F$, $\Gamma(g) = G$. Τότε

$$\Gamma(f \circ g) = \Gamma(f) \circ \Gamma(g) = F \circ G = id_{\Gamma(\ell_2)} = \Gamma(id_{\ell_2})$$

και από το 1-1 της (5.2.1) (βλ. Λήμμα 5.2.2), $f \circ g = id_{\ell_2}$. Ανάλογα $g \circ f = id_{\ell_1}$, άρα οι ℓ_1, ℓ_2 είναι ισόμορφες διανυσματικές δέσμες.

Επομένως, καταλήγουμε στα επόμενα συμπεράσματα:

5.2.7 Πόρισμα. Οι δέσμες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$ είναι ισόμορφες, αν και μόνον αν τα αντίστοιχα πρότυπα $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2) \in Mod(\mathbb{A}_X)$ είναι ισόμορφα.

Επίσης, σε συνδυασμό και με το Θεώρημα 5.1.7, έχουμε:

5.2.8 Πόρισμα. Η δέσμη $\ell \in VB(X)$ είναι τετριμμένη αν και μόνον αν το $\Gamma(\ell)$ είναι ελεύθερο πεπερασμένως παραγόμενο $\mathbb{A}_X$ -πρότυπο.

5.3 Το Θεώρημα Serre-Swan

Το αναφερόμενο στον τίτλο της παραγράφου θεώρημα (που διατυπώνεται ακριβώς ως Θεώρημα 5.3.4) αποδείχτηκε από τον J.P. Serre το 1955, για αλγεβρικές διανυσματικές δέσμες πάνω από μια συσχετισμένη πολλαπλότητα (algebraic vector bundles over an affine variety) και γενικεύθηκε από τον R. Swan το 1961 για τοπολογικές διανυσματικές δέσμες πάνω από μια συμπαγή, Hausdorff βάση. Σήμερα είναι γνωστές διάφορες γενικεύσεις του για τοπολογικές και διαφορικές δέσμες με νήματα χώρους Banach, πρότυπα πάνω από μια τοπολογική άλγεβρα, ένα τοπολογικό δακτύλιο κλπ.

Σε όλη την παράγραφο, η βάση της δέσμης θα είναι συμπαγής.

5.3.1 Θεώρημα. Έστω X συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα και $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Τότε υπάρχει $\ell' = (E', \pi', X) \in VB(X)$, έτσι ώστε δέσμη $\ell \oplus \ell'$ να είναι τετριμμένη.

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \tau_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ μια πεπερασμένη απλοποιούσα κάλυψη της ℓ και $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq k}$ μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας (βλ. σχετικούς ορισμούς στη σελ. 83). Αν $\mathbb{R}^n$ είναι ο τύπος νήματος της ℓ , θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: E \longrightarrow X \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ παράγοντες}}:$$

$$u \mapsto (x := \pi(u), \psi_1(x) \cdot \tau_{1x}(u), \dots, \psi_k(x) \cdot \tau_{kx}(u)).$$

Η f είναι 1-1 μορφισμός της ℓ στην τετριμμένης δέσμη $(X \times \mathbb{R}^{n \cdot k}, p_1, X)$. Πράγματι, $p_1 \circ f = \pi$, ενώ ο περιορισμός της στο νήμα E_x είναι η k -άδα γραμμικών απεικονίσεων

$$(\psi_1(x) \cdot \tau_{1x}, \dots, \psi_k(x) \cdot \tau_{kx}).$$

Επίσης είναι διαφορίσιμη, αφού η πρώτη συντεταγμένη της είναι διαφορίσιμη, και οι άλλες συντεταγμένες είναι της μορφής

$$u \mapsto (\psi_i \circ \pi)(u) \cdot \tau_i(u) = ((\psi_i \circ \pi) \cdot \tau_i)(u)$$

που είναι διαφορίσιμες κατά το Λήμμα 2.6.11.

Για το 1-1, παρατηρούμε ότι η $f(u) = f(v)$ συνεπάγεται ότι

$$\pi(u) = \pi(v) =: x,$$

και

$$\psi_i(x) \cdot \tau_{ix}(u) = \psi_i(x) \cdot \tau_{ix}(v), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Όμως η σχέση $\sum_{i=1}^k \psi_i(x) = 1$ σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα $\psi_i(x)$ είναι μη μηδενικό, και γι' αυτό το i , $\tau_{ix}(u) = \tau_{ix}(v)$, απ' όπου έπεται ότι $u = v$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O} & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f} & X \times \mathbb{R}^{n \cdot k} \cong \operatorname{Im} f \oplus \ker f' \\ & & \searrow id_E & & \downarrow f' \\ & & & & E \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{O} \end{array}$$

Διάγραμμα 5.3

Έστω $f': X \times \mathbb{R}^{n \cdot k} \rightarrow E$ μορφισμός επί, έτσι ώστε $f' \circ f = id_E$. Η ύπαρξη ενός τέτοιου μορφισμού εξασφαλίζεται από την Πρόταση 2.6.12. Τότε $\operatorname{Im} f$ και $\ker f'$ είναι υποδέσμες της $X \times \mathbb{R}^{n \cdot k}$ (βλ. Προτάσεις 2.6.7 (i) και 2.6.8). Επιπλέον, $\operatorname{Im} f \oplus \ker f' = X \times \mathbb{R}^{n \cdot k}$, αφού ελέγχεται ότι η ισότητα ισχύει στα νήματα. Θετώντας $\ell' = (\ker f', \pi', X)$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

5.3.2 Πόρισμα. Έστω X συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα. Τότε, για κάθε $\ell \in VB(X)$, το $\Gamma(\ell)$ είναι προβολικό πεπερασμένως παραγόμενο $\mathbb{A}_X$ -πρότυπο (finitely generated projective module).

Απόδειξη. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $\ell' \in VB(X)$, έτσι ώστε $\ell \oplus \ell' = \ell_o$, όπου ℓ_o είναι η τετριμμένη δέσμη με νήματα τύπου, έστω, $\mathbb{R}^m$. Η προσθετικότητα του συναρτητή Γ μας δίνει την

$$\Gamma(\ell) \oplus \Gamma(\ell') = \Gamma(\ell_o)$$

(βλ. Πρόταση 5.1.6). Όμως, κατά το Θεώρημα 5.1.7, $\Gamma(\ell_o) \cong \mathbb{A}_X^m$. Άρα

$$\Gamma(\ell) \oplus \Gamma(\ell') = \mathbb{A}_X^m,$$

δηλαδή το $\Gamma(\ell)$ είναι ευθύς προσθεταίος ενός ελευθέρου πεπερασμένως παραγόμενου $\mathbb{A}_X$ -πρότυπου, συνεπώς, εξ ορισμού, είναι *προβολικό πεπερασμένως παραγόμενο* (βλ. σχετικά και στο Παράρτημα Γ). $\square$

Είδαμε ότι αν η βάση X είναι συμπαγής, ο συναρτητής Γ παίρνει τις τιμές του στην υποκατηγορία $\mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$ των προβολικών πεπερασμένως παραγόμενων $\mathbb{A}_X$ -προτύπων. Δηλαδή

$$\Gamma: VB(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A}_X) \subseteq Mod(\mathbb{A}_X).$$

Θα αποδείξουμε ότι ο Γ είναι και *επί* του $\mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το

5.3.3 Θεώρημα. *Αν X είναι συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα, τότε για ένα $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$ υπάρχει $\ell \in VB(X)$, έτσι ώστε $\Gamma(\ell) \equiv M$.*

Απόδειξη. Αφού $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$, υπάρχει ελεύθερο πεπερασμένως παραγόμενο $\mathbb{A}_X$ -πρότυπο $\mathbb{A}_X^m$ και προβολέας $P: \mathbb{A}_X^m \rightarrow \mathbb{A}_X^m$ με $\text{Im } P = M$ (βλ. Παράρτημα Γ). Τότε

$$(5.3.1) \quad M \oplus N \cong \mathbb{A}_X^m, \quad \text{όπου } N = \ker P.$$

Έστω ℓ_o η τετριμμένη δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^m$. Επειδή $\mathbb{A}_X^m = \Gamma(\ell_o)$, για τον μορφισμό P θα υπάρχει (κατά το Θεώρημα 5.2.6) ένας μοναδικός μορφισμός $p: \ell_o \rightarrow \ell_o$ με $\Gamma(p) = P$. Επίσης, επειδή

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(p \circ p) = \Gamma(p)^2 = P^2 = P = \Gamma(p),$$

το 1-1 της Γ συνεπάγεται ότι ο p είναι προβολέας. Επίσης είναι προβολέας και ο μορφισμός $1 - p: \ell_o \rightarrow \ell_o$, όπου $1 = id_{\ell_o}$. Θέτουμε

$$\ell := \ker(1 - p) \quad \text{και} \quad \ell' := \text{Ker } p.$$

Τότε οι ℓ και ℓ' είναι υποδέσμες της ℓ_o (βλ. Ορισμό 2.6.3 και Θεώρημα 2.5.4) και $\ell \oplus \ell' = \ell_o$. Το ευθύ άθροισμα προκύπτει αμέσως από τον ορισμό των δύο δεσμών. Για την ισότητα με την τετριμμένη δέσμη, αρκεί να γράψουμε ότι στα νήματα ισχύει η σχέση

$$u = p(u) + (u - p(u)) \in \ell \oplus \ell',$$

για κάθε u στο αντίστοιχο νήμα της ℓ_o .

Ισχυριζόμαστε ότι $\Gamma(\ell) = M$ [μετά την ταύτιση (5.3.1)]. Πράγματι

$$\begin{aligned} s \in M &\Leftrightarrow \exists \tilde{s} \in \mathbb{A}_X^m : P(\tilde{s}) = s \\ &\Leftrightarrow \exists \tilde{s} \in \Gamma(\ell_o) : \Gamma(p)(\tilde{s}) = s \\ &\Leftrightarrow \exists \tilde{s} \in \Gamma(\ell_o) : p \circ \tilde{s} = s \\ &\Leftrightarrow s \in \Gamma(\ell), \end{aligned}$$

Ας επεξηγήσουμε περισσότερο την τελευταία ισοδυναμία: Εφ' όσον (βλ. και Πρόταση 5.1.6) $\tilde{s} \in \Gamma(\ell_o) = \Gamma(\ell) \oplus \Gamma(\ell')$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\tilde{s} = \sigma + \sigma' \in \Gamma(\ell) \oplus \Gamma(\ell') = \Gamma(\ker(1 - p)) \oplus \Gamma(\ker p).$$

Επομένως,

$$s = p \circ \tilde{s} = p \circ \sigma + p \circ \sigma' = p \circ \sigma.$$

Και αναλόγως,

$$0 = (1 - p) \circ \sigma = \sigma - p \circ \sigma, \quad \text{δηλαδή} \quad p \circ \sigma = \sigma.$$

Άρα τελικά, $s = p \circ \sigma = \sigma \in \Gamma(\ell)$. □

Τα συμπεράσματα αυτής της παραγράφου συνοψίζονται πλέον στο

5.3.4 Θεώρημα (Serre-Swan). Έστω X συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα. Τότε οι κατηγορίες $VB(X)$ και $\mathcal{P}(\mathbb{A}_X)$ είναι ισοδύναμες. Η ισοδυναμία τους εισάγεται από τον συναρτητή τομή

$$\Gamma: VB(X) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(\mathbb{A}_X).$$

5.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

1. Θεωρούμε τις δέσμες $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$ και το άθροισμα Whitney $\ell_1 \oplus \ell_2$. Αν $P_k: \ell_1 \oplus \ell_2 \longrightarrow \ell_k$ είναι οι κανονικές προβολές και $I_k: \ell_k \longrightarrow \ell_1 \oplus \ell_2$ οι κανονικές εμφυτεύσεις, να δείξετε ότι η τριάδα

$$(\Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2), \Gamma(P_1), \Gamma(P_2))$$

ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του γινομένου και η τριάδα

$$(\Gamma(\ell_1 \oplus \ell_2), \Gamma(I_1), \Gamma(I_2))$$

ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του συγγινομένου των $\Gamma(\ell_1), \Gamma(\ell_2)$ στην κατηγορία $Mod(\mathbb{A}_X)$.

2. Δείξτε ότι τα $\mathbb{A}_X$ -πρότυπα $Mor(\ell_1, \ell_2)$ και $\Gamma(X, L(E_1, E_2))$ (βλ. Παράδειγμα 2.3.4) είναι ισόμορφα.
3. Έστω X παρασυμπαγής διαφορική πολλαπλότητα, $\ell_1, \ell_2 \in VB(X)$, $U \subset X$ ανοιχτό, και $f: \ell_1|_U \rightarrow \ell_2|_U$ μορφισμός διανυσματικών δεσμών, όπου

$$\ell_k|_U := \left(\pi_k^{-1}(U), \pi_k|_{\pi_k^{-1}(U)}, U \right), \quad k = 1, 2.$$

Ναδειχθεί ότι, για κάθε $x \in U$, υπάρχει μορφισμός $\tilde{f}: \ell_1 \rightarrow \ell_2$, τέτοιος ώστε $f = \tilde{f}$ τοπικά στο x .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

6

Δομή Riemann και Συνοχές

Dedekind tells us that Gauss sat at the [Riemann's inaugural] lecture [Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry)], which surpassed all his expectations, in the greatest astonishment, and on the way back from the faculty meeting he spoke to Wilhelm Weber, with the greatest astonishment, and with an excitement rare for him, about the depth of the ideas presented by Riemann.

M. SPIVAC [32, Vol. II, p. 134]

Η πρώτη παράγραφος του κεφαλαίου αναφέρεται με συντομία στη δομή Riemann, βασική έννοια για τη μελέτη της ομώνυμης Γεωμετρίας. Στη δεύτερη παράγραφο μελετάμε τις (γραμμικές) συνοχές σε μια διανυσματική δέσμη, τη συναλλοίωτη παραγωγή (που ισοδυναμεί με μία συνοχή), και την ύπαρξη συνοχής συμβιβαστής με μία δομή Riemann.

6.1 Δομή Riemann

6.1.1 Ορισμός. Έστω διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Θεωρούμε τη διανυσματική δέσμη $(L_2(E, \mathbb{R}), \tilde{\pi}, X)$ των διγγραμμικών μορφών της ℓ (βλ. Παράδειγμα 2.3.2). Ονομάζουμε **(διαφορίσιμη) δομή Riemann** (Riemannian structure) της ℓ κάθε (διαφορίσιμη) τομή

$$g: X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}),$$

τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$, η απεικόνιση

$$g_x := g(x): E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

να είναι εσωτερικό γινόμενο.

Με άλλα λόγια, μια δομή Riemann είναι μια οικογένεια εσωτερικών γινομένων $\{g_x\}_{x \in X}$ ορισμένων στα νήματα της ℓ . Η διαφορισιμότητα αυτής της οικογένειας ορίζεται εδώ ως διαφορισιμότητα της τομής

$$X \ni x \longmapsto g_x \in L_2(E_x, \mathbb{R}) \subset L_2(E, \mathbb{R}).$$

Συνήθως, όταν αναφερόμαστε απλώς σε δομή Riemann, υπονοούμε πάντοτε ότι αυτή είναι διαφορίσιμη.

Στην κλασική γεωμετρία (της εφαιπτόμενης δέσμης), η διαφορισιμότητα της δομής εκφράζεται με έναν άλλο τρόπο. Στην Πρόταση 6.1.4 θα δείξουμε ότι η ανάλογη (προς την κλασική περίπτωση) προσεγγίση της διαφορισιμότητας είναι ισοδύναμη με αυτήν του Ορισμού 6.1.1. Όμως, προηγουμένως χρειαζόμαστε μερικά βοηθητικά συμπεράσματα.

6.1.2 Λήμμα. Έστω X διαφορική πολυπλοκότητα, $U \subseteq X$ ανοιχτό και μια απεικόνιση

$$b: U \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Η b είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν, για κάθε ζεύγος διαφορίσιμων απεικονίσεων $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, η απεικόνιση

$$b_{fg}: U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto b_{fg}(x) := b(x)(f(x), g(x))$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Για το ευθύ, παρατηρούμε ότι

$$b(x)(f(x), g(x)) = ev \circ (b, f, g)(x),$$

όπου η απεικόνιση

$$ev: L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (u, h, k) \mapsto u(h, k)$$

είναι διαφορίσιμη ως τριγραμμική.

Για το αντίστροφο, παρατηρούμε ότι, λόγω του ισομορφισμού

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : u \mapsto (u_{ij}) := (u(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n},$$

η διαφορισιμότητα της b είναι ισοδύναμη με τη διαφορισιμότητα των απεικονίσεων

$$U \ni x \mapsto b_{ij}(x) := b(x)(e_i, e_j) \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Όμως

$$b_{ij}(x) = b_{fg}(x),$$

όπου τώρα $f(x) = e_i$ και $g(x) = e_j$ (σταθερές). Έρα κάθε b_{ij} είναι διαφορίσιμη, συνεπώς και η b . $\square$

6.1.3 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Τότε η απεικόνιση

$$Ev: L_2(E, \mathbb{R}) \oplus E \oplus E \longrightarrow \mathbb{R} : (f, a, b) \mapsto f(a, b)$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η ℓ έχει νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και μιαν απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Σύμφωνα με τη δομή της δέσμης των διγραμμικών μορφών, στο Παράδειγμα 2.3.2, και αυτήν του αθροίσματος Whitney, στο Παράδειγμα 2.3.3, η δέσμη $L_2(E, \mathbb{R}) \oplus E \oplus E$ έχει, πάνω από κάθε U_i , μια απλοποίηση της μορφής

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i: \tilde{\pi}^{-1}(U_i) &:= \bigcup_{x \in U_i} L_2(E_x, \mathbb{R}) \oplus E_x \oplus E_x \longrightarrow U_i \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \\ (u, h, k) &\mapsto \tilde{\tau}_i(u, h, k) := (x, u \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}), \tau_{ix}(h), \tau_{ix}(k)), \end{aligned}$$

αν $(u, h, k) \in L_2(E_x, \mathbb{R}) \oplus E_x \oplus E_x$.

Η Ev είναι διαφορίσιμη πάνω από κάθε $\tilde{\pi}^{-1}(U_i)$ αν και μόνον αν $Ev \circ \tilde{\tau}_i^{-1}$ είναι διαφορίσιμη. Όμως η

$$Ev \circ \tilde{\tau}_i^{-1}: U_i \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

έχει τη μορφή

$$Ev \circ \tilde{\tau}_i^{-1}(x, u, h, k) = Ev(u \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}), \tau_{ix}^{-1}(h), \tau_{ix}^{-1}(k)) = u(h, k) = ev(u, h, k),$$

που είναι διαφορίσιμη ως τριγραμμική (βλ. και το πρώτο μέρος της απόδειξης του Λήμματος 6.1.2). Επομένως η Ev είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. $\square$

6.1.4 Πρόταση. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $g: X \rightarrow L_2(E, \mathbb{R})$ μια δομή Riemann. Τότε η g είναι διαφορίσιμη αν και μόνον αν, για κάθε $s, \sigma \in \Gamma(X, E)$, η απεικόνιση

$$G_{s,\sigma}: X \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g_x(s(x), \sigma(x))$$

είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη. Για το ευθύ, παρατηρούμε ότι

$$g_x(s(x), \sigma(x)) = Ev \circ (g, s, \sigma)(x),$$

άρα, βάσει του Λήμματος 6.1.3, η $G_{s,\sigma}$ είναι διαφορίσιμη, για οποιεσδήποτε τομές $s, \sigma \in \Gamma(X, E)$.

Για το αντίστροφο, θεωρούμε τον περιορισμό της g σε ένα απλοποιούν ζεύγος $(U, \tilde{\tau})$ της $L_2(E, \mathbb{R})$ και δείχνουμε ότι η $\tilde{\tau} \circ g$ (όπως στο επόμενο διάγραμμα) είναι διαφορίσιμη.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & U \times L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ \uparrow g & \nearrow & \\ U & & \end{array}$$

Διάγραμμα 6.1

Επειδή, για κάθε $x \in U$,

$$\tilde{\tau} \circ g(x) = (x, g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1})),$$

προφανώς η $\tilde{\tau} \circ g$ είναι διαφορίσιμη, αν είναι διαφορίσιμη η

$$(6.1.1) \quad U \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : x \mapsto g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1}).$$

Θεωρούμε τυχούσες διαφορίσιμες απεικονίσεις $f, g: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ και την

$$U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1})(f(x), g(x)).$$

Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} s: U &\longrightarrow \pi^{-1}(U) : x \mapsto \tau_x^{-1}(f(x)) = \tau^{-1}(x, f(x)), \\ \sigma: U &\longrightarrow \pi^{-1}(U) : x \mapsto \tau_x^{-1}(g(x)) = \tau^{-1}(x, g(x)) \end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμες τοπικές τομές της ℓ , άρα και η

$$g_x \circ (\tau_x^{-1} \times \tau_x^{-1})(f(x), g(x)) = g_x(s(x), \sigma(x)) = G_{s,\sigma}(x)$$

είναι διαφορίσιμη από την υπόθεση, οπότε η (6.1.1) είναι διαφορίσιμη σύμφωνα με το Λήμμα 6.1.2. $\square$

Στην περίπτωση της κλασικής δομής Riemann g (στην εφαιπτομένη δέσμη), η διαφορισιμότητα αυτής εκφράζεται ακριβώς με τη διαφορισιμότητα της απεικόνισης

$$X \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto g_x(\xi(x), \eta(x)),$$

για οποιαδήποτε διανυσματικά πεδία $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(X)$.

Μια ικανή συνθήκη, που εξασφαλίζει την ύπαρξη διαφορίσιμης δομής Riemann σε μια διανυσματική δέσμη, είναι η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας στη βάση της δέσμης. Συγκεκριμένα, έχουμε το

6.1.5 Θεώρημα. *Αν X είναι παρασυμπαγής διαφορική πολλαπλότητα, τότε κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ εφοδιάζεται με διαφορίσιμη δομή Riemann.*

Απόδειξη. Έστω ℓ μία διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$. Έστω ακόμη ότι $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ είναι μια τοπικά πεπερασμένη απλοποιούσα κάλυψη της ℓ και $\{\psi_i\}_{i \in I}$ μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας. Θεωρούμε ένα εσωτερικό γινόμενο α του $\mathbb{R}^n$ και, για κάθε $i \in I$, ορίζουμε την τοπική τομή της $L_2(E, \mathbb{R})$

$$g_i: U_i \longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U_i): x \mapsto g_i(x) := \tilde{\tau}_i^{-1}(x, \alpha).$$

Η g_i προφανώς είναι μια τοπική διαφορίσιμη δομή Riemann. Θέτουμε

$$g = \sum_i \psi_i \cdot g_i: X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}).$$

Η g είναι ολική διαφορίσιμη τομή της $L_2(E, \mathbb{R})$. Επίσης, ελέγχεται αμέσως ότι, για κάθε $x \in X$, το g_x είναι εσωτερικό γινόμενο του E_x . $\square$

Η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας είναι ικανή αλλά όχι και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη διαφορίσιμης δομής Riemann. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη δίνεται από το παρακάτω Θεώρημα 6.1.7. Προηγουμένως όμως χρειαζόμαστε τον επόμενο ορισμό.

6.1.6 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ μια διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$, και α ένα εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$ την υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$ που διατηρεί το α . Δηλαδή,

$$(GL(n, \mathbb{R}), \alpha) := \{f \in GL(n, \mathbb{R}) : \alpha(f(x), f(y)) = \alpha(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Θα λέμε ότι η **δομική ομάδα** (structure group) $GL(n, \mathbb{R})$ της ℓ **ανάγεται** (reduces) στην $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$, αν υπάρχει απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ της ℓ , τέτοια ώστε (βλ. Ορισμό 2.2.1),

$$T_{ji}(x) \in (GL(n, \mathbb{R}), \alpha), \quad \forall i, j \in I \text{ και } x \in U_i \cap U_j.$$

Η προηγούμενη σχέση ισοδυναμεί με την

$$(6.1.2) \quad \alpha(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(h), \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k)) = \alpha(h, k),$$

για κάθε $x \in U_i \cap U_j$; $i, j \in I$, και $h, k \in \mathbb{R}^n$.

6.1.7 Θεώρημα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$. Η ℓ δέχεται μια διαφορίσιμη δομή Riemann αν και μόνον αν η δομική ομάδα της ανάγεται στην $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$, για κάποιο εσωτερικό γινόμενο α του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω ότι α είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$ και $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ μια απλοποιούσα κάλυψη της ℓ , ώστε να ισχύει η (6.1.2). Έστω $x \in X$. Θεωρούμε ένα $i \in I$, έτσι ώστε $x \in U_i$, και θέτουμε

$$g(x) := \alpha \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}).$$

Το $g(x)$ είναι εσωτερικό γινόμενο του E_x . Επίσης είναι ανεξάρτητο του $i \in I$. Πράγματι, αν $x \in U_j$, για ένα $j \in I$, τότε η σχέση (6.1.2) συνεπάγεται ότι

$$\alpha \circ (\tau_{jx} \times \tau_{jx}) = \alpha \circ (T_{ji}(x) \times T_{ji}(x)) \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}) = \alpha \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}),$$

για κάθε $i, j \in I$ και $x \in U_i \cap U_j$. Άρα η απεικόνιση

$$g: X \longrightarrow L_2(E, \mathbb{R}) : x \mapsto g(x)$$

είναι μια καλά ορισμένη δομή Riemann. Ως προς τη διαφορισιμότητά της αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο περιορισμός της σε κάθε U_i είναι η (βλ. και τη δομή του Παραδείγματος 2.3.2)

$$g(x) = \alpha \circ (\tau_{ix} \times \tau_{ix}) = \tilde{\tau}_i^{-1}(x, \alpha); \quad x \in U_i,$$

που ορίζει τελικά διαφορίσιμη τομή της $L_2(E, \mathbb{R})$.

Αντίστροφα, έστω g μια διαφορίσιμη δομή Riemann της ℓ , και $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ τυχαία απλοποιούσα κάλυψη της ℓ . Θεωρούμε ένα απλοποιούν ζεύγος (U_i, τ_i) . Για κάθε $x \in U_i$, η απεικόνιση

$$(6.1.3) \quad g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Αν M_{ix} είναι ο πίνακας της τελευταίας, δηλαδή

$$M_{ix} = ((g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}))(e_k, e_l))_{k,l=1,\dots,n},$$

τότε, για κάθε $x \in U_i$ και $h, k \in \mathbb{R}^n$, είναι

$$\begin{aligned} g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(h, k) &= h M_{ix} k^t = \\ &= h M_{ix}^{1/2} \cdot (M_{ix}^{1/2})^t k^t = (h M_{ix}^{1/2}) \cdot (k M_{ix}^{1/2})^t. \end{aligned}$$

Εδώ θυμίζουμε ότι για έναν πίνακα B με τις ιδιότητες του M_{ix} (θετικά ορισμένος), υπάρχει μοναδικός πίνακας A ($\rho\acute{\iota}\zeta\alpha$), τέτοιος ώστε $B = AA = AA^t$. Ο A συμβολίζεται και με $B^{1/2}$.

Θέτοντας

$$f_{ix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : h \mapsto f_{ix}(h) := h M_{ix}^{1/2},$$

διαπιστώνουμε ότι

$$(6.1.4) \quad g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(h, k) = f_{ix}(h) \cdot (f_{ix}(k))^t = \langle f_{ix}(h), f_{ix}(k) \rangle,$$

όπου $\langle, \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, βρίσκουμε ότι

$$(6.1.5) \quad g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}) \circ (f_{ix}^{-1} \times f_{ix}^{-1}) = \langle, \rangle, \quad \forall x \in U_i.$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$U_i \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : x \mapsto g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})$$

είναι διαφορίσιμη γιατί (βλ. και πάλι τη δομή του Παραδείγματος 2.3.2)

$$(6.1.6) \quad g(x) \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1}) = p_2 \circ \tilde{\tau}_i \circ g(x)$$

Επειδή η αντιστοιχία

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : b \mapsto (b_{ij}) := (b(e_i, e_j))$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός, η διαφορισιμότητα της (6.1.6) είναι ισοδύναμη με την διαφορισιμότητα της

$$U_i \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : x \mapsto M_{ix},$$

άρα και της

$$U_i \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : x \mapsto M_{ix}^{1/2},$$

επομένως και της

$$U_i \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto f_{ix},$$

αφού και η ανιστοιχία

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : f \mapsto (f_{ij}) := (pr_j(f(e_i)))$$

είναι επίσης γραμμικός ισομορφισμός. Εξάλλου, οι πίνακες M_{ix} , $M_{ix}^{1/2}$ είναι αντιστρέψιμοι, άρα η f_{ix} είναι γραμμικός ισομορφισμός.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f_i : U_i \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n : (x, h) \mapsto (x, f_{ix}(h)).$$

Βάσει του Λήμματος 2.2.3, έχουμε ότι η f_i ορίζει ισομορφισμό τετριμμένων δεσμών, άρα το $(U_i, f_i \circ \tau_i)$ είναι απλοποιούν ζεύγος.

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & & & \downarrow pr_1 \\ U_i & \xrightarrow{id_{U_i}} & U_i & & U_i \end{array}$$

Διάγραμμα 6.2

Θεωρούμε τώρα την απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, f_i \circ \tau_i)\}_{i \in I}$. Αν συμβολίσουμε με $\widehat{T}_{ji}$ τις απεικονίσεις μεταφοράς της ℓ ως προς την προηγούμενη απλοποιούσα κάλυψη, τότε (βάσει του Ορισμού 2.2.1) έχουμε, για κάθε $h, k \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} & \langle \widehat{T}_{ji}(x)(h), \widehat{T}_{ji}(x)(k) \rangle = \\ &= \langle (f_{jx} \circ \tau_{jx}) \circ (f_{ix} \circ \tau_{ix})^{-1}(h), (f_{jx} \circ \tau_{jx}) \circ (f_{ix} \circ \tau_{ix})^{-1}(k) \rangle \\ &= \langle f_{jx}(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(h)), f_{jx}(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(k)) \rangle \\ &\stackrel{(6.1.4)}{=} g_x \circ (\tau_{jx}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(h), \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \circ f_{ix}^{-1}(k)) \\ &= g_x \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(f_{ix}^{-1}(h), f_{ix}^{-1}(k)) \\ &\stackrel{(6.1.4)}{=} \langle h, k \rangle. \end{aligned}$$

Άρα η δομική ομάδα της ℓ ανάγεται στην $(GL(n, \mathbb{R}), <, >)$. □

Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι η ομάδα $(GL(n, \mathbb{R}), <, >)$ είναι η ομάδα όλων των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$, που ταυτίζεται με την ομάδα των $n \times n$ αντιστρεπτών πινάκων με την ιδιότητα $AA^t = I$ και συμβολίζεται με $O(n)$. Επομένως:

Αν στο $\mathbb{R}^n$ θεωρήσουμε εξ αρχής το σύνθετο εσωτερικό γινόμενο $<, >$ (βλ. Ορισμό 6.1.6), τότε η ύπαρξη διαφορίσιμης δομής Riemann στην $\ell = (E, \pi, X)$ ισοδυναμεί με την αναγωγή της $GL(n, \mathbb{R})$ στην $O(n)$.

6.2 Συνοχή και συναλλοίωτη παραγωγή

6.2.1 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Θεωρούμε και την δέσμη

$$L(\ell_X, \ell) = (L(TX, E), \pi_L, X)$$

των γραμμικών απεικονίσεων από την εφαπτόμενη δέσμη $\ell_X = (TX, \pi_X, X)$ στην δέσμη ℓ (βλ. Παράδειγμα 2.3.4). Ονομάζουμε (γραμμική) **συνοχή** (linear connection) της ℓ μία γραμμική (ως προς $\mathbb{R}$) απεικόνιση

$$\mathcal{D}: \Gamma(X, E) \rightarrow \Gamma(X, L(TX, E)),$$

η οποία ικανοποιεί τη **συνθήκη Leibniz** (Leibniz condition)

$$\mathcal{D}(fs) = (df) \cdot s + f \cdot \mathcal{D}s,$$

για κάθε $s \in \Gamma(X, E)$ και $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$.

