Θεωρία Πιθανοτήτων
Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

Ιάσονας Ασκούνης

2023

Άσκηση .
Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ *μετρήσιμος χώρος και* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *τυχούσα ακολουθία στην* $\mathcal{A}$.
Δείξτε ότι

$$I_{\limsup A_n} = \limsup I_{A_n} \ \ \textit{και} \ \ I_{\liminf A_n} = \liminf I_{A_n}$$

όπου με I_A *συμβολίζουμε την* ***δείκτρια συνάρτηση του A*** *με τιμές* $I_A(w) = 0$ *ή* 1,*ανάλογα με το αν* $\omega \in A$ *ή* $\omega \notin A$,*αντίστοιχα*

Λύση 1.
Θα αποδείξουμε αρχικά ότι για κάθε $\omega \in \Omega$ *ισχύει*

$$I_{\limsup A_n}(\omega) = \limsup I_{A_n}(\omega)$$

και πράγματι παρατηρούμε αρχικά ότι αφού η δείκτρια συνάρτηση παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1 και οι παραπάνω συναρτήσεις θα παίρνουν μόνο τις τιμές 0 και 1.
Έστω τώρα $\omega \in \Omega$ *και τότε*

$$I_{\limsup A_n}(\omega) = 1 \iff \omega \in \limsup A_n \iff \omega \in A_n \ \ \textit{για άπειρα} \ \ n \in \mathbb{N}$$

$$\iff I_{A_n}(\omega) = 1 \ \ \textit{για άπειρα} \ \ n \in \mathbb{N}$$

$$\iff \textit{για κάθε} \ \ \epsilon > 0 \ \ \textit{το} \ \ \{n : I_{A_n}(\omega) > 1 - \epsilon\} \ \ \textit{είναι άπειρο σύνολο και το}$$

$$\{n : I_{A_n}(\omega) > 1 + \epsilon\} \ \textit{είναι πεπερασμένο ώς κενό σύνολο}$$

$$\iff \limsup I_{A_n}(\omega) = 1.$$

Τότε όμως αφού αυτές παίρνουν μόνο δύο τιμές έπεται και ότι

$$\limsup I_{A_n}(\omega) = 0 \iff I_{\limsup A_n}(\omega) = 0$$

και άρα τελικά είναι οι ίδιες συναρτήσεις.
Αντίστοιχα τώρα για την δεύτερη σχέση παρατηρούμε ότι για $\omega \in \Omega$ *έχουμε ότι*

$$I_{\liminf A_n}(\omega) = 1 \iff \omega \in \liminf A_n$$

$$\iff \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} : \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ να ισχύει ότι } \omega \in A_n$$

$$\iff \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} : \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ να ισχύει ότι } I_{A_n}(\omega) = 1$$

$$\iff \text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ το } \{n : I_{A_n}(\omega) < 1+\epsilon\} \supset \{n_0, n_0+1, \dots\} \text{ είναι άπειρο σύνολο και το}$$

$$\{n : I_{A_n}(\omega) < 1-\epsilon\} \subset \{1, 2, \dots, n_0 - 1\} \text{ είναι πεπερασμένο}$$

$$\iff \liminf I_{A_n}(\omega) = 1$$

και αφού παλι οι παραπάνω δύο συναρτήσεις παίρνουν μόνο τις τιμές 0 και 1 έπεται ότι και

$$\liminf I_{A_n}(\omega) = 0 \iff I_{\liminf A_n}(\omega) = 0$$

και άρα ταυτίζονται στο Ω.

Άσκηση .
Δείξτε ότι ισχύουν τα εξής :

1. $(\limsup A_n) \cap (\limsup B_n) \supset \limsup(A_n \cap B_n)$
2. $(\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) = \limsup(A_n \cup B_n)$
3. $(\liminf A_n) \cap (\liminf B_n) = \liminf(A_n \cap B_n)$
4. $(\liminf A_n) \cup (\liminf B_n) \subset \liminf(A_n \cup B_n)$

Μπορούν οι ανισότητες στα (1),(4) να γίνουν γνήσιες;

Λύση 2.

1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε* $k \in \mathbb{N}$

$$A_k \cap B_k \subset A_k$$

και άρα απο αυτό έπεται άμεσα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cap B_k) \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Παίρνοντας όμως τομές στην παραπάνω σχέση έχουμε τελικά ότι

$$\limsup(A_n \cap B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cap B_k) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup A_n. \tag{1}$$

Με όμοιο τρόπο τώρα,αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$A_k \cap B_k \subset B_k$$

,αποδεικνύουμε ότι και

$$\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup B_n \tag{2}$$

και άρα τελικά απο τις (1),(2) έχουμε ότι

$$\limsup(A_n \cap B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n).$$

2. *Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$A_k \subset A_k \cup B_k$$

έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cup B_k)$$

και άρα παίρνοντας τομές έχουμε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cup B_k) = \limsup(A_n \cup B_n). \tag{3}$$

Επίσης αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *ισχύει και ότι*

$$B_k \subset A_k \cup B_k$$

αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο με παραπάνω ότι και

$$\limsup B_n \subset \limsup(A_n \cup B_n) \tag{4}$$

και άρα τελικά απο τις (3),(4) έχουμε ότι

$$(\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) \subset \limsup(A_n \cup B_n).$$

Για τον αντίστροφο τώρα εγκλεισμό έστω $x \in \limsup(A_n \cup B_n)$ *και τότε έχουμε ότι υπάρχουν άπειροι* $n \in \mathbb{N}$ *για τους οποίους* $x \in A_n \cup B_n$.
Τότε όμως τουλάχιστον ένα απο τα δύο σύνολα $\{n : x \in A_n\}$ *και* $\{n : x \in B_n\}$ *είναι άπειρο σύνολο γιατί αν και τα δύο ήταν πεπερασμένα τότε και το σύνολο*

$$\{n : x \in A_n \cup B_n\} = \{n : x \in A_n\} \cup \{n : x \in B_n\}$$

θα ήταν πεπερασμένο σύνολο ως ένωση δύο πεπερασμένων συνολων και άρα άτοπο.
Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσουμε ότι το $\{n : x \in A_n\}$ *είναι άπειρο τότε*

$$x \in \limsup A_n \subset (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$$

και άρα έχουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό.
Τελείως συμμετρικά αν το $\{n : x \in B_n\}$ *είναι άπειρο τότε*

$$x \in \limsup B_n \subset (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$$

και άρα πάλι έχουμε το ζητούμενο.

3. Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$A_k \cap B_k \subset A_k, B_k$$

όπως παραπάνω δείχουμε εύκολα ότι

$$\liminf(A_n \cap B_n) \subset \liminf A_n$$

και

$$\liminf(A_n \cap B_n) \subset \liminf(B_n)$$

και άρα απο τους δύο παραπάνω εγκλεισμούς έχουμε ότι

$$\liminf(A_n \cap B_n) \subset (\liminf A_n) \cap (\liminf B_n).$$

Για τον αντίστροφο τώρα εγκλεισμό έστω $x \in (\liminf A_n) \cap (\liminf B_n)$ και τότε έχουμε ότι

$$x \in \liminf A_n \implies \text{υπάρχει}\, n_0 \in \mathbb{N}\, \text{τέτοιο ώστε για κάθε}\;\; n \geq n_0 : x \in A_n$$

και

$$x \in \liminf B_n \implies \text{υπάρχει}\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε για κάθε}\;\; n \geq n_1 : x \in B_n$$

και θέτοντας $n_2 = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι βρήκαμε n_2 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_2$

$$x \in A_n \cap B_n$$

και άρα τελικά

$$x \in \liminf(A_n \cap B_n)$$

και έτσι αποδείχθηκε και ο αντίστροφος εγκλεισμός.

4. Έπεται άμεσα όπως και παραπάνω απο το γεγονός ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$A_k, B_k \subset A_k \cup B_k.$$

Άσκηση .

Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mathbb{P}_n : n \geq 1\}$ ακολουθία πιθανοτήτων στον $(\Omega, \mathcal{A})$,έτσι ώστε ο $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_n)$ να είναι χώρος πιθανότητας για κάθε $n \geq 1$.
Δείξτε ότι ο $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ με

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_n(A)}{2^n}, \text{ για κάθε }\; A \in \mathcal{A},$$

είναι χώρος πιθανότητας.

Λύση 3.

- *Αρχικά αφού για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε* $\mathbb{P}_n(\emptyset) = 0$ *έπεται άμεσα ότι*

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

- *Έστω τώρα* $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ *ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων και τότε αφού κάθε* $\mathbb{P}_n$ *είναι πιθανότητα στον* $(\Omega, \mathcal{A})$ *έπεται ότι*

$$\mathbb{P}_n \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_n(A_k).$$

Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{P}_n \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_n(A_k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{P}_n(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{P}_n(A_k) \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)
\end{aligned}$$

όπου η αλλαγή σειράς άθροισης επιτρέπεται απο Fubini αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n} \mathbb{P}_n(A_k) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{P}_n(A_k) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \leq 1 = \mathbb{P}(\Omega) < \infty.$$

- *Τέλος παρατηρούμε ότι αφού για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι* $\mathbb{P}_n(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \\
&= 2 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

και άρα η τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *είναι χώρος πιθανότητας.*

Άσκηση .

Έστω $\mathcal{A}$ *τυχούσα σ-άλγεβρα στον* $\Omega \neq \emptyset$ *και* $B \in \mathcal{A}$ *μη κενό.*
Ορίζουμε τότε

$$\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}.$$

Να αποδείξετε ότι αυτή είναι σ-άλγεβρα επί του B.

Λύση 4.

- *Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα έχουμε ότι $\emptyset \in \mathcal{A}$ και άρα αφού*

$$\emptyset = \emptyset \cap B$$

έπεται τελικά ότι $\emptyset \in \mathcal{A}_B$.

- *Παρατηρούμε τώρα ότι άν πάρουμε $C = A \cap B$ με $\mathcal{A}$ τότε έχουμε ότι*

$$B \setminus C = B \setminus (A \cap B) = B \cap (A \cap B)^c = B \cap (A^c \cup B^c) = (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)$$

$$= A^c \cap B$$

και αφού $A^c \in \mathcal{A}$ γιατί η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα,έπεται ότι $B \setminus C \in \mathcal{A}_B$.

