Chapter 4

Μιγαδικοί αριθμοί

Ξέρουμε ότι το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Ιδιαίτερα, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x που επαληθεύει την εξίσωση $x^2 = -1$. Η ανάγκη επίλυσης τέτοιων εξισώσεων οδηγεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

4.1 Αξιωματική κατασκευή του συνόλου των μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Θυμίζουμε ότι

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Ορίζουμε δύο πράξεις στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμό**,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Για παράδειγμα,

$$(1, 2) + (-4, 1) = (1 - 4, 2 + 1) = (-3, 3),$$

$$(1, 2)(-4, 1) = (-4 - 2, 1 - 8) = (-6, -7).$$

Το σύνολο των **μιγαδικών αριθμών** $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις.

Θεωρώντας ζεύγη της μορφής $(a, 0)$, παρατηρούμε ότι οι παραπάνω πράξεις παίρνουν τη μορφή

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Αυτό μας επιτρέπει να ταυτίζουμε έναν πραγματικό αριθμό a με το ζεύγος $(a, 0)$ ώστε οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$, να 'μεταφράζονται' στις ανωτέρω μορφές στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Θέτοντας $i = (0, 1)$, έχουμε

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

δηλαδή το i^2 ταυτίζεται με τον πραγματικό αριθμό -1. Επίσης, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \\ &= (a, 0) + (b, 0)i.\end{aligned}$$

Το στοιχείο (a, b) θα το συμβολίζουμε $a + bi$. Έτσι θα γράφουμε

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

4.2 Πράξεις μιγαδικών αριθμών

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι ένα σύνολο που περιέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Υπάρχει στο $\mathbb{C}$ ένα στοιχείο i τέτοιο ώστε $i^2 = -1$. Επιπλέον κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ έχει μοναδική παράσταση της μορφής $a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Επομένως, αν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Όταν για ένα μιγαδικό αριθμό z γράφουμε $z = a + bi$ χωρίς να διευκρινίζουμε τους a, b θα εννοούμε ότι αυτοί είναι πραγματικοί αριθμοί. Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται το

πραγματικό μέρος

του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(z)$. Ο πραγματικός αριθμός b ονομάζεται το

φανταστικό μέρος

του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(z)$. Αν για παράδειγμα $z = \frac{1}{2} + 3i$, τότε $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = 3$.

Παρατηρούμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός είναι πραγματικός αν και μόνο αν το φανταστικό μέρος του είναι ίσο με μηδέν. Δηλαδή, αν $z \in \mathbb{C}$, τότε

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.$$

Πράξεις μιγαδικών αριθμών
Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z = a + bi$ και $w = c + di$.
Πρόσθεση Είδαμε ότι το άθροισμα $z + w$ ορίζεται ως εξής

$$z + w = (a + c) + (b + d)i.$$

Πολλαπλασιασμός Είδαμε ότι το γινόμενο zw ορίζεται ως εξής

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Για παράδειγμα, αν $z = \sqrt{2} - 5i$ και $w = 1 + 3i$, τότε

$$z + w = (\sqrt{2} + 1) + (-5 + 3)i = (\sqrt{2} + 1) + (-2)i,$$

$$zw = (\sqrt{2} + 5 \cdot 3) + (3\sqrt{2} - 5)i = (\sqrt{2} + 15) + (3\sqrt{2} - 5)i.$$

Σημείωση. Ο τύπος που δίνει το άθροισμα είναι απλός: προσθέτουμε τα πραγματικά μέρη και προσθέτουμε τα φανταστικά μέρη. Ο τύπος που δίνει το γινόμενο ίσως δεν είναι αναμενόμενος. Μπορεί όμως να δικαιολογηθεί ως εξής. Επιθυμούμε οι πράξεις των μιγαδικών αριθμών να έχουν ιδιότητες παρόμοιες με τις αντίστοιχες πράξεις των πραγματικών. Τρεις από αυτές είναι: η μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης, δηλαδή

$$x + y = y + x$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, η μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, δηλαδή

$$xy = yx$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και η επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή

$$(x + y)u = xu + yu$$

για κάθε $x, y, u \in \mathbb{R}$. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών ικανοποιεί παρόμοιες ιδιότητες, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} zw &= (a+bi)(c+di) = a(c+di) + bi(c+di) = \\ &= ac + adi + bic + bidi = ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Δηλαδή λαμβάνουμε τον τύπο του γινομένου. Συνεπώς μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε μιγαδικούς αριθμούς χωρίς να χρειάζεται να εφαρμόζουμε το σχετικό τύπο, αλλά απλά να εκτελούμε τις πράξεις ακολουθώντας τους συνήθεις κανόνες που γνωρίζουμε ότι ισχύουν στους πραγματικούς. Πράγματι ισχύουν οι εξής κανόνες των δύο πράξεων στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση 4.1. *Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.*

