Πίνακες-Γραμμικά συστήματα.

1.1 Υπενθυμίσεις: Μια πρώτη επαφή με τα Γραμμικά συστήματα.

Υπενθυμίζουμε ότι μια ευθεία στο επίπεδο παριστάνεται με την (γραμμική) εξίσωση $ax + by = c$, όπου τα a, $b \in \mathbb{R}$ δεν είναι και τα δύο μηδέν.

Επίσης ένα επίπεδο στον (τριδιάστατο) χώρο παριστάνεται με την (γραμμική) εξίσωση $ax + by + cz = d$, όπου τα a, b, $c \in \mathbb{R}$ δεν είναι όλα μηδέν.

Γενικά μια "έκφραση" της μορφής

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \quad (*)$

όπου τα a_i, $d \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **γραμμική εξίσωση** με πραγματικούς συντελεστές τα a_i, σταθερό όρο τον πραγματικό αριθμό d και μεταβλητές τα x_i.

Ο όρος "μεταβλητές " έχει επικρατήσει καθ' ότι οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν (συνήθως) από πρακτικά προβλήματα όπου αναζητούνται (πραγματικοί) αριθμοί k_i, οι οποίοι αν "τοποθετηθούν" στη θέση των αντιστοίχων x_i και γίνουν οι πράξεις στο πρώτο μέρος, έχουμε ισότητα πραγματικών αριθμών.

Μια (διατεταγμένη) n-αδα αριθμών $(k_1, k_2, \ldots , k_n)$, (αν υπάρχει), η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $(*)$, θα ονομάζεται λύση της εξίσωσης.

Η αναζήτηση της ύπαρξης λύσεων, και του προδιορισμού των, μιας γραμμικής εξίσωσης είναι σημαντικό πρόβλημα και θα μας απασχολήσει στα επόμενα.

Παρατήρηση 1.1.1. *Ο όρος γραμμική εξίσωση έχει επικρατήσει, διότι όλες οι μεταβλητές εμφανίζονται σε πρώτη δύναμη, και όχι ως μεταβλητές άλλων συναρτήσεων, ή ως γινόμενα μεταξύ τους, για παράδειγμα η ή εξίσωση*

$3x_1^2 + 2x_1x_2 - \sqrt{x_2} - lnx_1 = 4$ **δεν** *είναι γραμμική για ...πάρα πολλούς λόγους.*

Επίσης, ονομάζονται πραγματικές γραμμικές εξισώσεις, διότι οι συντελεστές a_i και ο σταθερός όρος d είναι πραγματικοί αριθμοί. Θα μπορούσαν να είναι και μιγαδικοί αριθμοί (όπως θα δούμε; αργότερα) προς το παρόν θα υποθέτουμε, χωρίς ιδιαίτερη μνεία, ότι πρόκειται για πραγματικούς αριθμούς και θα μιλάμε απλώς για γραμμικές εξισώσεις.

Πριν προχωρήσουμε στα επόμενα ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.2. *Έστω οι γραμμικές εξισώσεις*

$2x - 3y = 2$ *και*

$-x + 2y = 1.$

Αν θεωρήσουμε κάθε μια ξεχωριστά και αναζητήσουμε τις λύσεις της, θα δούμε ότι κάθε (διατεταγμένο) ζεύγος της μορφής $(\lambda, 2/3\lambda - 2/3)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ αποτελεί λύση της πρώτης εξίσωσης. Όπως επίσης κάθε (διατεταγμένο) ζεύγος της μορφής $(\kappa, 1/2\kappa + 1/2)$, με $\kappa \in \mathbb{R}$ αποτελεί λύση της δεύτερης εξίσωσης.

Αν θελήσουμε να βρούμε (αν υπάρχει και ποία είναι) κοινή λύση και για τις δύο εξισώσεις (πού συναληθεύουν), θα δούμε εύκολα (στο συγκεκριμένο παράδειγμα) ότι για $x = 7$, $y = 4$ (και μόνο γι' αυτές τις τιμές) οι δύο εξισώσεις συναληθεύουν.