Η συνθήκη Leibniz σημαίνει ότι η $\mathcal{D}$ **δεν** είναι γραμμική ως προς $C^\infty(X, \mathbb{R})$. Στην ίδια συνθήκη, το $(df) \cdot s$ συμβολίζει τη διαφορίσιμη τομή της $L(TX, E)$, με

$$((df) \cdot s)(x)(v) = v(f) \cdot s(x),$$

για κάθε $x \in X$ και $v \in T(X, x) = T_x X$.

Από τη θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων θυμίζουμε ότι df είναι μία διαφορική 1-μορφή επί του X , με

$$df(x) = d_x f = df|_{T_x X}: T_x X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Επειδή $T_x f: T_x X \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$, μετά την ταύτιση $T_{f(x)} \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$ έχουμε ότι $d_x f = T_x f$, άρα

$$d_x f(v) = T_x f(v) = v(f) \in \mathbb{R}; \quad x \in X, v \in T_x X.$$

6.2.2 Θεώρημα. Έστω X παρασυμπαγής διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Τότε κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ εφοδιάζεται με συνοχή $\mathcal{D}$.

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ μια τοπικά πεπερασμένη απλοποιούσα κάλυψη της ℓ και $\{\psi_i\}_{i \in I}$ μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας. Για κάθε $i \in I$, θεωρούμε τις βασικές τομές

$$\sigma_{ik}: U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i): x \mapsto \tau_i^{-1}(x, e_k),$$

$k = 1, \dots, n$, όπου n είναι η *τάξη της δέσμης* (: διάσταση του νήματος). Τότε, κάθε τοπική τομή $\sigma \in \Gamma(U_i, E)$ γράφεται μονοσήμαντα με τη μορφή

$$\sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik}, \quad \alpha_k \in C^\infty(U_i, \mathbb{R}).$$

Για διευκόλυνση, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα παραλείπουμε στο σύμβολο του αθροίσματος το πεδίο μεταβολής του δείκτη. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$(6.2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_i: \Gamma(U_i, E) &\longrightarrow \Gamma(U_i, L(TU_i, E)) : \\ \sigma &= \sum_k \alpha_k \sigma_{ik} \longmapsto \mathcal{D}_i(\sigma) := \sum_k (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}. \end{aligned}$$

Η $\mathcal{D}_i$ είναι καλά ορισμένη, επειδή, για κάθε $x \in U_i$ και $v \in T(X, x)$, είναι

$$(\mathcal{D}_i \sigma)(x)(v) = \sum_k ((d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik})(x)(v) = \sum_k v(\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}(x),$$

δηλαδή η $(\mathcal{D}_i \sigma)(x): T(X, x) \rightarrow E_x$ είναι γραμμική απεικόνιση και μεταβάλλεται διαφορίσιμα ως προς x , άρα ορίζεται πράγματι μία διαφορίσιμη τομή της $L(TU_i, E)$.

Επίσης, η $\mathcal{D}_i$ είναι γραμμική, αφού, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και οποιεσδήποτε τομές

$$\sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik}, \quad s = \sum_k b_k \sigma_{ik} \in \Gamma(U_i, E),$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(\lambda\sigma + \mu s) &= \mathcal{D}_i\left(\sum_k (\lambda\alpha_k + \mu b_k) \sigma_{ik}\right) \\ &= \sum_k d(\lambda\alpha_k + \mu b_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= \lambda \sum_k (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik} + \mu \sum_k (db_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= \lambda \mathcal{D}_i(\sigma) + \mu \mathcal{D}_i(s). \end{aligned}$$

Τέλος, η $\mathcal{D}_i$ ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz: Αν $\sigma = \sum_k \alpha_k \sigma_{ik} \in \Gamma(U_i, E)$ και $f \in C^\infty(U_i, \mathbb{R})$, τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(f\sigma) &= \mathcal{D}_i\left(\sum_k (f\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}\right) = \sum_k d(f\alpha_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= \sum_k (df)\alpha_k \cdot \sigma_{ik} + \sum_k f(d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= (df) \cdot \sum_k \alpha_k \sigma_{ik} + f \cdot \sum_k (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik} \\ &= (df) \cdot \sigma + f \cdot \mathcal{D}_i\sigma. \end{aligned}$$

Αρα, κάθε $\mathcal{D}_i$ είναι συνοχή της $(\pi^{-1}(U_i), \pi, U_i)$, οπότε η

$$\mathcal{D} := \sum_i \psi_i \mathcal{D}_i,$$

είναι συνοχή της ℓ , όπως ελέγχεται αμέσως. $\square$

6.2.3 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, εφοδιασμένη με μία δομή Riemann g . Μία συνοχή $\mathcal{D}$ λέγεται **συμβαστική** (compatible) με τη δομή g αν (βλ. και συμβολισμό της Πρότασης 6.1.4)

$$g_x(\mathcal{D}s(x)(v), \sigma(x)) + g_x(s(x), \mathcal{D}\sigma(x)(v)) = v(g_x(s(x), \sigma(x))) = v(G_{s,\sigma}),$$

για κάθε $s, \sigma \in \Gamma(X, E)$, $x \in X$ και $v \in T(X, x)$.

6.2.4 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, εφοδιασμένη με μία δομή Riemann g και $U \subseteq X$ ανοιχτό. Ένα **ορθοκανονικό πλαίσιο** επί του U (orthonormal frame) είναι μια βάση $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ του $\Gamma(U, E)$, τέτοια ώστε $\{\sigma_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ να είναι ορθοκανονική βάση του (E_x, g_x) , για κάθε $x \in U$.

6.2.5 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ εφοδιασμένη με δομή Riemann g και μια απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Τότε, πάνω από κάθε U_i , η ℓ δέχεται ορθοκανονικό πλαίσιο.

Απόδειξη. Ανατρέχοντας στο δεύτερο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 6.1.7, από τη δοσμένη απλοποιούσα κάλυψη κατασκευάζουμε την $\{(U_i, \hat{\tau}_i)\}_{i \in I}$, με $\hat{\tau}_i = f_i \circ \tau_i$, της οποίας οι περιορισμοί $\hat{\tau}_{ix}$ στα νήματα ικανοποιούν τις σχέσεις (βλ. και το τέλος της προαναφερόμενης απόδειξης)

$$\begin{aligned} g_x \circ (\tau_{ix}^{-1} \times \tau_{ix}^{-1})(f_{ix}^{-1}(h), f_{ix}^{-1}(k)) &= \\ = g_x \circ (\hat{\tau}_{ix}^{-1} \times \hat{\tau}_{ix}^{-1})(h, k) &= \langle h, k \rangle, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in U_i$ και $h, k \in \mathbb{R}^n$, όπου $<, >$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Τότε οι τοπικές τομές

$$\sigma_{ik}: U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) : x \mapsto \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_k)$$

αποτελούν ορθοκανονικό πλαίσιο επί του U_i . Πράγματι,

$$(6.2.2) \quad \begin{aligned} g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{i\ell}(x)) &= g_x(\widehat{\tau}_{ix}^{-1}(e_k), \widehat{\tau}_{ix}^{-1}(e_\ell)) = \\ &= g_x \circ (\widehat{\tau}_{ix}^{-1} \times \widehat{\tau}_{ix}^{-1})(e_k, e_\ell) = \langle e_k, e_\ell \rangle = \delta_{k\ell}. \quad \square \end{aligned}$$

6.2.6 Θεώρημα. Έστω X παρασυμπαγής διαφορική πολυπλοκότητα, μία διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και g δομή Riemann της ℓ . Τότε η ℓ δέχεται συνοχή $\mathcal{D}$ συμβιβαστή με την g .

Απόδειξη. Έστω $\{(U_i, \widehat{\tau}_i)\}_{i \in I}$ η απλοποιούσα κάλυψη της ℓ , η οποία υλοποιεί την αναγωγή της δομικής ομάδας $GL(n, \mathbb{R})$ στην $(GL(n, \mathbb{R}), <, >) = O(n)$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η ανοιχτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι τοπικά πεπερασμένη και υπάρχει μια υποκείμενη διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας $\{\psi_i\}_{i \in I}$. Για κάθε $i \in I$ θεωρούμε τις τοπικές τομές

$$\sigma_{ik}: U_i \longrightarrow E : x \mapsto \sigma_{ik}(x) := \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_k),$$

οι οποίες (κατά το Λήμμα 6.2.5) αποτελούν ορθοκανονικό πλαίσιο επί του U_i . Θεωρούμε επίσης τις τοπικές συνοχές $\mathcal{D}_i$ που κατασκευάζονται όπως στο Θεώρημα 6.2.2, και το άθροισμα

$$\mathcal{D} := \sum_i \psi_i \mathcal{D}_i.$$

Θα δείξουμε ότι η τελευταία συνοχή είναι συμβιβαστή με την g .

Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε $\mathcal{D}_i$ είναι συμβιβαστή με την $g|_{U_i}$. Πράγματι, αν

$$\sigma, s \in \Gamma(U_i, E), \quad \text{με} \quad \sigma = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sigma_{ik} \quad \text{και} \quad s = \sum_{j=1}^n b_j \sigma_{ij},$$

τότε, για κάθε $x \in U_i$ και $v \in T(X, x)$, είναι [βλ. και (6.2.1)]

$$\begin{aligned} &g_x(\mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)) + g_x(\sigma(x), \mathcal{D}_i s(x)(v)) \\ &= g_x\left(\mathcal{D}_i \left(\sum_k \alpha_k \sigma_{ik}\right)(x)(v), \left(\sum_j b_j \sigma_{ij}\right)(x)\right) \\ &\quad + g_x\left(\left(\sum_k \alpha_k \sigma_{ik}\right)(x), \mathcal{D}_i \left(\sum_j b_j \sigma_{ij}\right)(x)(v)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_x \left(\left(\sum_k (d\alpha_k) \cdot \sigma_{ik} \right)(x)(v), \sum_j b_j(x) \cdot \sigma_{ij}(x) \right) \\
&\quad + g_x \left(\sum_k \alpha_k(x) \sigma_i(x), \left(\sum_j (db_j) \cdot \sigma_{ij} \right)(x)(v) \right) \\
&= g_x \left(\sum_k v(\alpha_k) \cdot \sigma_{ik}(x), \sum_j b_j(x) \cdot \sigma_{ij}(x) \right) \\
&\quad + g_x \left(\sum_k \alpha_k(x) \cdot \sigma_{ik}(x), \sum_j v(b_j) \cdot \sigma_{ij}(x) \right) \\
&= \sum_{k,j} v(\alpha_k) \cdot b_j(x) \cdot g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{ij}(x)) + \\
&\quad + \sum_{k,j} \alpha_k(x) \cdot v(b_j) \cdot g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{ij}(x))
\end{aligned}$$

ή, βάσει της (6.2.2),

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,j} v(\alpha_k) \cdot b_j(x) \cdot \delta_{kj} + \sum_{k,j} \alpha_k(x) \cdot v(b_j) \cdot \delta_{kj} \\
&= \sum_k v(\alpha_k) b_k(x) + \sum_k \alpha_k(x) v(b_k) \\
&= \sum_k \left(v(\alpha_k) \cdot b_k(x) + \alpha_k(x) \cdot v(b_k) \right) \\
&= \sum_k v(\alpha_k b_k) = v \left(\sum_k \alpha_k b_k \right).
\end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$\begin{aligned}
G_{\sigma,s}(x) &= g_x(\sigma(x), s(x)) = \\
&= g_x \left(\sum_k \alpha_k(x) \sigma_{ik}(x), \sum_j b_j(x) \sigma_{ij}(x) \right) \\
&= \sum_{k,j} \alpha_k(x) b_j(x) g_x(\sigma_{ik}(x), \sigma_{ij}(x)) \\
&= \sum_{k,j} \alpha_k(x) b_j(x) \delta_{kj} = \sum_k \alpha_k(x) b_k(x) \\
&= \left(\sum_k \alpha_k b_k \right)(x),
\end{aligned}$$

άρα $\sum_k \alpha_k b_k = G_{\sigma,s}$, οπότε και

$$v\left(\sum_k \alpha_k b_k\right) = v(G_{\sigma,s}).$$

Συνδυάζοντας την τελευταία με την πρώτη σειρά ισοτήτων, αποδεικνύεται συμβατότητα κάθε $\mathcal{D}_i$ με την $g|_{U_i}$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι και η $\mathcal{D} := \sum_i \psi_i \mathcal{D}_i$ είναι συμβατός με την g . Έστω $\sigma, s \in \Gamma(X, E)$, $x \in X$ και $v \in T(X, x)$. Τότε

$$\begin{aligned} & g_x(\mathcal{D}\sigma(x)(v), s(x)) + g_x(\sigma(x), \mathcal{D}s(x)(v)) \\ &= g_x\left(\sum_i \psi_i(x) \mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)\right) + \\ & \quad + g_x\left(\sigma(x), \sum_i \psi_i(x) \mathcal{D}_i s(x)(v)\right) \\ &= \sum_i \psi_i(x) \cdot g_x(\mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)) + \\ & \quad + \sum_i \psi_i(x) \cdot g_x(\sigma(x), \mathcal{D}_i s(x)(v)) \\ &= \sum_i \psi_i(x) \cdot [g_x(\mathcal{D}_i \sigma(x)(v), s(x)) + g_x(\sigma(x), \mathcal{D}_i s(x)(v))] \\ &= \sum_i \psi_i(x) \cdot v(G_{\sigma,s}) = \left(\sum_i \psi_i(x)\right) \cdot v(G_{\sigma,s}) \\ &= v(G_{\sigma,s}), \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

6.2.7 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, $\mathfrak{X}(X)$ ο χώρος των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του X και $\Gamma(X, E)$ ο χώρος των διαφορίσιμων τομών της ℓ . Καλούμε **συναλλοίωτη παραγώγιση** (covariant derivative) της ℓ μία **διγραμμική** (ως προς $\mathbb{R}$) απεικόνιση

$$\nabla : \mathfrak{X}(X) \times \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, E) : (\xi, \sigma) \mapsto \nabla(\xi, \sigma) =: \nabla_\xi \sigma$$

που έχει τις ιδιότητες:

- (i) $\nabla_{f\xi} \sigma = f \cdot \nabla_\xi \sigma$
- (ii) $\nabla_\xi f\sigma = f \cdot \nabla_\xi \sigma + \xi(f) \cdot \sigma$ [**συνθήκη Leibniz**]

για κάθε $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\sigma \in \Gamma(X, E)$.

Η συνθήκη Leibniz δείχνει ότι η ∇ δεν είναι διγραμμική ως προς $C^\infty(X, \mathbb{R})$. Υπάρχει $C^\infty(X, \mathbb{R})$ -γραμμικότητα μόνον ως προς την πρώτη μεταβλητή.

Στην βιβλιογραφία συναντά κανείς τους όρους συνοχή και συναλλοίωτη παραγωγή να χρησιμοποιούνται αδιακρίτως και για τις δύο απεικονίσεις $\mathcal{D}$ και ∇ των Ορισμών 6.2.1 και 6.2.7, αντιστοίχως. Αυτό συμβαίνει γιατί $\mathcal{D}$ και ∇ μπορούν να ταυτιστούν μέσω κατάλληλης αντιστοιχίας (βλ. Θεώρημα 6.2.11 και σχετικά σχόλια στη συνέχεια). Για να το δείξουμε αυτό χρειαζόμαστε μια σειρά από βοηθητικά αποτελέσματα.

6.2.8 Λήμμα. Έστω ∇ μια συναλλοίωτη παραγωγή της διανυσματικής δέσμης $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ και $\sigma \in \Gamma(X, E)$. Αν $A \subseteq X$ ανοιχτό με $\xi|_A = 0$ ή $\sigma|_A = 0$, τότε $\nabla_\xi \sigma|_A = 0$.

Απόδειξη. Έστω $x \in A$. Υπάρχει ανοιχτό V , με $x \in V \subset \bar{V} \subset A$, και διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{\bar{V}} = 1, \quad f|_{A^c} = 0.$$

Βλ. κάτι ανάλογο και στην απόδειξη του Λήμματος 5.2.1 (bump function). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Αν $\xi|_A = 0$, τότε $f\xi = 0$, επομένως

$$\nabla_{f\xi} \sigma = f \cdot \nabla_\xi \sigma = 0,$$

άρα, για κάθε $x \in A$,

$$(\nabla_{f\xi} \sigma)(x) = f(x) \cdot (\nabla_\xi \sigma)(x) = 0,$$

που συνεπάγεται την $\nabla_\xi \sigma|_A = 0$.

ii) Αν $\sigma|_A = 0$, τότε $f\sigma = 0$, άρα

$$\nabla_\xi (f\sigma) = f \cdot \nabla_\xi \sigma + \xi(f) \cdot \sigma = 0,$$

επομένως, για κάθε $x \in A$,

$$(\nabla_\xi f\sigma)(x) = f(x) \cdot (\nabla_\xi \sigma)(x) + \xi_x(f) \cdot \sigma(x) = 0.$$

Όμως $f(x) = 1$ και (από κατασκευή) η f είναι σταθερή σε μια περιοχή του x , οπότε $\xi_x(f) = 0$. Συνεπώς,

$$(\nabla_\xi f\sigma)(x) = (\nabla_\xi \sigma)(x) = 0; \quad x \in A,$$

απ' όπου και πάλι $\nabla_\xi \sigma|_A = 0$. □

6.2.9 Πρόρισμα. Έστω ∇ συναληθοίωτη παραγώγιση της $\ell \in VB(X)$ και $A \subseteq X$ ανοιχτό. Αν $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(X)$ με $\xi = \eta|_A$, τότε

$$\nabla_\xi \sigma = \nabla_\eta \sigma|_A, \quad \forall \sigma \in \Gamma(X, E).$$

Επίσης, αν $\sigma, s \in \Gamma(X, E)$ με $\sigma = s|_A$, τότε

$$\nabla_\xi \sigma = \nabla_\xi s|_A, \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(X).$$

6.2.10 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ∇ είναι μια συναληθοίωτη παραγώγιση της $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ και $x \in X$. Αν $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(X)$ με $\xi(x) = \eta(x)$, τότε

$$(\nabla_\xi \sigma)(x) = (\nabla_\eta \sigma)(x),$$

για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι, αν $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ με $\xi(x) = 0$, τότε $(\nabla_\xi \sigma)(x) = 0$, για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$. Έστω λοιπόν (U, φ) χάρτης της βάσης X με $x \in U$. Τότε, όπως γνωρίζουμε (βλ.[4]),

$$\xi|_U = \sum_{i=1}^m \xi_i \partial_i, \quad m = \dim X,$$

όπου $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq m}$ είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία που ορίζει ο (U, φ) και $\xi_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ οι αντίστοιχες τοπικές συντεταγμένες του ξ . Θεωρούμε ανοιχτές περιοχές V, W του x με $x \in V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$ και συνάρτηση $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, τέτοια ώστε $f|_{\overline{V}} = 1$ και $f|_{W^c} = 0$. Θέτουμε

$$\tilde{\xi}_i := f \xi_i \quad \text{και} \quad \tilde{\partial}_i := f \partial_i.$$

Αν $\tilde{\xi} := \sum_i \tilde{\xi}_i \tilde{\partial}_i$, τότε

$$\tilde{\xi} = \xi|_V,$$

άρα, για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$ και $z \in V$, είναι

$$(\nabla_\xi \sigma)(z) = (\nabla_{\tilde{\xi}} \sigma)(z) = \left(\nabla_{\sum_i \tilde{\xi}_i \tilde{\partial}_i} \sigma \right)(z) = \sum_{i=1}^m \tilde{\xi}_i(z) (\nabla_{\tilde{\partial}_i} \sigma)(z).$$

Επομένως, για $z = x$, η υπόθεση $\xi(x) = 0$, που συνεπάγεται ότι

$$\tilde{\xi}_i(x) = \xi_i(x) = 0,$$

οδηγεί στην

$$(\nabla_\xi \sigma)(x) = 0,$$

που κλείνει την απόδειξη. □

6.2.11 Θεώρημα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$. Η ℓ έχει μια συνοχή $\mathcal{D}$ αν και μόνον αν έχει συναλλοίωτη παραγωγή ∇ .

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{D}$ μια συνοχή της ℓ . Ορίζουμε την

$$\nabla: \mathfrak{X}(X) \times \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, E) : (\xi, \sigma) \mapsto \nabla_\xi \sigma,$$

θέτοντας

$$(\nabla_\xi \sigma)(x) := \mathcal{D}\sigma(x)(\xi_x), \quad \forall x \in X.$$

Ελέγχεται αμέσως ότι ∇ είναι μια καλά ορισμένη συναλλοίωτη παραγωγή της διανυσματικής δέσμης ℓ .

Αντιστρόφως, αν δίνεται μία ∇ , ορίζουμε την

$$\mathcal{D}: \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, L(TX, E)) : \sigma \mapsto \mathcal{D}\sigma,$$

θέτοντας

$$\mathcal{D}\sigma(x)(v) := (\nabla_\xi \sigma)(x),$$

για κάθε $x \in X$ και $v \in T(X, x)$, όπου ξ είναι τυχόν διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο για το οποίο $\xi(x) = v$. Η προηγούμενη Πρόταση 6.2.10 εξασφαλίζει ότι η τιμή $(\mathcal{D}\sigma)(x)(v)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του ξ . Άρα η $\mathcal{D}$ είναι καλά ορισμένη. Ελέγχεται εύκολα ότι είναι συνοχή. $\square$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα ορίζει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ συνοχών και συναλλοιώτων παραγωγίσεων μιάς διανυσματικής δέσμης (απόδειξη!), που επιτρέπει να χρησιμοποιούμε αδιακρίτως τον ίδιο όρο και για τους δύο τελεστές, όπως σχολιάσαμε μετά τον Ορισμό 6.2.7.

6.2.12 Ορισμός. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ με δομή Riemann g και συναλλοίωτη παραγωγή ∇ . Η ∇ καλείται **συμβιβαστή** με την g , αν (βλ. συμβολισμό Πρότασης 6.1.4

$$g_x(\nabla_\xi \sigma(x), s(x)) + g_x(\sigma(x), \nabla_\xi s(x)) = \xi_x(G_{\sigma, s}),$$

για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\sigma, s \in \Gamma(X, E)$ και $x \in X$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάμεσα στις συνοχές και τις συναλλοιώτες παραγωγίσεις του προηγούμενου θεωρήματος, αποδεικνύουμε αμέσως την

6.2.13 Πρόταση. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ εφοδιασμένη με μία δομή Riemann g . Τότε ισχύουν τα επόμενα:

- i) Αν $\mathcal{D}$ είναι συνοχή της ℓ συμβιβαστή με την g , η επαγόμενη συναλλοίωτη παραγωγή ∇ είναι συμβιβαστή με την g .
- ii) Αν ∇ είναι μια συναλλοίωτη παραγωγή της ℓ συμβιβαστή με την g , τότε η επαγόμενη συνοχή $\mathcal{D}$ είναι συμβιβαστή με την g .

Θα τελειώσουμε αυτή την παράγραφο (και το κεφάλαιο), εξετάζοντας αναλυτικότερα την τοπική μορφή μιας συναλλοίωτης παραγώγισης. Έχουμε πρώτα το επόμενο

6.2.14 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ εφοδιασμένη με μια συναλλοίωτη παραγώγιση ∇ . Τότε, σε κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό, η ∇ ορίζει μια τοπική συναλλοίωτη παραγώγιση

$$\nabla_A: \mathfrak{X}(A) \times \Gamma(A, E) \longrightarrow \Gamma(A, E),$$

έτσι ώστε, για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, $\sigma \in \Gamma(X, E)$ και $x \in A$, να είναι

$$\nabla_A(\xi|_A, \sigma|_A)(x) = (\nabla_\xi \sigma)(x).$$

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό. Ορίζουμε την

$$\nabla_A: \mathfrak{X}(A) \times \Gamma(A, E) \longrightarrow \Gamma(A, E)$$

ως εξής: Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(A)$, $\sigma \in \Gamma(A, E)$ και $x \in A$. Θεωρούμε ανοιχτό V με $x \in V \subseteq A$ και $\tilde{\xi} \in \mathfrak{X}(X)$, $\tilde{\sigma} \in \Gamma(X, E)$ με $\tilde{\xi} = \xi|_V$ και $\tilde{\sigma} = \sigma|_V$. Τέτοια V , $\tilde{\xi}$ και $\tilde{\sigma}$ πάντοτε υπάρχουν (βλ. Λήμμα 5.2.1). Θέτουμε

$$\nabla_A(\xi, \sigma)(x) := (\nabla_{\tilde{\xi}} \tilde{\sigma})(x).$$

Λόγω του Πορίσματος 6.2.9, η ∇_A αποτελεί μία καλά ορισμένη συναλλοίωτη παραγώγιση. $\square$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συναλλοίωτη παραγώγιση ∇ της $\ell = (E, \pi, X)$ και ένα ανοιχτό $U \subset X$, πάνω από το οποίον ορίζονται ένας χάρτης (U, φ) της X και ένα απλοποιούν ζεύγος (U, τ) της ℓ . Για ευκολία, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο ∇ και για την τοπική συναλλοίωτη παραγώγιση ∇_U . Αν $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq m}$ και $\{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq n}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathfrak{X}(U)$ και $\Gamma(U, E)$, τότε κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(U)$ και $\sigma \in \Gamma(U, E)$ γράφονται με την αντίστοιχη μορφή

$$\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i \partial_i \quad \text{και} \quad \sigma = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_j,$$

(προφανώς $m = \dim X$ και η ℓ έχει νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$). Επομένως, παραλείποντας τα πεδία μεταβολής των δεικτών, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \sigma &= \nabla_\xi \left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right) = \sum_j \nabla_\xi \alpha_j \sigma_j \\
&= \sum_j \left(\xi(\alpha_j) \cdot \sigma_j + \alpha_j \cdot \nabla_\xi \sigma_j \right) \\
&= \sum_j \xi(\alpha_j) \cdot \sigma_j + \sum_j \alpha_j \cdot \nabla_{\sum_i \xi_i \partial_i} \sigma_j \\
&= \sum_j \xi(\alpha_j) \cdot \sigma_j + \sum_{i,j} \alpha_j \xi_i \cdot \nabla_{\partial_i} \sigma_j.
\end{aligned}$$

Εφόσον $\nabla_{\partial_i} \sigma_j \in \Gamma(U, E)$, θα υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$\Gamma_{ij}^k: U \longrightarrow \mathbb{R}; \quad k = 1, \dots, n,$$

έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$(6.2.3) \quad \nabla_{\partial_i} \sigma_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \sigma_k.$$

Άρα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \sigma &= \sum_k \xi(\alpha_k) \cdot \sigma_k + \sum_{i,j,k} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \sigma_k \\
(6.2.4) \quad &= \sum_k \left(\xi(\alpha_k) + \sum_{i,j} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k.
\end{aligned}$$

Οι Γ_{ij}^k καλούνται **συναρτήσεις Christoffel** (Christoffel functions) της ∇ πάνω από το U , και ορίζονται από την ∇ μέσω της (6.2.3).

Αλλά και αντιστρόφως, κάθε οικογένεια διαφορίσιμων συναρτήσεων

$$\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j, k = 1, \dots, n,$$

ορίζει μία τοπική συναλλοίωτη παραγωγή-συνοχή μέσω του τύπου (6.2.4). Πράγματι, αν

$$\begin{aligned}
\xi &= \sum_i \xi_i \partial_i \in \mathfrak{X}(U), \quad \eta = \sum_i \eta_i \partial_i \in \mathfrak{X}(U), \\
f, g &\in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}), \quad \sigma = \sum_j \alpha_j \sigma_j \in \Gamma(U, E),
\end{aligned}$$

τότε βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \nabla_{f\xi+g\eta}\sigma &= \sum_k \left((f\xi+g\eta)(\alpha_k) + \sum_{i,j} (f\xi_i+g\eta_i)\alpha_j\Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
 &= f \sum_k \left(\xi(\alpha_k) + \sum_{i,j} \xi_i\alpha_j\Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k + \\
 &\quad + g \sum_k \left(\eta(\alpha_k) + \sum_{i,j} \eta_i\alpha_j\Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
 &= f \nabla_\xi \sigma + g \nabla_\eta \sigma,
 \end{aligned}$$

δηλαδή, η ∇ είναι $C^\infty(U, \mathbb{R})$ -γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή.

Απ' το άλλο μέρος, αν

$$\begin{aligned}
 \lambda, \mu &\in \mathbb{R}, \quad \xi = \sum_i \xi_i \partial_i \in \mathfrak{X}(U), \\
 \sigma &= \sum_j \alpha_j \sigma_j, \quad s = \sum_j b_j \sigma_j \in \Gamma(U, E),
 \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 \nabla_\xi(\lambda\sigma + \mu s) &= \sum_k \left(\xi(\lambda\alpha_k + \mu b_k) + \sum_{i,j} \xi_i \cdot (\lambda\alpha_j + \mu b_j) \cdot \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
 &= \lambda \sum_k \left(\xi(\alpha_k) + \sum_{i,j} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
 &\quad + \mu \sum_k \left(\xi(b_k) + \sum_{i,j} \xi_i b_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
 &= \lambda \nabla_\xi \sigma + \mu \nabla_\xi s,
 \end{aligned}$$

δηλαδή η ∇ είναι $\mathbb{R}$ -γραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή της.

Τέλος, αν

$$\sigma = \sum_j \alpha_j \sigma_j \in \Gamma(U, E), \quad \xi = \sum_i \xi_i \partial_i \in \mathfrak{X}(U), \quad f \in C^\infty(U, \mathbb{R}),$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\nabla_\xi f \sigma = \sum_k \left(\xi(f\alpha_k) + \sum_{i,j} \xi_i \cdot f \alpha_j \cdot \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \left(\xi(f) \cdot \alpha_k + f \cdot \xi(\alpha_k) + \sum_{ij} f \cdot \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
&= \sum_k \xi(f) \alpha_k \sigma_k + \sum_k f \left(\xi(\alpha_k) + \sum_{ij} \xi_i \alpha_j \Gamma_{ij}^k \right) \sigma_k \\
&= \xi(f) \cdot \sigma + f \cdot \nabla_\xi \sigma,
\end{aligned}$$

η οποία αποδεικνύει τον τύπο Leibniz, άρα τελικά η ∇ , που προκύπτει από τα $\{\Gamma_{ij}^k\}$ μέσω της (6.2.3), ορίζει τοπική συνοχή.

6.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

1. Μία διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X)$ έχει διαφορίσιμη δομή Riemann τότε και μόνον τότε, αν υπάρχει διαφορίσιμη απεικόνιση $\alpha: E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η $\alpha_x := \alpha|_{E_x \oplus E_x}$ να είναι εσωτερικό γινόμενο, για κάθε σημείο $x \in X$.
2. Αν η δομική ομάδα της ℓ ανάγεται στη $(GL(n, \mathbb{R}), \alpha)$, για κάποιο εσωτερικό γινόμενο α , τότε ανάγεται και στην $(GL(n, \mathbb{R}), \beta)$, για κάθε εσωτερικό γινόμενο β .
3. Αν ℓ_i ($i = 1, 2$) έχει δομή Riemann g_i , τότε και η $\ell_1 \oplus \ell_2$ έχει δομή Riemann.
4. Αν ℓ_i ($i = 1, 2$) έχει συνοχή $\mathcal{D}_i$, τότε έχει συνοχή και η $\ell_1 \oplus \ell_2$.
5. Αν ℓ_i ($i = 1, 2$) έχει δομή Riemann g_i και συμβιβαστή συνοχή $\mathcal{D}_i$, τότε οι επαγόμενες δομές (Riemann και συνοχή) στην $\ell_1 \oplus \ell_2$ είναι συμβιβαστές.
6. Μία δομή Riemann g στην $\ell_1 \oplus \ell_2$ ορίζει δομές Riemann στις ℓ_1, ℓ_2 ;
7. Αν η $\mathcal{D}$ είναι συνοχή της $\ell_1 \oplus \ell_2$, ορίζει συνοχές στις ℓ_1, ℓ_2 ;
8. Έστω μία συναλλοίωτη παραγωγή ∇ επί της δέσμης (E, π, X) . Θεωρούμε τους χάρτες (U, φ) και $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ της X , με $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$, και τις αντίστοιχες απλοποιήσεις (U, τ) και $(\hat{U}, \hat{\tau})$ της E . Να αποδειχθεί η επόμενη **συνθήκη συμβιβαστότητας** (των αντιστοιχών) **συναρτήσεων Christoffel**

$$\begin{aligned}
(6.3.1) \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_\alpha} \Big|_x \cdot T_{\beta j}(x) \cdot \hat{T}_{k\gamma}(x) \cdot \Gamma_{ij}^k(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_\alpha} \Big|_x \cdot \frac{\partial T_{\beta j}}{\partial x_i} \Big|_x \cdot \hat{T}_{j\gamma}(x),
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in U \cap \hat{U}$.