(1) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)*

(2) $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$

(3) $\forall z \in \mathbb{C}, z + (-z) = 0 = (-z) + z$

(4) $\forall z, w \in \mathbb{C}, z + w = w + z$ *(μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)*

(5) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ *(προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)*

(6) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ *(επιμεριστική ιδιότητα από αριστερά)*

(7) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ *(επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά)*

(8) $\forall z, w \in \mathbb{C}, zw = wz$ *(μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)*

(9) $\forall z \in \mathbb{C}, 1z = z1.$

(10) *Αν* $z, w \in \mathbb{C}$ *και* $zw = 0$, *τότε* $z = 0$ *ή* $w = 0$.

Οι αποδείξεις είναι απλές πράξεις και αφήνονται ως ασκήσεις.

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις στο $\mathbb{C}$

Ξέρουμε ότι ένα τριώνυμο

$$ax^2 + bx + c,$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν η διακρίνουσά του είναι μη αρνητική, δηλαδή $b^2 - 4ac \geq 0$. Όμως κάθε τριώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες (ανεξάρτητα από το πρόσημο της διακρίνουσας). Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $b^2 - 4ac \leq 0$ και $a \neq 0$. Με πράξεις επαληθεύεται ότι

$$ax^2 + bx + c = \left(x - \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)$$

και επομένως από την ιδιότητα (10) της προηγούμενης πρότασης, η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

όπου $a \neq 0$, έχει ρίζες τις

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Για παράδειγμα, οι ρίζες του

$$x^2 + 2x + 3$$

είναι

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{8}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Γενικά ισχύει το εξής αποτέλεσμα που αποδίδεται στο Gauss.

Θεώρημα 4.2 (θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας). *Κάθε πολυώνυμο θετικού βαθμού με συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα*

Δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_m x^m + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

όπου $m > 0, a_m, ..., a_0 \in \mathbb{C}$ έχει μία τουλάχιστον μιγαδική λύση. Περισσότερα θα πούμε στο Κεφάλαιο 5 Πολυώνυμα. Στο μάθημα αυτό δεν θα δώσουμε απόδειξη, μπορείτε να δείτε μια απόδειξη στη Μιγαδική Ανάλυση ή Θεωρία Galois.

4.4 Αντίστροφος ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού

Ξέρουμε ότι για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό υπάρχει ο αντίστροφός του, δηλαδή δεδομένου ενός $x \in \mathbb{R}$, όπου $x \neq 0$, υπάρχει ένας $y \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $xy = 1$. θα δούμε τώρα ότι ισχύει κάτι ανάλογο στους μιγαδικούς αριθμούς. Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε $a \neq 0$ ή $b \neq 0$. Άρα ο (πραγματικός) αριθμός $a^2 + b^2$είναι μη μηδενικός. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

και παρατηρούμε ότι

$$zw = (a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} i = 1.$$

Ο μιγαδικός αριθμός $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$ ονομάζεται ο **αντίστροφος** του $a+bi$ και συμβολίζεται με $(a + bi)^{-1}$ ή $\frac{1}{a+bi}$.

Για παράδειγμα, ο αντίστροφος του $1 - 2i$ είναι ο

$$\frac{1}{1^2 + (-2)^2} + \frac{-(-2)}{1^2 + (-2)^2} i = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i.$$

Σημείωση Ένα εύλογο ερώτημα εδώ είναι 'πώς σκεφθήκαμε τον τύπο

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

για τον αντίστροφο του $a+bi$;' Αν λύσουμε την εξίσωση $(a+bi)(x+yi) = 1$ ως προς x, y, όπου $a+bi \neq 0$, βρίσκουμε

$$(a + bi)(x + yi) = 1 \Rightarrow (ax - by) + (ay + bx)i = 1 \Rightarrow$$

$$ax - by = 1$$
$$ay + bx = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα με a και τη δεύτερη με b παίρνουμε το σύστημα

$$a^2 x - aby = a$$
$$aby + b^2 x = 0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο ισότητες του συστήματος έχουμε

$$(a^2+b^2)x = a.$$

Επειδή ισχύει $a+bi \neq 0$, έχουμε $a^2+b^2 \neq 0$. Άρα

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$y = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Παράδειγμα Για να γράψουμε το μιγαδικό αριθμό

$$\frac{2-3i}{1+i}$$

στη μορφή $a+bi$ παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος του $1+i$ είναι ο

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

και άρα

$$\frac{2-3i}{1+i} = (2-3i)\frac{1}{1+i} = (2-3i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i.$$

4.5 Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις βασικές ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού.