- *Έστω τώρα $(C_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία συνόλων απο την $\mathcal{A}_B$ και τότε υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ τέτοια ώστε*

$$C_n = A_n \cap B$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Τότε όμως έχουμε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B \in \mathcal{A}_B$$

γιατί $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση .
Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκηση αν $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ είναι χώρος πιθανότητας με $\mathbb{P}(B) > 0$,τότε ο χώρος $(B, \mathcal{A}_B, \mathbb{P}_B)$ με

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}, A \in \mathcal{A}_B$$

να αποδείξετε ότι είναι χώρος πιθανότητας.

Λύση 5.

- *Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού η $\mathbb{P}$ είναι πιθανότητα έχουμε ότι $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ και άρα και $\mathbb{P}_B(\emptyset) = 0$.*

- *Έστω τώρα* $(C_n)_{n\geq 1}$ *μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την* $\mathcal{A}_B$.
  Τότε όμως αφού η $\mathbb{P}$ *είναι πιθανότητα έπεται ότι*
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n)$$
  και άρα
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(C_n)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_B(C_n).\end{aligned}$$
- *Παρατηρούμε τέλος ότι*
  $$\mathbb{P}_B(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

Απο τις τρείς παραπάνω ιδιότητες έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση .
Αποδείξτε ότι κάθε αριθμήσιμο $N \subset (0,1)$ *είναι Borel και* $\lambda(N) = 0$.*Επομένως κάθε σύνολο* M *που είναι συμπλήρωμα ενός αριθμήσιμου συνόλου N,είναι και αυτό Borel και* $\lambda(M) = 1$.*Συμπαιράνετε ότι ένας τυχαία επιλεγμένος αριθμός του* $(0,1)$ *είναι,με πιθανότητα 1,υπερβατικός.*

Λύση 6.
Έστω N *αριθμήσιμο υποσύνολο του* $(0,1)$ *και έστω* $N = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ *μια αρίθμηση του N,δηλαδή*
$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}.$$
Αν αποδείξουμε ότι κάθε μονοσύνολο είναι Borel τότε αφού το N *το γράψαμε σαν αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων έπεται ότι και το* N *θα είναι Borel.*
Έστω επομένως $x \in (0,1)$ *και* $G = \{x\} \subset (0,1)$.
Τότε όμως έχουμε ότι
$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x, x + \frac{1}{n}\right)$$
και αφού κάθε $I_n = \left[x, x + \frac{1}{n}\right)$ *έχουμε αποδείξει ότι είναι Borel ως ημιανοιχτό διάστημα,έπεται ότι και το* G *είναι Borel γιατί κάθε σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές.*

Επίσης παρατηρούμε ότι απο την μονοτονία του μέτρου Lebesgue έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \lambda(G) \leq \lambda\left(\left[x, x+\frac{1}{n}\right)\right) = x + \frac{1}{n} - x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\implies \lambda(G) = 0.$$

Επομένως κάθε μονοσύνολο είναι Borel και έχει μέτρο μηδέν.
Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\lambda(N) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\{r_n\}) = 0$$

$$\implies \lambda(N) = 0.$$

Επομένως αν τώρα M *είναι ένα υποσύνολο του* $(0,1)$ *που είναι συμπλήρωμα κάποιου αριθμήσιμου συνόλου* N*,τότε και αυτό είναι Borel γιατί κάθε σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα.*
Επίσης αφού $M \cup N = N^c \cup N = (0,1)$ *και τα* M,N *είναι πραφανώς ξένα έπεται ότι*

$$\lambda(M) + \lambda(N) = \lambda((0,1)) = 1 \implies \lambda(M) + 0 = 1$$

$$\implies \lambda(M) = 1.$$

Αρχικά γνωρίζουμε ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί του (0,1) είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και αν N *είναι το σύνολο αυτών και ορίσουμε* $M = \{x \in (0,1) : x \text{ υπερβατικός}\}$ *τότε αφού* $M = N^c$ *απο τα παραπάνω έπεται ότι*

$$\lambda(M) = 1.$$

Άσκηση .

Αποδείξτε ότι αν $\mathcal{A}$ *και* $\mathcal{B}$ *είναι σ-άλγεβρες στο* Ω*,τότε η* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *δεν είναι αναγκαστικά σ-άλγεβρα στον* Ω *και η*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

δεν είναι αναγκαστικά σ-άλγεβρα στον Ω^2.

Λύση 7.

Θεωρούμε αρχικά ως δειγματικό χώρο τον $\Omega = \{1,2,3,4\}$ *και θεωρούμε και τις σ-άλγεβρες*

$$\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2,3,4\}, \Omega, \emptyset\}$$

$$\mathcal{B} = \{\{2\}, \{1,3,4\}, \Omega, \emptyset\}$$

και τότε παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \Omega, \emptyset\}$$

και άρα αν πάρουμε τα σύνολα $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$ *τότε αυτά είναι σύνολα της οικογένειας* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *αλλά έχουμε ότι*

$$A_1 \cup A_2 = \{1,2\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

και άρα η $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *δεν είναι σ-άλγεβρα.*
Επίσης αν θεωρήσουμε και την Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$ *και θέσουμε* $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *τότε παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε και τα σύνολα*

$$C_1 = [0,1] \times [0,1]$$

$$C_2 = [2,3] \times [2,3]$$

τότε τα σύνολα αυτά είναι απο το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
Όμως έχουμε ότι το

$$C_1 \cup C_2$$

δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο επίπεδο και άρα δεν ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Θεωρία Πιθανοτήτων
Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Ιάσονας Ασκούνης

2023

Άσκηση .
Αποδείξτε ότι μια λ-κλάση είναι πάντα κλάση Dynkin.
Εξετάστε εάν ισχύει το αντίστροφο.

Λύση 1.
Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{A}$ είναι μια λ-κλάση υποσυνόλων του Ω τότε

- $\Omega \in \mathcal{A}$ *εξ ορισμού της λ-κλάσης.*
- *Αν* $A, B \in \mathcal{A}$ *με* $A \subset B$ *τότε παρατηρούμε ότι*

  $$B \setminus A = B \cap A^c = (B^c \cup A)^c$$

  όπου

  $$B^c \cup A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

  όπου $C_1 = B^c, C_2 = A$ *και* $C_k = \emptyset$ *για κάθε* $k \geq 3$.
  Η ακολουθία $(C_k)_{k=1}^{\infty}$ *όμως είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την* $\mathcal{A}$ *και αφού η* $\mathcal{A}$ *είναι λ-κλάση έπεται ότι*

  $$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathcal{A}$$

  και άρα $B^c \cup A \in \mathcal{A}$.
  Αφού όμως και $B^c \cup A \subset \Omega \in \mathcal{A}$ *έπεται ότι*

  $$\Omega \setminus (B^c \cup A) = (B^c \cup A)^c \in \mathcal{A}.$$

- *Αν* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία απο την* $\mathcal{A}$*,τότε ορίζουμε την ακολουθία* $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ *ως εξής*

  $$B_1 = A_1 \text{ και } B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

για κάθε $n \geq 2$.
Τότε παρατηρούμε ότι η $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την* $\mathcal{A}$ *αφού για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι* $A_n \subset A_{n+1}$ *και η* $\mathcal{A}$ *είναι κλάση Dynkin.*
Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

απο όπου και έπεται ότι

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Αφού τώρα η $\mathcal{A}$ *είναι* λ*-κλάση έπεται ότι*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$$

και άρα $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ *και επομένως η* $\mathcal{A}$ *είναι κλάση Dynkin.*
Το αντίστροφο επίσης ισχύει γιατί αν θεωρήσουμε μια $\mathcal{A}$ *που είναι κλάση Dynkin τότε παρατηρούμε ότι*

- $\Omega \in \mathcal{A}$ *απο τον ορισμό της κλάσης Dynkin.*
- *Αν πάρουμε* $A \in \mathcal{A}$ *τότε θα αποδείξουμε ότι και* $A^c \in \mathcal{A}$ *και αυτό έπεται άμεσα αφού* $\Omega, A \in \mathcal{A}$ *και* $A \subset \Omega$ *και άρα απο τον ορισμό της κλάσης Dynkin,έχουμε ότι και*

$$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}.$$

- *Απο την άλλη έχουμε ότι αν θεωρήσουμε μια ακολουθία* (A_n) *ξένων ανα δύο στοιχείων απο την* $\mathcal{A}$*,τότε μπορούμε να ορίσουμε την αύξουσα ακολουθία συνόλων* (B_n) *όπου*

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι* $B_n \in \mathcal{A}$ *λόγω της κλειστότητας μιας κλάσης Dynkin σε πεπερασμένες ξένες ενώσεις.*
Τότε όμως έχουμε ότι και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

και άρα απο την κλειστότητα της $\mathcal{A}$ *ως προς αριθμήσιμες ενώσεις αύξουσας ακολουθίας έχουμε ότι και*

$$\bigcup_{n=1} B_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Άρα απο τα παραπάνω η $\mathcal{A}$ είναι και λ-κλάση.

Άσκηση .

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας με $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και $\mathbb{P}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, \ldots.$$

Δείξτε ότι για την ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου, $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \ \text{ και } \ \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

Υπάρχει αντίφαση με τα λήμματα Borel − Cantelli;

Λύση 2.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων και άρα απο ***Πρόταση*** *που έχουμε δεί στο μάθημα ισχύει ότι*

$$\lim A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ απο την μονοτονία του μέτρου $\mathbb{P}$

$$0 \leq \mathbb{P}(\limsup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{k\}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(\{k\})$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

αφού οι ουρές συγκλίνουσα σειράς συγκλίνουν στο 0.
Τελικά έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

Απο την άλλη

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{k\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αυτό δεν έρχεται σε αντίφαση με το 2ο Λήμμα Borel – Cantelli γιατί η ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *δεν είναι ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων γιατί*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

Επίσης δεν έρχεται σε αντίφαση προφανώς με το 1ο Λήμμα Borel – Cantelli αφού αυτό μας δίνει συμπέρασμα για την πιθανότητα του $\limsup A_n$ *στην περίπτωση όπου* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.

Άσκηση .