Στην προηγούμενη σχέση έχουμε: $\alpha = 1, \dots, m = \dim X$; $\beta, \gamma = 1, \dots, n$, όπου n είναι η διάσταση νημάτων της E ; (x_i) είναι οι συντεταγμένες του χάρτη (U, φ) , $(\hat{x}_\alpha)$ αυτές του $(\hat{U}, \hat{\varphi})$, ενώ οι συναρτήσεις της μορφής

$$T_{\mu\lambda}: U \cap \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_{\nu\rho}: U \cap \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις

$$T_{U\hat{U}}(x)(e_\mu) = \sum_{\lambda=1}^n T_{\mu\lambda}(x)e_\lambda, \quad T_{\hat{U}U}(x)(e_\nu) = \sum_{\rho=1}^n T_{\nu\rho}(x)e_\rho,$$

όπου

$$T_{U\hat{U}}(x) := \tau_x \circ \hat{\tau}_x^{-1}, \quad T_{\hat{U}U}(x) := \hat{\tau}_x \circ \tau_x^{-1}; \quad x \in x \in U \cap \hat{U}.$$

[Δηλαδή, οι $T_{\lambda\mu}(x)$ είναι τα στοιχεία του πίνακα $T_{U\hat{U}}(x) \in GL(n, \mathbb{R})$, που αντιστοιχεί στην απεικόνιση μεταφοράς $T_{U\hat{U}}$ (βλ. Ορισμό 2.2.1). Ανάλογα για τις $T_{\nu\rho}(x)$.]

Παρατήρηση. Παραλείποντας τη μεταβλητή x , η (6.3.1) γράφεται και με τη συνεπτυγμένη μορφή

$$(6.3.2) \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{i,j,k} \partial_{\hat{\alpha}}(x_i) \cdot T_{\beta j} \cdot \hat{T}_{k\gamma} \cdot \Gamma_{ij}^k + \sum_{i,j} \partial_{\hat{\alpha}}(x_i) \cdot \partial_i(T_{\beta j}) \cdot \hat{T}_{j\gamma},$$

όπου τα $\partial_i, \partial_{\hat{\alpha}}$ έχουν προφανή ερμηνεία.

9. Να οριστεί η έννοια της συναλλοίωτης παραγώγισης ∇ στην εφαπτομένη δέσμη (TX, π, X) μιας διαφορικής πολλαπλότητας X και να αποδειχτούν τα επόμενα συμπεράσματα :

α) Οι αντίστοιχες συναρτήσεις Christoffel υπεράνω ενός χάρτη $(U, \varphi) \equiv (U; x_1, \dots, x_m)$ ικανοποιούν τη σχέση

$$(6.3.3) \quad \Gamma_{ij}^k = (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(x_k); \quad i, j, k = 1, \dots, m = \dim X.$$

Παρατήρηση. Στην περίπτωση μιας τέτοιας συνοχής $(\nabla$ επί της TX), οι συναρτήσεις (Γ_{ij}^k) είναι γνωστές με τον ιστορικό όρο **σύμβολα Christoffel**.

β) Στην τομή δύο χαρτών (U, φ) , και $(\hat{U}, \hat{\varphi})$, ισχύει η **συνθήκη συμβιβασιμότητας συμβόλων Christoffel**

$$(6.3.4) \quad \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{i,j,k=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_\beta} \frac{\partial \hat{x}_\gamma}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k(x) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 x_k}{\partial \hat{x}_\alpha \partial \hat{x}_\beta} \frac{\partial \hat{x}_\gamma}{\partial x_k}.$$

Η προηγούμενη σχέση να αποδειχθεί κατ' ευθείαν από την (6.3.3), αλλά και ως εφαρμογή της (6.3.1).

Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι, εξ ορισμού,

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \hat{x}_\alpha \partial \hat{x}_\beta} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_\alpha} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_\beta} \right).$$

Επίσης, στα τελευταία βήματα των υπολογισμών, θα χρειαστεί να αποδειχθεί η σχέση

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_\alpha} \frac{\partial \hat{x}_p}{\partial x_i} = \delta_{\alpha p},$$

για κάθε $p = 1, \dots, m$. Η σχέση αυτή ουσιαστικά εκφράζει την αλλαγή των βάσεων

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \quad \text{και} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \hat{x}_m} \right).$$

10. Για μια συνοχή ∇ της (E, π, X) , ορίζουμε την **καμπυλότητα** (curvature)

$$R: \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(X) \times \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, E) :$$

$$(\xi, \eta, s) \mapsto R(\xi, \eta, s) := \nabla_\xi(\nabla_\eta s) - \nabla_\eta(\nabla_\xi s) - \nabla_{[\xi, \eta]} s.$$

Να αποδειχθεί ότι η R είναι $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ -τριγραμμική απεικόνιση, ενώ είναι αντισυμμετρική (ως προς ξ και η).

Ιδιαίτερα, στην περίπτωση της εφαπτόμενης δέσμης (TX, π, X) , ισχύει η **ταυτότητα Bianchi**

$$R(\xi, \eta, \zeta) + R(\eta, \zeta, \xi) + R(\zeta, \xi, \eta) = 0,$$

για κάθε $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{X}(X)$.

11. Για μια συνοχή ∇ στην εφαπτόμενη δέσμη (TX, π, X) , ορίζεται η **στρέψη** (torsion)

$$T: \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(X) \longrightarrow \mathfrak{X}(X) :$$

$$(\xi, \eta) \mapsto T(\xi, \eta) := \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - \nabla_{[\xi, \eta]}.$$

Να αποδειχθεί ότι η T είναι αντισυμμετρική και $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ -διγραμμική.

Σχόλιο. Αποδεικνύεται ότι μία πολλαπλότητα εφοδιασμένη με δομή Riemann g , διαθέτει μία μοναδική συνοχή ∇ , η οποία έχει μηδενική στρέψη ($T = 0$) και είναι συμβιβαστή με τη g . Η συνοχή αυτή καλείται **συνοχή Riemann** ή **συνοχή Levi-Civita**. Το ενδιαφέρον του σχετικού συμπεράσματος έγκειται στο γεγονός ότι τα σύμβολα Christoffel, άρα και η ίδια η συνοχή, καθορίζονται πλήρως μόνον από την g .

Η Συνοχή ως διάσπαση ακριβούς ακολουθίας

*I personally feel that the next person to propose
a new definition of a connection should be sum-
marily executed.*

M. SPIVAK [32, Vol. V, p. 602]

Οι ορισμοί της συνοχής σε μία διανυσματική δέσμη, που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. το σχόλιο που ακολουθεί τον Ορισμό 6.2.7, καθώς και το Θεώρημα 6.2.11) δεν είναι οι μόνοι που υπάρχουν. Στην πραγματικότητα είναι πάρα πολλοί, εξού και το παραπάνω επίγραμμα του M. Spivak. Προφανώς η πληθώρα των ορισμών υπαγορεύεται από διάφορες ανάγκες. Εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε δύο άλλους ορισμούς (βλ., π.χ., [15], [34]), οι οποίοι συνηθίζονται στην περίπτωση απειροδιαστάτων δεσμών. Παρά τη σχετική πολυπλοκότητα της προσέγγισης, προκύπτουν, εκτός των άλλων, και πολύ ενδιαφέροντα στοιχεία για τη δομή μερικών διανυσματικών δεσμών, που σχετίζονται αμέσως με την αρχική διανυσματική δέσμη επι της οποίας ορίζονται οι συνοχές.

7.1 Διασπάσεις και απεικονίσεις συνοχής

Σταθεροποιούμε μια διαφορική πολλαπλότητα $X \equiv (X, \mathcal{A})$ με μοντέλο $\mathbb{R}^m$ και $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Θεωρούμε ακόμη μια διανυσματική δέσμη $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$.

Η εφαπτόμενη δέσμη $\ell_X = (TX, \pi_X, X)$ έχει μian απλοποιούσα κάλυψη $\{U_i, (\pi_X, \bar{\varphi}_i)\}_{i \in I}$ με

$$(\pi_X, \bar{\varphi}_i): \pi_X^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^m : v \mapsto (\pi_X(v), \bar{\varphi}_i(v)).$$

Θυμίζουμε ότι, αν $u = [(x, \alpha)] \in T(X, x)$, τότε $\bar{\varphi}_i(u) = (\varphi_i \circ \alpha)'(0) \equiv D(\varphi_i \circ \alpha)(0)$. Η προηγούμενη ταύτιση προκύπτει από τη σχέση $(\varphi_i \circ \alpha)'(0) = (D(\varphi_i \circ \alpha)(0))(1)$.

Εξάλλου, ο ολικός χώρος E της δέσμης έχει μια διαφορική δομή, η οποία δίνεται από τον άτλαντα $\{(V_i, \psi_i)_{i \in I}$, όπου

$$V_i = \pi^{-1}(U_i),$$

$$\psi_i = (\varphi_i \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_i: V \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$$

Επομένως, η εφαπτομένη δέσμη $\ell_E = (TE, \pi_E, E)$ του E έχει μian απλοποιούσα κάλυψη $\{(V_i, (\pi_E, \bar{\psi}_i))\}_{i \in I}$, όπου

$$(\pi_E, \bar{\psi}_i): \pi_E^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : w \mapsto (\pi_E(w), \bar{\psi}_i(w)).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την αντίστροφη εικόνα $\pi^*(\ell_X) = (\pi^*(TX), p_1, E)$ της ℓ_X μέσω της απεικόνισης π , όπως στο επόμενο διάγραμμα (βλ. Ορισμό 2.4.1, και Θεώρημα 2.4.2),

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(X) = E \times_X TX & \xrightarrow{p_2} & TX \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ E & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

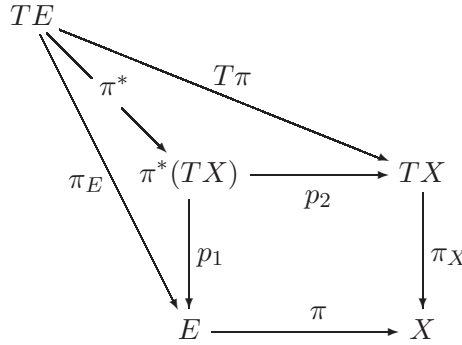
Διάγραμμα 7.1

όπου, για ευκολία, έχουμε θέσει $p_1 := \text{pr}_1|_{E \times_X TX}$ και $p_2 := \text{pr}_2|_{E \times_X TX}$. Τώρα η αντίστροφη εικόνα έχει μian απλοποιούσα κάλυψη της μορφής $\{(V_i, t_i)\}_{i \in I}$, με

$$t_i: p_1^{-1}(V_i) = \{(u, v) \in E \times TX : \pi(u) = \pi_X(v) \in U_i\} \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^m :$$

$$(u, v) \longmapsto t_i(u, v) := (u, \bar{\varphi}_i(v)).$$

Παρατηρούμε ότι η καθολική ιδιότητα της αντίστροφης εικόνας συνεπάγεται την ύπαξη ενός μορφισμού $\pi^* = (\pi_E, T\pi): TE \longrightarrow \pi^*(TX)$, που συμπληρώνει το Διάγραμμα 7.1 (σελ. 204) στο επόμενο



Διάγραμμα 7.2

7.1.1 Λήμμα. Για κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$ η ακολουθία

$$TE \xrightarrow{\pi^*} \pi^*(TX) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ισχύει η (δεύτερη) συνθήκη του Ορισμού 2.6.1. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τις απλοποιούσες καλύψεις $\{(V_i, (\pi_E, \bar{\psi}_i))\}_{i \in I}$ της ℓ_E και $\{(V_i, t_i)\}_{i \in I}$ της $\pi^*(\ell_X)$. Πάνω από κάθε $V_i = \pi^{-1}(U_i)$, η τοπική παράσταση της $\pi^* = (\pi_E, T\pi)$, όπως φαίνεται και στο επόμενο διάγραμμα,

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(V_i) & \xrightarrow{\pi^*} & p_1^{-1}(V_i) \\ (\pi_E, \bar{\psi}_i) \downarrow & & \downarrow t_i \\ V_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & V_i \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Διάγραμμα 7.3

έχει τη μορφή

$$t_i \circ \pi^* \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k) = t_i \circ \pi^*(w),$$

όπου $(\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k) = w = [(u, \alpha)] \in T(E, u) = T_u E$, και α είναι διαφορίσιμη καμπύλη στην E με $\alpha(0) = u$. Ελέγχεται στοιχειωδώς ότι πράγματι $\pi^*(\pi_E^{-1}(V_i)) \subseteq p_1^{-1}(V_i)$. Όμως,

$$\begin{aligned} (u, h, k) &= (\pi_E, \bar{\psi}_i)(w) = (u, D(\psi_i \circ \alpha)(0)) \\ &= (u, D((\varphi_i \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_i \circ \alpha)(0)) \\ &= (u, D(\varphi_i \circ pr_1 \circ \tau_i \circ \alpha)(0), D(pr_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)) \\ &= (u, D(\varphi_i \circ \pi \circ \alpha)(0), D(pr_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)). \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} t_i \circ \pi^* \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k) &= (t_i \circ \pi^*)(w) \\ &= t_i(\pi_E(w), T\pi(w)) = t_i(u, [(\pi(u), \pi \circ \alpha)]) \\ &= (u, \bar{\varphi}_i([(\pi(u), \pi \circ \alpha)])) = (u, D(\varphi_i \circ \pi \circ \alpha)(0)) = (u, h), \end{aligned}$$

δηλαδή η τοπική παράσταση της π^* είναι η κανονική προβολή. $\square$

Λόγω της Πρότασης 2.6.8, έχουμε το

7.1.2 Πρόταση. Για κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, η ακολουθία

$$\mathcal{O} \longrightarrow \ker \pi^* \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi^*} \pi^*(TX) \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής.

7.1.3 Λήμμα. Για κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, είναι

$$\ker \pi^* = \ker T\pi.$$

Απόδειξη. Έστω $w = [(u, \alpha)] \in TE$. Τότε

$$\begin{aligned} w \in \ker \pi^* &\iff \pi^*(w) = 0 \\ &\iff (\pi_E(w), T\pi(w)) = 0 \in \{u\} \times T(X, x := \pi(u)) \\ &\iff T\pi(w) = 0 \\ &\iff w \in \ker T\pi, \end{aligned}$$

που κλείνει την απόδειξη. $\square$

Συνεπώς καταλήγουμε στο επόμενο

7.1.4 Θεώρημα. Για κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \ker T\pi \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi^*} \pi^*(TX) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.6.3 και την Πρόταση 2.6.7, η εικόνα του $\ker T\pi$ μέσω της i είναι μία υποδέσμη της TE , η οποία καλείται **κάθετη υποδέσμη** (vertical subbundle) της TE και συμβολίζεται (πλήρως) με $(\mathcal{V}E, \pi_E, E)$.

7.1.5 Θεώρημα. Για κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, η υποδέσμη $(\mathcal{V}E, \pi_E, E)$ είναι ισομορφή με την αντίστροφη εικόνα $\pi^*(\ell) = (\pi^*(E), p_1, E)$ της ℓ μέσω π .

Απόδειξη. Επειδή $\pi^*(E) = E \times_X E$, η δέσμη $\pi^*(\ell)$ έχει, σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2, μία απλοποιούσα κάλυψη $\{(V_i, \hat{\tau}_i)\}_{i \in I}$, όπου $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ και

$$\hat{\tau}_i: p_1^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n : (u, v) \mapsto (u, \tau_{ix}(v)),$$

αν $x = \pi(u) = \pi(v)$. Εξάλλου, για την $(\mathcal{V}E, \pi_E, E)$ έχουμε τη σειρά των μεταθετικών διαγραμμάτων (βλ. και την απόδειξη της Πρότασης 2.6.8)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}V_i & \xrightarrow{i} & \pi_E^{-1}(V_i) & \xrightarrow{\pi^*} & p_1^{-1}(V_i) \subset E \times_X TX \\ \downarrow (\pi_E, \bar{\psi}_i) & & \downarrow (\pi_E, \bar{\psi}_i) & & \downarrow t_i \\ V_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{I} & V_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{P} & V_i \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Διάγραμμα 7.4

όπου $\mathcal{V}V_i$ είναι, προφανώς, ο ολικός χώρος της κάθετης υποδέσμης της (τετριμμένης υπο-) δέσμης $V_i = \pi^{-1}(U_i)$. Η απεικόνιση I εδώ είναι η φυσική εμφύτευση μεταξύ των αναφερομένων χώρων (και όχι το σύνολο των δεικτών I), ενώ η P είναι η προφανής προβολή. Ο περιορισμός της $(\pi_E, \bar{\psi}_i)$ στο $\mathcal{V}V_i$ ορίζει απλοποιούν ζεύγος με τιμές στο $V_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^n$, βάσει του Διαγράμματος 7.3 στη σελίδα 205.

Επομένως, οι δέσμες $\mathcal{V}E$ και $\pi^*(E)$ είναι τοπικά ισομορφες.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}V_i & \xrightarrow{\quad f_i \quad} & p_1^{-1}(V_i) \\ & \searrow (\pi_E, \bar{\psi}_i) \quad \swarrow \hat{\tau}_i & \\ & V_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \equiv V_i \times \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Διάγραμμα 7.5

μέσω των ισομορφισμών

$$f_i = \hat{\tau}_i^{-1} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i), \quad i \in I,$$

όπως σημειώνεται και στο προηγούμενο διάγραμμα.

Οι ισομορφισμοί αυτοί ορίζουν έναν ολικό ισομορφισμό $f: \mathcal{V}E \rightarrow \pi^*(E)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι $f_i = f_j|_{\mathcal{V}(U_i \cap U_j)}$, ισοδύναμα

$$\hat{\tau}_j \circ \hat{\tau}_i^{-1} = (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1},$$

για κάθε $i, j \in I$, με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τυχόντα $i, j \in I$, με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ και $(u, k) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι

$$(7.1.1) \quad \hat{\tau}_j \circ \hat{\tau}_i^{-1}(u, k) \equiv (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, 0, k).$$

Έστω $x = \pi(u) \in U_i \cap U_j$. Τότε

$$(7.1.2) \quad \hat{\tau}_j \circ \hat{\tau}_i^{-1}(u, k) = \hat{\tau}_j(u, \tau_{ix}^{-1}(k)) = (u, \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k)).$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$(7.1.3) \quad (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, 0, k) = (\pi_E, \bar{\psi}_j)(w),$$

όπου $w = [(u, \alpha)] \in T(E, u)$. Οπότε,

$$(u, 0, k) = (\pi_E, \bar{\psi}_i)(w) = (u, D(\psi_i \circ \alpha)(0)),$$

άρα

$$D(\psi_i \circ \alpha)(0) = (0, k).$$

Επομένως, βάσει της τελευταίας, η (7.1.3) οδηγεί στην

$$\begin{aligned} & (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, 0, k) = (\pi_E(w), \bar{\psi}_j(w)) \\ & = (u, D(\psi_j \circ \alpha)(0)) = (u, D(\psi_j \circ \psi_i^{-1} \circ \psi_i \circ \alpha)(0)) \\ & = (u, [D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})(\psi_i \circ \alpha)(0)] \circ D(\psi_i \circ \alpha)(0)) \\ & = (u, [D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})(\psi_i(u))] (0, k)), \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην

$$(7.1.4) \quad (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, 0, k) = (u, [D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})(\psi_i(u))] (0, k)).$$

Για να υπολογιστεί το τελευταίο διαφορικό, πρέπει να βρούμε την απεικόνιση

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}: \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n.$$

Για κάθε $(\lambda, \mu) \in \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \psi_j \circ \psi_i^{-1}(\lambda, \mu) &= (\phi_j \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ (\phi_i^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n})(\lambda, \mu) \\
 &= (\phi_j \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ (\tau_j \circ \tau_i^{-1})(z := \phi^{-1}(\lambda), \mu) \\
 &= (\phi_j \times id_{\mathbb{R}^n})(z, \tau_{jz} \circ \tau_{iz}^{-1}(\mu)) \\
 &= (\phi_j(z), \tau_{jz} \circ \tau_{iz}^{-1}(\mu)) \\
 &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(\lambda), T_{ji}(z)(\mu)) \\
 &= (\phi_j \circ \phi_i^{-1} \circ p_1, ev \circ (T_{ji} \circ \phi_i^{-1} \circ p_1, p_2))(\lambda, \mu),
 \end{aligned}$$

όπου T_{ji} είναι η απεικόνιση μεταφοράς της ℓ που αντιστοιχεί στα απλοποιούνται ζεύγη (U_i, τ_i) και (U_j, τ_j) , και ev είναι η απεικόνιση εκτίμησης

$$ev: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : (f, u) \mapsto f(u).$$

Άρα, λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό της ψ_i , το διαφορικό που περιέχεται στην (7.1.4) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 &[D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})(\psi_i(u))](0, k) = \\
 &= [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2))((\varphi_i \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_i(u))](0, k) \\
 &= [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2))(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k) \\
 &= \left([D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1)(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k), \right. \\
 &\quad \left. [D(ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2))(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k) \right)
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία στην (7.1.4), διαπιστώνουμε ότι, για να πάρουμε την (7.1.1), θα πρέπει, βάσει και της (7.1.2), να δείξουμε ότι

$$(7.1.5) \quad [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1)(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k) = 0,$$

$$(7.1.6) \quad [D(ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2))(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k) = \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 &[D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1)(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k) \\
 &= [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(p_1(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))) \circ \\
 &\quad \circ [Dp_1(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k) \\
 &= [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))](0, k) \circ p_1(0, k) \\
 &= [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))](0) = 0,
 \end{aligned}$$

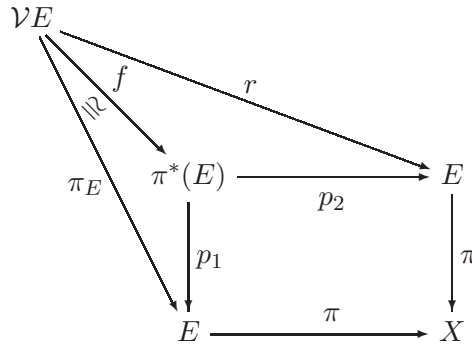
που αποδεικνύει την (7.1.5). Ανάλογα,

$$\begin{aligned}
& D(ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2))(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))(0, k) \\
&= [Dev(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)), p_2(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)))] \circ \\
&\quad \circ [D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2)(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k) \\
&= [Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u))] \circ [(D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1)(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)), \\
&\quad \quad \quad Dp_2(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)))](0, k) \\
&= [Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u))] \circ [D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1})(p_1(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))) \circ \\
&\quad \quad \quad \circ Dp_1(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)), p_2](0, k) \\
&= [Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u))] \circ [(D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1})(\varphi(x)) \circ p_1, p_2](0, k) \\
&= [Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u))]([(D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1})(\varphi(x))](0), k) \\
&= [Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u))](0, k) \\
&= ev(T_{ji}(x), k) + ev(0, \tau_{ix}(u)) \\
&= T_{ji}(x)(k) + 0(\tau_{ix}(u)) = T_{ji}(x)(k) + 0 \\
&= \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k),
\end{aligned}$$

δηλαδή αποδείξαμε και την (7.1.6), με την οποίαν, όπως εξηγήσαμε, ολοκληρώνεται και η απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι, για κάθε $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, υπάρχει ένας **κανονικός μορφισμός** διανυσματικών δεσμών

$$(r, \pi) := (p_2, \pi) \circ (f, id_E): (\mathcal{V}E, \pi_E, E) \longrightarrow (E, \pi, X).$$



Διάγραμμα 7.6

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η σύντομη ακριβής ακολουθία (βλ. Θεώρημα 7.1.4 και τον ορισμό της υποδέσμης $\mathcal{V}E$, σελ. 207)

$$(7.1.7) \quad \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{V}E \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi^*} \pi^*(TX) \longrightarrow \mathcal{O}$$

διασπάται. Τότε υπάρχει μορφισμός $V: TE \longrightarrow \mathcal{V}E$, έτσι ώστε $V \circ i = id_{\mathcal{V}E}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{V}E & \xrightarrow{i} & TE \\ & & \searrow id_{\mathcal{V}E} & & \downarrow V \\ & & & & \mathcal{V}E \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{O} \end{array}$$

Διάγραμμα 7.7

7.1.6 Ορισμός. Καλούμε **συνοχή** (connection) της $\ell = (E, \pi, X) \in VB(X)$, την απεικόνιση V (από την παράπάνω διάσπαση), και **απεικόνιση συνοχής** (connection map) την

$$K := r \circ V: TE \longrightarrow E$$

$$\begin{array}{ccccc} TE & & & & \\ \pi_E \searrow & & K \searrow & & \\ & \mathcal{V}E & \xrightarrow{r} & E & \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi & & \\ E & \xrightarrow{\pi} & X & & \end{array}$$

Διάγραμμα 7.8

Παρατηρούμε ότι

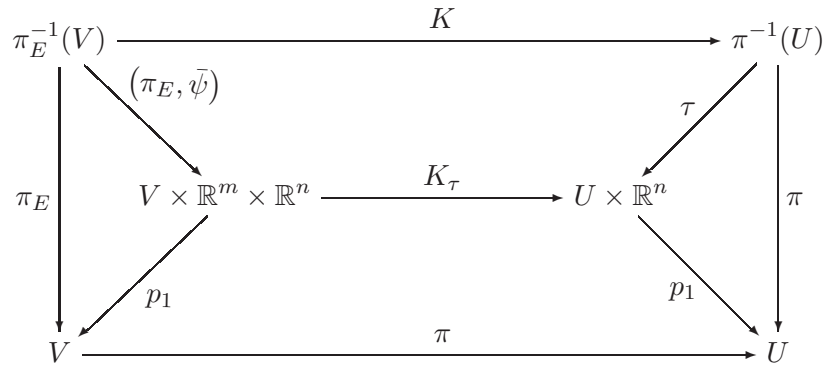
$$(K, \pi): (TE, \pi_E, E) \longrightarrow (E, \pi, X)$$

είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τη μορφή της τοπικής παράστασης της K μέσω καταλλήλων απλοποιήσεων των TE και E . Πρώτα υπενθυμίζουμε ότι (βλ. την αρχή αυτής της παραγράφου, σελ. 204), αν (U, φ) είναι χάρτης της X , (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ , και $(V = \pi^{-1}(U), (\pi_E, \bar{\psi}))$ το αντίστοιχο απλοποιούν ζεύγος της TE , όπου $\psi = (\varphi \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau$, θα συμβολίσουμε με K_τ την τοπική παράσταση της K . Από τα συμφοραζόμενα εύκολα αντιλαμβάνεται ο αναγνώστης τότε το V συμβολίζει την απεικόνιση συνοχής και τότε το ανοιχτό σύνολο $\pi^{-1}(U)$. Άρα, υπεράνω των V, U , το ζεύγος

$$(K_\tau, \pi): (\pi_E^{-1}(V), \pi_E, E) \longrightarrow (\pi^{-1}(U), \pi, U)$$

είναι μορφισμός (τετριμμένων) δεσμών ως σύνθεση τριών μορφισμών.



Διάγραμμα 7.9

Επομένως, για κάθε $(u, h, k) \in V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, οι συνιστώσες της K_τ είναι οι

$$\begin{aligned} p_1 \circ K_\tau(u, h, k) &= \pi \circ p_1(u, h, k) = \pi(u), \\ p_2 \circ K_\tau(u, h, k) &= p_2 \circ \tau \circ K \circ (\pi_E, \bar{\psi})^{-1}(u, h, k), \\ &= \tau_{\pi(u)} \circ K_u \circ (\pi_E, \bar{\psi})_u. \end{aligned}$$

Όμως, βάσει της Πρότασης 2.2.4, ορίζεται μία διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\bar{\Gamma}_\tau: V \longrightarrow L(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

τέτοια ώστε

$$p_2 \circ K_\tau(u, h, k) = \bar{\Gamma}_\tau(u)(h, k),$$

οπότε καταλήγουμε στην

$$(7.1.8) \quad K_\tau(u, h, k) = (\pi(u), \bar{\Gamma}_\tau(u)(h, k)), \quad (u, h, k) \in V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Για να δώσουμε μιά απλούστερη μορφή στην (7.1.8), η οποία περιέχει τα ανάλογα την συναρτήσεων Christoffel [βλ. (6.2.3)], θεωρούμε τώρα τις απλοποιήσεις $(V, (\pi_E, \bar{\psi}))$ της $\mathcal{V}E$ (περιορισμό της αντίστοιχης απλοποίησης της TE), και $(V, \hat{\tau})$ της $\pi^*(E)$, όπου $\hat{\tau}(u, v) = (u, \tau_x(v))$ και $x := \pi(u) = \pi(v) \in U = \pi(V)$. Επειδή $K = r \circ V = p_2 \circ f \circ V$ (βλ. και Διάγραμμα 7.6, σελ. 210), είναι και

$$K_\tau = p_{2\tau} \circ f_\tau \circ V_\tau$$

όπου $p_{2\tau}$, f_τ , V_τ είναι οι αντίστοιχες τοπικές παραστάσεις των p_2 , f , V , όπως φαίνεται και στο επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccc} TE & \xrightarrow{V} & VE & \xrightarrow{f} & \pi^*(E) & \xrightarrow{p_2} & E \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \pi_E^{-1}(V) & \xrightarrow{V} & \mathcal{V}V & \xrightarrow{f} & p_1^{-1}(V) & \xrightarrow{p_2} & V \\ \downarrow (\pi_E, \bar{\psi}) & & \downarrow (\pi_E, \bar{\psi}) & & \downarrow \hat{\tau} & & \downarrow \tau \\ V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{V_\tau} & V \times \{0\} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_\tau} & V \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{p_{2\tau}} & \text{times} \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 7.10

Προφανώς, οι απεικονίσεις στο μέσον του διαγράμματος είναι οι περιορισμοί των απεικονίσεων της πρώτης σειράς στις αντίστοιχες υποδέσμες. Επομένως,

$$(7.1.9) \quad \begin{aligned} p_{2\tau}(u, k) &= \tau \circ p_2 \circ \hat{\tau}^{-1}(u, k) = \tau \circ p_2(u, \tau_x^{-1}(k)) \\ &= \tau(\tau_x^{-1}(k)) = (x, k) = (\pi(u), k), \end{aligned}$$

για κάθε $(u, k) \in V \times \mathbb{R}^n$, με $\pi(u) = x$. Επίσης, από τη σχέση $f|_{\pi_E^{-1}(V)} \equiv \hat{\tau}^{-1} \circ (\pi_E, \bar{\psi})$ (βλ. Διάγραμμα 7.5 στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.5, σελ. 207)

$$(7.1.10) \quad f_\tau(u, 0, k) = \hat{\tau} \circ f \circ (\pi_E, \bar{\psi})^{-1}(u, 0, k) = (u, k),$$

για κάθε $(u, 0, k) \in V \times \{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Τέλος, όσον αφορά στην τοπική παράσταση V_τ , παρατηρούμε ότι η σχέση $V \circ i = id_{VE}$ (βλ. Διάγραμμα 7.7, σελ. 211) συνεπάγεται την

$$V_\tau \circ i_\tau = id: V \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V \times \{0\} \times \mathbb{R}^n,$$

δηλαδή, αν $(u, 0, k) \in V \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ τότε

$$(7.1.11) \quad V_\tau(u, 0, k) = (u, 0, k).$$

Άρα, για τα σημεία της μορφής $(u, 0, k)$ του $V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ είναι

$$(7.1.12) \quad \begin{aligned} K_\tau(u, 0, k) &= p_{2\tau} \circ f_\tau \circ V_\tau(u, 0, k) \\ &= p_{2\tau} \circ f_\tau(u, 0, k) \\ &= p_{2\tau}(u, k) = (\pi(u), k). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (7.1.8) και (7.1.12), βρίσκουμε ότι

$$\bar{\Gamma}_\tau(u)(0, k) = k.$$

Επειδή [από τη γραμμικότητα της $\bar{\Gamma}_\tau(u)$]

$$\bar{\Gamma}_\tau(u)(h, k) = \bar{\Gamma}_\tau(u)(h, 0) + \bar{\Gamma}_\tau(u)(0, k),$$

η (7.1.8) παίρνει τη μορφή

$$(7.1.13) \quad K_\tau(u, h, k) = (\pi(u), k + \bar{\Gamma}_\tau(u)(h, 0)).$$

Θέτοντας

$$\Gamma_\tau = \bar{\Gamma}_\tau \circ i_{\mathbb{R}^m},$$

όπου

$$i_{\mathbb{R}^m}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : h \mapsto (h, 0)$$

είναι η κανονική εμφύτευση, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\Gamma_\tau: V \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

τέτοια ώστε η (7.1.13) μετασχηματίζεται στην

$$(7.1.14) \quad \boxed{K_\tau(u, h, k) = (\pi(u), k + \Gamma_\tau(u)(h))},$$

για κάθε $(u, h, k) \in V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, που είναι πλέον η τελική τοπική παράσταση της K , αναφορικά με τα επιλεγμένα απλοποιούντα ζεύγη. Θα ονομάσουμε τις $\{\Gamma_\tau\}$ **γενικευμένες συνατήσεις Christoffel** της K .