Ορισμός 4.3. *Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = a+bi$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{a^2+b^2}$ και συμβολίζεται με $|z|$.*

Για παράδειγμα, το μέτρο του $1-2i$ είναι

$$|1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

και του $-3 = -3+0i$ είναι

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3.$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο ενός πραγματικού αριθμού είναι η απόλυτη τιμή του. Το μέτρο μιγαδικών αριθμών ικανοποιεί ιδιότητες ανάλογες με αυτές της απόλυτης τιμής.

Πρόταση 4.4. *Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε*

(1) $|z| = |-z|$

(2) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

(3) *Αν* $z_2 \neq 0$, *τότε* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(4) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

Απόδειξη 1. Αν $z = a+bi$, τότε

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = |-z|\,.$$

2. Έστω $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$. Τότε

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Για να δείξουμε ότι $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$, δηλαδή

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = \left({a_1}^2 + {b_1}^2\right)\left({a_2}^2 + {b_2}^2\right).$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται άμεσα με πράξεις.

3. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα αν εφαρμόσουμε την ισότητα 2 της που μόλις αποδείξαμε στη σχέση $z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2$.

4. Έστω $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$. Έχουμε

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \le \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} + \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα ριζικά είναι μη αρνητικοί αριθμοί μπορούμε στον επόμενο υπολογισμό να υψώνουμε στο τετράγωνο. Έχουμε

$$\begin{gathered}\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \le \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} + \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2} \Leftrightarrow \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \le {a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2 + 2\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2} \Leftrightarrow \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 \le \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2} \Leftrightarrow\end{gathered}$$

Αν $a_1 a_2 + b_1 b_2 < 0$, η απόδειξη είναι πλήρης. Αν $a_1 a_2 + b_1 b_2 \ge 0$, μπορούμε, ισοδύναμα, να υψώσουμε ξανά στο τετράγωνο και προκύπτει

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \le \left({a_1}^2 + {b_1}^2\right)\left({a_2}^2 + {b_2}^2\right).$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει άμεσα από την ισότητα στην απόδειξη του 2 αν στη θέση του b_1 βάλουμε το $-b_1$.

Σημείωση Η ανισότητα $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ που είδαμε πριν ονομάζεται η τριγωνική ανισότητα, γιατί σχετίζεται άμεσα με μια ιδιότητα του τριγώνου. Περισσότερα επί αυτού θα δούμε παρακάτω, όπου θα εξετάσουμε τη γραφική παράσταση μιγαδικών αριθμών.

Παραδείγματα

(1) Για να βρούμε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{1 + 2i}{(2 + 3i)(1 - i)}$$

μπορούμε να το φέρουμε στη μορφή $a + bi$ (βλ. προηγούμενο) και να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μέτρου. Ένας πολύ πιο σύντομος τρόπος είναι να εφαρμόσουμε την Πρόταση. Έχουμε

$$\begin{gathered}\left|\tfrac{1+2i}{(2+3i)(1-i)}\right| = \tfrac{|1+2i|}{|(2+3i)(1-i)|} = \\ = \tfrac{|1+2i|}{|(2+3i)||(1-i)|} = \tfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{5}{26}}.\end{gathered}$$

(2) Αποδείξτε ότι

$$|2z_1 + 3z_2| < 14,$$

όπου $z_1 = 2 - 3i$ και $|z_2| = 2$.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{gathered}|2z_1 + 3z_2| \le |2z_1| + |3z_2| = 2\,|z_1| + 3\,|z_2| = \\ = 2\sqrt{13} + 6 < 2 \cdot 4 + 6 = 14.\end{gathered}$$

4.6 Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Ορισμός 4.5. *Ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$είναι ο $a - bi$και συμβολίζεται με $\bar{z}$.*

Για παράδειγμα, έχουμε $\overline{2+3i} = 2 - 3i$ και $\overline{2-3i} = 2 + 3i$. Επίσης $\overline{5} = \overline{5+0i} = 5$ και $\overline{7i} = -7i$. Παρατηρούμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός είναι πραγματικός αν και μόνο αν ισούται με τον συζυγή του, δηλαδή αν $z \in \mathbb{C}$, τότε

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z.$$

Επίσης επισημαίνουμε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ έχουμε

$$z + \overline{z} = 2a \in \mathbb{R}$$
$$z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Οι βασικές ιδιότητες των συζυγών αριθμών δίνονται παρακάτω.

Πρόταση 4.6. *Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε*

(1) $|z|^2 = z\overline{z}$

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

(4) *αν $z_2 \neq 0$, τότε* $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Απόδειξη Η απόδειξη καθεμιάς από τις ισότητες 1-3 είναι ένας άμεσος υπολογισμός που αφήνεται σαν άσκηση. Η 4 προκύπτει από την 3.