Αποδείξτε ότι εάν $\mathbb{P}(A_n) \geq a > 0$ *για άπειρες τιμές του* n*,τότε και*

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq a.$$

Λύση 3.

Παρατηρούμε ότι λόγω της υπόθεσης έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ *ισχύει ότι το*

$$\{n : \mathbb{P}(A_n) > a - \epsilon\}$$

είναι άπειρο σύνολο και άρα

$$\limsup \mathbb{P}(A_n) \geq a.$$

Απο ***Πρόταση*** *όμως γνωρίζουμε ότι*

$$\limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n)$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

Άσκηση .

1. *Εάν* $\mathbb{P}(A_n) = 1$ *για κάθε* n*,τότε* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.
2. *Εάν* $\mathbb{P}(A_n) = 0$ *για κάθε* n*,τότε* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.
3. *Δώστε παράδειγμα χώρου πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *και οικογένειας συνόλων* $\{A_i\}_{i \in I}$*,έτσι ώστε* $\mathbb{P}(A_i) = 0$ *για κάθε* $i \in I$*,και*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1.$$

Λύση 4.

1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι*
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \tag{1}$$
όπου απο την υποπροσθετικότητα του μέτρου $\mathbb{P}$ *έχουμε*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\mathbb{P}(A_n)) = 0$$
$$\implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0$$
και άρα απο την (1)
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - 0 = 1.$$

2. *Παρατηρούμε ότι*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \tag{2}$$
και αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*
$$\mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \mathbb{P}(A_n) = 1 - 0 = 1$$
και άρα απο το 1. έχουμε ότι
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1.$$
Τότε όμως απο την (2)
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - 1 = 0.$$

3. *Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας* $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ *όπου* λ *είναι το μέτρο Lebesgue στο* $(0,1)$.
Τότε παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i\in(0,1)}$ *με* $A_i = \{i\}$ *για κάθε* $i \in (0,1)$ *τότε έχουμε ότι*
$$\lambda(A_i) = 0$$
για κάθε i. *Επίσης παρατηρούμε ότι*
$$\bigcup_{i\in(0,1)} A_i = (0,1) \implies \lambda\left(\bigcup_{i\in(0,1)} A_i\right) = \lambda((0,1)) = 1$$
και άρα έχουμε το παράδειγμα.

Άσκηση .

Έστω $\mathcal{D}$ μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Αποδείξτε ότι αν $\mathcal{P} \subset \delta(\mathcal{D})$ τότε η

$$\overline{P} = \{A \subset \Omega : \text{για κάθε } C \in \mathcal{P}, A \cap C \in \delta(\mathcal{D})\}$$

είναι κλάση Dynkin.

Λύση 5.

Παρατηρούμε ότι

- *Για κάθε $C \in \mathcal{P}$ ισχύει ότι*

  $$\Omega \cap C = C \in \mathcal{P} \subset \delta(\mathcal{D})$$

  και άρα $\Omega \in \overline{P}$.

- *Έστω $A, B \in \overline{P}$ με $A \subset B$ και τότε αν πάρουμε $C \in \mathcal{P}$ έχουμε ότι $A \cap C, B \cap C \in \delta(\mathcal{D})$ και επίσης $A \cap C \subset B \cap C$.*
  Αφού όμως η $\delta(\mathcal{D})$ είναι κλασή Dynkin έπεται τελικά ότι $(B \cap C) \setminus (A \cap C) \in \delta(\mathcal{D})$,όπου όμως

  $$(B \cap C) \setminus (A \cap C) = (B \setminus A) \cap C$$

  και άρα $B \setminus A \in \overline{P}$.

- *Έστω τώρα $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ μια αύξουσα ακολουθία απο την $\overline{P}$ και τότε έχουμε ότι αν πάρουμε $C \in \mathcal{P}$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $A_n \cap C \in \delta(\mathcal{D})$.*
  Επίσης παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(A_n \cap C)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και αφού η $\delta(\mathcal{D})$ είναι κλάση Dynkin έπεται ότι

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap C \in \delta(\mathcal{D})$$

  και άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \overline{P}$ και η $\overline{P}$ είναι τελικά κλάση Dynkin.

Άσκηση .

Οι κλάσεις $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ με $\emptyset \neq \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{A}$ είναι ανεξάρτητες στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{D}_1$ ισχύει ότι $\mathbb{P}(A_1) = 0$ ή 1.

Λύση 6.

Αρχικά έστω ότι οι οικογένειες $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ είναι ανεξάρτητες και τότε αν πάρουμε $A \in \mathcal{D}_1$ αφού $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ έπεται ότι και $A \in \mathcal{D}_2$.
Επομένως τα ενδεχόμενα A, A είναι ανεξάρτητα και άρα

$$\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$$

$$\implies \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$$

και άρα $\mathbb{P}(A) = 0$ *ή 1.*
Αντίστροφα τώρα αν για κάθε $A \in \mathcal{D}_1$ *ισχύει ότι* $\mathbb{P}(A) = 0$ *ή 1,τότε έστω* B, C *με* $B \in \mathcal{D}_1$ *και* $C \in \mathcal{D}_2$ *και θα αποδείξουμε ότι αυτά είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.*
Τότε αν

- $\mathbb{P}(B) = 0$,*αφού* $B \cap C \subset B$ *απο την μονοτονία του μέτρου* $\mathbb{P}$ *θα έχουμε ότι*

  $$0 \leq \mathbb{P}(B \cap C) \leq \mathbb{P}(B) = 0 \implies \mathbb{P}(B \cap C) = 0 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

  και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- $\mathbb{P}(B) = 1$ *τότε έχουμε ότι αφού* $B \subset B \cup C$ *απο την μονοτονία του μέτρου* $\mathbb{P}$ *έχουμε*

  $$\mathbb{P}(B) = 1 \leq \mathbb{P}(B \cup C) \leq 1 \implies \mathbb{P}(B \cup C) = 1.$$

  Επομένως αφού τώρα $C \cup B = (C \setminus B) \cup B$ *και οι δύο συνιστώσες είναι ξένα σύνολα έπεται απο την προσθετικότητα του μέτρου* $\mathbb{P}$ *ότι*

  $$\mathbb{P}(C \cup B) = 1 = \mathbb{P}(C \setminus B) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C \setminus B) + 1 \implies \mathbb{P}(C \setminus B) = 0.$$

  Τελικά αφού

  $$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \setminus B) + \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C)$$
  $$\implies \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B \cap C)$$

  και άρα πάλι έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση .
Σε μια ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός νομίσματος ,καθεμία με πιθανότητα επιτυχίας $0 < p \neq \frac{1}{2} < 1$,*έστω*
$A_{2n} = \{$*το νόμισμα να φέρει* n *επιτυχίες στις πρώτες* $2n$ *δοκιμές*$\}$,$n = 1, 2, \ldots$.
Αποδείξτε ότι με πιθανότητα 1,μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος απο τα A_{2n} *θα εμφανιστεί.*

Λύση 7.
Αρχικά θεωρούμε το ενδεχόμενο $A =\{$*να εμφανιστεί πεπερασμένο πλήθος απο τα* $A_{2n}\}$ *και τότε παρατηρούμε ότι* $A^c =\{$*να εμφανιστούν άπειρα απο τα* $A_{2n}\}$=$\limsup A_{2n}$.
Εμείς θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbb{P}(A) = 1$ *ή ισοδύναμα ότι*

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\limsup A_{2n}) = 0$$

και άρα απο το 1ο Λήμμα $Borel - Cantelli$ *αρκεί να αποδείξουμε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2n}) < +\infty.$$

Έστω τώρα $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με* X_n *να εκφράζει το αποτέλεσμα της* n*-ρίψης του νομίσματος,και τότε* $X_n \sim Be(p)$*, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και οι* X_n *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*
Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}(A_{2n}) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{2n} X_k = n\right) = f_{Y_{2n}}(n)$$

όπου $Y_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} X_k \sim Bin(2n, p)$.
Τελικά

$$\mathbb{P}(A_{2n}) = f_{Y_{2n}}(n) = \binom{2n}{n}(1-p)^{2n-n}p^n$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2n}) = \lim$$

Άσκηση .

Έστω $\{A_n : n \geq 1\}$ *τυχούσα ακολουθία ενδεχομένων απο τον χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*.Θέτουμε* $A^* = \limsup A_n$ *και* $A_* = \liminf A_n$*. Να αποδείξετε τα εξής:*

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\liminf_k A_n \cap A_k^c) = 0.$
2. $\mathbb{P}(A_n \setminus A^*) \to 0$ *και* $\mathbb{P}(A_* \setminus A_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.
3. *Αν* $A_n \to A$ *τότε* $\mathbb{P}(A \triangle A_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε αρχικά ότι για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*

$$\liminf A_n \cap A_k^c = \emptyset$$

και άρα και

$$\mathbb{P}(\liminf A_n \cap A_k^c) = 0$$

και αυτό μας δίνει το ζητούμενο.

Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \setminus A^* = A_n \cap (A^*)^c = A_n \cap (\liminf_k A_k^c)$$

$$= A_n \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k^c \right)$$

$$\liminf_k A_n \cap A_k^c$$

και άρα απο το 1. έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(A_n \setminus A^*) = \mathbb{P}(\liminf A_n \cap A_k^c) \to 0.$$

Απο την άλλη έχουμε ότι

$$A_* \setminus A_n = (\liminf_k A_k) \cap A_n^c = \liminf A_k \cap A_n^c$$

και παρατηρούμε ότι για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*

$$\liminf A_k \cap A_n^c$$

και άρα

$$\mathbb{P}(A_* \setminus A_n) = \mathbb{P}(\liminf A_k \cap A_n^c) = 0$$

που μας δίνει και το δεύτερο ζητούμενο.

Παρατρηρούμε τώρα ότι αφού $A_n \to A$ *έπεται ότι*

$$A_* = A^* = A$$

και άρα έχουμε ότι αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$A \triangle A_n = (A \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A)$$

έπεται απο την προσθετικότητα του μέτρου $\mathbb{P}$ *ότι*

$$\mathbb{P}(A \triangle A_n) = \mathbb{P}(A \setminus A_n) + \mathbb{P}(A_n \setminus A) = \mathbb{P}(A_* \setminus A_n) + \mathbb{P}(A_n \setminus A^*)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αφήνοντας τώρα $n \to \infty$ *στην παραπάνω σχέση έχουμε απο το 2. ότι τελικά ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \triangle A_n) = 0$$

Θεωρία Πιθανοτήτων
Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

Ιάσονας Ασκούνης

2023

Άσκηση .