Είναι προφανές ότι αν είναι γνωστή η Γ_τ , τότε είναι γνωστή και η K_τ , από την οποία μπορούμε να ανακτήσουμε την K τοπικά μέσω του τύπου

$$K|_{\pi_E^{-1}(V)} = \tau^{-1} \circ K_\tau \circ (\pi_E, \bar{\psi}).$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $(U_i, \varphi_i), (U_i, \tau_i)$ και $(U_j, \varphi_j), (U_j, \tau_j)$ είναι δύο ζεύγη χαρτών και αντιστοίχων απλοποιούντων ζευγών, πάνω από τα ανοιχτά U_i και U_j , με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, θα πρέπει (για να ορίζεται η K ολικά)

$$(7.1.15) \quad \tau_i^{-1} \circ K_{\tau_i} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i) = \tau_j^{-1} \circ K_{\tau_j} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_j)$$

επί του κοινού πεδίου ορισμού. Ισοδύναμα, για κάθε $(u, h, k) \in (V_i \cap V_j) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$(7.1.15') \quad \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ K_{\tau_i}(u, h, k) = K_{\tau_j} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k).$$

Όμως

$$\begin{aligned} \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ K_{\tau_i}(u, h, k) &= \tau_j \circ \tau_i^{-1}(\pi(u), k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) = \\ &= (x := \pi(u), \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h))). \end{aligned}$$

Επίσης, θέτοντας $(\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k) = w = [(u, \alpha)] \in T(E, u)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &K_{\tau_j} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k) = \\ &= K_{\tau_j} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_j)(w) = K_{\tau_j}(u, D(\psi_j \circ \alpha)(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ή, επειδή } \psi_j \circ \alpha &= (\phi_j \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_j \circ \alpha = (\phi_j \circ \pi \circ \alpha, p_2 \circ \tau_j \circ \alpha), \\ &= K_{\tau_j}(u, D(\varphi_j \circ \pi \circ \alpha)(0), D(p_2 \circ \tau_j \circ \alpha)(0)) \\ &= (\pi(u), D(p_2 \circ \tau_j \circ \alpha)(0) + \Gamma_{\tau_j}(u)(D(\varphi_j \circ \pi \circ \alpha)(0))). \end{aligned}$$

Συμπερασματικά, οι (7.1.15)–(7.1.15') ισχύουν αν και μόνον αν ικανοποιείται η **συνθήκη συμβιβαστότητας** των γενικευμένων συναρτήσεων Christoffel

$$(7.1.16) \quad \begin{aligned} &\tau_j \circ \tau_i^{-1}(\pi(u), k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) = \\ &= D(p_2 \circ \tau_j \circ \alpha)(0) + \Gamma_{\tau_j}(u)(D(\varphi_j \circ \pi \circ \alpha)(0)), \end{aligned}$$

για κάθε $(u, h, k) \in (V_i \cap V_j) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Είδαμε μέχρις εδώ ότι, ξεκινώντας από μία συνοχή V , κατασκευάζουμε την απεικόνιση συνοχής K και απ' αυτήν μια οικογένεια απεικονίσεων $\{\Gamma_{\tau_i}\}_{i \in I}$. Θα δούμε όμως ότι, και αντιστρόφως, από μια οικογένεια $\{\Gamma_{\tau_i}\}_{i \in I}$, που ικανοποιεί τη συνθήκη συμβιβαστότητας (7.1.16), μπορούμε να κατασκευάσουμε όχι μόνον την απεικόνιση συνοχής K , αλλά και τη συνοχή V . Δηλαδή, τελικά, η ύπαρξη μιας συνοχής-διάσπασης της (7.1.7) ισοδυναμεί με την ύπαρξη μιας οικογένειας καταλλήλων διαφορισίμων απεικονίσεων $\{\Gamma_{\tau_i}\}_{i \in I}$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το:

7.1.7 Θεώρημα. Σε μια διανυσματική δέσμη (E, π, X) , οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- i) Μία διαφορίσιμη απεικόνιση $K: TE \rightarrow E$ είναι απεικόνιση συνοχής, που προέρχεται από μία συνοχή V - διάσπαση της σύντομης ακριβούς ακολουθίας (7.1.7).
- ii) Υπεράνω των απλοποιούντων ζευγών $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ της E , υπάρχει μία οικογένεια $\{\Gamma_{\tau_i}: V_i \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)\}_{i \in I}$ συμβατών [με την έννοια της (7.1.7)] διαφορισμών απεικονίσεων, που ορίζει μία συνοχή V και της οποίας η αντίστοιχη απεικόνιση συνοχής K έχει τοπικές παραστάσεις K_{τ_i} ($i \in I$) της μορφής

$$K_{\tau_i}(u, h, k) = (\pi(u), k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)); \quad (u, h, k) \in V_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

όπου $V_i = \pi^{-1}(U_i)$, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Το ευθύ αποδείχτηκε στην προηγούμενη συζήτηση.

Αντιστρόφως: Θα ορίσουμε τη συνοχή V τοπικά. Έτσι, για κάθε $(i \in I)$, θεωρούμε τον μορφισμό $V|_{\pi^{-1}(V_i)}$, με τοπική παράσταση V_{τ_i} της μορφής

$$V_{\tau_i}(u, h, k) = (u, 0, k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)),$$

για κάθε $(u, h, k) \in V_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Επειδή (βλ. και Διάγραμμα 7.10, σελ. 213),

$$V|_{\pi^{-1}(V_i)} = (\pi_E, \bar{\psi})^{-1} \circ V_{\tau} \circ (\pi_E, \bar{\psi}),$$

θα ορίζεται ολική απεικόνιση (συνοχής) V , αν και μόνον αν

$$(\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1} \circ V_{\tau_i} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i) = (\pi_E, \bar{\psi}_j)^{-1} \circ V_{\tau_j} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_j),$$

ή, ισοδύναμα,

$$(7.1.17) \quad (\pi_E, \bar{\psi}_2) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_1)^{-1} \circ V_{\tau_1} = V_{\tau_2} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_2) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_1)^{-1}.$$

στο κοινό πεδίο ορισμού $V_i \cap V_j$, όταν $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Όμως, όπως και στην προηγούμενη συζήτηση, μεταξύ των σχέσεων (7.1.5) και (7.1.6), για οποδήποτε $(u, h, k) \in (V_{\tau_1} \cap V_{\tau_2}) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ διαπιστώνουμε ότι

$$(\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k) = (u, D(\varphi_j \circ \pi \circ \alpha)(0), D(p_2 \circ \tau_j \circ \alpha)(0)),$$

αν θέσουμε $[(u, \alpha)] = (\pi_E, \bar{\psi}_1)^{-1}(u, h, k)$. Επομένως, το δεύτερο μέλος της (7.1.17) παίρνει τη μορφή

$$(7.1.18) \quad \begin{aligned} & V_{\tau_j} \circ (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, h, k) = \\ & = (u, 0, D(p_2 \circ \tau_j \circ \alpha)(0)) + \Gamma_{\tau_j}(u)(D(\varphi_j \circ \pi \circ \alpha)(0)). \end{aligned}$$

Ανάλογα, το πρώτο μέλος της (7.1.17) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 (7.1.19) \quad & (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1} \circ V_{\tau_i}(u, h, k) = \\
 & = (\pi_E, \bar{\psi}_j) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1}(u, 0, k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) \\
 & = (u, D(\varphi_j \circ \pi \circ \beta)(0), D(p_2 \circ \tau_j \circ \beta)(0)),
 \end{aligned}$$

όπου τώρα $[(u, \beta)] = (\pi_E, \bar{\psi}_1)^{-1}(u, 0, k + \Gamma_{\tau_1}(u)(h))$. Η προηγούμενη σχέση συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
 (u, 0, k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) &= (\pi_E, \bar{\psi}_i)([(u, \beta)]) = \\
 &= (u, D(\varphi_i \circ \pi \circ \beta)(0), D(p_2 \circ \tau_i \circ \beta)(0)),
 \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$(7.1.20) \quad D(\phi_i \circ \pi \circ \beta)(0) = 0 \quad \text{και} \quad D(p_2 \circ \tau_i \circ \beta)(0) = k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h).$$

Άρα, βάσει των (7.1.18) και (7.1.19), η (7.1.17) ισχύει αν και μόνον αν

$$(7.1.21) \quad D(\phi_j \circ \pi \circ \beta)(0) = 0,$$

$$(7.1.22) \quad D(p_2 \circ \tau_j \circ \beta)(0) = D(p_2 \circ \tau_j \circ \alpha)(0) + \Gamma_{\tau_j}(u)(D(\varphi_j \circ \pi \circ \alpha)(0)).$$

Επειδή $\beta(0) = u$ και $\pi(u) = x$, διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 D(\varphi_j \circ \pi \circ \beta)(0) &= D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i \circ \pi \circ \beta(0)) \circ D(\varphi_i \circ \pi \circ \beta)(0) = \\
 &= [\text{βλ. (7.1.20)}] = [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x)](0) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η (7.1.21) ισχύει πάντοτε, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε συνθήκη συμβιβαστότητας

Απ' το άλλο μέρος,

$$\begin{aligned}
 D(p_2 \circ \tau_j \circ \beta)(0) &= D(p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \beta)(0) \\
 &= D(p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ (\pi \circ \beta, p_2 \circ \tau_i \circ \beta))(0) \\
 &= D(p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ (\varphi_i^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ (\varphi_i \times id_{\mathbb{R}^n}) \\
 &\quad \circ (\pi \circ \beta, p_2 \circ \tau_i \circ \beta))(0) \\
 &= D(p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ (\varphi_i^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ (\varphi_i \circ \pi \circ \beta, p_2 \circ \tau_i \circ \beta))(0) \\
 &= D(p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ (\varphi_i^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}))(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)) \\
 &\quad \circ (D(\varphi_i \circ \pi \circ \beta)(0), D(p_2 \circ \tau_i \circ \beta)(0))
 \end{aligned}$$

ή, εφαρμόζοντας τις (7.1.20),

$$= [D(p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ (\varphi_i^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}))(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)).$$

Επειδή, όπως διαπιστώνουμε εύκολα,

$$p_2 \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1} \circ (\varphi_i^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) = ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2),$$

η προηγούμενη σειρά ισοτήτων μετασχηματίζεται στην (βλ. και την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.5)

$$\begin{aligned} & D(p_2 \circ \tau_j \circ \beta)(0) = \\ &= [D(ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2))(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u))](0, k + \Gamma_{\tau_1}(u)(h)) \\ &= [Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u)) \circ (D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1)(\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)), \\ &\quad Dp_2(\varphi_1(x), \tau_{1x}(u)))](0, k + \Gamma_{\tau_1}(u)(h)) \\ &= Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u))(D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))(0), k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) \\ &= Dev(T_{ji}(x), \tau_{ix}(u))(0, k + \tau_{ix}(u)) = T_{ji}(x)(k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) + 0 \cdot \tau_{ix}(u) \\ &= \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k + \Gamma_{\tau_1}(u)(h)) = \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, k + \Gamma_{\tau_1}(u)(h)), \end{aligned}$$

η οποία μετασχηματίζει τελικά την (7.1.22) στην

$$\begin{aligned} (7.1.22') \quad & \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, k + \Gamma_{\tau_1}(u)(h)) = \\ &= D(p_2 \circ \tau_j \circ \alpha)(0) + \Gamma_{\tau_j}(u)(D(\varphi_j \circ \pi \circ \alpha)(0)), \end{aligned}$$

η οποία είναι ακριβώς η συνθήκη συμβιβαστότητας (7.1.16).

Ανακεφαλαιώνοντας, βλέπουμε ότι, μέσω των προηγούμενων ισοδυναμιών, μπορούμε να πάρουμε μία ολική απεικόνιση V αν και μόνον αν ικανοποιείται η συνθήκη (7.1.16). Επιπροσθέτως, η ίδια συνθήκη εξασφαλίζει και την ύπαρξη μίας ολικής απεικόνισης K (προς το παρόν δεν γνωρίζουμε αν είναι απεικόνιση συνοχής), που ορίζεται από τις (7.1.14), όπως εξηγήσαμε στο εδάφιο πριν την εκφώνηση του θεωρήματος. Επομένως η V ορίζεται τότε και μόνον τότε αν ορίζεται η K .

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μένει να δείξουμε ότι η V είναι πράγματι ένας μορφισμός διανυσματικών δεσμών, που διασπά την ακολουθία (7.1.7), και η αντίστοιχη μορφή συνοχής-της είναι ακριβώς η απεικόνιση K , την οποία πέρνουμε επίσης με την προηγούμενη διαδικασία.

Επειδή κάθε V_{τ_i} είναι μορφισμός τετριμμένων διανυσματικών δεσμών, το ίδιο είναι και κάθε περιορισμός της V

$$V|_{\pi^{-1}(V_i)} = (\pi_E, \bar{\psi})^{-1} \circ V_{\tau_i} \circ (\pi_E, \bar{\psi}),$$

συνεπώς και η $V: TE \rightarrow VE$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών. Επίσης, τοπικά διαπιστώνουμε ότι $V \circ i = id_{VE}$, άρα η V είναι μία διάσπαση της ακολουθίας (7.1.7), δηλαδή μία συνοχή.

Ας συμβολίσουμε με K' την απεικόνιση συνοχής της V . Τότε $K' = r \circ V$. Συνεπώς, για κάθε (U_i, τ_i) , είναι $K'_{\tau_i} = r_{\tau_i} \circ V_{\tau_i}$. Οπότε, και για κάθε $(u, h, k) \in V_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} K'_{\tau_i}(u, h, k) &= r_{\tau_i} \circ V_{\tau_i}(u, h, k) = r_{\tau_i}(\pi(u), 0, k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) \\ &= (\pi(u), k + \Gamma_{\tau_i}(u)(h)) = K_{\tau_i}(u, h, k). \end{aligned}$$

Από τη σύμπτωση των τοπικών παραστάσεων έπεται ότι $K' = K$, που κλείνει την απόδειξη. $\square$

Αν V είναι μία συνοχή της ℓ , δηλαδή μία διάσπαση της ακολουθίας (7.1.7), τότε το $\mathcal{H}E := \ker V$ ορίζει υποδέσμη της TE , και μάλιστα $TE = \mathcal{V}E \oplus \mathcal{H}E$.

7.1.8 Ορισμός. Η δέσμη $(\mathcal{H}E, \pi, E)$ καλείται **οριζόντια υποδέσμη** (horizontal subbundle) της TE . Επομένως, κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $u \in TE$ αναλύεται μονοσήμαντα σε $u = u^v + u^h$, όπου $u^v \in \mathcal{V}E$ και $u^h \in \mathcal{H}E$ λέγονται η **κάθετη** και η **οριζόντια συνιστώσα** του u , αντιστοίχως (vertical and horizontal component). Ανάλογα, κάθε διανυσματικό πεδίο $\xi: E \rightarrow TE$ της E αναλύεται σε κάθετη και οριζόντια συνιστώσα, δηλαδή $\xi = \xi^v + \xi^h$, με $\xi^v: E \rightarrow \mathcal{V}E$ και $\xi^h: E \rightarrow \mathcal{H}E$.

7.1.9 Πρόταση. Ένα διανυσματικό πεδίο $\xi: E \rightarrow TE$ είναι διαφορίσιμο, τότε και μόνον τότε αν έχει διαφορίσιμη οριζόντια και κάθετη συνιστώσα.

Απόδειξη. Αν οι συνιστώσες ξ^v, ξ^h είναι διαφορίσιμες, τότε προφανώς και το ξ είναι διαφορίσιμο. Αντιστρόφως, αν το ξ είναι διαφορίσιμο, τότε το $V \circ \xi$ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο με τιμές στην $\mathcal{V}E$. Επίσης, το $\xi - V \circ \xi$ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι το $\xi - V \circ \xi$ παίρνει τιμές στην $\mathcal{H}E$, οπότε θα είναι $\xi^v = V \circ \xi$ και $\xi^h = \xi - V \circ \xi$. Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι $V \circ (\xi - V \circ \xi) = 0$. Πράγματι,

$$V \circ (\xi - V \circ \xi) = V \circ \xi - V \circ i \circ V \circ \xi = V \circ \xi - V \circ \xi = 0 \quad \square.$$

7.1.10 Πρόταση. Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in TE$ είναι οριζόντιο, αν και μόνον αν $K(w) = 0$. Επομένως,

$$\ker V =: \mathcal{H}E = \ker K.$$

Απόδειξη. Αν $w \in \mathcal{H}E$, τότε και $K(w) = r \circ V(w) = 0$. Αντιστρόφως, έστω ότι $K(w) = 0$, για κάποιο $w = [(u, \alpha)] \in TE$. Τότε (βλ. τον ισομορφισμό f στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.5)

$$\begin{aligned} K(w) &= r \circ V(w) = p_2 \circ f \circ V(w) = 0 \\ \Rightarrow K_\tau(u, h, k) &= p_{2\tau} \circ f_\tau \circ V_\tau(u, h, k) = 0, \end{aligned}$$

όπου $(u, h, k) = (\pi_E, \bar{\psi})(w)$ και (U, τ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ υπεράνω του χάρτη (U, φ) της βάσης X , με $\pi(u) \in U$. Άρα, αν $V_\tau(u, h, k) = (u, 0, k')$, τότε

$$p_{2\tau} \circ f_\tau(u, 0, k') = p_{2\tau}(u, k') = (\pi(u), k') = 0,$$

απ' όπου $k' = 0$. Άρα $V_\tau(u, h, k) = (u, 0, 0)$, οπότε και $V(w) = 0$. $\square$

7.2 Γραμμικές συνοχές

Θεωρούμε πάλι μια απεικόνιση συνοχής K , και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{K} & E \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Διάγραμμα 7.11

που είναι συνέπεια του μορφισμού διανυσματικών δεσμών

$$(K, \pi): (TE, \pi_E, E) \longrightarrow (E, \pi, X),$$

οπότε έχουμε την ισότητα

$$(7.2.1) \quad \pi \circ K = \pi \circ \pi_E.$$

Επίσης, επειδή

$$(T\pi, \pi): (TE, \pi_E, E) \longrightarrow (TX, \pi_X, X)$$

είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών, έχουμε ότι

$$(7.2.2) \quad \pi_X \circ T\pi = \pi \circ \pi_E,$$

δηλαδή το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{T\pi} & TX \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ E & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Διάγραμμα 7.12

Από τις (7.2.1) και (7.2.2) προκύπτει ότι

$$(7.2.3) \quad \pi_X \circ T\pi = \pi \circ \pi_E,$$

δηλαδή η μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{K} & E \\ T\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ TX & \xrightarrow{\pi_X} & X \end{array}$$

Διάγραμμα 7.13

Στο τελευταίο διάγραμμα, οι δύο κατακόρυφες τριάδες $(TE, T\pi, TX)$ και (E, π, X) είναι διανυσματικές δέσμες. Προφανώς, το ζεύγος (K, π_X) θα ορίζει μορφισμό διανυσματικών δεσμών μεταξύ των $(TE, T\pi, TX)$ και (E, π, X) τότε και μόνον τότε αν οι περιορισμοί της K στα νήματα της $(TE, T\pi, TX)$ είναι γραμμικές απεικονίσεις. Στην περίπτωση αυτή, η συνοχή V , που ορίζει την K , λέγεται **γραμμική συνοχή** (linear connection) και η K **γραμμική απεικόνιση συνοχής** (linear connection map).

Πριν εξετάσουμε τη σημασία της γραμμικότητας μιας συνοχής, ας δούμε αναλυτικά τη δομή της διανυσματικής δέσμης $(TE, T\pi, TX)$. Προφανώς, τώρα τα απολοποιούντα ζεύγη θα προκύψουν από τους χάρτες της TX , με πεδία ορισμού της μορφής $\pi_X^{-1}(U_i)$. Έχοντας υπόψη και τους συμβολισμούς στην αρχή της § 7.1, αποδεικνύουμε πρώτα το επόμενο

7.2.1 Λήμμα. Έστω $\ell = (E, \pi, X)$ διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. Τότε η τριάδα $(TE, T\pi, TX)$ είναι διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ και απλοποιούσα κάλυψη $\{(\pi_X^{-1}(U_i), \hat{\tau}_i)\}_{i \in I}$.

όπου

$$\begin{aligned} \hat{t}_i: (T\pi)^{-1}(\pi_X^{-1}(U_i)) &\longrightarrow \pi_X^{-1}(U_i) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \\ w = [(u, a)] &\longmapsto (T\pi(w), \tau_{ix}(u), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)), \quad x = \pi(u). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Κάθε $\hat{t}_i$ κάνει μεταθετικό το διάγραμμα (τρίγωνο)

$$\begin{array}{ccc} (T\pi)^{-1}(\pi_X^{-1}(U_i)) & \xrightarrow{\hat{t}_i} & \pi_X^{-1}(U_i) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow T\pi \quad \swarrow p_1 & \\ & \pi_X^{-1}(U_i) & \end{array}$$

Διάγραμμα 7.14

Επίσης $\hat{t}_i$ είναι 1-1: Αν $w = [(u, \alpha)]$, $w' = [(u', \alpha')]$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα του $\text{Dom } t_i$ με $\hat{t}_i(w) = \hat{t}_i(w')$, τότε

$$(7.2.4) \quad T\pi(w) = T\pi(w'),$$

$$(7.2.5) \quad \tau_{ix}(u) = \tau_{ix'}(u'),$$

$$(7.2.6) \quad D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0) = D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha')(0).$$

Η (7.2.4) συνεπάγεται ότι $[(\pi(u), \pi \circ \alpha)] = [(\pi(u'), \pi \circ \alpha')]$, οπότε, βάσει του ορισμού της σχέσης ισοδυναμίας που ορίζει τα εφαπτόμενα διανύσματα στο X ,

$$(7.2.7) \quad x = \pi(u) = \pi(u') = x',$$

$$(7.2.8) \quad D(\varphi_i \circ \pi \circ \alpha)(0) = D(\varphi_i \circ \pi \circ \alpha')(0),$$

για το χάρτη (U_i, φ_i) που περιέχει το x . Οι (7.2.7) και (7.2.5) δίνουν τώρα ότι

$$(7.2.9) \quad u = u'.$$

Απ' το άλλο μέρος, για να εξασφαλίσουμε τη σύμπτωση των w και w' στο $T_u E$, αρκεί να ελέγξουμε αν

$$(7.2.10) \quad D(\psi_i \circ \alpha)(0) = D(\psi_i \circ \alpha')(0).$$

για το χάρτη $(V_i = \pi^{-1}(U_i), \psi_i)$ του E , που περιέχει το u . Επειδή

$$(7.2.11) \quad \psi_i \circ \alpha = (\phi_i \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_i \circ \alpha = (\phi_i \circ \pi \circ \alpha, p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)$$

$$(7.2.11') \quad \psi_i \circ \alpha' = (\phi_i \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau_i \circ \alpha' = (\phi_i \circ \pi \circ \alpha', p_2 \circ \tau_i \circ \alpha'),$$

οι (7.2.8) και (7.2.6) δίνουν ότι

$$\begin{aligned} D(\psi_i \circ \alpha)(0) &= (D(\phi_i \circ \pi \circ \alpha)(0), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)) \\ &= (D(\phi_i \circ \pi \circ \alpha')(0), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha')(0)) \\ &= D(\psi_i \circ \alpha')(0), \end{aligned}$$

που επαληθεύουν την (7.2.10) και οδηγούν στη ζητούμενη σχέση

$$w = w',$$

με την οποίαν καταλήγουμε στο 1-1 της t_i .

Κάθε $\hat{t}_i$ είναι απεικόνιση επί: Για τυχόν $[(x, \beta), k_1, k_2] \in \pi_X^{-1}(U_i) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, θέτουμε

$$w := [(u, \alpha)],$$

όπου

$$\begin{aligned} u &:= \tau_{ix}^{-1}(k_1), \\ \alpha(t) &:= \psi_i^{-1}(\psi_i(u) + t(D(\varphi_i \circ \beta)(0), k_2)). \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} (7.2.12) \quad \hat{t}_i(w) &= (T\pi(w), \tau_{ix}(u), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)) \\ &= ([(\pi(u), \pi \circ \alpha)], k_1, D(p_2 \circ \psi_i \circ \alpha)(0)). \end{aligned}$$

Όμως, $\pi(u) = x$ και

$$\begin{aligned} \pi \circ \alpha(t) &= \pi \circ \psi_i^{-1}(\psi_i(u) + t(D(\varphi_i \circ \beta)(0), k_2)) \\ &= \pi \circ \tau_i^{-1} \circ (\varphi_i^{-1} \times 1)((\varphi_i(x), \tau_{ix}(u)) + t(D(\varphi_i \circ \beta)(0), k_2)) \\ &= p_1(\varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + tD(\varphi_i \circ \beta)(0), (\tau_{ix}(u) + tk_2))) \\ &= \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + tD(\varphi_i \circ \beta)(0)), \end{aligned}$$

μέσω της οποίας προκύπτει ότι

$$\bar{\varphi}_i([\pi(u), \pi \circ \alpha]) = D(\varphi \circ \pi \circ \alpha)(0) = D(\varphi \circ \beta)(0) = \bar{\varphi}_i([x, \beta]),$$

άρα παίρνουμε την

$$(7.2.13) \quad [(\pi(u), \pi \circ \alpha)] = [x, \beta].$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} p_2 \circ \psi_i \circ \alpha(t) &= p_2(\psi_i(u) + t(D(\varphi_i \circ \beta)(0), k_2)) \\ &= p_2((\varphi(x), \tau_{ix}(u)) + t(D(\varphi_i \circ \beta)(0) + k_2)) \\ &= \tau_{ix}(u) + tk_2, \end{aligned}$$

βάσει της οποίας είναι και

$$(7.2.14) \quad D(p_2 \circ \psi_i \circ \alpha)(0) = k_2.$$

Αντικαθιστώντας τις (7.2.13) και (7.2.14) στην (7.2.12), βρίσκουμε ότι $\widehat{t}_i(w) = ([(x, \beta), k_1, k_2],$ που αποδεικνύει το επί της $\widehat{t}_i$.

Θα δείξουμε τώρα τη διαφορική συμβιβαστικότητα των απλοποιούντων ζευγών. Για $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, η απεικόνιση $t_j \circ t_i^{-1}$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \widehat{t}_j \circ t_i^{-1}(v = [(x, \beta)], k_1, k_2) &= \\ &= \widehat{t}_j([(u = \tau_{ix}^{-1}(k_1), \alpha)]) \\ &= ([(\pi(u), \pi \circ \alpha), \tau_{jx}(u), D(p_2 \circ \psi_j \circ \alpha)(0)]) \\ &= (v = [(x, \beta)], \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}(k_1), D((p_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1}) \circ (\psi_i \circ \alpha))(0)) \\ &= (v, T_{ji}(x)(k_1), D(p_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1})(\psi_i(u)) \circ \\ &\quad \circ (D(\varphi_i \circ \pi \circ \alpha)(0), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0))) \\ &= (v, (T_{ji} \circ \pi_X(v))(k_1), D(p_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1})(\psi_i(u))(D(\varphi_i \circ \beta)(0), k_2)) \\ &= (v, ev(T_{ji}(\pi_X(v)), k_1), [D(p_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1})(\varphi_i(x), k_1)](D(\varphi_i \circ \beta)(0), k_2)). \end{aligned}$$

Επειδή, $p_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1} = ev \circ (T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2)$ [γιατί;], η τρίτη συντεταγμένη του $\widehat{t}_j \circ \widehat{t}_i^{-1}(v = [(x, \beta)], k_1, k_2)$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &[D(p_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1})(\varphi_i(x), k_1)](D(\varphi_i \circ \beta)(0), k_2) = \\ &= [Dev(T_{ji}, k_1) \circ (D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1} \circ p_1, p_2)(\varphi_i(x), k_1))](\bar{\varphi}_i(v), k_2) \\ &= Dev(T_{ji}(x), k_1)(D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))(\bar{\varphi}_i(v), k_2)) \\ &= T_{ji}(x)(k_2) + ev(D(T_{ji} \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i \circ \pi_X(v))(\bar{\varphi}_i(v)), k_1), \end{aligned}$$

η οποία είναι διαφορίσιμη συνάρτηση των v, k_1, k_2 , όπως είναι άλλωστε και οι δύο πρώτες συντεταγμένες, άρα η $\widehat{t}_j \circ \widehat{t}_i^{-1}$ είναι τελικά (αμφι)διαφορίσιμη απεικόνιση.

Τέλος, η γραμμικότητα κάθε $\widehat{t}_i$ στα νήματα είναι άμεση συνέπεια της γραμμικότητας της αντίστροφης $\widehat{t}_i^{-1}$ ως προς (k_1, k_2) . Επομένως, πληρούνται οι συνθήκες της Πρότασης 2.2.5, οπότε αποδεικνύεται και το παρόν λήμμα. $\square$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $\pi_E^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) = (T\pi)^{-1}(\pi_X^{-1}(U_i))$, που προκύπτει από την (7.2.2) του μορφισμού $(T\pi, \pi)$, αποδεικνύουμε και το

7.2.2 Λήμμα. Το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(\pi^{-1}(U_i)) = (T\pi)^{-1}(\pi_X^{-1}(U_i)) & \xrightarrow{\hat{t}_i} & \pi_X^{-1}(U_i) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow (\pi_E, \bar{\psi}_i) & & \downarrow (\pi_X, \bar{\varphi}_i) \times 1 \times 1 \\ \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tau_i \times 1 \times 1} & U_i \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \equiv U_i \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Διάγραμμα 7.15

Απόδειξη. Για ευκολία, στο προηγούμενο διάγραμμα το 1 συμβολίζει την αντίστοιχη ταυτοτική απεικόνιση.