Παρατήρηση Οι ισότητες 2 και 3 στην προηγούμενη πρόταση ισχύουν και για περισσότερους μιγαδικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\overline{(z_1 + ... + z_n)} = \overline{z_1} + ... + \overline{z_n}$$

και

$$\overline{(z_1 ... z_n)} = \overline{z_1} ... \overline{z_n}.$$

Παραδείγματα

(1) Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$. Τότε $\overline{\left(\frac{z}{2+z}\right)} = \frac{1}{1+2z}$.

Πράγματι, από την υπόθεση έχουμε $1 = z\overline{z}$. Άρα

$$\overline{\left(\frac{z}{2+z}\right)} = \frac{\overline{z}}{2+\overline{z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2+\frac{1}{z}} = \frac{1}{1+2z}.$$

(2) Έστω $z \in \mathbb{C},\ z \neq 1$,τέτοιο ώστε $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| = 2$. Να βρεθεί το μέτρο του z.

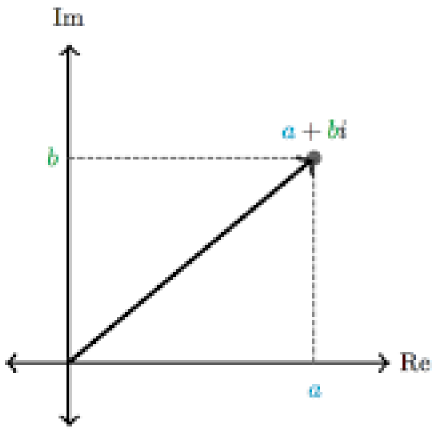
Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-4}{z-1}\right| = 2 \Rightarrow \left|\frac{z-4}{z-1}\right|^2 &= 4 \\
&\Rightarrow \frac{z-4}{z-1}\overline{\left(\frac{z-4}{z-1}\right)} = 4 \\
&\Rightarrow \frac{z-4}{z-1}\left(\frac{\overline{z}-4}{\overline{z}-1}\right) \\
&\Rightarrow \frac{z\overline{z}-4z-4\overline{z}+16}{z\overline{z}-z-\overline{z}+1} = 4 \\
&\Rightarrow z\overline{z}-4z-4\overline{z}+16 = 4\left(z\overline{z}-z-\overline{z}+1\right) \\
&\Rightarrow z\overline{z} = 4 \Rightarrow |z|^2 = 4\,|z| = 2.
\end{aligned}$$

4.7 Γραφική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε το επίπεδο εφοδιασμένο με τους συνήθεις άξονες, δηλαδή τον άξονα των x και κάθετα σε αυτόν τον άξονα των y. Στο μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ αντιστοιχίζουμε το σημείο του επιπέδου που έχει συντεταγμένες (a, b).

Συχνά θα αντιστοιχίζουμε στο $z = a + bi$ το διάνυσμα με αρχή το $(0, 0)$ και τέλος το σημείο με συντεταγμένες (a, b).

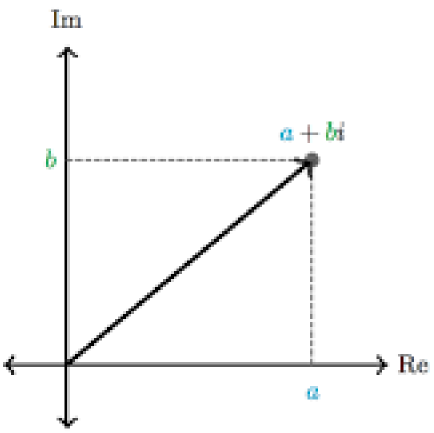


Παρατηρήσεις

1) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο σχήμα, βλέπουμε ότι το μέτρο

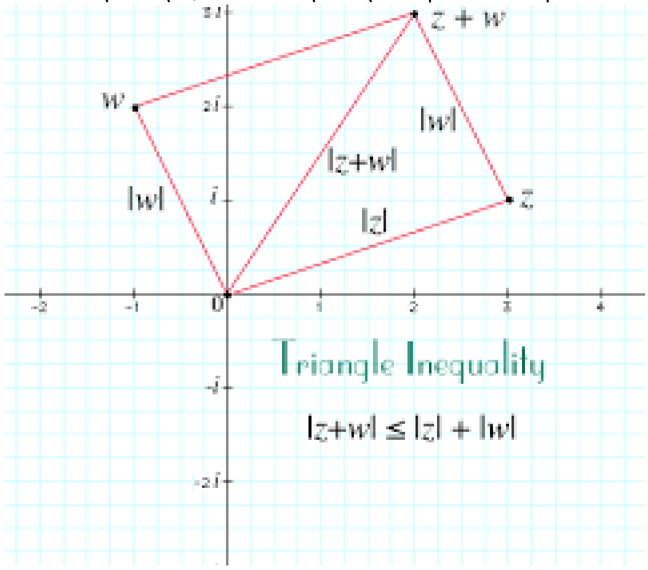
$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ είναι το μήκος του διανύσματος OM, δηλαδή το μήκος $|OM|$ του ευθυγράμμου τμήματος OM.