Έστω X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ με την εξής ιδιότητα:
Για κάθε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(X \leq r_1, Y \leq r_2) = \mathbb{P}(X \leq r_1)\mathbb{P}(Y \leq r_2).$$

Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
Αν ικανοποιούν την ιδιότητα:
Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(X < x, Y \geq y) = \mathbb{P}(X < x)\mathbb{P}(Y \geq y)$$

τότε είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

Απόδειξη.

Αρκεί απο ***Θεώρημα*** *να αποδείξουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

Έστω επομένως $x, y \in \mathbb{R}$ και τότε απο την πυκνότητα των ρητών έχουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(r_n)_{n=1}^{\infty}, (r'_n)_{n=1}^{\infty}$ απο το $\mathbb{Q}$ με

$$r_n \to x$$

και

$$r'_n \to y.$$

Μάλιστα οι ακολουθίες μπορούν να επιλεχθούν φθίνουσες και τότε έχουμε ότι αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

$$A_n = \{X \leq r_n\}$$

και

$$B_n = \{Y \leq r'_n\}$$

τότε έχουμε ότι οι ακολουθίες $(A_n)_{n=1}^{\infty}, (B_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι φθίνουσες και άρα απο την συνέχεια του μέτρου* $\mathbb{P}$ *έχουμε ότι*

$$\lim_n \mathbb{P}(A_n) = \lim_n \mathbb{P}(X \leq r_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(X \leq x) \tag{1}$$

και

$$\lim_n \mathbb{P}(B_n) = \lim_n \mathbb{P}(Y \leq r'_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mathbb{P}(Y \leq y). \tag{2}$$

Όμως απο υπόθεση έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(X \leq r_n, Y \leq r'_n)\mathbb{P}(X \leq r_n)\mathbb{P}(Y \leq r'_n) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και άρα παίρνοντας όριο και συνδυάζοντας με τις (1),(2) έχουμε ότι*

$$\lim_n \mathbb{P}(X \leq r_n, Y \leq r'_n) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y). \tag{3}$$

Όμως η ακολουθία ενδεχομένων $C_n = \{X \leq r_n\} \cap \{Y \leq r'_n\} = A_n \cap B_n$ *είναι και αυτή φθίνουσα και άρα απο συνέχεια του μέτρου* $\mathbb{P}$

$$\lim_n \mathbb{P}(X \leq r_n, Y \leq r'_n) = \lim_n \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \tag{4}$$

και άρα τελικά απο τις (3) και (4) και την μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

Αφού όμως τα $x, y \in \mathbb{R}$ *ήταν τυχόντα έπεται ότι οι* X, Y *είναι ανεξάρτητες.*
Για το δεύτερο σκέλος τώρα παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τις κλάσεις ενδεχομένων

$$\mathcal{B}_1 = \{\{\omega : X(\omega) \in (-\infty, x)\} : x \in \mathbb{R}\} = X^{-1}(\mathcal{D}_1)$$

και

$$\mathcal{B}_2 = \{\{\omega : Y(\omega) \in [y, +\infty)\} : y \in \mathbb{R}\} = Y^{-1}(\mathcal{D}_2)$$

όπου

$$\mathcal{D}_1 = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

και

$$\mathcal{D}_2 = \{[y, +\infty) : y \in \mathbb{R}\}$$

τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}_1$ *και κάθε* $B \in \mathcal{B}_2$ *η υπόθεση μας δίνει ότι*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

και άρα οι $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *είναι ανεξάρτητες κλάσεις ενδεχομένων.*
Επομένως απο ***Θεώρημα*** *που έχουμε δεί έπεται ότι και οι παραγόμενες κλάσεις Dynkin αυτών θα είναι ανεξάρτητες,δηλαδή οι* $\delta(\mathcal{B}_1), \delta(\mathcal{B}_2)$ *είναι ανεξάρτητες.*
Όμως παρατηρούμε ότι οι $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *είναι και π-συστήματα και άρα απο το* ***Θεώρημα Dynkin*** *έχουμε ότι*

$$\delta(\mathcal{B}_1) = \sigma(\mathcal{B}_1)$$

και

$$\delta(\mathcal{B}_2) = \sigma(\mathcal{B}_2)$$

και άρα οι $\sigma(\mathcal{B}_1), \sigma(\mathcal{B}_2)$ *είναι ανεξάρτητες.*
Απο γνωστό τώρα ***Λήμμα*** *έχουμε όμως ότι*

$$\sigma(\mathcal{B}_1) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{D}_1)) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{D}_1)) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

και

$$\sigma(\mathcal{B}_2) = \sigma(Y^{-1}(\mathcal{D}_2)) = Y^{-1}(\sigma(\mathcal{D}_2)) = Y^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

αφού στο 1ο Κεφάλαιο είδαμε ότι

$$\sigma(\mathcal{D}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{D}_2)$$

έπεται ότι οι $\sigma(X), \sigma(Y)$ *είναι ανεξάρτητες οικογένειες ενδεχομένων και άρα οι* X, Y *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

Άσκηση .
Σχετικά με την απόδειξη του Πορίσματος 3.13,πώς προκύπτει ότι

$$X_n = X_n^+ - X_n^-$$

και

$$|X_n| = X_n^+ + X_n^-.$$

Απόδειξη.
Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού

$$X_n^+ = \max\{X_n, 0\}$$

και

$$X_n^- = \max\{-X_n, 0\}$$

έπεται ότι αν πάρουμε $\omega \in \Omega$ *τότε*

- *Αν* $X_n > 0$ *τότε*
  $$X_n^+(\omega) = X_n(\omega)$$
  και
  $$X_n^-(\omega) = 0$$
  και άρα
  $$X_n^+(\omega) + X_n^-(\omega) = X_n(\omega) = |X_n(\omega)|$$
  $$X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega) = X_n(\omega).$$
- *Αν* $X_n(\omega) < 0$ *τότε*
  $$X_n^+(\omega) = 0$$
  και
  $$X_n^-(\omega) = -X_n(\omega)$$
  και άρα
  $$X_n^+(\omega) + X_n^-(\omega) = -X_n(\omega) = |X_n(\omega)|$$
  $$X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega) = X_n(\omega).$$
- *Αν* $X_n(\omega) = 0$ *τότε*
  $$X_n^+(\omega) = X_n^-(\omega) = 0$$
  και άρα
  $$X_n^+(\omega) + X_n^-(\omega) = 0 = |X_n(\omega)|$$
  $$X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega) = 0 = X_n(\omega)$$

και άρα ισχύει το ζητούμενο.

Άσκηση .

Αποδείξτε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$ *είναι ανεξάρτητη αν και μόνο αν οι κλάσεις* $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ *και* $\sigma(X_n)$ *είναι ανεξάρτητες,για* $n = 2, 3, \ldots.$

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \geq 1\}$ *είναι ανεξάρτητη τότε εξ ορισμού έχουμε ότι οι* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.
Αν πάρουμε τώρα τυχόν $k \geq 2$ *τότε έχουμε ότι απο τα παραπάνω οι* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *είναι ανεξάρτητες και άρα αν θεωρήσουμε τον πίνακα*

$$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \cdots X_{k-1}$$

$$X_k$$

τότε απο ***Θεώρημα*** *έχουμε ότι οι* $\mathcal{A}_1 = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_{k-1})$ *και* $\mathcal{A}_2 = \sigma(X_k)$ *είναι ανεξάρτητες κλάσεις και αφού το* $k \geq 2$ *ήταν τυχόν έχουμε το πρώτο ζητούμενο.*
Αντίστροφα,αν οι $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ *και* $\sigma(X_n)$ *είναι ανεξάρτητες,για* $n = 2, 3, \dots$ *τότε παρατηρούμε για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $(X_n)_{n\geq 1}$ *είναι ανεξάρτητη,πρέπει να αποδείξουμε ότι οι* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.
Έστω επομένως $n \in \mathbb{N}$ *και τότε παρατηρούμε ότι απο την αν πάρουμε* $(B_k)_{k=1}^n$ *με* $B_k \in \mathcal{B}\mathbb{R}$ *τότε*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_{n-1} \in B_{n-1})\mathbb{P}(X_n \in B_n) \tag{5}$$

και εδώ χρησιμοποιήθηκε ότι οι $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ *και* $\sigma(X_n)$ *είναι ανεξάρτητες,απο υπόθεση.*
Επίσης αφού και οι $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_{n-2}\}$ *και* $\sigma(X_{n-1})$ *είναι ανεξάρτητες,έπεται ότι*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_{n-1} \in B_{n-1}) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_{n-2} \in B_{n-2})\mathbb{P}(X_{n-1} \in B_{n-1}) \tag{6}$$

και άρα απο τις έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_{n-2} \in B_{n-2})\mathbb{P}(X_{n-1} \in B_{n-1})\mathbb{P}(X_n \in B_n)$$

και συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο και διαδοχικές εφαρμογές της υπόθεσης,σε πεπερασμένα βήματα θα έχουμε αποδείξει ότι

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n)$$

και άρα οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *αφού αυτό επιλέχθηκε τυχόν.*

Άσκηση .
Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ένας χώρος πιθανότητας,*$X : \Omega \to \mathbb{R}$ *μια τυχαία μεταβλητή και* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση.*
Αποδείξτε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X, f(X)$ *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν υπάρχει* $a \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $\mathbb{P}(f(X) = a) = 1$.