Έστω $w = [(u, \alpha)] \in \pi_E^{-1}(\pi^{-1}(U_i))$, με $\pi(u) = x \in U_i$. Τότε, εφαρμόζοντας και την (7.2.11), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} & (\tau_i \times 1 \times 1) \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)(w) = \\ & = (\tau_i \times 1 \times 1)(u, D(\psi_i \circ \alpha)(0)) = (\tau_i(u), D(\psi_i \circ \alpha)(0)) \\ & = (x, \tau_{ix}(u), D(\varphi_i \circ \pi \circ \alpha)(0), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)). \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$\begin{aligned} & ((\pi_X, \bar{\varphi}_i) \times 1 \times 1) \circ \hat{t}_i(w) = \\ & = (\pi_X, \bar{\varphi}_i) \times 1 \times 1([(x, \pi \circ \alpha)], \tau_{ix}(u), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)) \\ & = (x, D(\varphi_i \circ \pi \circ \alpha)(0), \tau_{ix}(u), D(p_2 \circ \tau_i \circ \alpha)(0)), \end{aligned}$$

που με μία αλλαγή της θέσης αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

7.2.3 Πρόταση. Μία απεικόνιση συνοχής $K: TE \rightarrow E$ είναι γραμμική αν και μόνον αν, για κάθε χάρτη, η αντίστοιχη Γ_τ (βλ. Θεώρημα 7.1.7) είναι γραμμική ως προς u .

Απόδειξη. Λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο Διάγραμμα 7.14 (σελ. 222) και την (7.1.14), για τυχόντα χάρτη (U_i, φ_i) της X έχουμε:

$$\begin{aligned} & K \text{ γραμμική ως προς τα νήματα της } (TE, T\pi, TX) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow K \circ \hat{t}_i^{-1} \text{ γραμμική ως προς } (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & \Leftrightarrow K \circ \hat{t}_i^{-1} \circ ((\pi_X, \bar{\varphi}_i) \times 1 \times 1) \text{ γραμμική ως προς } (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & \Leftrightarrow K \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1} \circ (\tau_i^{-1} \times 1 \times 1) \text{ γραμμική ως προς } (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow K \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1} \text{ γραμμική ως προς } (u, k_2) \in \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \tau_i \circ K \circ (\pi_E, \bar{\psi}_i)^{-1} = K_{\tau_i} \text{ γραμμική ως προς } (u, k_2)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{\tau_i} \text{ γραμμική ως προς } u.$$

□

7.2.4 Πρόρισμα. Μία απεικόνιση συνοχής $K: TE \rightarrow E$ είναι γραμμική αν και μόνον αν, για κάθε χάρτη (U, φ) του X , η τοπική παράσταση της Γ_τ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi: \varphi(U) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n): \\ (h, k) &\longmapsto \Gamma_\varphi(h, k) := \Gamma_\tau(\tau^{-1}(\varphi^{-1}(h), k)), \end{aligned}$$

είναι γραμμική ως προς k .

7.3 Η ισοδυναμία διάσπασης και συναλλοίωτης παραγώγου

Μοναδικό αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη του επομένου σημαντικού αποτελέσματος.

7.3.1 Θεώρημα. Υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία

$$S: \mathcal{K}(E) \longrightarrow \mathcal{D}(E),$$

όπου $\mathcal{K}(E)$ είναι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων συνοχής μιας διανυσματικής δέσμης $\ell = (E, \pi, X)$ και $\mathcal{D}(E)$ είναι το σύνολο των συναλλοιώτων παραγωγίσεων της ℓ .

Πριν την απόδειξη υπενθυμίζουμε ότι $\mathfrak{X}(X)$ είναι ο χώρος των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του X και $\Gamma(X, E)$ ο χώρος των διαφορίσιμων τομών της ℓ (βλ. και Ορισμό 6.2.7).

Απόδειξη. Έστω K μια γραμμική απεικόνιση συνοχής της ℓ . Ορίζουμε την

$$\begin{aligned} S(K): \mathfrak{X}(X) \times \Gamma(X, E) &\longrightarrow \Gamma(X, E): \\ (\xi, \sigma) &\longmapsto \nabla_\xi \sigma := K \circ T\sigma \circ \xi. \end{aligned}$$

Η απεικόνιση $K \circ T\sigma \circ \xi$ είναι μια διαφορίσιμη τομή της ℓ . Πράγματι, η διαφορίσιμότητα είναι προφανής, ενώ, για κάθε $x \in X$, είναι $\xi_x \in T(X, x)$, $T\sigma(\xi_x) = T_x\sigma(\xi_x) \in T(E, \sigma(x))$ και $(K \circ T\sigma \circ \xi)(x) \in E_x$, αφού $(K, \pi): (TE, \pi_E, E) \rightarrow (E, \pi, X)$ είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών. Οι (αλγεβρικές) ιδιότητες της

συναλλοίωτης παραγώγισης ελέγχονται στοιχειωδώς, εκτός από τη συνθήκη Leibniz, που είναι πολυπλοκότερη και για την οποία παραπέμπουμε στην Άσκηση 7.3(2). Επομένως, $S(K)$ είναι συναλλοίωτη παραγωγή της ℓ και η S είναι καλά ορισμένη.

Η S είναι 1-1: Ας υποθέσουμε ότι $S(K) = S(K')$, για $K, K' \in \mathcal{K}(E)$. Τότε θα είναι

$$(7.3.1) \quad K \circ T\sigma \circ \xi = K' \circ T\sigma \circ \xi, \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(X), \sigma \in \Gamma(X, E).$$

Επειδή θέλουμε να δείξουμε ότι $K = K'$, δηλαδή $K(w) = K'(w)$, για κάθε $w = [(u, \alpha)] \in T_u E$ ($u \in E$), αρκεί [βάσει της (7.3.1)] να βρούμε $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ και $\sigma \in \Gamma(X, E)$ με $T\sigma \circ \xi(x) = w$, όπου $x = \pi(u)$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε χάρτη (U, φ) της X , με $x \in U$, και αντίστοιχο απλοποιούν ζεύγος (U, τ) της ℓ . Προφανώς, $u \in \pi^{-1}(U)$ και $T\tau: T(\tau^{-1}(U)) \rightarrow T(U \times \mathbb{R}^n)$, άρα

$$T_u \tau: T(\tau^{-1}(U), u) \equiv T(E, u) \rightarrow T(U \times \mathbb{R}^n, \tau(u)).$$

Επειδή $\tau(u) = (x, \tau_x(u) =: h)$ και $T(U \times \mathbb{R}^n, \tau(u)) \equiv T(U, x) \times T(\mathbb{R}^n, h)$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(7.3.2) \quad T_u \tau(w) = (w_1, w_2) \in T(U, x) \times T(\mathbb{R}^n, h).$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα $w_1 \in T(U, x)$ επεκτείνεται σε ένα τοπικό διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi^0 \in \mathfrak{X}(U)$, με $\xi^0(x) = w_1$ [αρκεί να θέσουμε $\xi^0(y) := T\varphi^{-1}(y, \bar{\varphi}(w_1))$, για κάθε $y \in U$]. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.2.1 στην περίπτωση των διανυσματικών πεδίων (: τομών της εφαπτόμενης δέσμης), μπορούμε να επεκτείνουμε το ξ^0 σε ένα $\xi \in \mathfrak{X}(X)$, με $\xi(x) = \xi_x = w_1$.

Στη συνέχεια θέτουμε $h_1 := \bar{\varphi}(w_1)$, $h_2 := id_{\mathbb{R}^n}(w_2)$ και θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $H: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $H(h_1) = h_2$. Επίσης ορίζουμε και τη διαφορίσιμη τοπική τομή της ℓ

$$\sigma^0: U \rightarrow \pi^{-1}(U): z \rightarrow \sigma^0(z) := \tau^{-1}(z, H \circ \varphi(z)),$$

της οποίας θεωρούμε την επέκταση $\sigma \in \Gamma(X, E)$, πάλι κατά το Λήμμα 5.2.1. Επομένως,

$$\begin{aligned} T_x \sigma(\xi_x) &= T_x \sigma^0(w_1) = T_x(\tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma^0)(w_1) \\ &= T\tau^{-1} \circ T_x(\tau \circ \sigma^0)(w_1) \\ &= T\tau^{-1}(T_x(id_U, H \circ \varphi)(w_1)) \\ &= T\tau^{-1}(w_1, T_x(H \circ \varphi)(w_1)) \\ &= T\tau^{-1}(w_1, T_{\varphi(x)} H \circ T_x \varphi(w_1)). \end{aligned}$$

Όμως, από την τοπική παράσταση του διαφορικού και την γραμμικότητα της H , έχουμε ότι

$$T_{\varphi(x)}H = \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ H \circ \overline{id}_{\mathbb{R}^m} \quad \text{και} \quad T_x\varphi = \overline{id}_{\mathbb{R}^m}^{-1} \circ \bar{\varphi},$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} T_x\sigma(\xi_x) &= T\tau^{-1}(w_1, (\overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ H \circ \bar{\varphi})(w_1)) \\ &= T\tau^{-1}(w_1, \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ H(h_1)) \\ &= T\tau^{-1}(w_1, \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(h_2)) \\ [\text{βλ. (7.3.2)}] \quad &= T\tau^{-1}(w_1, w_2) = w, \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του 1-1 της S , όπως εξηγήσαμε στην αρχή.

Μένει να αποδειχθεί το *επί* της S : Έστω ∇ μία συναλλοίωτη παραγωγή της ℓ . Πάνω από κάθε χάρτη (U, φ) , η ∇ ορίζει μία οικογένεια διαφορισίμων απεικονίσεων $\{\Gamma_{ij}^k\}$, των συναρτήσεων Christoffel [βλ. (;)]. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Gamma_\tau: \pi^{-1}(U) \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

μέσω του τύπου

$$\Gamma_\tau(u)(h) := \sum_{ijk} h_i k_j \Gamma_{ij}^k(\pi(u)) \cdot e_k,$$

όπου

$$k_j = \text{pr}_j(k), \text{ αν } k = \tau_{\pi(u)}(u).$$

Η Γ_τ είναι διαφορίσιμη και γραμμική ως προς h , k , δηλαδή γραμμική ως προς h , u . Ορίζουμε κατόπιν την απεικόνιση

$$\begin{aligned} K_\tau: \pi^{-1}(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : \\ (u, h, k) &\longmapsto K_\tau(u, h, k) := (u, k + \Gamma_\tau(u)(h)). \end{aligned}$$

Η συμβιβαστικότητα των συναρτήσεων Christoffel μιας συναλλοίωτης παραγωγής, πάνω από διαφορετικούς χάρτες [βλ. Άσκηση 6.3 (8)], συνεπάγεται τη συμβιβαστικότητα των γενικευμένων συναρτήσεων Christoffel $\{\Gamma_\tau\}$ που κατασκευάζουμε [βλ. Άσκηση 7.4 (4)], και αυτή με τη σειρά της οδηγεί στη συμβιβαστικότητα των αντιστοιχών $\{K_\tau\}$ [βλ. Άσκηση 7.4 (1)], οπότε και ορίζεται μια ολική απεικόνιση συνοχής $K: TE \rightarrow E$. Τέλος ελέγχουμε ότι $S(K) = \nabla$ [βλ. Άσκηση 7.4 (5)]. $\square$

7.3.2 Παρατήρηση. Στο προηγούμενο θεώρημα είδαμε ότι μία γραμμική απεικόνιση συνοχής K ορίζει μία συναλλοίωτη παραγωγή ∇ , μέσω της σχέσης $\nabla_\xi \sigma = K \circ T\sigma \circ \xi$ και αντιστρόφως. Στην απειροδιάστατη διάστατη όμως ισχύει

μόνον η μία κατεύθυνση (βλ. [34]), δηλ. μία K ορίζει αντίστοιχη ∇ . Για να ισχύει το αντίστροφο, πρέπει να γίνει κατάλληλη τροποποίηση της έννοιας της συναλλοίωτης παραγώγισης (βλ. σχετικά [3] και [15]).

7.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 7

1. Έστω (E, π, X) διανυσματική δέσμη εφοδιασμένη με μία απεικόνιση συνохής K . Θεωρούμε τους χάρτες (U, φ) και $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ της X , με $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$, και τις αντίστοιχες απλοποιήσεις (U, τ) και $(\hat{U}, \hat{\tau})$ της E . Επίσης θεωρούμε και τους αντίστοιχους χάρτες $(\pi^{-1}(U), \psi)$ και $(\pi^{-1}(\hat{U}), \hat{\psi})$ της E , με $\psi = (\phi \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \tau$ και $\hat{\psi} = (\hat{\varphi} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \hat{\tau}$ (βλ. και συμβολισμούς σελ. 212). Να αποδειχθεί ότι η **συνθήκη συμβιβάσιμότητας των τοπικών παραστάσεων της K** [σε παραλλαγμένη γραφή της (7.1.15)]

$$(7.4.3) \quad K_{\hat{\tau}} = \hat{\tau} \circ \tau \circ K_{\tau} \circ (\pi_E, \bar{\psi}) \circ (\pi_E, \hat{\psi})^{-1}$$

είναι ισοδύναμη με τη **συνθήκη συμβιβάσιμότητας των γενικευμένων συνατήσεων Christoffel**

$$(7.4.4) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\hat{\tau}}(u)(h) = & T_{\hat{U}U}(x) [D(T_{U\hat{U}} \circ \hat{\varphi}^{-1})(\hat{\varphi}(x))(h, \hat{\tau}_x(u)) \\ & + \Gamma_{\tau}(u)(D(\varphi \circ \hat{\varphi}^{-1})(\hat{\varphi}(x))(h))], \end{aligned}$$

για κάθε $u \in \pi^{-1}(U)$, $x = \pi(u)$, και $h \in \mathbb{R}^m$.

Στην προηγούμενη σχέση είναι

$$T_{U\hat{U}}(x) := \tau_x \circ \hat{\tau}_x^{-1}, \quad T_{\hat{U}U}(x) := \hat{\tau}_x \circ \tau_x^{-1}; \quad x \in U \cap \hat{U}.$$

Υπόδειξη: Στην απόδειξη του ισχυρισμού της άσκησης είναι ουσιώδης ο υπολογισμός της $(\pi_E, \bar{\psi}) \circ (\pi_E, \hat{\psi})^{-1}$, που βασίζεται στη στοιχειώδη σχέση $\hat{\psi} \circ \bar{\psi}^{-1} = D(\psi \circ \hat{\psi}^{-1})(\hat{\psi}(x))$, όταν οι $\hat{\psi}$ και $\bar{\psi}$ θεωρηθούν με πεδίων ορισμού τον εφαπτόμενο χώρο $T_x E$.

Επίσης, στην (7.4.4) έχει χρησιμοποιηθεί ότι

$$D(T_{U\hat{U}} \circ \hat{\varphi}^{-1})(\hat{\varphi}(x))(\hat{\varphi}(x), \hat{\tau}_x(u)) = [D(T_{U\hat{U}} \circ \hat{\varphi}^{-1})(\hat{\varphi}(x))(h)](\hat{\tau}_x(u)),$$

βάσει του γραμμικού ισομορφισμού $L(\mathbb{E}, L(\mathbb{F}, \mathbb{G})) = L_2(\mathbb{E} \times \mathbb{F}, \mathbb{G})$, όπου το δεύτερο μέρος της ισότητας συμβολίζει τον χώρο των διγραμμικών απεικινίσεων μεταξύ των σημειωμένων χώρων.

Σχόλιο: Η (7.4.4) είναι μία ρητή συνθήκη συμβιβαστότητας των γενικευμένων συναρτήσεων Christoffel, η οποία είναι ευκολότερα διαχειρίσιμη από την πεπλεγμένη περίπτωση της (7.1.16) που ανάμειγνύει καμπύλες.

2. Να αποδειχθεί ότι η ∇ , που ορίζεται στο Θεώρημα 7.3.1 από μία γραμμική απεικόνιση συνοχής K , είναι πράγματι συναλλοίωτη παραγωγή, δηλ. ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 6.2.7.

Υποδείξεις-Σχόλια: Η επαλήθευση της συνθήκης Leibniz είναι περισσότερο τεχνική από τις άλλες ιδιότητες της ∇ και απαιτεί αρκετά τεχνικά βήματα, που υποδεικνύουμε στη συνέχεια :

Η επαλήθευση γίνεται τοπικά, υπεράνω των τοπικών χαρτών (U, φ) της βάσης X , των απλοποιήσεων (U, τ) της E και των τοπικών χαρτών $(\pi^{-1}(U), \psi)$ της E (βλ. και τους συμβολισμούς της προηγούμενης άσκησης). Επομένως, πρέπει να υπολογιστούν οι αγκύλες στην

$$\begin{aligned} (\tau \circ \nabla_{\xi} \sigma \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) &= (\tau \circ (K \circ T\sigma \circ \xi) \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= ([\tau \circ K \circ T\psi^{-1}] \circ [T\psi \circ T\sigma \circ T\varphi^{-1}] \circ [T\varphi \circ \xi \circ \varphi^{-1}])(\varphi(x)), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in U$.

Πρώτα βρίσκουμε ότι η τυπική διαφόριση της σ οδηγεί στην

$$\begin{aligned} [T\psi \circ T\sigma \circ T\varphi^{-1}](\varphi(x), h) &= T(\psi \circ \sigma \circ \varphi^{-1})(\varphi(x), h) \\ &= (\varphi(x), \sigma_{\varphi}(\varphi(x)), h, D\sigma_{\varphi}(\varphi(x))(h)), \end{aligned}$$

για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$ με $\sigma_{\varphi} = pr_2 \circ \psi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$.

Κατόπιν διαπιστώνουμε ότι

$$(\pi_E, \bar{\psi}) \circ T\psi^{-1} = (\psi \times id_{\mathbb{R}^m} \times id_{\mathbb{R}^n})^{-1}.$$

Θέτοντας

$$[T\varphi \circ \xi \circ \varphi^{-1}](\varphi(x)) = (\varphi(x), \xi_{\varphi}(\varphi(x))),$$

και εφαρμόζοντας την τοπική έκφραση της K , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &(\tau \circ \nabla_{\xi} \sigma \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ (a) \quad &= \left(x, D\sigma_{\varphi}(\varphi(x))(\xi_{\varphi}(\varphi(x))) + \Gamma_{\tau}(\sigma(x))(\xi_{\varphi}(\varphi(x))) \right). \end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι ο αντίστοιχος υπολογισμός της

$$\begin{aligned} &(\tau \circ \nabla_{\xi}(f\sigma) \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ (b) \quad &= \left(x, D(f\sigma)_{\varphi}(\varphi(x))(\xi_{\varphi}(\varphi(x))) + \Gamma_{\tau}((f\sigma)(x))(\xi_{\varphi}(\varphi(x))) \right), \end{aligned}$$

για τον οποίον πρέπει πρώτα να αποδειχθεί η ισότητα

$$(c) \quad D(f\sigma)_\varphi(\varphi(x))(\xi_\varphi(\varphi(x))) \\ = f(x) \cdot D\sigma_\varphi(\varphi(x))(\xi_\varphi(\varphi(x)) + Df_\varphi(\varphi(x))(\xi_\varphi(\varphi(x)) \cdot \sigma_\varphi(\varphi(x))),$$

όπου $f_\varphi = f \circ \varphi^{-1}$. Επειδή ακόμη (απόδειξη!)

$$\xi(f)(x) = \xi_x(f) \equiv T_x f(\xi_x) \equiv D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(\xi_\varphi(\varphi(x))),$$

αντικαθιστώντας την (c) στην (b) και συγκρίνοντας με την (a), θα προκύπτει η συνθήκη Leibniz.

3. Υποθέτουμε ότι K είναι μία γραμμική απεικόνιση συνοχής και ∇ η συναλλοίωτη παραγώγιση που ορίζεται κατά το Θεώρημα 7.3.1. Να αποδειχθεί ότι οι γενικευμένες συναρτήσεις Christoffel της K συνδέονται με τις συναρτήσεις Christoffel της ∇ με τις σχέσεις

$$(7.4.5) \quad \Gamma_\tau(\sigma_j(x))(e_i) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) e_k; \quad i = 1, \dots, m; j, k = 1, \dots, n,$$

για κάθε χάρτη (U, φ) της X και $x \in U$. [Θυμίζουμε ότι $\{\sigma_j\}$ είναι οι βασικές τομές της E και $\{e_\lambda\}$ η φυσική βάση του εκάστοτε θεωρούμενου χώρου $\mathbb{R}^\lambda$].

Επομένως, έχουμε ότι

$$(7.4.6) \quad \Gamma_\tau(u)(h) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_i pr_j(\tau_{\pi(u)}) \Gamma_{ij}^k(\pi(u)) \cdot e_k,$$

για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$ ($m = \dim X$) και $u \in V = \pi^{-1}(U)$.

Υπόδειξη: Να βρεθεί η τοπική έκφραση αμφοτέρων των μελών της $\nabla_\xi \sigma = K \circ T\sigma \circ \xi$, υπεράνω του (U, φ) της X και των αντιστοίχων απλοποιήσεων και χαρτών των E και TE , και να εφαρμοστεί ο ορισμός των $\{\Gamma_\tau\}$ και $\{\Gamma_{ij}^k\}$.

Σχόλιο: Η προηγούμενη σχέση δικαιολογεί τον ορισμό των $\{\Gamma_\tau\}$ μέσω των $\{\Gamma_{ij}^k\}$ που γίνεται στην απόδειξη του *επί* της S στο Θεώρημα 7.3.1.

4. Αν K είναι η (γραμμική) απεικόνιση συνοχής που κατασκευάζεται από μία συναλλοίωτη παραγώγιση ∇ (βλ. το *επί* του Θεωρήματος 7.3.1), να αποδειχθεί ότι η συνθήκη συμβιβαστότητας των συναρτήσεων Christoffel

(6.3.1) συνεπάγεται τη συνθήκη συμβιβαστότητας των γενικευμένων συναρτήσεων Christoffel (7.4.4). Και αντιστρόφως, αν η ∇ προέρχεται από την K , τότε η (7.4.4) συνεπάγεται την (6.3.1). Επομένως, έχουμε ότι

$$[K \Leftrightarrow \nabla \text{ (κατά το Θεώρημα 7.3.1)}] \iff [(7.4.4) \Leftrightarrow (6.3.1)].$$

Σχόλιο: Η άσκηση αυτή συμπληρώνει την επιχειρηματολογία της απόδειξης του *επί* του Θεωρήματος 7.3.1.

5. Να αποδειχθεί ότι πράγματι ισχύει η σχέση $S(K) = \nabla$ με την οποία κλείνει η απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.1.

Υπόδειξη: Αν θέσουμε, προσωρινά, $S(K) = \bar{\nabla}$ και συμβολίσουμε με $\{\bar{\Gamma}_{ij}^k\}$, $\{\Gamma_{ij}^k\}$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις Christoffel των $\bar{\nabla}$ και ∇ , αρκεί να αποδειχθεί (γιατί;) ότι $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$, υπεράνω κάθε (U, φ) και των αντιστοίχων χαρτών της E και TE .

Η πρωτεύουσα συνοχή ως διάσπαση ακολουθίας

A conceptually clarifying definition of a connection, due to Ehresmann, giving rise to a development of modern differential geometry, was formulated in 1950. ... E. Cartan's and [Ch.] Ehresmann's theories display the fundamental role of Lie groups in modern differential geometry.

C. VON WESTENHOLZ [36, p. 363]

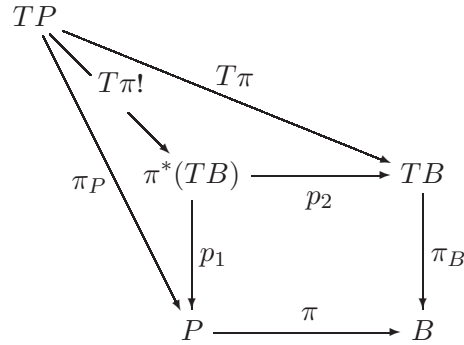
Προφανώς, πρωτεύουσα συνοχή σημαίνει συνοχή σε πρωτεύουσα δέσμη. Ο βραχυγραφικός τίτλος εδώ οφείλεται σε λόγους τυπογραφικής οικονομίας.

Μελετήσαμε τις συνοχές μιας πρωτεύουσας δέσμης στις Παραγράφους 4.2 και 4.3, και τις χειριστήκαμε είτε ως μορφές συνοχής, είτε –ισοδύναμα– ως διανομές οριζοντίων χώρων. Εδώ, σε αναλογία με τις συνοχές μιας διανυσματικής

δέσμης, ως διασπάσεις ακριβών ακολουθιών καταλλήλων διανυσματικών δεσμών, θα προσεγγίσουμε και τις συνοχές πρωτεύουσών δεσμών μέσω διασπάσεων αντιστοιχών ακολουθιών διανυσματικών δεσμών, στις οποίες δρά η δομική ομάδα (βλ. σχετικά, [2], [29], [30]). Η προσέγγιση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε απειροδιάστατο πλαίσιο.

8.1 Μία ακριβής ακολουθία G -διανυσματικών δεσμών

Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ μία πρωτεύουσα δέσμη της οποίας θεωρούμε το ανάλογο του Διαγράμματος 7.2, σελ. 205, στο οποίο εμφανίζονται όλα τα στοιχεία που υπεισέρχονται στην αντίστροφη εικόνα της δέσμης (TB, π_B, B) μέσω της απεικόνισης $\pi: P \rightarrow B$, και της καθολικής ιδιότητας της αντίστροφης εικόνας. Ακριβέστερα, έχουμε το



Διάγραμμα 8.1

Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση $T\pi!$ είναι το ανάλογο της π^* στο Διάγραμμα 7.2. Οι άλλες αλλαγές είναι προφανείς.

Ορίζουμε τις επόμενες φυσιολογικές δράσεις της ομάδας G επί των διανυσματικών δεσμών TP και $\pi^*(TB) = P \times_B TB$:

$$(8.1.1) \quad TP \times G \longrightarrow TP: (u, g) \mapsto u \cdot g = ug := TR_g(u),$$

$$(8.1.2) \quad \pi^*(TB) \times G \longrightarrow \pi^*(TB): (p, v, g) \mapsto (p, v) \cdot g := (pg, v).$$

Οι προηγούμενες διανυσματικές δέσμες, εφοδιασμένες με τις αντίστοιχες δράσεις καλούνται G -δέσμες.

Γνωρίζουμε ήδη ότι η $\pi: P \rightarrow B$ είναι εμβάπτιση (Πρόταση 3.2.7), που ισοδυναμεί με το ότι κάθε $T_p\pi: T_pP \rightarrow T_bB$ ($\pi(p) = b$) είναι απεικόνιση επί. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε $T_p\pi!: T_pP \rightarrow \{b\} \times T_bB$ είναι επίσης απεικόνιση

επί. Πράγματι, για κάθε $(p, v) \in P \times_B TB$, με $(\pi(p) = b = \pi_B(v))$, υπάρχει κάποιο $u \in T_p P$, τέτοιο ώστε $T\pi(u) = T_p \pi(u) = v$. Επομένως,

$$T\pi!(u) = (\pi_P(u), T\pi(u)) = (\pi_P(u), T_p \pi(u)) = (p, v).$$

Το επί της $T\pi!$ στα νήματα συνεπάγεται ότι η ακολουθία των διανυσματικών δεσμών

$$(8.1.3) \quad TP \xrightarrow{T\pi!} \pi^*(TB) \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής, βάσει του Θεωρήματος 2.6.6. Επιπλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.8, η ακολουθία

$$(8.1.4) \quad \mathcal{O} \longrightarrow \ker T\pi! \xrightarrow{i} TP \xrightarrow{T\pi!} \pi^*(TB) \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής (συγκρίνατε με την ακριβή ακολουθία, που αναφέρεται στο Πρόσχημα 7.1.2).

Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Λήμματος 7.1.3, βλέπουμε ότι

$$(8.1.5) \quad \ker T\pi! = \ker T\pi.$$

Ανακαλώντας τα προκαταρκτικά της § 4.1, θυμίζουμε ότι η απεικόνιση

$$(8.1.6) \quad \bar{p}: G \longrightarrow \pi^{-1}(b) : g \mapsto \bar{p}(g) := pg = p \cdot g,$$

με $b := \pi(p)$, είναι αμφιδιαφόριση. Διαφορίζοντας την (8.1.6) είδαμε ότι

$$(8.1.6') \quad T_e \bar{p}(X_e) = X^*(p), \quad X \in \mathcal{L}(G) \equiv \mathcal{G}.$$

8.1.1 Λήμμα. Η απεικόνιση $\nu: P \times \mathcal{G} \rightarrow TP$, που ορίζεται με τη σχέση $\nu(p, X) := T_e \bar{p}(X_e) = X_p^*$, είναι διαφορίσιμη και συμπληρώνει την (8.1.5) στην

$$\ker T\pi! = \ker T\pi = \nu(P \times \mathcal{G}).$$

Απόδειξη. Βάσει του ορισμού (4.1.2) του X^* και των υπολογισμών που αποδεικνύουν τη διαφορισιμότητά του, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \nu(p, X_e) &= T_e \bar{p}(X_e) = T_e \delta_p(X_e) + T_p \delta_e(O_p) \\ &= T_{(p,e)} \delta(O_p, X_e) = T\delta \circ (\Omega \circ \text{pr}_1, \text{pr}_2)(p, X_e), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η διαφορισιμότητα της ν .

Η δεύτερη σχέση της εκφώνησης έχει αποδειχθεί ουσιαστικά στη συζήτηση που ακολουθεί μετά τον Ορισμό 4.1.4. $\square$

Η (τετριμμένη) διανυσματική δέσμη $(P \times \mathcal{G}, p_1, P)$ γίνεται G -δέσμη μέσω της δράσης

$$(8.1.7) \quad (P \times \mathcal{G}) \times G \longrightarrow P \times \mathcal{G}: (p, X, g) \mapsto (p, X) \cdot g := (pg, \text{Ad}(g^{-1})(X_e)).$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.1.4), (8.1.5), μαζί με το Λήμμα 8.1.1, μπορούμε να αποδείξουμε την:

8.1.2 Πρόταση. Σε κάθε πρωτεύουσα δέσμη $\ell = (P, G, B, \pi)$, η ακολουθία G -(διανυσματικών) δεσμών

$$(8.1.8) \quad \mathcal{O} \longrightarrow P \times \mathcal{G} \xrightarrow{\nu} TP \xrightarrow{T\pi!} \pi^*(TB) \longrightarrow \mathcal{O}$$

είναι ακριβής. Επιπλέον, οι μορφισμοί της ακολουθίας είναι G -ισομεταβλητοί ως προς τις αντίστοιχες δράσεις.

Απόδειξη. Ελέγχουμε μόνον την G -ισομεταβλητότητα των μορφισμών της ακολουθίας (8.1.8). Με τους συμβολισμούς της § 4.1, έχουμε για κάθε $(p, X) \in P \times \mathcal{G}$ και $g \in G$:

$$\begin{aligned} \nu((p, X) \cdot g) &= \nu(pg, \text{Ad}(g^{-1})(X_e)) = T_e \overline{pg} \circ \text{Ad}(g^{-1})(X_e) \\ &= T_e(\overline{p} \circ \ell_g) \circ \text{Ad}(g^{-1})(X_e) = T_g \overline{p} \circ T_e r_g(X_e) \\ &= T_e(\overline{p} \circ r_g)(X_e) = T_e(R_g \circ \overline{p})(X_e) \\ &= T_p R_g(\nu(p, X)) = \nu(p, X) \cdot g. \end{aligned}$$

Παρόμοια, για κάθε $u \in TP$ και $g \in G$,

$$\begin{aligned} T\pi!(u \cdot g) &= T_p \pi!(u \cdot g) = T_p \pi! \circ T_p R_g(u) \quad [\text{αν } \pi_P(u) = p] \\ &= (\pi_P \circ T_p R_g(u), T_p \pi \circ T_p R_g(u)) \\ &= (pg, T_p(\pi \circ R_g)(u)) = (pg, T_p \pi(u)) \\ &= (p, T_p \pi(u)) \cdot g = T\pi!(u) \cdot g. \end{aligned}$$

□

8.1.3 Ορισμός. Μία G -**συνοχή** επί της $\ell = (P, G, B, \pi)$ είναι ένας G -ισομεταβλητός μορφισμός διανυσματικών δεσμών $V: TP \longrightarrow P \times \mathcal{G}$, που ορίζει μία διάσπαση της ακριβούς ακολουθίας (8.1.8), όπως στο επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O} & \longrightarrow & P \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\nu} & TP & \xrightarrow{T\pi!} & \pi^*(TB) \longrightarrow \mathcal{O} \\
& & & \searrow \text{dashed } id_{P \times \mathcal{G}} & \downarrow V & & \\
& & & & P \times \mathcal{G} & & \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & \mathcal{O} & &
\end{array}$$

Διάγραμμα 8.2

Επομένως, μία G -συνοχή είναι μία G -διάσπαση της ακολουθίας (8.1.8).