2) Χρησιμοποιώντας διανύσματα, η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών εκφράζεται με το γνωστό μας *κανόνα του παραλληλογράμμου.* Δηλαδή, για να προσθέσουμε δυο μιγαδικούς αριθμούς z, w σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που ορίζουν τα διανύσματα που αντιστοιχούν στους z, w και φέρουμε τη διαγώνιο από το 0.

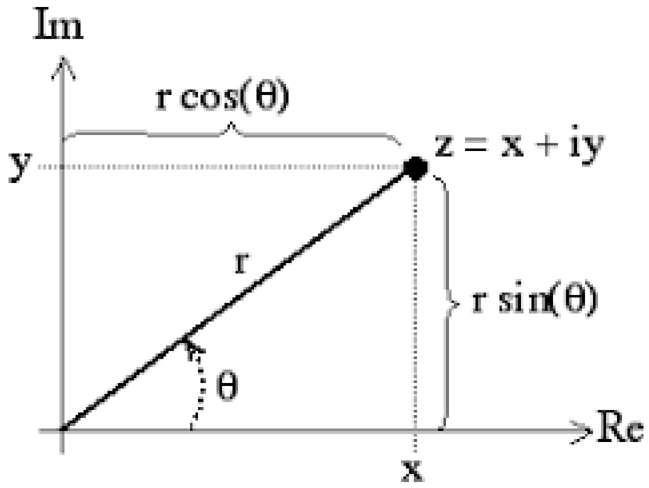
Ως πλευρές τριγώνου παίρνουμε την ανισότητα που είναι η γνωστή μας *τριγωνική ανισότητα.*



Υπάρχει ένας κανόνας και για το γινόμενο μιγαδικών αριθμών, αλλά σε αυτό θα επανέλθουμε αργότερα γιατί χρειαζόμαστε περισσότερα στοιχεία.

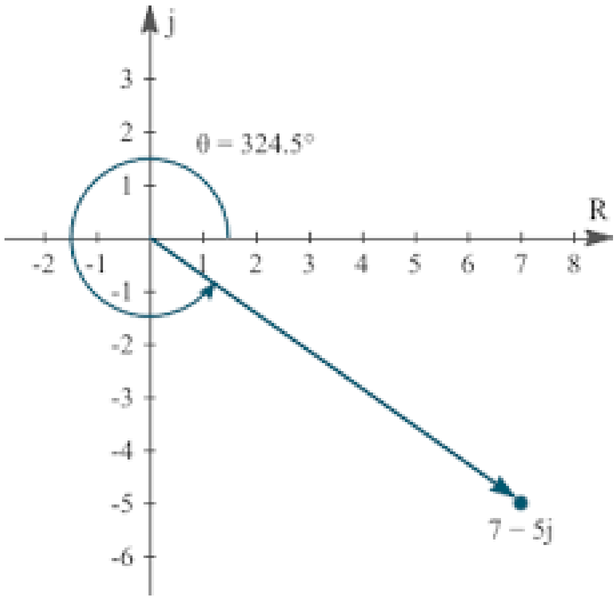
4.8 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Ας θεωρήσουμε την εικόνα M ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$. Έστω θ η γωνία που σχηματίζεται αν κινηθούμε με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών ρολογιού από τον ημιάξονα Oxστο OMόπως φαίνεται στο σχήμα .



Τότε έχουμε
$$x = |OM|\cos\theta, y = |OM|\sin\theta.$$
Συνεπώς
$$z = x + yi = |OM|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$
Η παράσταση $|OM|\left(\cos + i\sin\theta\right)$ ονομάζεται η **τριγωνομετρική μορφή** του $a+bi$. Παρατηρούμε ότι το $|OM|$ είναι το μέτρο r του $a+bi$. Η δε γωνία θ ονομάζεται το **όρισμα** του $a+bi$. Συνεπώς η τριγωνομετρική μορφή είναι
$$r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right),$$
όπου $r = \sqrt{a^2+b^2}$ και ϑ είναι το όρισμα του $a+bi$.

Το όρισμα του $a+bi$ προσδιορίζεται από τις σχέσεις
$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$



Ας δούμε ένα παράδειγμα. **Παράδειγμα**

Για να βρούμε την τριγωνομετρική μορφή του
$$-\sqrt{3} + i,$$
βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του
$$r = \left|-\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$$

Για να βρούμε το όρισμα έχουμε $a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$ δηλαδή

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι

$$\cos\theta = \cos\frac{5\pi}{6}, \quad \sin\theta = \frac{5\pi}{6}$$

και άρα

$$\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή $0 \le \theta < 2\pi$έχουμε $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα η τριγωνομετρική μορφή είναι

$$2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}).$$

Η χρησιμότητα της τριγωνομετρικής μορφής οφείλεται στο παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.7. *Έστω $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Τότε έχουμε*

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

και αν $z_2 \neq 0$, τότε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)).$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

έχουμε

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1))(\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)) = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

Η απόδειξη της δεύτερης σχέσης της πρότασης είναι παρόμοια και αφήνεται σαν άσκηση.