Απόδειξη.
Αρχικά αν υποθέσουμε ότι οι $X, f(X)$ *είναι ανεξάρτητες και τότε παρατηρούμε ότι αφού η* f *είναι Borel,έπεται ότι για κάθε* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ισχύει ότι*

$$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και άρα τελικά

$$\sigma(f(X)) = (f(X))^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) = X^{-1}(f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))) \subset X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X)$$

και αφού οι $\sigma(f(X)), \sigma(X)$ *είναι ανεξάρτητες γιατί οι* $X, f(X)$ *είναι ανεξάρτητες,έπεται τελικά ότι και οι* $\sigma(f(X)), \sigma(f(X))$ *είναι ανεξάρτητες,δηλαδή οι* $f(X), f(X)$ *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*
Επομένως για κάθε $a \in \mathbb{R}$ *αν θέσουμε* $A = \{f(X) = a\} \in \sigma(f(X))$*,τότε*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AA) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) \implies \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ή } 1.$$

Παρατηρούμε όμως αν θεωρήσουμε την συνάρτηση κατανομή της $f(X)$ *τότε έπεται ότι υπάρχει σημείο* $a \in \mathbb{R}$ *ώστε αυτή να εκτοξέυεται απο το* 0 *στο* 1 *στο σημείο* $x_0 = a$*,και άρα δηλαδή*

$$\mathbb{P}(f(X) = a) = 1.$$

Αντίστροφα,αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ *ώστε* $f(X) = a$ *με πιθανότητα 1,τότε παρατηρούμε ότι για* $x, y \in \mathbb{R}$ *έχουμε τις εξής περιπτώσεις:*

- *Αν* $y < a$ *τότε παρατηρούμε ότι* $\{f(X) \leq y\} \subset \{f(X) \neq a\}$ *και αφόυ* $\mathbb{P}(f(X) \neq a) = 0$*,έπεται απο την μονοτονία της* $\mathbb{P}$*,ότι*

  $$\mathbb{P}(f(X) \leq y) = 0.$$

  Επίσης αφού $\{X \leq x, f(X) \leq y\} \subset \{f(X) \leq y\}$*,έπεται απο την μονοτνία του μέτρου* $\mathbb{P}$ *ότι και*

  $$\mathbb{P}(X \leq x, f(X) \leq y) = 0$$

  και άρα τελικά

  $$\mathbb{P}(X \leq x, f(X) \leq y) = 0 = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(f(X) \leq y).$$

- *Αν* $y \geq a$*,τότε παρατηρούμε ότι* $\{f(X) = a\} \subset \{f(X) \leq y\}$ *και άρα απο την μονοτονία του μέτρου* $\mathbb{P}$ *έχουμε ότι*

  $$\mathbb{P}(f(X) \leq y) \geq \mathbb{P}(f(X) = a) = 1 \implies \mathbb{P}(f(X) \leq y) = 1$$

  Απο την άλλη,παρατηρούμε ότι

  $$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x, f(X) \leq y) + \mathbb{P}(X \leq x, f(X) > y)$$

  και αφού $\{X \leq x, f(X) > y\} \subset \{f(X) > y\} \subset \{f(X) \neq a\}$*,έπεται απο την μονοτονία της* $\mathbb{P}$*,ότι*

  $$\mathbb{P}(X \leq x, f(X) > y) = 0$$

  αφού $\mathbb{P}(f(X) \neq a) = 0$.
  Τελικά,

  $$\mathbb{P}(X \leq x, f(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(f(X) \leq y).$$

Τελικά,για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι*

$$\mathbb{P}(X \leq x, f(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(f(X) \leq y)$$

και απο Θεώρημα,έχουμε ότι οι $X, f(X)$ *είναι ανεξάρτητες.*

Άσκηση .

1. *Αποδείξτε ότι η* X *είναι μετρήσιμη ως προς μια σ-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *αν και μόνο αν* $\sigma(X) \subset \mathcal{A}$.

2. *Αποδείξτε ότι* X *είναι* $\{\Omega, \emptyset\}$*-μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι σταθερή.*

3. *Εάν η* X *είναι* $\mathcal{A}$*-μετρήσιμη και* $\mathbb{P}(A) = 0$ *ή* 1 *για κάθε* $A \in \mathcal{A}$*,τότε υπάρχει* $a \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

4. *Για μια ακολουθία* $(X_n)_{n \geq 1}$ *ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών του χώρου πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *να αποδείξετε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ συγκλίνει}\right\}\right) = 0 \text{ ή } 1.$$

5. *Για τις συναρτήσεις Rademacher* $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ *να αποδείξετε ότι*

$$\lambda\left(\left\{\omega \in (0,1) : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k(\omega) \to 0\right\}\right) = 0 \text{ ή } 1.$$

Απόδειξη.

1. *Αρχικά αν η* X *είναι μετρήσιμη ως προς μια σ-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *τότε αφού η* $\sigma(X)$ *είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που κάνει την* X *μετρήσιμη,έπεται ότι*

$$\sigma(X) \subset \mathcal{A}$$

και έχουμε την μια συνεπαγωγή.
Αντίστροφα,έστω ότι $\sigma(X) \subset \mathcal{A}$ *όπου* $\mathcal{A}$ *είναι μια σ-άλγεβρα.*
Τότε παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *έχουμε ότι*

$$X^{-1}(B) \in X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X) \subset \mathcal{A} \implies X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

και άρα αφού το $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ήταν τυχόν,έπεται εξ ορισμού ότι η* X *είναι* $\mathcal{A}$*-μετρήσιμη και έτσι έχουμε και την αντίστροφη συνεπαγωγή.*

2. *Αρχικά υποθέτουμε ότι η X είναι $\{\Omega, \emptyset\}$-μετρήσιμη τότε αν πάρουμε $a \in Q(\Omega)$ τότε έχουμε ότι υπάρχει $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε*

$$X(\omega) = a$$

και άρα $X^{-1}(\{a\} \neq \emptyset$.
Απο την άλλη $X^{-1}(\{a\}) \in X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(X)$ αφού το $\{a\}$ είναι κλειστό και άρα και $Borel$.
Απο το 1. όμως έχουμε ότι

$$\sigma(X) \subset \{\Omega, \emptyset\} \implies X^{-1}(\{a\}) \in \{\Omega, \emptyset\}$$

και άρα $X^{-1}(\{a\}) = \Omega$.
Τότε όμως για κάθε $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = a$$

και άρα η X είναι σταθερή.
Αντίστροφα,αν υποθέσουμε ότι η X είναι σταθερή συνάρτηση και άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$X(\omega) = c$$

για κάθε $\omega \in \Omega$ τότε αν πάρουμε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε ότι

- *Αν $c \notin B$*

$$X^{-1}(B) = \emptyset \in \{\Omega, \emptyset\}.$$

- *Αν $c \in B$*

$$X^{-1}(B) = \Omega \in \{\Omega, \emptyset\}$$

και άρα η X είναι $\{\Omega, \emptyset\}$-μετρήσιμη και έτσι έχουμε και την αντίστροφη κατεύθυνση.

3. *Παρατηρούμε αρχικά ότι αν θεωρήσουμε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το ενδεχόμενο*

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} = X^{-1}(\{a\})$$

τότε αφού κάθε $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ γιατί είναι μονοσύνολο και άρα κλειστό,έχουμε ότι

$$[X = a] \in X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X).$$

Αφού όμως η X είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη έπεται απο το ερώτημα 1. ότι

$$\sigma(X) \subset \mathcal{A}$$

και άρα για κάθε $a \in \mathbb{R}$ απο τα παραπάνω έχουμε ότι

$$[X = a] \in \mathcal{A} \implies \mathbb{P}(X = a) = 0 \text{ ή } 1$$

απο υπόθεση.

Παρατηρούμε όμως ότι αυτό σημαίνει ότι η αν θεωρήσουμε την συνάρτηση κατανομή της X *τότε έχουμε ότι υπάρχει* $a \in \mathbb{R}$ *ώστε αυτή να εξτοξέυεται απο το* 0 *στο* 1 *στο σημείο* $x_0 = a$ *και άρα* $X = a$ *με πιθανότητα 1.*

4. *Παρατηρούμε αρχικά ότι αν θεωρήσουμε το ενδεχόμενο*

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ συγκλίνει} \right\}$$

τότε γνωρίζουμε απο το Κριτήριο Cauchy για σειρές ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{n=k}^{\infty} X_n(\omega) \text{ συγκλίνει} \right\} = A_k$$

όπου

$$A_k \in \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$$

και άρα τελικά

$$A \in \mathcal{T}(X_k : k \geq 1).$$

Αφού τώρα η $(X_n)_{n\geq 1}$ *είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών,απο το* ***Θεώρημα Kolmogorov*** *για τυχαίες μεταβλητές έχουμε ότι*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ ή } 1.$$

5. *Απο προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων Rademacher είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών στον* $((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$ *και άρα αν θεωρήσουμε το σύνολο*

$$B = \left\{ \omega \in (0,1) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R_k(\omega) \to 0 \right\}$$

τότε αφού το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων εξαρτάται απο το τι κάνουν τελικά οι συναρτήσεις έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$B \in \sigma(R_n, R_{n+1}, \dots)$$

και άρα

$$B \in \mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(R_n, R_{n+1}, \dots).$$

Επομένως απο το ***Θεώρημα Kolmogorov*** *για τυχαίες μεταβλητές έχουμε ότι*

$$\mathbb{P}(B) = 0 \text{ ή } 1.$$

Άσκηση . *Να αποδείξετε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Borel.*

Απόδειξη.
Αρχικά παρατηρούμε ότι αν I είναι ένα διάστημα της μορφής $I = [-\infty, b], b \in \mathbb{R}$ τότε παρατηρούμε ότι το $f^{-1}(I)$ είναι επίσης διάστημα,γιατί παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $s < t \in f^{-1}(I)$ και $r \in (s,t)$ τότε αφού η f είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε ότι

$$-\infty \leq f(s) \leq f(r) \leq f(t) \leq b$$

και άρα $f(s) \in [-\infty, b] = I$.
Επομένως,$s \in f^{-1}(I)$ και άρα το $f^{-1}(I)$ είναι διάστημα στο $\mathbb{R}$ και άρα Borel.
Τελικά η f είναι Borel.

Θεωρία Πιθανοτήτων
Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

Ιάσονας Ασκούνης

2023

Άσκηση .

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση.Αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{R} : f$ είναι ασυνεχής στο $x \in \mathbb{R}\}$ είναι (το πολύ) αριθμήσιμο.

Λύση 1.