Προφανώς, το πρόθεμα G - στον προηγούμενο ορισμό υπενθυμίζει τη συνθήκη της G -διάσπασης, και διακρίνει μία τέτοια συνοχή από τις μορφές συνοχής και τις (ισοδύναμες) διανομές οριζοντίων υποχώρων της TP , που μελετήσαμε στην § 4.2. Αυτή δεν είναι κάποια ουσιαστικής διαφορά, επειδή θα δείξουμε πιο κάτω (§8.3) ότι υπάρχει μία ισοδυναμία ανάμεσα στις G -συνοχές και τις συνήθεις συνοχές μίας πρωτεύουσας δέσμης.

8.2 Επιπλέον κατασκευές διανυσματικών δεσμών

Θα συμπληρώσουμε τον κατάλογο με κατασκευές διανυσματικών δεσμών, που αναφέρονται στην § 2.3, προσθέτοντας κάποια άλλα αποτελέσματα, τα οποία θα χρειαστούν στην απόδειξη του βασικού Θεωρήματος 8.3.1 στην επόμενη παράγραφο.

Υποθέτουμε ότι (E, X, π) και (E', X', π') είναι διανυσματικές δέσμες, με νήματα τύπου $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$, αντιστοίχως (που μπορεί να είναι πεπερασμένης διάστασης ή χώροι Banach). Από την § 2.3.4 θυμίζουμε ότι, με μικρή αλλαγή στους συμβολισμούς, η τριάδα $((L(E, E'), \pi_L, X)$ είναι διανυσματική δέσμη με νήματα τύπου $L(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$, όπου

$$L(E, E') := \bigcup_{x \in X} L(E_x, E'_x)$$

και

$$\pi_L: L(E, E') \longrightarrow X : x \mapsto \pi(f) = x, \text{ αν } f \in L(E_x, E'_x).$$

Τα απλοποιούνται ζεύγη (U, τ) και (U, τ') των E και E' , αντιστοίχως, προσδιορίζουν το απλοποιούν ζεύγος $(U, \bar{\tau})$ της $L(E, E')$, όπου η αμφιδιαφόριση

$$\bar{\tau}: \pi_L^{-1}(U) \longrightarrow U \times L(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$$

ορίζεται με τη σχέση

$$\bar{\tau}(f) := (x := \pi_L(f), \tau_x \circ f \circ \tau_x^{-1}), \quad f \in L(E_x, E'_x).$$

Πρώτος στόχος μας είναι να επεκτείνουμε τη συνήθη απεικόνιση εκτίμησης

$$ev: L(\mathbb{E}, \mathbb{E}') \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}' : (h, v) \mapsto h(v)$$

σε μία εκτίμηση σε επίπεδο διανυσματικών δεσμών.

8.2.1 Πρόταση. *Η απεικόνιση εκτίμησης*

$$Ev: L(E, E') \times E \longrightarrow E' : (f, u) \mapsto f(u).$$

είναι μορφισμός διανυσματικών δεσμών.

Απόδειξη. Η μόνη ουσιώδης ιδιότητα, που πρέπει να αποδειχθεί, είναι η διαφορισμότητα της Ev , η οποία ελέγχεται τοπικά: Η τοπική παράσταση $\widetilde{Ev}$ της Ev , μέσω των καταλλήλων απλοποιούντων ζευγών, που εμφανίζονται στο μεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{array}{ccc} \pi_L^{-1}(U) \times \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{Ev} & \pi'^{-1}(U) \\ \widetilde{\tau} \times \tau \downarrow & & \downarrow \tau' \\ U \times L(\mathbb{E}, \mathbb{E}') \times U \times (U \times \mathbb{E}) & \xrightarrow{\widetilde{Ev}} & U \times \mathbb{E}' \end{array}$$

Διάγραμμα 8.3

δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \widetilde{Ev}((x, g), (x, v)) &= \tau' \circ Ev(f, u) = \tau'(f(u)) = (x, \tau'_x \circ f(u)) \\ &[\text{αν } \tau(u) = a, \tau'_x \circ f \circ \tau_x^{-1} = g] \\ &= (x, \tau'_x \circ f \circ \tau_x^{-1}(v)) = (x, g(v)) = (x, ev(g, x)), \end{aligned}$$

η οποία, προφανώς, είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα συνδέει τον χώρο των μορφισμών διανυσματικών δεσμών $(E, \pi, X) \rightarrow (E, \pi', X)$, που εδώ συμβολίζεται με $\mathcal{M}or(E, E')$, με τον χώρο των διαφορισίμων τομών $\Gamma(X, L(E, E'))$ της $(L(E, E'), \pi_L, X)$.

8.2.2 Πρόταση. Ένας μορφισμός $f \in \mathcal{M}or(E, E')$ ορίζει μία τομή $S \in \Gamma(X, L(E, E'))$ και αντιστρόφως. Επομένως, ορίζεται ένας γραμμικός ισομορφισμός

$$\mathcal{M}or(E, E') \xrightarrow{\mathcal{F}} \Gamma(X, L(E, E')).$$

Απόδειξη. Έστω ένας μορφισμός f . Θέτουμε $S(x) := f|_{E_x}$, για κάθε $x \in X$. Προφανώς, αυτό ορίζει μία τομή S . Επειδή, υπεράνω οποιουδήποτε απλοποιούντος ζεύγους $(U, \bar{\tau})$,

$$\bar{\tau} \circ S(x) = (x, \tau'_x \circ f \circ \tau_x^{-1}); \quad x \in X,$$

η Πρόταση 2.2.4 και η διαφορισιμότητα της f συνεπάγονται τη διαφορισιμότητα και της S . Επομένως, $S \in \Gamma(X, L(E, E'))$.

Αντιστρόφως, για δοσμένη τομή S , ορίζουμε την $f: E \rightarrow E'$ θέτοντας $f|_{E_x} := S(x)$. Προφανώς, $\pi' \circ f = \pi$. Επιπλέον, τοπικά, για κάθε $(x, v) \in U \times \mathbb{E}$,

$$\begin{aligned} \tau' \circ f \circ \tau^{-1}(x, v) &= \tau'(S(x)(u)) \quad [\text{ι}\Phi \ u = \tau^{-1}(x, v)] \\ &= (x, \tau'_x \circ S(x) \circ \tau_x^{-1}(v)) \\ &= (x, \text{ev}(\bar{\tau} \circ S(x), v)), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τη διαφορισιμότητα της f . Άρα $f \in \mathcal{M}or(E, E')$.

Ο ζητούμενος ισομορφισμός δίνεται από τη σχέση $\mathcal{F}(f)(x) := f|_{E_x}$, για κάθε $x \in X$. Οι υπόλοιπες λεπτομέρειες συμπληρώνονται στοιχειωδώς. $\square$

8.2.3 Θεώρημα. Αν $S \in \Gamma(X, L(E, E'))$, τότε, για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$, η απεικόνιση

$$S(\sigma): X \longrightarrow E' : x \mapsto S(x)(\sigma(x))$$

είναι διαφορίσιμη. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ο $\mathbb{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, ας πούμε, $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$. Αν η S είναι μία τομή της $L(E, E')$, τέτοια ώστε η $S(\sigma)$ να είναι διαφορίσιμη, για κάθε $\sigma \in \Gamma(X, E)$, τότε είναι διαφορίσιμη και η S , δηλαδή $S \in \Gamma(X, L(E, E'))$.

Απόδειξη. Η Πρόταση 8.2.1 και η σχέση $S(\sigma) = \text{Ev} \circ (S, \sigma)$ αποδεικνύουν ότι η απεικόνιση $S(\sigma)$ είναι διαφορίσιμη.

Για το αντίστροφο συμπέρασμα, αρκεί να ελέγξουμε τη διαφορισιμότητα της S τοπικά. Δηλαδή, υπεράνω οποιουδήποτε απλοποιούντος ζεύγους $(U, \bar{\tau})$, αρκεί να δείξουμε τη διαφορισιμότητα της

$$\bar{\tau} \circ S(x) = (x, \tau'_x \circ S(x) \circ \tau_x^{-1}) \in U \times L(\mathbb{E}, \mathbb{E}'); \quad x \in U,$$

ή, βάσει του Λήμματος 2.2.3, τη διαφορισμότητα της

$$(8.2.1) \quad F: U \times \mathbb{E} \ni (x, v) \longrightarrow \tau'_x \circ S(x) \circ \tau_x^{-1}(v) \in \mathbb{E}'.$$

Επειδή, τυχόν $v \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, γράφεται με τη μορφή

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

[$(e_1, \dots, e_n)$ είναι η φυσική βάση του $\mathbb{R}^n$], βρίσκουμε ότι

$$\tau_x^{-1}(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i(x),$$

όπου $\sigma_i = \tau(\cdot, e_i) \in \Gamma(U, E)$ είναι η i -βασική τομή της δέσμης E υπεράνω του U . Επομένως, η διαφορισμότητα της (8.2.1) ανάγεται σ' αυτήν της μερικής απεικόνισης $F_{e_i}: U \rightarrow \mathbb{E}'$. Όμως,

$$\begin{aligned} F_{e_i}(x) &= F(x, e_i) = \tau'_x \circ S(x) \circ \tau_x^{-1}(e_i) \\ &= \tau'_x \circ S(\sigma_i)(x) = p_2 \circ \tau' \circ S(\sigma_i)(x), \end{aligned}$$

όπου $p_2: U \times \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}'$ είναι η δεύτερη προβολή. Επειδή η F_{e_i} είναι πράγματι διαφορίσιμη, εδώ κλείνει η απόδειξη. $\square$

8.3 Ισοδυναμία συνοχών και G -διασπάσεων

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε ότι οι μορφές συνοχής μιας πρωτεύουσας δέσμης $\ell = (P, G, B, \pi)$ μπορούν να ταυτιστούν με τις G -διασπάσεις της ακριβούς ακολουθίας (8.1.8), δηλ. τις G -συνοχές.

Για να κατασκευάσουμε μια τέτοια ισοδυναμία, μέσω κατάλληλης απεικόνισης, θα συμβολίσουμε με $\mathcal{C}on(P)$ το σύνολο των μορφών συνοχής της ℓ , και με $\mathcal{S}pl_G(P)$ το σύνολο των G -διασπάσεων της ακολουθίας (8.1.8). Το τελευταίο σύμβολο προέρχεται από τη λέξη *splitting* (διάσπαση) και αντανakλά την προέλευση των G -συνοχών.

8.3.1 Θεώρημα. Υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη επί αντιστοιχία

$$\mathcal{W}: \mathcal{C}on(P) \longrightarrow \mathcal{S}pl_G(P).$$

Απόδειξη. Έστω $\omega \in \mathcal{C}on(P)$. Ορίζουμε την $V = \mathcal{W}(\omega) \in L(TP, P \times \mathcal{G})$, θέτοντας

$$V(u) := (T\pi(u), \omega(u)) = (p, \omega_p(u)),$$

για κάθε $u \in T_p P$ και κάθε $p \in P$. Ισοδύναμα, $V|_{T_p P} = \omega_p$, μετά την ταύτιση $\{p\} \times \omega_p \equiv \omega_p$. Επειδή η ω μπορεί να ερμηνευτεί σαν διαφορίσιμη τομή της διανυσματικής δέσμης $L(TP, P \times \mathcal{G})$, προκύπτει ότι $V \in \text{Mor}(TP, P \times \mathcal{G})$, σύμφωνα με την Πρόταση 8.2.2.

Η V ορίζει μία G -διάσπαση της (8.1.8): Για κάθε $(p, X) \in P \times \mathcal{G}$, η ιδιότητα (ω. 1) του Ορισμού 4.2.1 συνεπάγεται ότι

$$V \circ \nu(p, X) = \omega_p(X_p^*) = \omega(X^*)(p) = X \equiv (p, X).$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψιν τις δράσεις (8.1.1), (8.1.7), και την ιδιότητα (ω. 2), έχουμε για κάθε $u \in T_p P$ και $g \in G$:

$$\begin{aligned} V(u \cdot g) &= V(T_p R_g(u)) = (pg, \omega_{pg}(T_p R_g(u))) \\ &= (pg, (R_g^* \omega)_p(u)) = (pg, \text{Ad}(g^{-1})(\omega_p(u))) \\ &= (p, \omega_p(u)) \cdot g = V(u) \cdot g. \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, αν δίνεται μία $V \in \text{Spl}_G(P)$, ορίζουμε την απεικόνιση $\omega_p := p_2 \circ V|_{T_p P}: T_p P \rightarrow \mathcal{G}$, για κάθε $p \in P$. Η Πρόταση 8.2.2 συνεπάγεται ότι η ω είναι διαφορίσιμη τομή της δέσμης $L(TP, P \times \mathcal{G})$. Οι ιδιότητες (ω. 1) ανδ (ω. 2) αποδεικνύονται αμέσως, αντιστρέφοντας κατά κάποιον τρόπο τις προηγούμενες σειρές ισοτήτων. Επομένως, $\omega \in \text{Con}_G(P)$ και $\mathcal{W}(\omega) = V$. Το 1-1 και επί της $\mathcal{W}$ ελέγχεται στοιχειωδώς. $\square$

8.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 8

1. Να συμπληρωθούν οι αποδείξεις των Προτάσεων 8.2.1 και 8.2.2.
2. Αναφορικά με την απόδειξη του αντιστρόφου μέρους του Θεωρήματος 8.3.1, να επαληθευτούν:
 - α) Οι ιδιότητες (ω. 1) και (ω. 2) της συνοχής w που προκύπτει από μία G -διάσπαση V .
 - β) Στο πλαίσιο πεπερασμένων διαστάσεων, να αποδειχτεί η διαφορισιμότητα της προηγούμενης ω δείχνοντας ότι η απεικόνιση

$$\omega(\xi): P \rightarrow \mathcal{G}: p \mapsto \omega(\xi)(p) := \omega_p(\xi_p)$$

είναι διαφορίσιμη, για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(P)$.

Παραρτήματα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α΄

Συμπληρωματικές Αποδείξεις

Στο παράρτημα αυτό δίνουμε τις αποδείξεις μερικών αποτελεσμάτων, που έχουν παραλειφθεί στην κύρια έκθεση. Παρουσιάζουμε επίσης και κάποιες παραλλαγές αποδείξεων, οι οποίες βασίζονται μόνο στην ίδια τη δομή των πρωτευουσών δεσμών, ενώ στο Κεφάλαιο 3 αυτές στηρίζονταν σε γενικότερα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 1.

A.1 Απόδειξη του Λήμματος της Συγκόλλησης 3.6.7

Έστω $\mathcal{A}_i$ ο άτλαντας που ορίζει την διαφορική δομή του X_i . Θεωρούμε στο X την οικογένεια

$$\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι διαφορικός άτλας του X .

Προφανώς το $\mathcal{A}$ αποτελεί κάλυψη του X .

Για να είναι οι χάρτες του $\mathcal{A}$ διαφορικά συμβιβάστοι, πρέπει και αρκεί κάθε χάρτης του $\mathcal{A}_i$ να είναι διαφορικά συμβιβάστος με κάθε χάρτη του $\mathcal{A}_j$, για κάθε

$i, j \in I$. Έστω $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i$ και $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}_j$. Παρατηρούμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_i \subseteq X_i & \text{ανοιχτό} \\ X_i \cap X_j \subseteq X_i & \text{ανοιχτό} \end{array} \right\} \Rightarrow U_i \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \text{ ανοιχτό.}$$

Όμως $X_i \cap X_j \subseteq X_i$ ανοιχτό και $U_i \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \cap X_j$, οπότε

$$U_i \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \cap X_j \text{ ανοιχτό}$$

και, ανάλογα,

$$U_j \cap (X_i \cap X_j) \subseteq X_i \cap X_j \text{ ανοιχτό}$$

συνεπώς

$$U_i \cap U_j = (U_i \cap U_j) \cap (X_i \cap X_j) \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i \cap X_j \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i.$$

Δηλαδή,

$$U_i \cap U_j \subseteq U_i \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i \text{ και } U_i \cap U_j \underset{\text{ανοιχτό}}{\subseteq} X_i.$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $U_i \cap U_j$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του U_i , όπως και το $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, ως εικόνα ανοιχτού συνόλου μέσω του ομοιομορφισμού. Όμοια και το $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτό.

Η απεικόνιση

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

είναι αμφιδιαφόριση, ως τοπική παράσταση της αμφιδιαφόρισης

$$id_{X_i \cap X_j}: (X_i \cap X_j, \mathcal{A}_i|_{X_i \cap X_j}) \longrightarrow (X_i \cap X_j, \mathcal{A}_j|_{X_i \cap X_j}).$$

Είναι προφανές ότι ο περιορισμός του άτλαντα $\mathcal{A}$ σε κάθε X_i δίνει ακριβώς τον άτλαντα $\mathcal{A}_i$. $\square$

A.2 Μία ισοδύναμη διατύπωση του Λήμματος της Συγκόλλησης.

Έστω X ένα σύνολο και μία οικογένεια υποσυνόλων $X_i \subseteq X$, $i \in I$, με $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Έστω $(Y_i, \mathcal{B}_i)$ διαφορετικές πολυπλοότητες και $f_i: X_i \rightarrow (Y_i, \mathcal{B}_i)$ απεικονίσεις 1-1, επί, μέσω των οποίων ορίζουμε τους άτλαντες $\mathcal{A}_i$ αντιστοίχως στα X_i . Υποθέτουμε ότι:

i) Κάθε $X_i \cap X_j$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X_i και του X_j ,

ii) Η απεικόνιση $f_j \circ f_i^{-1}: Y_i \supseteq f_i(X_i \cap X_j) \rightarrow f_j(X_i \cap X_j) \subseteq Y_j$ είναι αμφιδιαφόριση, για κάθε $i, j \in I$, με $X_i \cap X_j \neq \emptyset$.

Τότε το X δέχεται μια (μοναδική) δομή διαφορικής πολυπλοπότητας, έτσι ώστε η $(X_i, \mathcal{A}_i)$ να είναι ανοιχτή υποπολυπλοπότητα και η $f_i: (X_i, \mathcal{A}_i) \rightarrow (Y_i, \mathcal{B}_i)$ να είναι αμφιδιαφόριση, για κάθε $i \in I$.

A.3 Μία παραλλαγή της απόδειξης της Πρότασης 3.3.6.

Έστω $\bar{U} \subseteq B$ ανοιχτό και $s: \bar{U} \rightarrow P$ διαφορίσιμη τομή. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\Psi}: \bar{U} \times G \rightarrow \pi^{-1}(\bar{U}) : (x, g) \mapsto s(x) \cdot g,$$

για την οποίαν διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

1) Η $\bar{\Psi}$ είναι καλά ορισμένη, επειδή

$$(x, g) \in \bar{U} \times G \Rightarrow s(x) \in \pi^{-1}(x) \Rightarrow s(x) \cdot g \in \pi^{-1}(x) \subset \pi^{-1}(\bar{U}).$$

2) Η $\bar{\Psi}$ είναι διαφορίσιμη, επειδή $\bar{\Psi} = \delta \circ (s \times id_G)$.

3) Η $\bar{\Psi}$ είναι 1-1: Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\bar{\Psi}(x, g) = \bar{\Psi}(x', g')$, τότε $s(x) \cdot g = s(x') \cdot g'$. Όμως $s(x) \cdot g \in \pi^{-1}(x)$ και $s(x') \cdot g' \in \pi^{-1}(x')$, τα δε νήματα $\pi^{-1}(x)$, $\pi^{-1}(x')$ ή είναι ξένα, ή συμπίπτουν. Επομένως, λόγω της προηγούμενης υπόθεσης, $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(x')$ και $x = x'$, οπότε $s(x) \cdot g = s(x) \cdot g'$. Επειδή η δράση είναι γνήσια μεταβατική στα νήματα, η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $g = g'$, άρα και $(x, g) = (x', g')$.

4) Η $\bar{\Psi}$ είναι επί: Έστω $p \in \pi^{-1}(\bar{U})$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x \in \bar{U}$ τέτοιο ώστε $p \in \pi^{-1}(x)$. Εξάλλου, αφού $s(x) \in \pi^{-1}(x)$, θα υπάρχει επίσης ένα μοναδικό $g \in G$, έτσι ώστε

$$p = s(x) \cdot g = \bar{\Psi}(x, g),$$

που αποδεικνύει το επί.

5) Η $\bar{\Psi}$ είναι αμφιδιαφόριση: Έστω $p \in \pi^{-1}(\bar{U})$. Για να δείξουμε ότι η $\bar{\Psi}$ είναι αμφιδιαφορίσιμη στο p , αρκεί να δείξουμε ότι η

$$\Phi \circ \bar{\Psi}: \bar{U} \cap U \times G \longrightarrow \bar{U} \cap U \times G$$

είναι αμφιδιαφορίσιμη, όπου (U, Ψ) είναι απλοποιούν ζεύγος με $\pi(p) = x \in U$ και $\Phi^{-1} = \Psi$.

Η $\Phi \circ \bar{\Psi}$ είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση διαφορίσιμων. Παρατηρούμε ότι

$$(\Phi \circ \bar{\Psi})(y, h) = \Phi(s(y) \cdot h) =: (y', h') \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (p_1 \circ \Phi(s(y) \cdot h), p_2 \circ \Phi(s(y) \cdot h)) = (y', h') \\
&\Leftrightarrow (\pi(s(y) \cdot h), \Phi_y(\pi(s(y))) \cdot h) = (y', h') \\
&\Leftrightarrow (y, \Phi_y(s(y)) \cdot h) = (y', h') \\
&\Leftrightarrow y = y' \text{ και } \Phi_y(s(y)) \cdot h = h'.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \Psi)^{-1}(y', h') &= (y, h) = (y', \Phi_{y'}(s(y'))^{-1} \cdot h') \\
&= (y', \gamma \circ (\alpha \circ p_2 \circ \Phi \circ s) \times id_G)(y', h')
\end{aligned}$$

δηλαδή και η $(\Phi \circ \bar{\Psi})^{-1}$ είναι διαφορίσιμη, οπότε έχουμε και τη ζητούμενη αμφιδιαφορισιμότητα.

6) Η ιδιότητα $\pi \circ \bar{\Psi} = p_1$ είναι προφανής.

7) Η $\bar{\Psi}$ είναι G -ισομεταβλητή, αφού, για κάθε $x \in \bar{U}$ και $g, g' \in G$ έχουμε:

$$\bar{\Psi}(x, gg') = s(x) \cdot gg' = (s(x) \cdot g) \cdot g' = \bar{\Psi}(x, g) \cdot g'.$$

8) Η s είναι φυσική τομή του απλοποιούντος ζεύγους $(\bar{U}, \bar{\Psi})$. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $\bar{s}$ τη φυσική τομή του ζεύγους αυτού, προκύπτει ότι

$$\bar{s}(x) := \bar{\Psi}(x, e) = s(x) \cdot e = s(x), \quad \forall x \in \bar{U},$$

που κλείνει την απόδειξη. □

Στην απόδειξη του Λήμματος 3.3.5, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το νηματικό γινόμενο $P \times_B P$ έχει τη δομή πολλαπλότητας, παραπέμποντας στο γενικότερο αποτέλεσμα Θεώρημα 1.4.7. Λόγω του ότι η P είναι πρωτεύουσα δέσμη, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το προηγούμενο νηματικό γινόμενο έχει δομή πρωτεύουσας δέσμης (άρα και διαφορική δομή), χωρίς να ανατρέξουμε στη γενική θεωρία του Κεφαλαίου 1. Συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο

A.4 Θεώρημα. Έστω $\ell = (P, G, B, \pi)$ μια κύρια δέσμη. Θεωρούμε το νηματικό γινόμενο

$$P \times_B P := \{(p, q) \in P \times P : \pi(p) = \pi(q)\} = \bigcup_{x \in B} (\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)),$$

την απεικόνιση

$$\hat{\pi} : P \times_B P \longrightarrow B : (p, q) \mapsto \pi(p) = \pi(q),$$

και τη δράση

$$\hat{\delta} : (P \times_B P) \times (G \times G) \longrightarrow P \times_B P : ((p, q), (g, h)) \mapsto (pg, qh).$$

Τότε η τετράδα $(P \times_B P, G \times G, B, \hat{\pi})$ δέχεται δομή πρωτεύουσας δέσμης.

Απόδειξη. Έστω (U, Φ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ . Στο

$$\hat{\pi}^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} (\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)) \subseteq P \times_B P$$

θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}: \hat{\pi}^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \times G : \\ (p, q) &\mapsto (x := \pi(p) = \pi(q), \Phi_x(p), \Phi_x(q)). \end{aligned}$$

Η $\hat{\Phi}$ είναι 1-1:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(p, q) = \hat{\Phi}(p', q') &\Rightarrow \\ (x := \pi(p), \Phi_x(p), \Phi_x(q)) = (x' := \pi(p'), \Phi_{x'}(p'), \Phi_{x'}(q')) &\Rightarrow \\ x = x', \Phi_x(p) = \Phi_x(p'), \Phi_x(q) = \Phi_x(q') &\Rightarrow \\ p = p', q = q'. \end{aligned}$$

Η $\hat{\Phi}$ είναι επί: Αν $(x, g, h) \in U \times G \times G$, επειδή η Φ_x είναι επί, υπάρχουν $p, q \in \pi^{-1}(x)$, τέτοια ώστε $\Phi_x(p) = g$, $\Phi_x(q) = h$, άρα $\hat{\Phi}(p, q) = (x, g, h)$.

Αφού η $\hat{\Phi}$ είναι απεικόνιση 1-1 επί της πολλαπλότητας $U \times G \times G$, η δομή της τελευταίας θα μεταφέρεται στο $\pi^{-1}(U)$, που εφοδιάζεται πλέον με δομή διαφορικής πολλαπλότητας εις τρόπον ώστε η $\hat{\Phi}$ να είναι αμφιδιαφόριση. Επειδή τα απλοποιούντα ζεύγη (U, Φ) καλύπτουν το B , οι αντίστροφες εικόνες τους καλύπτουν το $P \times_B P$. Επιπλέον, αν (U_1, Φ_1) , (U_2, Φ_2) είναι δύο απλοποιούντα ζεύγη της ℓ , με $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, τότε το

$$\hat{\Phi}_1(\hat{\pi}^{-1}(U_1) \cap \hat{\pi}^{-1}(U_2)) = \hat{\Phi}_1(\hat{\pi}^{-1}(U_1 \cap U_2)) = (U_1 \cap U_2) \times G \times G$$

είναι ανοιχτό στο $U_1 \times G \times G$, οπότε και το $\hat{\pi}^{-1}(U_1 \cap U_2) = \hat{\Phi}_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \times G$ είναι ανοιχτό στο $\hat{\pi}^{-1}(U_1)$, ως εικόνα ανοιχτού μέσω ομοιομορφισμού. Όμοια το $\hat{\pi}^{-1}(U_1 \cap U_2) \subseteq \hat{\pi}^{-1}(U_2)$ είναι ανοιχτό. Επίσης, η απεικόνιση

$$\hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1^{-1} : U_1 \cap U_2 \times G \times G \rightarrow U_1 \cap U_2 \times G \times G$$

δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1^{-1}(x, g, h) &= \hat{\Phi}_2(\Phi_{1x}^{-1}(g), \Phi_{1x}^{-1}(h)) \\ &= (x, \Phi_{2x}(\Phi_{1x}^{-1}(g)), \Phi_{2x}(\Phi_{1x}^{-1}(h))) \\ &= (x, p_2 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(x, g), p_2 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(x, h)), \end{aligned}$$

δηλαδή είναι διαφορίσιμη, άρα και αμφιδιαφόριση. Συνεπώς, κατά το Λήμμα της Συγκόλλησης 3.6.7, ορίζεται στο $P \times_B P$ μοναδική δομή διαφορικής πολλαπλότητας, ως προς την οποίαν οι $\hat{\Phi}$ είναι αμφιδιαφορίσεις.

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $(U, \hat{\Phi})$, το τρίγωνο

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & U \times G \times G \\ & \searrow \hat{\pi} & \downarrow p_1 \\ & & U \end{array}$$

Διάγραμμα Α.1

είναι μεταθετικό, απ' όπου προκύπτει ότι η $\hat{\pi}$ τοπικά είναι σύνθεση διαφορισμών απεικονίσεων, άρα είναι (ολικά) διαφορίσιμη.

Σχετικά με την δράση $\hat{\delta}$ παρατηρούμε ότι και το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} \hat{\pi}^{-1}(U) \times (G \times G) & \xrightarrow{\hat{\delta}} & \hat{\pi}^{-1}(U) \\ \hat{\Phi} \times id_{G \times G} \downarrow & & \downarrow \hat{\Phi} \\ (U \times G \times G) \times (G \times G) & \xrightarrow{\delta_o} & U \times G \times G \end{array}$$

Διάγραμμα Α.2

είναι μεταθετικό, όπου δ_o είναι η φυσική δράση $(x, g, g') \cdot (h, h') := (x, gh, g'h')$. Πράγματι, για κάθε $(p, q, g, h) \in \hat{\pi}^{-1}(U) \times (G \times G)$, είναι

$$\begin{aligned} \delta_o \circ (\hat{\Phi} \times id_{G \times G})(p, q, g, h) &= \delta_o(x = \pi(p), \Phi_x(p), \Phi_x(q), g, h) \\ &= (x, \Phi_x(p)g, \Phi_x(q)h) \\ &= (x, \Phi_x(pg), \Phi_x(qh)) \\ &= \hat{\Phi}(pg, qh) \\ &= \hat{\Phi} \circ \hat{\delta}(p, q, g, h), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται και η (τοπική) διαφορισμότητα της

$$\hat{\delta} = \hat{\Phi}^{-1} \circ \delta_o \circ (\hat{\Phi} \times id_{G \times G}),$$

άρα και η ολική διαφορισμότητά-της, καθώς και η $(G \times G)$ -ισομεταβλητότητα των απεικονίσεων $\hat{\Phi}$. $\square$

Με τη βοήθεια της δομής πρωτεύουσας δέσμης επί του νηματικού γινομένου $P \times_B P$, που βρήκαμε προηγουμένως, μπορούμε να δώσουμε και μίαν

A.5 Άλλη απόδειξη του Λήμματος 3.3.5

Αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $k \circ \widehat{\Phi}^{-1}: U \times G \times G \rightarrow G$ (βλ. και το επόμενο διάγραμμα) είναι διαφορίσιμες.

$$\begin{array}{ccc} P \times_B P \supseteq \widehat{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{k} & G \\ \widehat{\Phi}^{-1} \uparrow & \nearrow k \circ \widehat{\Phi}^{-1} & \\ U \times G \times G & & \end{array}$$

Διάγραμμα A.3

Πράγματι, για τυχόν $(x, g, h) \in U \times G \times G$, θέτουμε

$$\bar{g} := k \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x, g, h) = k(\Phi_x^{-1}(g), \Phi_x^{-1}(h)).$$

Επομένως, βάσει του ορισμού της k (βλ. Λήμμα 3.3.5)

$$\begin{aligned} \Phi_x^{-1}(g) \cdot \bar{g} &= \Phi_x^{-1}(h) \Leftrightarrow \\ \Phi_x(\Phi_x^{-1}(g) \cdot \bar{g}) &= \Phi_x(\Phi_x^{-1}(h)) \Leftrightarrow \\ \Phi_x(\Phi_x^{-1}(g)) \cdot \bar{g} &= h \Leftrightarrow g \bar{g} = h \Leftrightarrow \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$k(g, h) = \bar{g} = g^{-1}h,$$

άρα η k είναι διαφορίσιμη πάνω από κάθε $\widehat{\pi}^{-1}(U)$, συνεπώς και ολικά διαφορίσιμη. $\square$

Στο Θεώρημα 3.5.2 ορίσαμε δομή πρωτεύουσας δέσμης επί του νηματικού γινομένου $B' \times_B P$, αφού θεωρήσαμε ότι το τελευταίο είναι διαφορική πολλαπλότητα, σύμφωνα με το γενικό Θεώρημα 1.4.7. Όπως και στο Θεώρημα A.4, σελ. 248, θα δείξουμε ότι μπορούμε να παρακάμψουμε τη γενική θεωρία του νηματικού γινομένου, εκμεταλλευόμενοι τη δομή της δέσμης P . Ακριβέστερα, δίνουμε μίαν

A.6 Άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.2

i) Έστω (U, Φ) απλοποιούν ζεύγος της ℓ . Θέτουμε $V := h^{-1}(U)$ και στο σύνολο

$$\pi^*(V) = \{(x', p) \in V \times P : h(x') = \pi(p)\}$$

ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi^*: \pi^*(V) \longrightarrow V \times G : (x', p) \mapsto (x', \Phi_{x:=h(x')}(p)).$$

η οποία κάνει το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{*-1}(V) & \xrightarrow{\Phi^*} & V \times G \\ & \searrow \pi^* & \downarrow p_1 \\ & & V \end{array}$$

Διάγραμμα Α.4

Η Φ^* είναι 1-1: Έστω $(x', p), (y', q) \in \pi^{*-1}(V)$, με $\Phi^*(x', p) = \Phi^*(y', q)$. Τότε

$$\begin{aligned} \Phi^*(x', p) = \Phi^*(y', q) &\Rightarrow (x', \Phi_x(p)) = (y', \Phi_y(q)) \\ &\Rightarrow x' = y', x = h(x') = h(y') = y, \end{aligned}$$

οπότε $\Phi_x(p) = \Phi_x(q)$, άρα $p = q$ και $(x', p) = (y', q)$.