Από την προηγούμενη πρόταση βλέπουμε ότι η τριγωνομετρική μορφή μας βοηθά στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση μιγαδικών αριθμών. Ιδιαίτερα, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.8 (De Moivre)**.** *Έστω $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Τότε για κάθε φυσικό αριθμό nέχουμε*

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Απόδειξη Το συμπέρασμα έπεται από μια εύκολη επαγωγή που βασίζεται στην προηγούμενη πρόταση. Πράγματι, για $n = 1$, η αποδεικτέα σχέση είναι προφανής. Έστω ότι $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. Τότε

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^nz = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)). \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Επισημαίνουμε ότι αν $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, τότε το συμπέρασμα του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει όχι μόνο για τους φυσικούς αριθμούς n αλλά για κάθε ακέραιο. Πράγματι, αν ο ακέραιος m είναι αρνητικός, $m = -n$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του De Moivre και την Πρόταση 4.7 έχουμε

$$\begin{aligned} z^m = \tfrac{1}{z^n} = \tfrac{\cos 0 + i\sin 0}{\rho^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))} = \\ = \rho^{-n}\left(\cos\left(0 - n\theta\right) + i\sin\left(0 - n\theta\right)\right) = \\ = \rho^m\left(\cos\left(m\theta\right) + i\sin\left(m\theta\right)\right). \end{aligned}$$

Εφαρμογή

Να υπολογισθεί στη μορφή $a + bi$ ο μιγαδικός αριθμός $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2005}$. Σε προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι η τριγωνομετρική μορφή του $-\sqrt{3}+i$ είναι

$$-\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}).$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του De Moivre έχουμε

$$\begin{aligned} \left(-\sqrt{3}+i\right)^{2005} = 2^{2005}\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right)^{2005} = \\ = 2^{2005}\left(\cos\left(2005\tfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2005\tfrac{5\pi}{6}\right)\right). \end{aligned}$$

Επειδή $2005\frac{5\pi}{6} = 835\,(2\pi) + \frac{5\pi}{6}$ έχουμε ότι $\cos(2005\frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin(2005\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{5\pi}{6}$. Άρα παίρνουμε

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2005} = 2^{2005}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2^{2005}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2^{2004}(-\sqrt{3}+1).$$

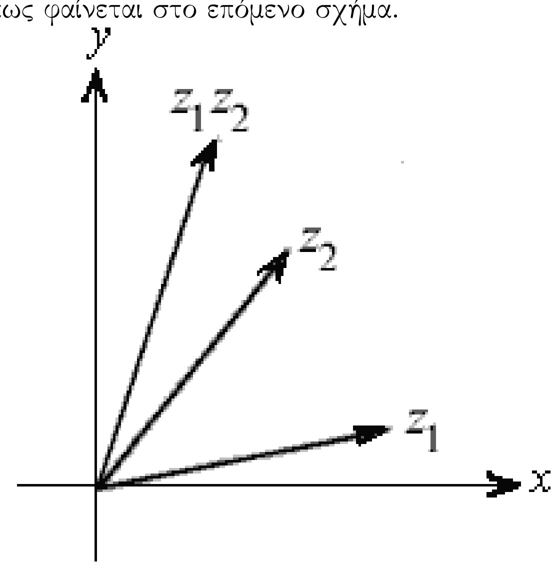
Από την Πρόταση 4.7 βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία: στο γινόμενο $z_1 z_2$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα που το μέτρο του είναι το γινόμενο

$$|z_1|\,|z_2|$$

και σχηματίζει γωνία με τον άξονα των x ίση με

$$\theta_1 + \theta_2$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γεωμετρική ερμηνεία γινομένου μιγαδικών αριθμών