Έστω $f(x_-), f(x_+)$ τα αριστερά και δεξιά όριο της f στο $x \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα.Τότε για κάθε $x \in B$ έχουμε ότι ρητός $g(x) \in \mathbb{Q}$,τέτοιος ώστε $f(x_-) < g(x) < f(x_+)$(απο πυκνότητα ρητών και το γεγονός ότι αφού η f είναι σημείο ασυνέχειας της f,έχουμε ότι $f(x_-) \leq f(x_+)$).Τώρα παρατηρούμε ότι για $x_1 < x_2$,αφού η f είναι αύξουσα έχουμε ότι $f(x_1^+) < f(x_2^-)$ και άρα $g(x_1) \neq g(x_2)$.Άρα για $x_1 \neq x_2$ έχουμε ότι $g(x_1) \neq g(x_2)$ και έτσι ορίσαμε $g : B \to \mathbb{Q}$ η οποία είναι 1-1.Αφού όμως το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και η g είναι 1-1,έπεται ότι το B είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Άσκηση .

Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipshitz συνεχής συνάρτηση.Αποδείξτε ότι αυτή είναι απόλυτα συνεχής.

Λύση 2.

Αφού η g είναι Lipschitz έπεται ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Έστω $\epsilon > 0$ και τότε παρατηρούμε για $\delta = \frac{\epsilon}{M} > 0$ έχουμε ότι αν πάρουμε πεπερασμένα το πλήθος ξένα ανα δύο ανοιχτά διαστήματα $(a_k, b_k)_{k=1}^n$ με $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$,τότε λόγω της συνθήκης Lipschitz,έχουμε ότι

$$|g(b_k) - g(a_k)| \leq M|b_k - a_k| = M(b_k - a_k), \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Τελικά αθρίζοντας στην παραπάνω σχέση,έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^n |g(b_k) - g(a_k)| \leq M \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν,έπεται ότι η g είναι απόλυτα συνεχής.

Άσκηση .
Αποδείξτε ότι αν τα διανύσματα $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ και $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ είναι ισόνομα τυχαία διανύσματα.τότε και οι X_j, Y_j είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$.

Λύση 3.
Αρχικά παρατηρούμε ότι αν ορίσουμε τις προβολές

$$\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ \pi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$,τότε αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις και άρα Borel.Παρατηρούμε όμως ότι αφού τα τυχαία διανύσματα $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι ισόνομα,έπεται απο Θεώρημα ότι για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ και οι $\pi_j(X), \pi_j(Y)$ είναι ισόνομες.Αφού όμως για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ ισχύει ότι

$$\pi_j(X) = X_j \ \ \text{και} \ \ \pi_j(Y) = Y_j$$

έπεται ότι για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ οι X_j, Y_j είναι ισόνομες τυχαίες μεταβήτές.

Άσκηση .
Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση κατανομής είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση 4.
Γνωρίζουμε απο τον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί,τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Τώρα μια ακόμα και ασυνεχής συνάρτηση κατανομής γνωρίζουμε ότι ικανοποίει

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

και άρα στην περίπτωση συνεχούς συνάρτησης κατανομής ικανοποιούνται οι υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος που διατυπώσαμε.

Άσκηση .
Μια συνάρτηση κατανομής F(ή μια τυχαία μεταβλητή X) λέγεται συμμετρική(γύρω απο το 0),όταν οι X και η $-X$ έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής.Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. *Η X είναι συμμετρική.*
2. *Οι X^+, X^- είναι ισόνομες.*
3. *$F_X(x) + F_X(-x_-) = 1$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Λύση 5.

1. $1. \to 3.$:*Παρατηρούμε ότι*

   $$F_X(x)+F_X(-x_-) = \mathbb{P}(X \le x)+\mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X \le x)+\mathbb{P}(-X < -x) = \mathbb{P}(X \le x)+\mathbb{P}(X > x)$$
   $$= \mathbb{P}(\Omega)$$
   $$= 1$$

   όπου στην 2η ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι έχουμε υποθέσει ότι οι $X, -X$ *είναι ισόνομες και άρα* $\mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(-X < -x)$.

2. $3. \to 1.$:*Παρατηρούμε ότι*

   $$F_{-X}(x) = \mathbb{P}(-X \le x) = \mathbb{P}(X \ge -x) = 1 - \mathbb{P}(X < -x) = 1 - F_X(-x_-) = F_X(x)$$

   για κάθε $x \in \mathbb{R}$,*όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση 3.*

3. $1. \to 2.$:*Παρατηρούμε ότι για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι*

   - *Αν* $x < 0$ *τότε αφού* $X^+, X^- \ge 0$ *έπεται ότι*

     $$\{X^+ \le x\} = \{X^- \le x\} = \emptyset.$$

     και άρα και $F_{X^+}(x) = F_{X^-}(x) = 0$ *για* $x < 0$.

   - *Αν* $x > 0$ *τότε παρατηρούμε ότι*

     $$F_{X^+}(x) = \mathbb{P}(X^+ \le x) = \mathbb{P}(\max\{X, 0\} \le x\} = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(-X \le x) = \mathbb{P}(\max\{-X, 0\} \le x)$$
     $$= \mathbb{P}(X^- \le x)$$
     $$= F_{X^-}(x).$$

   Τελικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι* $F_{X^+}(x) = F_{X^-}(x)$ *και άρα οι* X^+, X^- *είναι ισόνομες.*

4. $2. \to 3.$:*Παρατηρούμε ότι για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι*

   - *Αν* $x > 0$ *τότε*

     $$F_X(x)+F_X(-x_-) = \mathbb{P}(X \le x)+\mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(\max\{X, 0\} \le x)+\mathbb{P}(-X > x)$$
     $$= \mathbb{P}(X^+ \le x) + \mathbb{P}(\max\{-X, 0\} > x)$$
     $$= \mathbb{P}(X^+ \le x) + \mathbb{P}(X^- > x)$$
     $$= \mathbb{P}(X^+ \le x) + \mathbb{P}(X^+ > x)$$
     $$= 1.$$

- *Αν* $x < 0$ *τότε*

$$F_X(x) + F_X(-x_-) = \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(-X \geq -x) + \mathbb{P}(X < -x)$$

$$= \mathbb{P}(\max\{-X, 0\} \geq -x) + \mathbb{P}(X < -x)$$

$$= \mathbb{P}(X^- \geq -x) + \mathbb{P}(X < -x)$$

$$= \mathbb{P}(X^- \geq -x) + \mathbb{P}(X^+ < -x)$$

$$= 1$$

Θεωρία Πιθανοτήτων
Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

Ιάσονας Ασκούνης

2023

Άσκηση .

Έστω $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ αύξουσα και $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(a)}$$

Λύση 1.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ και η $X : \Omega \to [0, +\infty)$ είναι τυχαία μεταβλητή έπεται ότι ορίζεται η σύνθεση

$$g \circ |X| = g(|X|) : \Omega \to [0, \infty)$$

και είναι μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή(έχουμε δεί ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση είναι Borel μετρήσιμη σε Άσκηση του Κεφαλαίου 3 και άρα απο πρόταση του μαθήματος η $g(|X|)$ είναι όντως τυχαία μεταβλητή).

Έστω $a > 0$.Τώρα αφού g είναι και αύξουσα συνάρτηση έχουμε ότι αν πάρουμε $\omega \in \Omega$ με $|X(\omega)| \geq a$ τότε

$$g(|X|(\omega)) \geq g(a)$$

και άρα απο μονοτονία του μέτρου πιθανότητας $\mathbb{P}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \mathbb{P}(g(|X|) \geq g(a)) \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(a)}$$

,όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Chebyshev για την τυχαία μεταβλητή $g(|X|)$ για το γεγονός ότι $g(a) > 0$ απο υπόθεση.

Άσκηση .

Αν $X_n \geq 0$ και $X_n \to X$ και ισχύει ότι $\mathbb{E}[X_n] \leq c < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,να αποδείέξετ ότι η $\mathbb{E}[X]$ υπάρχει και $\mathbb{E}[X] \leq c$.

Λύση 2.
Αρχικά αφού $X_n \geq 0$ και $X_n \to X$ έχουμε ότι και $X \geq 0$ και άρα εφαρμόζεται το Λήμμα του Fatou για την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (X_n) και έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[X] == \mathbb{E}[\lim_n X_n] = \mathbb{E}[\liminf X_n] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n] \leq c < \infty$$

λόγω της ανισότητας της υπόθεσης και άρα η μέση τιμή της X υπάρχει και φράσσεται απο την σταθερά c.

Άσκηση .
Δώστε παράδειγμα αριθμών $a_{ij} \in \mathbb{R}$ όπου $\sum_i a_{ij} = bj \in \mathbb{R}$ όπου $\sum_j b_j \in \mathbb{R}$ και $\sum_j a_{ij} = c_i \in \mathbb{R}$ όπου $\sum_i c_i \in \mathbb{R}$ και

$$\sum_i \sum_j a_{ij} \neq \sum_j \sum_i a_{ij}.$$

Αποδείξτε ότι αυτό δεν μπορεί να ισχύει όταν $\sum_{i,j} |a_{ij}| < \infty$.

Λύση 3.
Αρχικά θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

και τότε παρατηρούμε ότι κάθε $a_{ij} \in \mathbb{R}$ και έχουμε ότι ια κάθε $j \geq 2$ ισχύει ότι

$$\sum_i a_{ij} = 0 = b_j \text{ και } \sum_i a_{i1} = 1 = b_1$$

και άρα $b_j \in \mathbb{R}$ για κάθε j και $\sum_j b_j = b_1 = 1 \in \mathbb{R}$.
Επίσης για κάθε i έχουμε ότι

$$\sum_j a_{ij} = 0 = c_i$$

και άρα $c_i \in \mathbb{R}$ για κάθε i και $\sum_i c_i = 0$.
Τελικά

$$\sum_i c_i = 0 \neq 1 = \sum_j b_j \implies \sum_i \sum_j a_{ij} \neq \sum_j \sum_i a_{ij}$$

και έχουμε το ζητούμενο.
Αν τώρα για τους a_{ij} ισχύει ότι $\sum_{i,j} |a_{i,j}| < \infty$ τότε αν θεωρήσουμε τον χώρο μέτρου $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ όπου μ είναι το μέτρο απαρίθμησης τότε έχουμε ότι το ολοκήρωμα Lebesgue

μιας $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$(δηλαδή μιας ακολουθίας)είναι το άθροισμα της πάνω στους φυσικούς αριθμούς και απο Θεώρημα Fubini-Tonelli έχουμε ότι η αλλαγή ολοκλήρωσης(δηλαδή άθροισης στην περιπτωσή μας)είναι επιτρεπτή για μια $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ όπου

$$\sum_{i,j} |a_{ij}| < \infty.$$

Άσκηση .