Η Φ^* είναι επί: Για τυχόν $(x', g) \in V \times G$, η αντίστοιχη $\Phi_x: \pi^{-1}(x) \rightarrow G$ είναι αμφιδιαφόριση, άρα υπάρχει μοναδικό $p \in \pi^{-1}(x)$ με $\Phi_x(p) = g$. Τότε $(x', p) \in \pi^{*-1}(V)$ και

$$\Phi^*(x', p) = (x', \Phi_x(p)) = (x', g).$$

Βάσει των προηγούμενων, η Φ^* (με μεταφορά της δομής πολλαπλότητας του $V \times G$) εφοδιάζει το $\pi^{*-1}(V)$ με δομή διαφορικής πολλαπλότητας, ως προς την οποίαν είναι (η Φ^*) αμφιδιαφόριση.

Αν τώρα $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ είναι απλοποιούσα κάλυψη της ℓ , τότε τα σύνολα $\{\pi^{*-1}(V_i)\}_{i \in I}$ καλύπτουν το $B' \times_B P := h^*(P)$. Η τομή

$$\pi^{*-1}(V_i) \cap \pi^{*-1}(V_j) = \pi^{*-1}(V_i \cap V_j) = \Phi_i^{*-1}(V_i \cap V_j \times G)$$

είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi^{*-1}(V_i)$, ως εικόνα του ανοιχτού $V_i \cap V_j \times G \subseteq V_i \times G$ μέσω της αμφιδιαφόρισης Φ_i^{*-1} . Ομοίως είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\pi^{*-1}(V_j)$. Επιπλέον, η απεικόνιση

$$\Phi_j^* \circ \Phi_i^{*-1}: V_i \cap V_j \times G \longrightarrow V_i \cap V_j \times G$$

είναι αμφιδιαφορίση. Πράγματι, για $(x', g) \in V_i \cap V_j \times G$, είναι

$$\begin{aligned}\Phi_j^* \circ \Phi_i^{*-1}(x', g) &= \Phi_j^*(x', \Phi_{ix}^{-1}(g)) \\ &= (x', \Phi_{jx} \circ \Phi_{ix}^{-1}(g)) \\ &= (x', p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(x, g)) \\ &= (p_1, p_2 \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} \circ (h \times id_G))(x', g),\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε διαφορίσιμη απεικόνιση ως σύνθεση διαφορισίμων. Ανάλογα και η $\Phi_i^* \circ \Phi_j^{*-1}$ είναι διαφορίσιμη. Επομένως, κατά το Λήμμα της Συγκόλλησης 3.6.7, υπάρχει στο $h^*(P)$ μοναδική δομή διαφορικής πολλαπλότητας, που κάνει τις Φ^* αμφιδιαφορίσεις.

Η μεταθετικότητα του Διαγράμματος Α.4 (σελ. 252) δίνει ότι η π^* είναι τοπικά (άρα και ολικά) διαφορίσιμη, αφού (τοπικά) γράφεται ως σύνθεση διαφορισίμων απεικονίσεων, δηλαδή $\pi^* = p_1 \circ \Phi^*$.

Σχετικά με τη δράση δ^* παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα (για όλα τα V)

$$\begin{array}{ccc}\pi^{*-1}(V) \times G & \xrightarrow{\delta^*} & \pi^{*-1}(V) \\ \Phi^* \times id_G \downarrow & & \downarrow \Phi^* \\ (V \times G) \times G & \xrightarrow{\delta_o} & V \times G\end{array}$$

Διάγραμμα Α.5

είναι μεταθετικά: Για κάθε $((x', p), g) \in \pi^{*-1}(V) \times G$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\delta_o \circ (\Phi^* \times id_G)((x', p), g) &= \delta_o(x', \Phi_x(p), g) \\ &= (x', \Phi_x(p) \cdot g) \\ &= (x', \Phi_x(pg)) \\ &= \Phi^*(x', pg) \\ &= (\Phi^* \circ \delta^*)((x', p), g),\end{aligned}$$

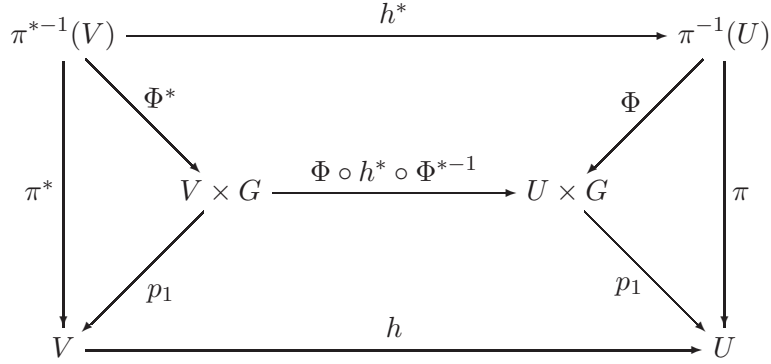
απ' όπου προκύπτει η διαφορισιμότητα της δ^* τοπικά (άρα και ολικά), όπως και η G -ισομεταβλητότητα της Φ^* .

Τα προηγούμενα αποδεικνύουν ότι η $\ell^* = (h^*(P), G, B', \pi^*)$ είναι πρωτεύουσα δέσμη. Κάθε νήμα της έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}\pi^{*-1}(x') &= \{(x', p) \in B' \times_B P : \pi(p) = h(x') = x\} \\ &= \{x'\} \times \pi^{-1}(x),\end{aligned}$$

δηλαδή είναι ισόμορφο με το αντίστοιχο $\pi^{-1}(x)$, με $x = h(x')$.

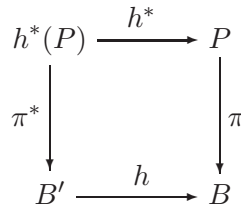
ii) Η απεικόνιση $h^*: h^*(P) \rightarrow P$ είναι διαφορίσιμη, εάν και μόνον εάν κάθε “τοπική παράσταση” $\Phi \circ h^* \circ \Phi^{*-1}$ είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, για κάθε $(x', g) \in V \times V \times G$, είναι (βλ. και το επόμενο διάγραμμα)



Διάγραμμα Α.6

$$\begin{aligned}
 \Phi \circ h^* \circ \Phi^{*-1}(x', g) &= \Phi \circ h^*(x', \Phi_x^{-1}(g)) \\
 &= \Phi(\Phi_x^{-1}(g)) \\
 &= \Phi \circ \Phi^{-1}(x, g) = (x, g) \\
 &= (h \times id_G)(x'g).
 \end{aligned}$$

Εξάλλου, το διάγραμμα



Διάγραμμα Α.7

είναι προφανώς μεταθετικό και η h^* είναι G-ισομεταβλητή, αφού

$$h^*((x', p) \cdot g) = h^*(x', p \cdot g) = p \cdot g = h^*(x', p) \cdot g,$$

για κάθε $(x', p) \in h^*(P)$ και $g \in G$. Άρα η

$$(h^*, id_G, h) : h^*(\ell) \rightarrow \ell$$

ορίζει μορφισμό πρωτευουσών δεσμών.

iii) Έστω $\ell_1 = (P_1, G, B', \pi_1)$ πρωτεύουσα δέσμη, και $(f, id_G, h): \ell_1 \rightarrow \ell$ ένας μορφισμός. Εξ ορισμού, έχουμε ότι

$$\pi \circ f = h \circ \pi_1,$$

άρα, για κάθε $p_1 \in P_1$, είναι $\pi(f(p_1)) = h(\pi_1(p_1))$. Αυτό σημαίνει ότι

$$(\pi_1(p_1), f(p_1)) \in B' \times_B P,$$

δηλαδή η απεικόνιση $(\pi_1, f): P_1 \rightarrow B' \times P$ παίρνει τιμές στο $B' \times_B P$.

Θέτουμε τώρα $\bar{\pi} := (\pi_1, f)$. Η $\bar{\pi}$ είναι διαφορίσιμη αν και μόνον αν κάθε σύνθεση της μορφής

$$\Phi^* \circ \bar{\pi}: \pi_1^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$$

είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, για κάθε $p_1 \in \pi_1^{-1}(V)$ με $\pi_1(p_1) = x' \in V$, είναι

$$\begin{aligned} \Phi^* \circ \bar{\pi}(p_1) &= \Phi^*(\pi_1(p_1), f(p_1)) \\ &= \Phi^*(x', f(p_1)) \\ &= (x', \Phi_x(f(p_1))) \\ &= (\pi_1, p_2 \circ \Phi \circ f)(p_1), \end{aligned}$$

δηλαδή η $\Phi^* \circ \bar{\pi}$ είναι πράγματι σύνθεση διαφορισίμων απεικονίσεων, άρα η $\bar{\pi}$ είναι διαφορίσιμη.

Η (προφανής) σχέση $\pi^* \circ \bar{\pi} = \pi_1$ δίνει την μεταθετικότητα του τετραγώνου

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\bar{\pi}} & h^*(P) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi^* \\ B' & \xrightarrow{id_{B'}} & B' \end{array}$$

Διάγραμμα Α.8

ενώ η G -ισομεταβλητότητα της $\bar{\pi}$ ελέγχεται ως εξής: Για κάθε $p_1 \in P_1$ και $g \in G$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(p_1 \cdot g) &= (\pi_1(p_1 \cdot g), f(p_1 \cdot g)) = (\pi_1(p_1), f(p_1) \cdot g) \\ &= (\pi_1(p_1), f(p_1)) \cdot g = \bar{\pi}(p_1) \cdot g \end{aligned}$$

Επομένως, η τριάδα

$$(\bar{\pi}, id_G, id_{B'}) : \ell_1 \longrightarrow \ell^*$$

είναι G - B' -(ισο)μορφισμός.

Τέλος, αν $\tilde{\pi} : P_1 \rightarrow h^*(P)$ είναι μια άλλη διαφορίσιμη απεικόνιση, τέτοια ώστε η $(\tilde{\pi}, id_G, id_{B'}) : \ell_1 \rightarrow \ell^*$ να είναι μορφισμός με $h^* \circ \tilde{\pi} = f$, η μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & h^*(P) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi^* \\ B' & \xrightarrow{id_{B'}} & B' \end{array}$$

Διάγραμμα Α.9

δίνει ότι $\pi^* \circ \tilde{\pi} = \pi_1$, άρα

$$\tilde{\pi} = (p_1 \circ \tilde{\pi}, p_2 \circ \tilde{\pi}) = (\pi^* \circ \tilde{\pi}, h^* \circ \tilde{\pi}) = (\pi_1, f) = \bar{\pi},$$

με την οποίαν και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

B'

Κατηγορίες και Συναρτητές

Το παράρτημα αυτό περιέχει μερικές θεμελιώδεις έννοιες από τη Θεωρία των Κατηγοριών, που εμφανίζονται στα προηγούμενα κεφάλαια. Δεν δίνονται αποδείξεις των αναφερομένων αποτελεσμάτων, εκτός από δύο περιπτώσεις, οι οποίες μπορούν να δώσουν μια αμυδρή εικόνα των συλλογισμών και μεθόδων της θεωρίας αυτής. Για λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε μία πλούσια βιβλιογραφία, από την οποίαν επιλέγουμε τα βιβλία [12], [22], [23], [28].

B.1 Ορισμός. Μια **κατηγορία** είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, Mor, \circ)$, όπου

- (i) $\mathcal{C}$ είναι μια κλάση, της οποίας τα στοιχεία ονομάζονται **αντικείμενα**.
- (ii) Mor είναι μια κλάση συνόλων τέτοια ώστε: Για κάθε $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο $Mor(A, B) \in Mor$, του οποίου τα στοιχεία λέγονται **μορφισμοί** από το A στο B . Αντί $f \in Mor(A, B)$ γράφουμε και $f: A \rightarrow B$.
- (iii) Για κάθε $(A, B, C) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, ο **κύκλος** “ $\circ$ ” ορίζει μια απεικόνιση

$$\circ: Mor(A, B) \times Mor(B, C) \rightarrow Mor(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f,$$

έτσι ώστε να ισχύουν οι συνθήκες:

(C1) $Mor(A_1, B_1)$ και $Mor(A_2, B_2)$ είναι ξένα σύνολα, εκτός αν $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$.

(C2) Ο κύκλος είναι προσεταιριστικός, δηλαδή, για κάθε $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ και για κάθε $f \in Mor(A, B)$, $g \in Mor(B, C)$ και $h \in Mor(C, D)$, είναι

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(C3) Για κάθε $A \in \mathcal{C}$, υπάρχει μορφισμός $1_A \in Mor(A, A)$, έτσι ώστε :

$$\begin{aligned} f \circ 1_A &= f, \quad \forall f \in Mor(A, B) \text{ και } B \in \mathcal{C}, \\ 1_A \circ g &= g, \quad \forall g \in Mor(C, A) \text{ και } C \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

B.2 Παραδείγματα. 1) Η κατηγορία $\mathcal{S}$, με αντικείμενα τα σύνολα, μορφισμούς τις συνήθειες απεικονίσεις και κύκλο τη συνήθη σύνθεση.

2) Η κατηγορία $\mathcal{T}$ των τοπολογικών χώρων και των συνεχών απεικονίσεων, με την συνήθη σύνθεση.

3) Η κατηγορία των σημειωμένων συνόλων $\mathcal{S}_o$: αντικείμενά της είναι τα ζεύγη (X, x_o) , όπου $x_o \in X \in \mathcal{S}$, μορφισμοί $Mor((X, x_o), (Y, y_o))$ τα σύνολα των απεικονίσεων $f: X \rightarrow Y$ με $f(x_o) = y_o$ και κύκλος η συνήθης σύνθεση.

4) Η κατηγορία $\mathcal{T}_o$ των σημειωμένων τοπολογικών χώρων που ορίζεται ανάλογα.

5) Η κατηγορία $\mathcal{G}$ των ομάδων και των ομομορφισμών τους.

6) Η κατηγορία $\mathcal{Ab}$ των αβελιανών ομάδων και των ομομορφισμών τους.

7) Η κατηγορία $\mathcal{V}(\mathbb{K})$ των διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ και των $\mathbb{K}$ -γραμμικών απεικονίσεων.

8) Η κατηγορία $\mathcal{TG}$ των τοπολογικών ομάδων και των συνεχών ομομορφισμών.

9) Η κατηγορία $\mathcal{Man}$ των διαφορικών πολλαπλοτήτων (με μοντέλα τους ευκλείδειους χώρους) και μορφισμούς τις διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων.

10) Η κατηγορία $\mathcal{LG}$ των ομάδων Lie και των διαφορίσιμων μορφισμών ομάδων.

11) Η κατηγορία $\mathcal{B}$ των χώρων Banach και των φραγμένων τελεστών.

12) Η κατηγορία $\mathcal{TV}(\mathbb{R})$ των τοπολογικών διανυσματικών χώρων πάνω από το $\mathbb{R}$ και των συνεχών $\mathbb{R}$ -γραμμικών απεικονίσεων.

13) Η κατηγορία $\mathcal{Mod}(R)$ των αριστερών R -προτύπων, όπου R ένας δακτύλιος, και των R -γραμμικών απεικονίσεων.

14) Η κατηγορία $\mathcal{Alg}$ των τοπολογικών αλγεβρών και των συνεχών μορφισμών αλγεβρών.

15) Η κατηγορία $\mathcal{R}$ των δακτυλίων και των μορφισμών δακτυλίων.

16) Η κατηγορία $\mathcal{VB}$ των διανυσματικών δεσμών και των μορφισμών τους.

17) Η κατηγορία $\mathcal{PB}$ των πρωτευουσών δεσμών και των μορφισμών τους.

18) Η κατηγορία $VB(X)$ των διανυσματικών δεσμών με βάση την πολλαπλότητα X , και των μορφισμών (f, id_X) .

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι, στη γενική Θεωρία Κατηγοριών, ο κύκλος δεν είναι κατ' ανάγκην η σύνθεση απεικονίσεων, και οι μορφισμοί δεν είναι κατ' ανάγκην απεικονίσεις (όπως στα απλά παραδείγματα που αναφέρθηκαν προηγουμένως). Όμως, πολλές φορές, και εντελώς καταχρηστικά, χρησιμοποιούμε τον όρο σύνθεση αντί κύκλος.

B.3 Ορισμός. Εστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $A, B \in \mathcal{C}$ και $f: A \rightarrow B$. Ο f λέγεται **ισομορφισμός**, αν υπάρχει $g: B \rightarrow A$, έτσι ώστε

$$g \circ f = 1_A \quad \text{και} \quad f \circ g = 1_B.$$

Γράφουμε $g = f^{-1}$.

B.4 Ορισμός. Μια **υποκατηγορία** $\mathcal{C}_o$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μια υποκλάση της $\mathcal{C}$, που είναι κατηγορία με σύνολα μορφισμών $Mor_o(A, B) \subseteq Mor(A, B)$ για κάθε $A, B \in \mathcal{C}$, και κύκλο τον περιορισμό του κύκλου της $\mathcal{C}$.

Μια υποκατηγορία $\mathcal{C}_o$ της $\mathcal{C}$ λέγεται **πλήρης**, αν $Mor_o(A, B) = Mor(A, B)$, για κάθε $A, B \in \mathcal{C}_o$.

B.5 Ορισμός. Εστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα $Z \in \mathcal{C}$ λέγεται **μηδενικό αντικείμενο**, αν $Mor(Z, A)$ και $Mor(A, Z)$ είναι μονοσύνολα, για κάθε $A \in \mathcal{C}$.

Αν μια κατηγορία έχει μηδενικό αντικείμενο, αυτό είναι μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ένα ισομορφισμό.

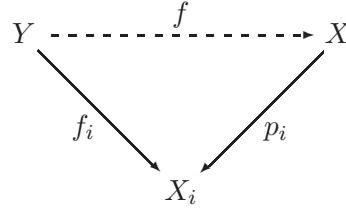
Αν η $\mathcal{C}$ έχει μηδενικό αντικείμενο Z , τότε, για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f \in Mor(X, Y)$ που αναλύεται σε σύνθεση $f = f_2 \circ f_1$, όπου $f_1 \in Mor(X, Z)$ και $f_2 \in Mor(Z, Y)$. Ο f συμβολίζεται με 0_{XY} , και έχει την ιδιότητα

$$\begin{aligned} 0_{XY} \circ g &= 0_{WY} \quad \forall g \in Mor(W, X) \text{ και } W \in \mathcal{C}, \\ h \circ 0_{XY} &= 0_{WY} \quad \forall h \in Mor(Y, W) \text{ και } W \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

B.6 Ορισμός. Εστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\{X_i\}_{i \in I}$ οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Ένα **γινόμενο** της $\{X_i\}_{i \in I}$ είναι ένα ζεύγος $(X, \{p_i\}_{i \in I})$, όπου $X \in \mathcal{C}$, και $p_i: X \rightarrow X_i$ (**προβολές**), με την εξής **καθολική ιδιότητα**:

Για κάθε $Y \in \mathcal{C}$ και για κάθε οικογένεια μορφισμών $f_i: Y \rightarrow X_i$, $i \in I$, υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $f: Y \rightarrow X$ με $p_i \circ f = f_i$.

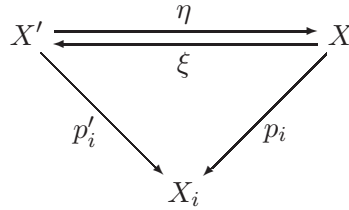
Η καθολική ιδιότητα του γινομένου απεικονίζεται στο παρακάτω Διάγραμμα Β.1, ενώ η σημασία της φαίνεται και στο επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα των μεθόδων της Θεωρίας Κατηγοριών.



Διάγραμμα Β.1

Β.7 Θεώρημα. Αν $(X, \{p_i\}_{i \in I})$, $(X', \{p'_i\}_{i \in I})$ είναι γινόμενα της ίδιας οικογένειας $\{X_i\}_{i \in I}$ στην $\mathcal{C}$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός $\xi: X \rightarrow X'$ με $p'_i \circ \xi = p_i$.

Απόδειξη. Η καθολική ιδιότητα του X συνεπάγεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\eta: X' \rightarrow X$ με $p_i = p'_i \circ \eta$. Ομοίως, η καθολική ιδιότητα του X' συνεπάγεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\xi: X \rightarrow X'$ με $p_i = p'_i \circ \xi$, οπότε $p_i = p_i \circ \eta \circ \xi$.



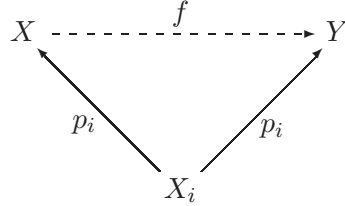
Διάγραμμα Β.2

Όμως, πάλι από την καθολική ιδιότητα του X , υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός, ο 1_X , με $p_i = p_i \circ 1_X$. Άρα, $\eta \circ \xi = 1_X$. Ανάλογα, $\xi \circ \eta = 1_{X'}$, δηλαδή ξ και η είναι ισομορφισμοί με $\eta = \xi^{-1}$. $\square$

Β.8 Ορισμός. Εστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\{X_i\}_{i \in I}$ οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Ένα **συνγινόμενο** της $\{X_i\}_{i \in I}$ είναι ένα ζεύγος $(X, \{q_i\}_{i \in I})$, όπου $X \in \mathcal{C}$, $q_i: X_i \rightarrow X$ (: **εμφυτεύσεις**), με την εξής **καθολική ιδιότητα**:

Για κάθε $Y \in \mathcal{C}$ και για κάθε οικογένεια μορφισμών $f_i: X_i \rightarrow Y$, $i \in I$, υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $f: X \rightarrow Y$ με $f \circ q_i = f_i$.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε το επόμενο διάγραμμα.



Διάγραμμα Β.3

Ακολουθώντας την ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος Β.7, αποδεικνύουμε και το αντίστοιχο θεώρημα για το συνγινόμενο. Ακριβέστερα, έχουμε το

Β.9 Θεώρημα. Αν $(X, \{q_i\}_{i \in I})$, $(X', \{q'_i\}_{i \in I})$ είναι συνγινόμενα της ίδιας οικογένειας $\{X_i\}_{i \in I}$ στην $\mathcal{C}$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός $\xi: X \rightarrow X'$ με $\xi \circ q_i = q'_i$.

Β.10 Παραδείγματα. 1) Στην κατηγορία $\mathcal{S}$ γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο με τις συνήθεις προβολές, και συνγινόμενο η διακεκριμένη ένωση με τις προφανείς εμφυτεύσεις.

2) Στην κατηγορία $\mathcal{T}$ γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο με την τοπολογία καρτεσιανό-γινόμενο και τις συνήθεις προβολές, και συνγινόμενο η διακεκριμένη ένωση με την ένωση των τοπολογιών και τις προφανείς εμφυτεύσεις.

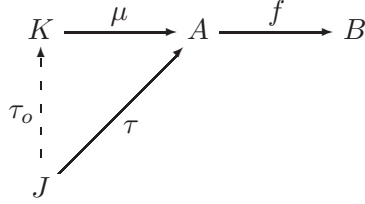
3) Στην κατηγορία $\mathcal{G}$ γινόμενο είναι το “direct product” με τις προβολές και συνγινόμενο το “free product” με τις εμφυτεύσεις.

4) Στην κατηγορία $\text{Mod}(R)$ γινόμενο είναι το καρτεσιανό γινόμενο με τις προβολές και συνγινόμενο το ευθύ άθροισμα με τις εμφυτεύσεις.

Β.11 Ορισμός. Ένας μορφισμός $f: A \rightarrow B$ λέγεται **μονομορφισμός** αν, για κάθε ζεύγος μορφισμών $\alpha, \beta: C \rightarrow A$ με $f \circ \alpha = f \circ \beta$, συνάγεται ότι $\alpha = \beta$. Αντιστοίχως, ένας $f: A \rightarrow B$ λέγεται **επιμορφισμός** αν, για κάθε ζεύγος μορφισμών $\alpha, \beta: B \rightarrow C$ με $\alpha \circ f = \beta \circ f$, συνάγεται ότι $\alpha = \beta$.

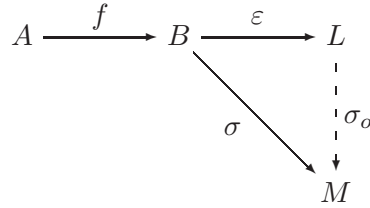
Β.12 Ορισμός. Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ με μηδενικό αντικείμενο, λέμε ότι ο μορφισμός $\mu: K \rightarrow A$ είναι **πυρήνας** του μορφισμού $f: A \rightarrow B$, αν $f \circ \mu = 0_{KB}$ και, για κάθε μορφισμό $\tau: J \rightarrow A$ με $f \circ \tau = 0_{JB}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\tau_o: J \rightarrow K$, έτσι ώστε $\tau = \mu \circ \tau_o$.

Τα προηγούμενα συνοψίζονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα B.4

Ανάλογα, λέμε ότι ο μορφισμός $\varepsilon: B \rightarrow L$ είναι **συμπυρήνας** του μορφισμού $f: A \rightarrow B$, αν $\varepsilon \circ f = 0_{AL}$ και, για κάθε μορφισμό $\sigma: B \rightarrow M$ με $\sigma \circ f = 0_{AM}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\sigma_o: L \rightarrow M$, έτσι ώστε $\sigma = \sigma_o \circ \varepsilon$. Επομένως, έχουμε και το



Διάγραμμα B.5

B.13 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ λέγεται **προσθετική**, αν:

- (i) Έχει μηδενικό αντικείμενο,
- (ii) Κάθε ζεύγος αντικειμένων έχει γινόμενο.
- (iii) Τα σύνολα $Mor(A, B)$ είναι αβελιανές ομάδες, έτσι ώστε ο κύκλος

$$\circ: Mor(A, B) \times Mor(B, C) \rightarrow Mor(A, C)$$

να είναι επιμεριστικός, δηλαδή

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2,$$

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f,$$

για κάθε $f, f_1, f_2 \in Mor(A, B)$ και $g, g_1, g_2 \in Mor(B, C)$.

B.14 Παραδείγματα. Οι κατηγορίες $\mathcal{A}b, \mathcal{V}(\mathbb{K}), \mathcal{B}, \mathcal{TV}(\mathbb{R}), Mod(R)$ και $VB(X)$ είναι προσθετικές.

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει την ύπαρξη συνγινόμενου. Η απόδειξή του είναι επίσης χαρακτηριστική για τη μεθοδολογία της Θεωρίας των Κατηγοριών, και δίνεται εδώ για να σχηματίσει ο αναγνώστης μια πληρέστερη ιδέα αυτής.

B.15 Θεώρημα. Σε μια προσθετική κατηγορία, για κάθε ζεύγος αντικειμένων υπάρχει συνγινόμενο.

Απόδειξη. Εστω $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία και $A, B \in \mathcal{C}$. Ας συμβολίσουμε με $(A \oplus B, p_A, p_B)$ το γινόμενο των A, B . Θεωρούμε τους μορφισμούς $1_A: A \rightarrow A$ και $0_{AB}: A \rightarrow B$. Από την καθολική ιδιότητα του γινομένου, υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $i_A: A \rightarrow A \oplus A$ με $p_A \circ i_A = 1_A$ και $p_B \circ i_A = 0_{AB}$.

Θεωρούμε τώρα και τους μορφισμούς $0_{BA}: B \rightarrow A$ και $1_B: B \rightarrow B$. Πάλι από την καθολική ιδιότητα του γινομένου, υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $i_B: B \rightarrow A \oplus A$ με $p_A \circ i_B = 0_{BA}$ και $p_B \circ i_B = 1_B$.

Ισχυριζόμαστε ότι $(A \oplus B, i_A, i_B)$ είναι συνγινόμενο των A, B .

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = 1_{A \oplus B}$. Πράγματι,

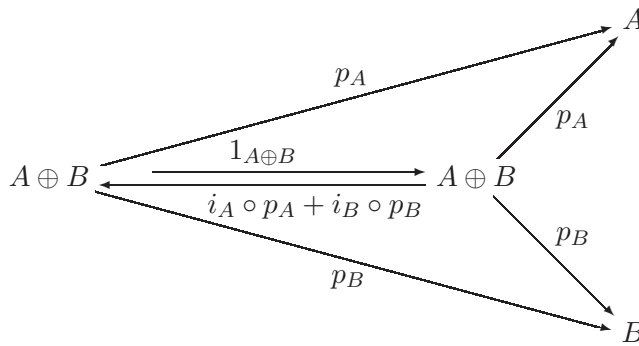
$$\begin{aligned} p_A \circ (i_A \circ p_A + i_B \circ p_B) &= p_A \circ i_A \circ p_A + p_A \circ i_B \circ p_B = \\ &= 1_A \circ p_A + 0_{BA} \circ p_B = p_A + 0_{A \oplus B, A} = p_A \end{aligned}$$

και, ανάλογα,

$$p_B \circ (i_A \circ p_A + i_B \circ p_B) = p_B.$$

Από την καθολική ιδιότητα του γινομένου, προκύπτει ότι

$$i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = 1_{A \oplus B}.$$



Διάγραμμα B.6

Θα αποδείξουμε τώρα την καθολική ιδιότητα του συνγινόμενου: Εστω $C \in \mathcal{C}$, $\phi_A: A \rightarrow C$ και $\phi_B: B \rightarrow C$. Αν θέσουμε

$$\phi := \phi_A \circ p_A + \phi_B \circ p_B: A \oplus B \rightarrow C,$$

τότε

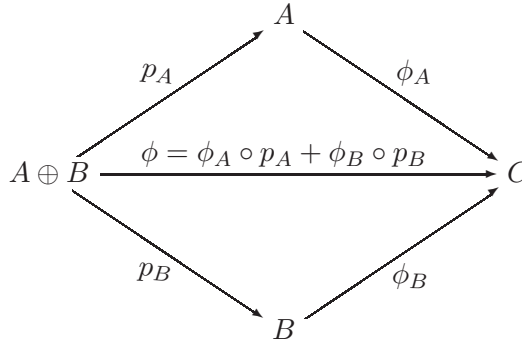
$$\begin{aligned}\phi \circ i_A &= \phi_A \circ p_A \circ i_A + \phi_B \circ p_B \circ i_A = \\ &= \phi_A \circ i_A + \phi_B \circ 0_{AB} = \phi_A + 0_{AC} = \phi_A,\end{aligned}$$

και, ανάλογα,

$$\phi \circ i_B = \phi_B.$$

Σχετικά με το μονοσήμαντο, αν $\theta: A \oplus B \rightarrow C$ είναι μορφισμός τέτοιος ώστε $\theta \circ i_A = \phi_A$ και $\theta \circ i_B = \phi_B$, τότε

$$\begin{aligned}\theta &= \theta \circ (i_A \circ p_A + i_B \circ p_B) \\ &= \theta \circ i_A \circ p_A + \theta \circ i_B \circ p_B \\ &= \phi_A \circ p_A + \phi_B \circ p_B = \phi.\end{aligned}$$



Διάγραμμα Β.7

Η απόδειξη είναι τώρα πλήρης. □

Β.16 Ορισμός. Μια **αβελιανή** κατηγορία είναι μια προσθετική κατηγορία στην οποία :

- (i) Κάθε μορφισμός έχει πυρήνα και συμπυρήνα,
- (ii) Κάθε μονομορφισμός είναι πυρήνας του συμπυρήνα του και κάθε επιμορφισμός είναι συμπυρήνας του πυρήνα του.