4.9 Θεώρημα του De Moivre και εξισώσεις

Το Θεώρημα του De Moivre είναι συχνά χρήσιμο στην επίλυση εξισώσεων. Ας θεωρήσουμε την εξίσωση $x^5 = 1$. Ξέρουμε ότι αυτή έχει μόνο μια πραγματική λύση. Υπενθυμίζουμε ότι το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας λέει ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές που έχει βαθμό n έχει nμιγαδικές ρίζες (όχι αναγκαστικά διακεκριμένες). Συνεπώς αναμένουμε να βρούμε άλλες τέσσερις ρίζες της $x^5 = 1$. Για να τις υπολογίσουμε μπορούμε να εργαστούμε ως εξής. Έστω $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ μια λύση της $x^5 - 1 = 0$. Τότε έχουμε

$$z^5 = 1 \Rightarrow r^5(\cos\phi + i\sin\phi)^5 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^5(\cos 5\phi + i\sin 5\phi) = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \Rightarrow$$

$$r^5 = 1$$
$$\cos 5\phi = \cos 0$$
$$\sin 5\phi = \sin 0.$$

Εφόσον ο r είναι πραγματικός, παίρνουμε $r = 1$. Από τις σχέσεις

$$\cos 5\phi = \cos 0$$
$$\sin 5\phi = \sin 0$$

παίρνουμε $5\phi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Επειδή το ϕ είναι όρισμα έχουμε $0 \le \phi < 2\pi$οπότε $0 \le 5\phi < 10\pi$ και άρα οι δυνατές τιμές του k είναι

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Δηλαδή $\phi = \frac{2k\pi}{5},\ k = 0, 1, 2, 3, 4$. Τελικά έχουμε πέντε τιμές για το z

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Παρατηρούμε ότι οι πέντε αυτοί μιγαδικοί αριθμοί είναι διακεκριμένοι. Βρήκαμε λοιπόν πέντε διακεκριμένες λύσεις. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας έπεται ότι αυτές είναι όλες οι λύσεις.

Ακολουθεί ένα σημαντικό αποτέλεσμα που γενικεύει το προηγούμενο παράδειγμα.

Θεώρημα 4.9. *Έστω $a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$. Η εξίσωση*

$$x^n = a$$

έχει n διακεκριμένες λύσεις που δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

όπου ρείναι το μέτρο του a και θ είναι το όρισμά του.

Απόδειξη Από το Θεώρημα του De Moivre έπεται ότι ${z_k}^n = a, \quad k = 0, 1, ..., n-1$. Μένει να δείξουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_k, \quad k = 0, 1, ..., n-1$ είναι διακεκριμένοι. Έστω $z_i = z_j$, όπου $0 \le i, j \le n-1$. Τότε εξισώνοντας πραγματικά και μιγαδικά μέρη παίρνουμε

$$\cos\tfrac{\theta+2i\pi}{n} = \cos\tfrac{\theta+2j\pi}{n}$$
$$\sin\tfrac{\theta+2i\pi}{n} = \sin\tfrac{\theta+2i\pi}{n}.$$

Άρα υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $\frac{\theta+2i\pi}{n} - \frac{\theta+2j\pi}{n} = 2k\pi$. Από τη σχέση αυτή παίρνουμε $i - j = 2kn$. Επειδή έχουμε $0 \leq i, j \leq n-1$ συμπεραίνουμε ότι $i - j = 0$. Άρα $z_i = z_j$.

Παράδειγμα Να λυθεί η εξίσωση $x^4 = -\sqrt{3} + i$.

Είδαμε σε παράδειγμα ότι

$$-\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}),$$

δηλαδή $\rho = 2$ και $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα οι ζητούμενες λύσεις είναι οι

$$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά $k = 0, 1, 2, 3$ βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι

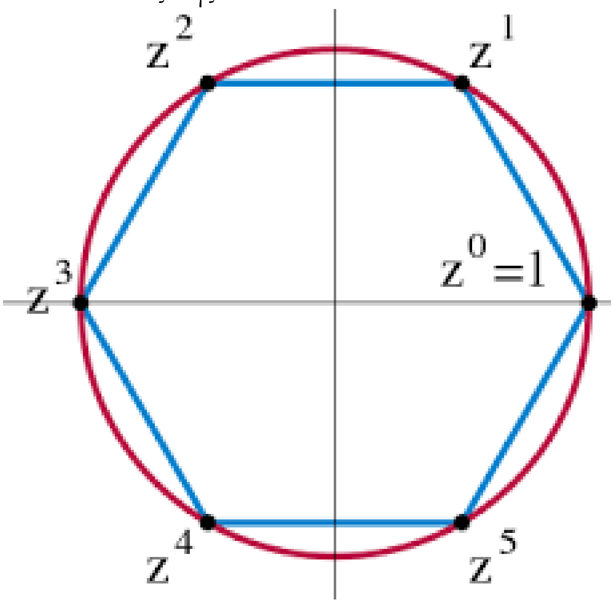
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{24} + i\sin\tfrac{5\pi}{24}\right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{17\pi}{24} + i\sin\tfrac{17\pi}{24}\right) \\ z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{29\pi}{24} + i\sin\tfrac{29\pi}{24}\right) \\ z_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{41\pi}{24} + i\sin\tfrac{41\pi}{24}\right). \end{aligned}$$

Σημείωση Η γραφική παράσταση των προηγούμενων λύσεων φαίνεται παρακάτω.