Αποδείξτε ότι αν οι $\{X_n : n \geq 1\}$ και $\{Y_n : n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες τότε και η $\{X_n + Y_n : n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη

Λύση 4.

Παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $a > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$|X_n + Y_n| I(|X_n + Y_n| \geq a) \leq 2|X_n| I\left(|X_n| \geq \frac{a}{2}\right) + 2|Y_n| I\left(|Y_n| \geq \frac{a}{2}\right)$$

γιατί τότε απο την μονοτονία και την γραμμικότητα της μέσης τιμής θα έχουμε ότι

$$\mathbb{E}|X_n + Y_n| I(|X_n + Y_n| \geq a) \leq 2\mathbb{E}|X_n| I\left(|X_n \geq \frac{a}{2}\right) + 2\mathbb{E}|Y_n| I\left(|Y_n| \geq \frac{a}{2}\right)$$

και τότε παίρνοντας $\sup$ ως πρός $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι για κάθε $a > 0$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n + Y_n| I(|X_n + Y_n| \geq a) \leq 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| I\left(|X_n \geq \frac{a}{2}\right) + 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|Y_n| I\left(|Y_n| \geq \frac{a}{2}\right).$$

Τελικά παίρνοντας όριο $a \to +\infty$,τότε αφού τα δύο όρια του δεξί μέλους ισούται με 0 γιατί οι $(X_n), (Y_n)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες,έπεται ότι

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n + Y_n| I(|X_n + Y_n| \geq a) = 0$$

δηλαδή θα έχουμε ότι η $(X_n + Y_n)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.
Έστω επομένως $a > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ και τότε παρατηρούμε ότι

$$[|X_n + Y_n| \geq a] \subset \left[|X_n| \geq \frac{a}{2}\right] \cup \left[|Y_n| \geq \frac{a}{2}\right]$$

και άρα τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- *Αν αρχικά $\omega \notin [|X_n + Y_n| \geq a]$,τότε το αριστερό μέλος ισούται με μηδέν και ισχύει η ανισότητα κατα τετριμμένο τρόπο αφού οι συναρτήσεις του δεξιού μέλους είναι μη αρνητικές.*

- *Αν $\omega \in [|X_n + Y_n| \geq a]$,τότε το αριστερό μέλος ισούται με $|X_n(\omega + Y_n(\omega)|$ και παρατηρούμε ότι*

- $Aν\ \omega \in \left[|X_n| \geq \frac{a}{2}\right]$ *και* $\omega \notin \left[|Y_n| \geq \frac{a}{2}\right]$, *τότε παρατηρούμε ότι* $|Y_n| < \frac{a}{2} \leq |X_n|$ *και άρα*

  $$\text{αριστερό μέλος} = |X_n(\omega)+Y_n(\omega)| \leq |X_n(\omega)|+|Y_n(\omega)| < 2|X_n(\omega)| = \text{αριστερό μέλος}$$

  και άρα ισχύει η ζητούμενη ανισότητα.

- $Aν\ \omega \in \left[|Y_n| \geq \frac{a}{2}\right]$ *και* $\omega \notin \left[|X_n| \geq \frac{a}{2}\right]$, *τότε παρατηρούμε ότι* $|X_n| < \frac{a}{2} \leq |Y_n|$ *και άρα*

  $$\text{αριστερό μέλος} = |X_n(\omega)+Y_n(\omega)| \leq |X_n(\omega)|+|Y_n(\omega)| < 2|Y_n(\omega)| = \text{αριστερό μέλος}$$

  και άρα ισχύει η ζητούμενη ανισότητα.

- $Aν\ \omega \in \left[|Y_n| \geq \frac{a}{2}\right]$ *και* $\omega \in \left[|X_n| \geq \frac{a}{2}\right]$, *τότε παρατηρούμε ότι*

  $$\text{αριστερό μέλος} = |X_n(\omega) + Y_n(\omega)| \leq |X_n(\omega)| + |Y_n(\omega)| = \text{αριστερό μέλος}$$

  και άρα ισχύει και πάλι η ζητούμενη ανισότητα.

Θεωρία Πιθανοτήτων
Ασκήσεις Κεφαλαίου 7

Ιάσονας Ασκούνης

2023

Άσκηση .

Βρείτε παραδείγματα ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \geq 1\}$ *και τυχαία μεταβλητή* X *σε κάποιον χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$*,με τις εξής ιδιότητες:*

- *Για δοθέν* $p \geq 1$
$$X_n \xrightarrow{p} X \text{ και } X_n \overset{L^p}{\nrightarrow} X.$$

- *Για δοθέντα* r, p *με* $1 \leq r < p$,
$$X_n \xrightarrow{L^r} X \text{ και } X_n \overset{L^p}{\nrightarrow} X.$$

- $$X_n \xrightarrow{d} X \text{ και } X_n \overset{p}{\nrightarrow} X.$$

Λύση 1.

- *Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με*
$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$
τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ *έχουμε ότι*
$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \to 0$$
και άρα $X_n \xrightarrow{p} 0$ *αλλά*
$$\mathbb{E}|X_n|^p = n^p \frac{1}{n} = n^{p-1} \nrightarrow 0$$
και άρα $X_n \overset{L^p}{\nrightarrow} 0$.

- *Θεωρούμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών*
$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^p} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^p}$$
τότε παρατηρούμε ότι
$$\mathbb{E}|X_n|^r = \frac{n^r}{n^p} = \frac{1}{n^{p-r}} \to 0$$
αφού $p > r$ *και άρα* $X_n \xrightarrow{L^r} 0$ *αλλά*
$$\mathbb{E}|X_n|^p = \frac{n^p}{n^p} = 1 \to 1 \neq 0$$
και άρα $X_n \overset{L^p}{\nrightarrow} 0$.

- *Θεωρούμε* $X \sim N(0,1)$ *και θέτουμε* $X_n = -X$,*για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και τότε αφού η* $N(0,1)$ *είναι συμμετρική κατανομή,έπεται ότι* $X_n = -X \sim N(0,1)$,*για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και άρα* $X_n \overset{d}{=} X$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.*Επομένως προφανώς ισχύει και ότι* $X_n \xrightarrow{d} X$.
Απο την άλλη,για κάθε $\epsilon > 0$ *έχουμε ότι*
$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(2|X| \geq \epsilon) = \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{\epsilon}{2}\right)$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και άρα*
$$\lim_n \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) > 0$$
Τελικά $X_n \overset{p}{\nrightarrow} X$.

Άσκηση . *(Θεώρημα Pólya)*
Αν $F_n \xrightarrow{d} F$ *και η* F *είναι συνεχής συνάρτηση κατανομής,να αποδείξετε ότι*
$$\lim_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0.$$
Βρείτε παράδειγμα συναρτήσεων κατανομής F_n *και* F *ώστε* $F_n \xrightarrow{d} F$ *αλλά* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \nrightarrow 0$.

Λύση 2.
Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $k \in \mathbb{N}$ *τότε έχουμε ότι αφού η* F *είναι συνεχής υπάρχει διαμέριση* $k+1$*-σημείων με* $-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} = +\infty$ *του* $\mathbb{R}$ *ώστε να ισχύει ότι* $F(x_i) = \frac{i}{k}$,*για κάθε* $i \in \{0, \ldots, k\}$.*Τότε όμως παρατηρούμε ότι κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *θα βρίσκεται μέσα σε κάποιο διάστημα της μορφής* $(x_{i-1}, x_i]$ *και άρα αν* $x \in (x_{i-1}, x_i]$,*έχουμε ότι*
$$F_n(x) - F(x) \leq F_n(x_i) - F(x_{i-1}) = F_n(x_i) - F(x_i) + \frac{1}{k} \leq \max_{i \in \{0,1,\ldots,k\}} |F_n(x_i) - F(x_i)| + \frac{1}{k}$$

αφού $F(x_i) - F(x_{i-1}) = \frac{1}{k}$*,για κάθε* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *και απο την άλλη*

$$F_n(x) - F(x) \geq F_n(x_{i-1}) - F(x_i) = F_n(x_{i-1}) - F(x_{i-1}) - \frac{1}{k}$$

και άρα τελικά

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \max_{i \in \{0, \ldots, k\}} |F_n(x_i) - F(x_i)| + \frac{1}{k}.$$

Αφού όμως το $x \in \mathbb{R}$ *ήταν τυχόν έπεται ότι*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq \max_{i \in \{0,1,\ldots,k\}} |F_n(x_i) - F(x_i)| + \frac{1}{k}.$$

Τώρα αφού $F_n \xrightarrow{d} F$ *και η* F *είναι συνεχής σε καθένα απο τα σημεία της διαμέρισης(αφού είναι συνεχής παντού),έπεται ότι*

$$F_n(x_i) \to F(x_i), \text{ για κάθε } i \in \{0, 1, \cdots, k\}$$

απ όπου και έπεται ότι και

$$\max_{i \in \{0,1 \cdots, k\}} |F_n(x_i) - F(x_i)| \to 0.$$

Απο αυτό τώρα έπεται ότι

$$\limsup_{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Το $k \geq 1$ *όμως ήταν τυχόν και άρα παίρνοντας όριο* $k \to \infty$ *στην παραπάνω σχέση,έπεται ότι*

$$\limsup_{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής $F_n(x) = x^n 1_{(0,1)} + 1_{[1,+\infty)}(x) + 1_{(-\infty,0]}(x)$*(ελέγχεται εύκολα ότι ικανοποιούν τις ιδιότητες μιας συνάρτησης κατανομής) και θεωρήσουμε και την συνάρτηση κατανομής της εκφυλισμένης τυχαίας μεταβλητής* $X = 1$*,δηλαδή*

$$F(x) = \begin{cases} 1, x \geq 1 \\ 0, x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

τότε παρατηρούμε ότι

- *Αν* $x \geq 1$ *τότε*
$$F_n(x) = 1 \to 1 = F(x)$$
- *Αν* $0 < x < 1$ *τότε*
$$F_n(x) = x^n \to 0 = F(x)$$

- $A\nu$ $x \leq 0$ τότε

$$F_n(x) = 0 \to 0 = F(x).$$

Με άλλα λόγια $F_n \to F$ αλλά απο την άλλη παρατηρούμε ότι

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = \sup_{x\in(0,1)} x^n = 1 \implies \lim_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \neq 0.$$

Άσκηση .
Αν Ω είναι αριθμήσιμος τότε $X_n \xrightarrow{as} X$ αν και μόνο αν $X_n \xrightarrow{p} X$.