(iii) Κάθε μορφισμός αναλύεται σε ένα επιμορφισμό, σύνθεση με ένα μονομορφισμό.

B.17 Παραδείγματα. Οι κατηγορίες $\mathcal{A}b$, $\mathcal{V}(\mathbb{K})$, και $\mathcal{M}od(R)$ είναι αβελιανές.

B.18 Ορισμός. Εστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ δύο κατηγορίες. Ένας **συναλλοίωτος συναρτητής** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας "κανόνας" που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ ένα αντικείμενο $F(X)$ της $\mathcal{D}$, και σε κάθε μορφισμό $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ένα μορφισμό $F(f) \in \mathcal{M}or_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} f(1_X) &= 1_{F(X)}, \\ F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f), \end{aligned}$$

για κάθε $X \in \mathcal{C}$ και για κάθε ζεύγος μορφισμών f, g της $\mathcal{C}$ για τους οποίους υπάρχει η $g \circ f$.

Ένας **ανταλλοίωτος συναρτητής** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ αντιστοιχεί σε κάθε X της $\mathcal{C}$ ένα $F(X)$ της $\mathcal{D}$ και σε κάθε $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ένα $F(f) \in \mathcal{M}or_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} f(1_X) &= 1_{F(X)}, \\ F(g \circ f) &= F(f) \circ F(g) \end{aligned}$$

για κάθε $X \in \mathcal{C}$ και για κάθε ζεύγος μορφισμών f, g της $\mathcal{C}$ για τους οποίους υπάρχει η $g \circ f$.

B.19 Παραδείγματα. 1) Εστω $\mathcal{M}an_o$ η κατηγορία των σημειωμένων πολλαπλοτήτων και των διαφορίσιμων απεικονίσεων που διατηρούν τα σταθεροποιημένα σημεία. Δηλαδή, ένα αντικείμενο της $\mathcal{M}an_o$ είναι ένα ζεύγος της μορφής $((X, \mathcal{A}), x)$, όπου $(X, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα και $x \in X$, ενώ ένας μορφισμός $f \in \mathcal{M}or(((X, \mathcal{A}), x), ((Y, \mathcal{B}), y))$ είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ με $f(x) = y$. Τότε η αντιστοιχία

$$\begin{aligned} T: \mathcal{M}an_o &\rightarrow \mathcal{V}(\mathbb{R}): \\ ((X, \mathcal{A}), x) &\mapsto T(X, x), \\ \mathcal{M}or(((X, \mathcal{A}), x), ((Y, \mathcal{B}), y)) &\ni f \mapsto T_x f \equiv T(X, x) \in L(T(X, x), T(Y, y)) \end{aligned}$$

είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής από την κατηγορία των σημειωμένων πολλαπλοτήτων στην κατηγορία των πραγματικών διανυσματικών χώρων.

2) Αν Man είναι η κατηγορία των διαφορικών πολλαπλοτήτων και VB η κατηγορία των διαφορίσιμων διανυσματικών δεσμών, η αντιστοιχία

$$\begin{aligned} T: Man &\rightarrow VB : \\ (X, \mathcal{A}) &\mapsto (TX, \pi_X, X), \\ Mor((X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})) &\ni f \mapsto (Tf, f) \in Mor((TX, \pi_X, X), (TY, \pi_Y, Y)), \end{aligned}$$

όπου (TX, π_X, X) είναι η εφαπτόμενη δέσμη της $(X, \mathcal{A})$ και Tf το ολικό διαφορικό της f , είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

B.20 Ασκήσεις.

- 1) Ο μορφισμός 1_A είναι μονοσήμαντα ορισμένος.
- 2) Αν f είναι ισομορφισμός, τότε ο f^{-1} είναι μονοσήμαντα ορισμένος.
- 3) Η σχέση μεταξύ των αντικειμένων μιας κατηγορίας

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists \text{ ισομορφισμός } f: A \rightarrow B$$

είναι σχέση ισοδυναμίας.

- 4) Στα παρακάτω ζεύγη κατηγοριών, να εξετάσετε αν η πρώτη είναι (πλήρης) υποκατηγορία της δεύτερης:

$$(\mathcal{A}b, \mathcal{G}), (TV(\mathbb{R}), \mathcal{V}(\mathbb{R})), (\mathcal{S}_o, \mathcal{S}), (\mathcal{S}, \mathcal{T}), (\mathcal{T}G, \mathcal{G}), (\mathcal{L}G, \mathcal{T}G).$$

- 5) Ποιές κατηγορίες από τα Παραδείγματα B.2 (σελ. 258) έχουν μηδενικά αντικείμενα;
- 6) Δείξτε ότι οι προβολές p_j ενός γινομένου είναι επιμορφισμοί και οι εμφυτεύσεις q_j ενός συνγινομένου είναι πάντα μονομορφισμοί.
- 7) Δείξτε ότι αν ϕ, ψ μονομορφισμοί (αντιστ. επιμορφισμοί), τότε και $\psi \circ \phi$ είναι μονομορφισμός (αντιστ. επιμορφισμός). Αν $\psi \circ \phi$ είναι μονομορφισμός (αντιστ. επιμορφισμός), τότε και ϕ είναι μονομορφισμός (αντιστ. ψ είναι επιμορφισμός).
- 8) Κάθε πυρήνας είναι μονομορφισμός και κάθε συμπυρήνας είναι επιμορφισμός.
- 9) Αν $\mathcal{C}$ είναι προσθετική κατηγορία, τότε 0_{AB} είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $Mor(A, B)$.

- 10) Σε μια προσθετική κατηγορία οι μονομορφισμοί χαρακτηρίζονται από το ότι έχουν μηδενικό πυρήνα και οι επιμορφισμοί χαρακτηρίζονται από το ότι έχουν μηδενικό συμπυρήνα.
- 11) Αν μία κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει μηδενικό αντικείμενο O , τότε, για κάθε $A \in \mathcal{C}$, η τριάδα $(A, 1_A, 0_{AO})$ είναι γινόμενο του ζεύγους (A, O) .
- 12) Αν $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι συναλλοίωτος συναρτητής και $A, B \in \mathcal{C}$ είναι ισομορφα, τότε $F(A), F(B)$ είναι ισόμορφα στην $\mathcal{D}$. Ισχύει το αντίστροφο;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Γ'

Προβολικά Πρότυπα

Στο παρόν παράρτημα συγκεντρώνουμε μερικά βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία των προβολικών προτύπων, που χρειάζονται για την καλλίτερη κατανόηση του Κεφαλαίου 5.

Γ.1 Ορισμός. Εστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Ένα R -**πρότυπο** (R -module) είναι μία αβελιανή ομάδα $(M, +)$, εφοδιασμένη με έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$R \times M \longrightarrow M$$

που έχει τις ιδιότητες:

- (i) $r(sx) = (rs)x; \quad \forall r, s \in R, x \in M.$
- (ii) $(r + s)x = rx + sx; \quad \forall r, s \in R, x \in M.$
- (iii) $r(x + y) = rx + ry; \quad \forall r \in R, x, y \in M.$
- (iv) $1x = x, \quad \forall x \in M.$

Γ.2 Ορισμός. Αν M, M είναι δύο R -πρότυπα, μία απεικόνιση $f: M \rightarrow M$ λέγεται **R -γραμμική ή μορφισμός R -προτύπων**, αν ικανοποιεί την συνθήκη

$$f(rx + y) = rf(x) + f(y),$$

για κάθε $x, y \in M$ και $r \in R$.

Γ.3 Ορισμός. Ένα R -πρότυπο F λέγεται **ελεύθερο** αν έχει **βάση**, δηλαδή αν έχει ένα σύνολο στοιχείων $\{x_i\}_{i \in I}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το F .

Γ.4 Θεώρημα. Ένα R -πρότυπο F είναι ελεύθερο, αν και μόνον αν είναι ισομορφο με το R^I , όπου I ένα σύνολο δεικτών.

Απόδειξη. Εστω F ελεύθερο και $\{x_i\}_{i \in I}$ βάση. Ορίζουμε την $f: F \rightarrow R^I$ θέτοντας $f(x_i) := e_i$, όπου $e_i(j) = \delta_{ij}$, για κάθε $i, j \in I$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Είναι άμεσον ότι η f είναι R -γραμμικός ισομορφισμός.

Αντίστροφα, το R^I είναι ελεύθερο, γιατί η οικογένεια $\{e_i\}_{i \in I}$ είναι βάση. $\square$

Γ.5 Σημείωση. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι για τα πρότυπα δεν ισχύουν βασικές ιδιότητες των διανυσματικών χώρων:

(1) Δεν είναι όλα τα πρότυπα ελεύθερα, δηλαδή υπάρχουν πρότυπα που δεν έχουν βάση.

(2) Σε ένα ελεύθερο πρότυπο μπορεί να υπάρχουν βάσεις με διαφορετικό πλήθος στοιχείων.

Γ.6 Ορισμός. Ένα R -πρότυπο P λέγεται **προβολικό**, αν για κάθε ακριβή ακολουθία

$$A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

R -προτύπων και R -γραμμικών απεικονίσεων, και κάθε μορφισμό $f: P \rightarrow B$, υπάρχει μορφισμός $h: P \rightarrow A$, τέτοιος ώστε $g \circ h = f$, δηλαδή έχουμε το επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nearrow h & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Διάγραμμα Γ.1

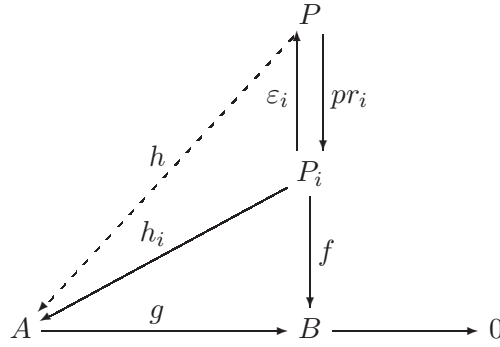
Γ.7 Θεώρημα. Κάθε ελεύθερο R -πρότυπο είναι προβολικό.

Απόδειξη. Εστω F ελεύθερο πρότυπο και $\{x_i\}_{i \in I}$ βάση του. Επειδή η g είναι επί, υπάρχουν $y_i \in A$ με $g(y_i) := f(x_i)$. Θέτοντας $h(x_i) := y_i$ και επεκτείνοντας γραμμικά, προσδιορίζουμε τη ζητούμενη h . $\square$

Γ.8 Θεώρημα. Εστω $\{P_i\}_{i \in I}$ R -πρότυπα και $P := \oplus_{i \in I} P_i$. Τότε το P είναι προβολικό αν και μόνον αν P_i είναι προβολικό, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με ε_i και pr_i τις κανονικές εμφυτεύσεις και προβολές των P_i , αντιστοίχως.

Για το ευθύ εργαζόμαστε ως εξής: Εστω ότι το P είναι προβολικό πρότυπο. Εστω επίσης $g: A \rightarrow B$ επί και $f: P_i \rightarrow B$ μορφισμός. Τότε (βλ. και το επόμενο διάγραμμα)



Διάγραμμα Γ.2

υπάρχει μορφισμός $h: P \rightarrow A$ με $g \circ h = f \circ pr_i$. Θέτοντας $h_i := h \circ \varepsilon_i$, έχουμε ότι

$$g \circ h_i = g \circ h \circ \varepsilon_i = f \circ pr_i \circ \varepsilon_i = f \circ id_{P_i} = f,$$

άρα το P_i είναι προβολικό.

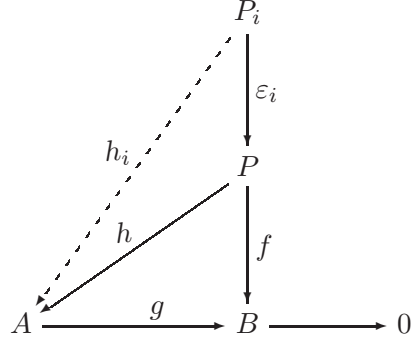
Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι το P_i είναι προβολικό, για κάθε $i \in I$. Εστω επίσης $g: A \rightarrow B$ επί και $f: P_i \rightarrow B$ μορφισμός. Υπάρχει μορφισμός $h_i: P_i \rightarrow A$ με $g \circ h_i = f \circ \varepsilon_i$, για κάθε $i \in I$ (βλ. και το Διάγραμμα Γ.3 στην επόμενη σελίδα). Ορίζοντας τον μορφισμό

$$h: P \longrightarrow A : x \mapsto h(x) := \sum_i h_i(x_i),$$

έχουμε ότι

$$g \circ h(x) = \sum_i g \circ h_i(x_i) = \sum_i f \circ \varepsilon_i(x_i) = f\left(\sum_i \varepsilon_i(x_i)\right) = f(x),$$

άρα το P είναι προβολικό πρότυπο. □



Διάγραμμα Γ.3

Γ.8 Θεώρημα. Εστω P ένα R -πρότυπο. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

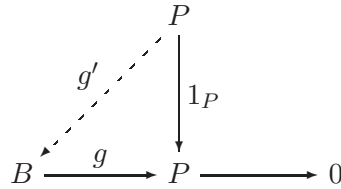
- i) Το P είναι προβολικό.
- ii) Κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

διασπάται.

- iii) Υπάρχει ελεύθερο πρότυπο F και πρότυπο Q με $P \oplus Q \cong F$.
- iv) Υπάρχει ελεύθερο πρότυπο F και προβολέας $p: F \rightarrow P$ με $P = \text{Im } p$.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $1_P: P \rightarrow P$. Επειδή το P είναι προβολικό, υπάρχει $g': P \rightarrow B$, έτσι ώστε $g \circ g' = 1_P$.



Διάγραμμα Γ.4

Τότε $g'(P)$ και $\ker g$ είναι υποπρότυπα του B , και

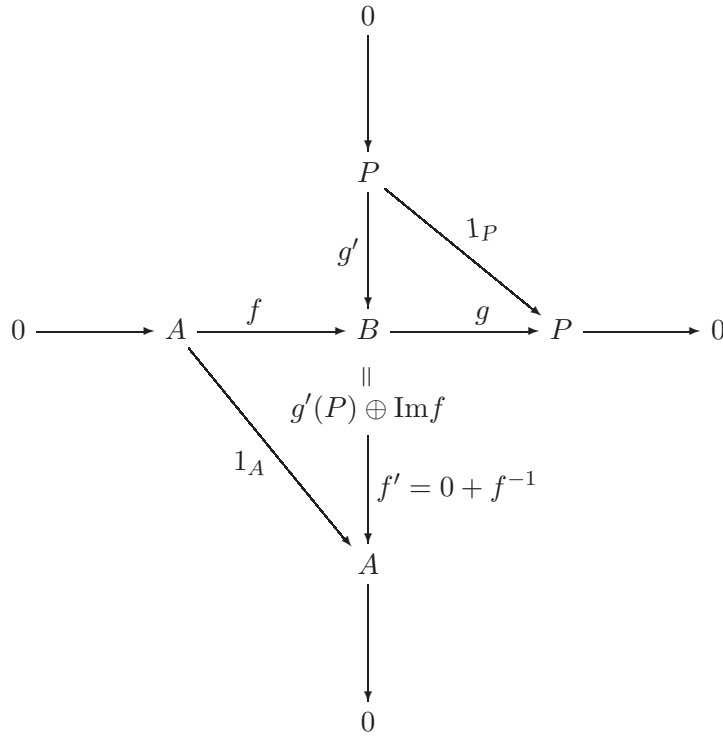
$$g'(P) \oplus \ker g = B.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in B$, $g'(g(x)) \in B$ και

$$g(x - g'(x)) = g(x) - g \circ g' \circ g(x) = g(x) - g(x) = 0,$$

δηλαδή $B \subseteq g'(P) \oplus \ker g$. Εξάλλου, αν $x \in g'(P) \cap \ker g$, τότε $g(x) = 0$ και υπάρχει $y \in P$ με $x = g'(y)$, οπότε $y = g(g'(y)) = g(x) = 0$, άρα $x = g'(y) = 0$. Δηλαδή

$$B = g'(P) \oplus \ker g = g'(P) \oplus \operatorname{Im} f.$$



Διάγραμμα Γ.5

Θέτοντας

$$f': B = g'(P) \oplus \operatorname{Im} f \longrightarrow A : (x, y) \mapsto f^{-1}(y),$$

έχουμε το ζητούμενο.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Εστω $\{e_i\}_{i \in I}$ ένα σύνολο που παράγει το P . Θεωρούμε το ελεύθερο πρότυπο R^I και τον επιμορφισμό

$$g: R^I \longrightarrow P : x = (x_i)_{i \in I} \equiv (x_i e_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i a_i g(x_i) := \sum_i a_i x_i.$$

Λόγω της υπόθεσης, η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \ker g \xrightarrow{i} R^I \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

διασπάζεται, δηλαδή $R^I = \ker g \oplus P$. Θέτοντας $Q = \ker g$, έχουμε το ζητούμενο.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Αν $F = P \oplus Q$, τότε η απεικόνιση

$$p: F \longrightarrow F: (x, y) \mapsto x$$

είναι ο ζητούμενος προβολέας.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Αν $p: F \rightarrow F$ είναι προβολέας και $P = p(F)$, τότε $F = P \oplus \ker p$. Πράγματι, αν $x \in P \cap \ker p$, τότε $x = p(y)$, για κάποιο $y \in F$ και $p(x) = 0$, οπότε

$$x = p(y) = p(p(y)) = p(x) = 0.$$

Εξάλλου, για κάθε $x \in F$,

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0,$$

δηλαδή $F \subseteq P + \ker p$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Προκύπτει αμέσως από τα Θεωρήματα Γ.4 (σελ. 270) και Γ.8 ; $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] R. ABRAHAM – S.ROBBIN: *Transversal mappings and flows*. W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [2] M.F. ATIYAH: *Complex analytic connections in fibre bundles*. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1987), 181-107.
- [3] Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ : *Γεωμετρία Νηματικών Δεσμών και Διαφορικά Συστήματα*, Διατριβή επί Υψηγεία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1978.
- [4] Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ – Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ : *Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1988.
- [5] Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ – Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ : *Σημειώσεις Μεταπτυχιακής Γεωμετρίας*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1998.
- [6] E. T. BELL: *The Development of Mathematics*. Dover, New York, 1992.
- [7] M. BERGER – B. GOSTIAUX: *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*. Armand Colin, Paris, 1972. English translation: *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*. Springer, New York, 1988.
- [8] D. BLEECKER: *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley, 1981.

- [9] N. BOURBAKI: *Variétés Différentielles et Analytiques*, Fascicule des Résultats, §§1–7. Hermann, Paris, 1967.
- [10] N. BOURBAKI: *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 2–3. Hermann, Paris, 1972.
- [11] F. BRICKELL – R. S. CLARK: *Differential Manifolds*. Van Nostrand-Reinhold, London, 1970.
- [12] I. BUCUR – A. DELEANU: *Introduction to the Theory of Categories and Functors*. J. Wiley, New York, 1968.
- [13] J. DIEUDONNÉ: *Éléments d'Analyse, Vol. III*. Gauthier-Villards, Paris, 1970. English translation: *Treatise on Analysis, Vol. III*. Academic Press, New York, 1972.
- [14] J. DIEUDONNÉ: *Éléments d'Analyse, Vol. IV*. Gauthier-Villards, Paris, 1970. English translation: *Treatise on Analysis, Vol. IV*. Academic Press, New York, 1974.
- [15] P. FLASCHEL – W. KLINGENBERG: *Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten. Periodische Geodätische*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 282, Springer, Berlin, 1972.
- [16] D. KAHN: *Introduction to Global Analysis*. Academic Press, New York, 1980.
- [17] A. KRIEGL – P. MICHOR: *The Convenient Setting of Global Analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
- [18] S. KOBAYASHI – K. NOMIZU: *Foundations of Differential Geometry I*. Vol. I, Interscience, New York, 1964. New edition by Wiley-Interscience, New York, 1996.
- [19] S. LANG: *Differential Manifolds*. Addison-Wesley, Reading Mass, 1972.
- [20] J. M. LEE: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, 2003.
- [21] L. MAXIM: *Connections compatibles with Fredholm structures on Banach manifolds*. Anal. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza", Iasi, XVIII (1972), 384–400.
- [22] S. MAC LANE: *Categories for the Working Mathematician*. Springer, New York, 1971.
- [23] B. MITCHELL: *Theory of Categories*. Academic Press, New York, 1965.

- [24] G. L. NABER: *Topology, Geometry, and Gauge Fields. Foundations*. Springer, New York, 1997.
- [25] G. L. NABER: *Topology, Geometry, and Gauge Fields. Interactions*. Springer, New York, 2000.
- [26] M. NAKAHARA: *Geometry, Topology and Physics*. Adam Hilger, Bristol, 1991.
- [27] K. NOMIZU: *Lie groups and differential geometry*. Publ. Math. Soc. Japan 2, 1956.
- [28] B. PAREIGIS: *Categories and Functors*. Academic Press, New York, 1970.
- [29] J. P. PENOT: *Connexion linéaire déduite d'une famille de connexions linéaires par un foncteur vectoriel multilinéaire*. C.R. Acad. Sci. Paris 268 (1969), A.100–A.104
- [30] J. P. PENOT: *Sur le théorème de Frobenius*. Bull. Soc. Math. France 98 (1970), 47–80.
- [31] PHAM MAU QUAN: *Introduction à la Géométrie des Variétés Différentiables*. Dunod, Paris, 1969.
- [32] M. SPIVAK: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vols. I–V*. (Second Edition). Publish or Perish Inc., 1979
- [33] R. SULANKE – P. WINTGEN: *Differentialgeometrie und Faserbündel*. Birkhäuser, Basel, 1972.
- [34] J. VILMS *Connections on tangent bundles*, J. Diff. Geometry, **1** (1967), pp. 235–243.
- [35] F. W. WARNER: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, New York, 1983.
- [36] C. von WESTENHOLZ: *Differential Forms in Mathematical Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

Ευρετήριο

- G -δέσμες (διανυσματικές), 234
- G -συνοχή, 236
- άθροισμα διανυσματικών δεσμών
 - ευθύ, 59
 - Whitney, *βλέπε* ευθύ
- ακριβής ακολουθία, 73, 74
 - σύντομη, 74
- αναγωγή δομικής ομάδας, 184
- αντικείμενο, 257
 - μηδενικό, 65, 259
- αντίστροφη εικόνα
 - διανυσματικής δέσμης, 62
 - μορφής, 132
 - πρωτεύουσας δέσμης, 115
 - συνοχής, 142
- αντίστροφος
 - τοπικά αριστερή, 21
 - τοπικά δεξιά, 34
- ανάκρουση, *βλέπε* αντίστροφη εικόνα
- απεικονίσεις
 - G -ισομεταβλητές, 95
 - μεταφοράς
 - διανυσματικής δέσμης, 51
 - πρωτεύουσας δέσμης, 119
- απεικόνιση εγκάρσια, 35
- απεικόνιση εκτίμησης Ev , 238
- απεικόνιση συνοχής, 211
 - γραμμική, 221
- απλοποιούν ζεύγος
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - πρωτεύουσας δέσμης, 95
 - ολικό, 112
- απλοποιούσα κάλυψη
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - πρωτεύουσας δέσμης, 103
- αρχική συνθήκη τομής, 31
- βάση
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - πρωτεύουσας δέσμης, 95
 - προτύπου, 270
- γενικευμένες συναρτήσεις Christoffel
 - συνθήκη συμβιβαστότητας, 215, 229
- γενικευμένες συνατήσεις

- Christoffel, 214
- γινόμενο
- αντικειμένων κατηγορίας, 259
 - καμπυλών, 156
- γραμμική απεικόνιση συνοχής, 221
- γραμμική συνοχή, 221
- διαμέριση της μονάδας, 83
- διαφορική 1-μορφή, 131
- διαφορική k -μορφή, 131
- διατήρηση
- δράσεων, 109
 - νημάτων, 109
- διάσπαση ακριβούς ακολουθίας, 82
- δομική ομάδα
- διανυσματικής δέσμης, 52, 184
 - πρωτεύουσας δέσμης, 95
- δομή Riemann, 180
- δράση
- αριστερή, 90
 - δεξιά, 90
 - ελεύθερη, 91
 - γνήσια μεταβατική, 91
 - μεταβατική, 91
 - διαφορίσιμη, 90
- δέσμη
- διανυσματική, 46
 - τετριμμένη, 47, 49
 - τοπικώς τετριμμένη, 47
 - διγραμμικών μορφών, 58
 - δυϊκή, 58
 - εφαπτόμενη, 47
 - γραμμικών απεικονίσεων, 60
 - γραμμικών μορφών, *βλέπε* δυϊκή δέσμη
 - κύρια, *βλέπε* πρωτεύουσα
 - πλαισίων, 125
 - πρωτεύουσα, 93
 - ολικώς τετριμμένη, 113
 - τετριμμένη (η), 96
 - τοπικώς τετριμμένη, 95
 - συνεφαπτόμενη, 58
- εγκάρσια απεικόνιση, 35
- εγκάρσιες υποπολλαπλότητες, 43
- εκλέπτυνση, 83
- εμβάπτιση, 24
- εμφύτευση, 13
- φυσική, 2
 - συνγινόμενου, 260
- επιμορφισμός, 261
- εσωτερική ισομορφία, 155
- εσωτερικός αυτομορφισμός του G , 130
- εξωτερικό διαφορικό, 131
- εξωτερικό γινόμενο 1-μορφών, 131
- εξίσωση με ολικό διαφορικό, 151
- ισοδύναμα σημεία
- δέσμης, 158
- ισομορφισμός
- διανυσματικών δεσμών, 49
 - πρωτευουσών δεσμών, 110
- καμπυλότητα, 201
- καμπύλη
- αντίθετη, 153
 - κατά τμήματα διαφορίσιμη, 149
 - κλειστή, 157
 - C^∞ -διαφορίσιμη, 149
- κανονική υποπολλαπλότητα, 2
- κανονικός μορφισμός, 210
- κατηγορία, 257
- διανυσματικών δεσμών, 50
 - αβελιανή, 264
 - πλήρης, 259
 - προσθετική, 69, 262
 - ψευδοαβελιανή, 72
- κατάκλιση, 23
- καθολική ιδιότητα
- αντίστροφης εικόνας
 - διανυσματικής δέσμης, 62
 - πρωτεύουσας δέσμης, 115

- γινομένου, 66, 259
- συνγινομένου, 68, 260
- κάθετη συνιστώσα, 219
- κάθετη υποδέσμη, 207
- κάθετο διάνυσμα, 130
- κάθετος υπόχωρος, 130
- κύκλος, 257
- μεταφορά
 - (δεξιά) πρωτεύουσας δέσμης, 128
- μετασχηματισμός βαθμίδας, 114
- μετατόπιση
 - (δεξιά) ομάδας Lie, 91
 - (δεξιά) πρωτεύουσας δέσμης, 128
- μονομορφισμός, 261
- μορφισμός, 257
 - διανυσματικών δεσμών, 48
 - πρωτεύουσών δεσμών, 108
 - B , 110
 - G , 110
 - $G-B$, 110
 - προτύπων, 270
- μορφή συνοχής, 133
 - τοπική, 160
- νηματικό γινόμενο, 42
- νήμα
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - εμφάπτισης, 32
 - πρωτεύουσας δέσμης, 95
 - τύπου $\mathbb{R}^n$, 46
- ολικός χώρος
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - πρωτεύουσας δέσμης, 95
- ομογενής χώρος, 93
- ομάδα ισοτροπίας, 93
- ομάδα ολονομίας
 - Φ_b , 157
 - Φ_p , 158
 - περιορισμένη, 159
- οριζόντια ανύψωση
 - διανυσματικού πεδίου, 145
 - καμπύλης, 149
- οριζόντια συνιστώσα, 219
- οριζόντια υποδέσμη, 219
- οριζόντιος υπόχωρος, 133
- ορθοκανονικό πλαίσιο, 189
- παρασυμπαγής χώρος, 83
- παράλληλη μετατόπιση, 152
- πεδίο
 - Killing, 92
 - Killing, 128
 - θεμελιώδες, 128
- προβολέας, 69
- προβολή
 - γινομένου, 259
 - διανυσματικής δέσμης, 46
 - πρωτεύουσας δέσμης, 95
- πρότυπο, 269
 - ελεύθερο, 270
 - προβολικό, 270
- πυρήνας, 261
- σημεία ισοδύναμα, 158
- σύγκυκλοι ισοδύναμοι, 88
- σύγκυκλος, 51, 119
- συζυγής παράσταση της G , 130
- συναλλοίωτη παραγωγή, 192
- συναλλοίωτη παράγωγος
 - συμβιβαστή με G , 195
- συναρτητής
 - ανταλλοίωτος, 265
 - πλήρως πιστός, 172
 - προσθετικός, 166
 - συναλλοίωτος, 165, 265
 - τομή, 165
- συναρτήσεις Christoffel, 197
 - γενικευμένες, 214
 - συνθήκη συμβιβαστότητας, 215, 229
 - συνθήκη συμβιβαστότητας, 199

- συνγινόμενο, 260
- σύμβολα Christoffel, 200
- σύνθεση καμπυλών, 156
- συνθήκη συμβιβαστότητας
 - γενικευμένων συναρτήσεων Christoffel, 229
 - συμβόλων Christoffel, 200
 - τοπικών παραστάσεων της K , 228
 - συναρτήσεων Christoffel, 199
- συνθήκη Leibniz, 187, 192
- συνοχή
 - διανυσματικής δέσμης, 187
 - από διάσπαση, 211
 - συμβιβαστή με δομή Riemann, 189
 - γραμμική, 221
 - πρωτεύουσας δέσμης, 132
 - ως διανομή, 137
 - Levi-Civita, 201
 - Riemann, 201
- συνπυρήνας, 262
- στρέψη, 201
- ταυτότητα Bianchi, 201
- τομή
 - (τοπική) εμβάπτισης, 31
 - διανυσματικής δέσμης
 - ολική, 162
 - τοπική, 162
 - πρωτεύουσας δέσμης
 - ολική, 103
 - φυσική, 103
 - τοπική, 102
- τοπική μορφή συνοχής, 160
- τροχιά, 91
- υποδέσμη, 74
- υποκατηγορία, 259
- υποπολλαπλότητα
 - εμφυτευμένη, 23
 - κανονική, 2