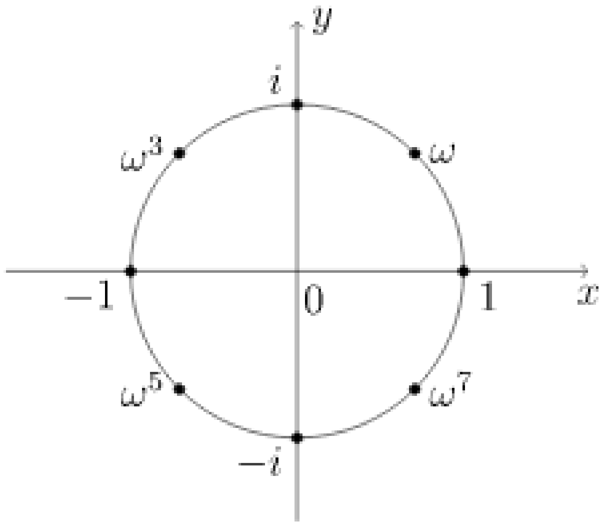
Παρατηρούμε ότι η γωνία μεταξύ των z_0, z_1 είναι $\frac{17\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{2}$ δηλαδή είναι ορθή. Όμοια και οι άλλες γωνίες μεταξύ δυο διαδοχικών διανυσμάτων είναι ορθές. Βλέπουμε ότι οι εικόνες των z_0, z_1, z_2, z_3 σχηματίζουν ένα τετράγωνο που εγγράφεται σε έναν κύκλο ακτίνας $\sqrt[4]{2}$.

Γενικά οι εικόνες των $z_0, ..., z_{n-1}$στο Θεώρημα 4.9 είναι οι κορυφές ενός κανονικού n − γώνου που εγγράφεται σε έναν κύκλο ακτίνας $\sqrt[n]{\rho}$.

Οι λύσεις της $z^6 = 1$.



Οι λύσεις της $z^8 = 1$.



Παραδείγματα 4.10. (1) Να υπολογιστεί η δύναμη $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2004}$.

Με τη μέθοδο που είδαμε βρίσκουμε ότι η τριγωνομετρική μορφή του $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του De Moivre έχουμε

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2004}=\left(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)^{2004}=\\=\cos(501\pi)+i\sin(501\pi)=\cos\pi=-1.\end{gathered}$$

(2) Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που επαληθεύουν την εξίσωση $|z|^2-2\operatorname{Re}((1-3i)z)+6=0$.

Θέτουμε $z=x+yi$. Κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$\begin{gathered}|x+iy|^2-2\operatorname{Re}((1-3i)(x+iy))+6=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x^2+y^2-2\operatorname{Re}(x+3y+i(y-3x))+6=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x^2+y^2-2(x+3y)+6=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-6y+6=0.\end{gathered}$$

Στη συνέχεια ‘συμπληρώνουμε τα τετράγωνα’

$$\begin{gathered}x^2-2x+y^2-6y+6=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow (x^2-2x+1^2)+(y^2-2\cdot 3\cdot y+3^2)-1-3^2+6=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=2^2.\end{gathered}$$

Άρα το σύνολο των εικόνων είναι ένας κύκλος κέντρου (1,3) και ακτίνας 2.

(3) Να λυθεί η εξίσωση $27z^6+1=0$. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.4.15 σύμφωνα με το Παράδειγμα 1.4.16. Πρώτα μετασχηματίζουμε τη δοσμένη εξίσωση στην ‘επιθυμητή μορφή’. Έχουμε

$$27z^6+1=0\Leftrightarrow z^6=-\tfrac{1}{27}=\tfrac{1}{27}(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Κατά συνέπεια

$$z=\tfrac{1}{\sqrt[6]{27}}\left(\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{6}\right),\quad k=0,1,2,\dots 5.$$

Παίρνουμε τις λύσεις

$$z_0 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{6},$$
$$z_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{3\pi}{6} + i\sin\tfrac{3\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}) = i\tfrac{\sqrt{3}}{3},$$
$$z_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{6},$$

$$z_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{7\pi}{6} + i\sin\tfrac{7\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{6},$$
$$z_4 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}) = -i\tfrac{\sqrt{3}}{3},$$
$$z_5 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{11\pi}{6} + i\sin\tfrac{11\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{6}.$$

(4) Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Ένας κομψός τρόπος απόδειξης βασίζεται στο Θεώρημα του De Moivre. Έχουμε

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta.$$

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος παίρνουμε μετά από μερικές πράξεις

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + \left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)i.$$

Άρα

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + \left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)i.$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη έχουμε

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta.$$

Η ζητούμενη ταυτότητα προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση τη $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.