Λύση 3.
Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$X_n \xrightarrow{as} X \implies X_n \xrightarrow{p} X$$

ανεξαρτήτως αν βρισκόμαστε σε αριθμήσιμο χώρο,λόγω Πρότασης που έχουμε δεί στο μάθημα.
Για το αντίστροφο, έστψ ότι $X_n \xrightarrow{p} X$ και τότε παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $A = \{\lim_n X_n = X\}$ τότε παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε προς άτοπον ότι $\mathbb{P}(A) < 1$,τότε $\mathbb{P}(A^c) > 0$ και αφού το A^c είναι αριθμήσιμο σύνολο ως υποσύνολο του Ω που είναι αριθμήσιμος,έπεται ότι

$$\mathbb{P}(A^c) = \sum_{\omega\in A^c} \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \implies \exists\ \omega \in A^c : \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0.$$

Τώρα αφού $\omega \in A^c$ έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία (X_{n_k}) της (X_n) και $\epsilon > 0$ ώστε

$$|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Άρα απο αυτό έπεται ότι

$$\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq \epsilon) \geq \mathbb{P}(\{\omega\}), \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$\lim_k \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq \epsilon) \geq \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο,γιατί αφού $X_n \xrightarrow{p} X$ και η (X_{n_k}) είναι υπακολουθία της έπεται ότι και $X_{n_k} \xrightarrow{p} X$.Τελικά $\mathbb{P}(A) = 1$ και άρα $X_n \xrightarrow{as} X$.

Άσκηση .
Αποδείξτε ότι αν $X_n \xrightarrow{p} X$ και $X_n \xrightarrow{p} Y$,τότε $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Λύση 4.

Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$[X \neq Y] = [|X-Y|>0] = \bigcup_{k=1}^{n} \left[|X-Y| \geq \frac{1}{k}\right].$$

Εμείς θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X-Y| \geq \epsilon) = 0$$

και άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *θα έχουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(|X-Y| \geq \frac{1}{k}\right) = 0 \implies \mathbb{P}(X \neq Y) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X-Y| \geq \frac{1}{k}\right) = 0 \implies \mathbb{P}(X \neq Y) = 0$$

δηλαδή $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.
Έστω $\epsilon > 0$ *και τότε παρατηρούε ότι*

$$[|X-Y| \geq \epsilon] = [|X - X_n + X_n - Y| \geq \epsilon] \subset \left[|X - X_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right] \cup \left[|X_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}\right]$$

και άρα

$$\mathbb{P}(|X-Y| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X - X_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}\right)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*Τώρα αφού* $X_n \xrightarrow{p} X$ *και* $X_n \xrightarrow{p} Y$ *έπεται ότι*

$$\lim_n \mathbb{P}\left(|X - X_n| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) = \lim_n \mathbb{P}\left(|X_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) = 0$$

και παίρνοντας όριο στην παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$\mathbb{P}(|X-Y| \geq \epsilon) \leq 0 \implies \mathbb{P}(|X-Y| \geq \epsilon) = 0$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση .

Για τυχούσα συνάρτηση κατανομής F *θέτουμε* $F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\}$,$0 < t < 1$.*Να αποδείξετε ότι* $F_n \xrightarrow{d} F$ *αν και μόνο αν* $F_n^{-1}(t) \to F^{-1}(t)$.

Λύση 5.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές Y_n, Y *του θεωρήματος Skorohod για τις οποίες έχουμε ότι όλες αυτές είναι τυχαίες μεταβλητές στον* $((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$ *και ισχύει ότι* $Y_n(t) = F_n^{-1}(t)$ *και* $Y = F^{-1}(t)$ *για κάθε* $t \in (0,1)$,*τότε αν* $F_n \to F$,*τότε το Θεώρημα Skorohod,μας εξασφαλίζει ότι* $Y_n(t) = F_n^{-1}(t) \to F^{-1}(t) = Y(t)$ *για κάθε* $t \in (0,1)$.
Αντίστροφα,αν $F_n^{-1}(t) \to F^{-1}(t)$ *σχεδόν γαι κάθε* $t \in (0,1)$,*δηλαδή* $Y_n \xrightarrow{as} Y$,*έπεται*

απο Πρόταση ότι $Y_n \xrightarrow{d} Y$*.Γνωρίζουμε όμως απο Λήμμα 7.13 ότι κάθε* Y_n *έχει συνάρτηση κατανομής την* F_n *και η* Y *έχει συνάρτηση κατανομής την* F *και άρα αφού* $Y_n \xrightarrow{d} Y$*,έπεται ότι*

$$F_{Y_n}(x) = F_n(x) \to F(x) = F_Y(x)$$

για κάθε x *είναι σημείο συνέχειας της* $F_Y = F$*,και άρα δηλαδή* $F_n \xrightarrow{d} F$.

Άσκηση .

Μια τυχαία μεταβλητή λέγεται συμμετρική αν οι $X, -X$ *έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής.Δείξτε ότι μια τυχαία μεταβλητή είναι συμμετρική αν και μόνο αν οι* X^+, X^- *έχουν την ίδια κατανομή.*

Λύση 6.

Έχει αποδειχθεί στις Ασκήσεις του Κεφαλαίου 4.

Άσκηση .

Αποδείξτε ότι η $W(\omega) = \sup\{x : F(x) \leq \omega\}, 0 < \omega < 1$*,όπου* F *τυχούσα συνάρτηση κατανομής,μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο Λήμμα 7.13 αντί της* $Y(\omega)$*.Τι διαφορά έχει με την* Y*;*

Λύση 7.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν σταθεροποιήσουμε $\omega \in (0,1)$ *τότε έχουμε ότι το* $I_\omega = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \omega\}$ *είναι μη κενό γιατί αφού η* F *είναι συνάρτηση κατανομής και άρα* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$*,έπεται ότι υπάρχει* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ώστε* $F(x_0) \leq \omega$ *και άρα* $x_0 \in I_\omega$*.Απο την άλλη παρατηρούμε ότι το* I_ω *είναι ημιευθεία,γιατί αν πάρουμε* $x \in I_\omega$ *και* $y < x$ *τότε αφού η* F *είναι και αύξουσα έπεται ότι* $F(y) \leq F(x) \leq \omega$*,δηλαδή* $y \in I_\omega$*.Τελικά έχουμε ότι υπάρχει* $b = b(\omega) \in \mathbb{R}$ *ώστε* $I_\omega = (-\infty, b]$ *ή* $I_\omega = (-\infty, b)$*.Παρατηρούμε όμως ότι αν* $I_\omega = (-\infty, b)$ *τότε παρατηρούμε ότι αφού* $b \notin I_\omega$*,έπεται ότι* $F(b) > \omega$*.Απο την άλλη αν θεωρήσουμε την ακολουθία* $b_n = b + \frac{1}{n}$ *τότε παρατηρούμε ότι η* (b_n) *φθίνει στο* b *και αφού η* F *είναι δεξια συνεχής στο* b *ως συνάρτηση κατανομής,έπεται ότι* $\lim_n F(b_n) = \lim_n F\left(b + \frac{1}{n}\right) = F(b) > \omega$*.Απο την άλλη όμως* $b_n \in I_\omega^c$ *και άρα* $F(b_n) > \omega$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και άρα τελικά και* $\lim_n F(b_n) \geq \omega$.
Επομένως,

$$\omega \leq \lim_n F(b_n) < \omega$$

και αυτό μας δίνει το άτοπο.
Τελικά,έχουμε ότι $I_\omega = (-\infty, b]$ *και άρα για κάθε* $\omega \in (0,1)$ *έχουμε ότι* $W(\omega) = b(\omega) = \sup I_\omega$*,όπου* $I_\omega = b(\omega) = b$*.Τώρα παρατηρούμε ότι λόγω των παραπάνω σχεσεων έχουμε ότι για κάθε* $\omega \in (0,1)$ *και* $x \in \mathbb{R}$

$$W(\omega) \leq x \iff \omega \leq F(x)$$

Τελικά απο αυτό έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$F_W(x) = \mathbb{P}(\{\omega : W(\omega) \leq x\}) = \lambda(\{\omega \in (0,1) : \omega \leq F(x)\}) = \lambda((0, F(x)]) = F(x)$$

δηλάδή $F_W = F$ *και αυτό ολοκληρώνει το ζητούμενο.*

Η $Y(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \omega\}, 0 < \omega < 1$ *παρατηρούμε ότι είναι φθίνουσα αφού αν πάρουμε* $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$*,τότε έχουμς ότι*

$$\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \omega_2\} \subset \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \omega_1\}$$

και επομένως απο τις ιδιότητες του $\inf$ *έχουμε ότι*

$$Y(\omega_2) \geq Y(\omega_1).$$

Απο την άλλη,η W *είναι αύξουσα γιατί αφού*

$$\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \omega_1\} \subset \{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \omega_2\}$$

έπεται απο τισ ιδιότητες του $\sup$ *ότι*

$$W(\omega_1) \leq W(\omega_2).$$

Επίσης έχουμε δεί ότι η Y *είναι αριστερά συνεχής γιατί παρατηρούμε ότι αν πάρουμε* $\omega \in (0,1)$ *τότε αν θεωρήσουμε την ακολουθία* $w_n = \left(\omega - \frac{1}{n}\right)_{n \geq n_0}$ *(όπου* $n_0 \in \mathbb{N}$ *είναι τέτοιο ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει ότι* $\frac{1}{n} < \omega$*),τότε έχουμε ότι αυτή είναι αύξουσα με* $w_n \to \omega$ *και έχουμε ότι*

$$Y(w_n) \to Y(\omega).$$

Απο την άλλη,με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η W *είναι δεξιά συνεχής.*