Αν θελήσουμε να δούμε "γεωμετρικά" το πρόβλημα. Θα δούμε ότι, καθ' όσον κάθε μια εξίσωση παριστά μια ευθεία στο επίπεδο (με το σύνολο των λύσεων της να αποτελεί *τα σημεία της ευθείας αυτής), η κοινή λύση και των δύο εξισώσεων δεν είναι τίποτε άλλο από το (μοναδικό) σημείο τομής τους.*

Μετά το παράδειγμα αυτό μπορούμε να δώσουμε έναν γενικό ορισμό:
Ένα (πεπερασμένο) σύνολο γραμμικών εξισώσεων (με το ίδιο πλήθος μεταβλητών η κάθε μια) θα ονομάζεται **Γραμμικό Σύστημα** και θα παριστάνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \; \cdots \; \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε ένα γραμμικό σύστημα "προσδιορίζεται" από τους συντελεστές a_{ij} και τους σταθερούς όρους b_i, οι οποίοι είναι πραγματικοί αριθμοί. Χρησιμοποιούμε διπλούς δείκτες στους συντελεστές, διότι με τον πρώτο δείκτη θέλουμε να δηλώσουμε την εξίσωση στην οποία βρισκόμαστε και με τον δεύτερο δείκτη δηλώνουμε ποιας μεταβλήτης είναι συντελεστής (π.χ. ο a_{24} είναι συντελεστής της μεταβλητής x_4 στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος).

Το προηγούμενο σύστημα [1] είναι ένα σύστημα με m το πλήθος εξισώσεις και n το πλήθος αγνώστους, μάλιστα δε συνήθως θα αναφέρεται ως ένα $m \times n$ σύστημα.

Υπ' αυτή την έννοια μια γραμμική εξίσωση, με n το πλήθος μεταβλητές, θεωρείται ένα $1 \times n$ σύστημα.

Μια διατεταγμένη n-αδα $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ πραγματικών αριθμών θα ονομάζεται **λύση** του συστήματος, αν αντικαταστήσουμε κάθε μεταβλητή x_i με τον αριθμό ξ_i, τότε **όλες** οι εξισώσεις του συστήματος ικανοποιούνται.

Η αναζήτηση μιας λύσης ενός συστήματος αποτελεί ένα κύριο πρόβλημα στα Μαθηματικά και με αυτό θα ασχοληθούμε (σχεδόν) αποκλειστικά στο Μάθημα αυτό [2].

Όταν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση, τότε ονομάζεται **συμβατό**. Διαφορετικά ονομάζεται **μη συμβατό**.

(Η πλέον δόκιμη ορολογία είναι: *Συμβατές γραμμικές εξισώσεις.*)

Παραδείγματα 1.1.3. *1. Έστω το σύστημα*

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 3 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

"Παρατηρούμε" ότι αν υπήρχε μια λύση, έστω (a, b), του συστήματος αυτού, τότε από την δεύτερη αξίσωση θα είχαμε ότι $a - b = 2$, οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το τρία θα είχαμε ότι $3a - 3b = 6$. Από την πρώτη εξίσωση όμως έχουμε, ότι πρέπει να ισχύει $3a - 3b = 3$.

Επομένως βλέπουμε ότι δεν υπάρχει λύση για το σύστημα αυτό.

2. Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 3 \\ -2x + 2y &= -2 \end{aligned}$$

[1] Επειδή εδώ θα αναφερόμαστε αποκλειστικά σε γραμμικά συστήματα, για λόγους συντομίας, ένα γραμμικό σύστημα θα αναφέρεται απλώς ως σύστημα.

[2] Για τον λόγο αυτό οι μεταβλητές x_i θα ονομάζονται και άγνωστοι του συστήματος.

"Παρατηρούμε" ότι κάθε φορά που έχουμε μια λύση, έστω (a, b), της πρώτης εξίσωσης τότε αυτή αληθεύει και την δεύτερη. Μάλιστα δε, επειδή κάθε λύση της πρώτης εξίσωσης είναι της μορφής $(a, a-1)$ με $a \in \mathbb{R}$, έχουμε άπειρο το πλήθος λύσεις για το σύστημα αυτό.

3. *Έστω το σύστημα*

$$\begin{aligned} 3x - 3y + z &= 3 \\ -2x + 2y - z &= -2 \end{aligned}$$

Πάλι "παρατηρούμε" ότι το σύστημα αυτό έχει άπειρο το πλήθος λύσεις. Μάλιστα δε οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι της μορφής $(a, a-1, 0)$ με $a \in \mathbb{R}$.

Όπως βλέπουμε από τα προηγούμενα παραδείγματα υπάρχουν συστήματα, τα οποία έχουν μόνο μια λύση. Υπάρχουν συστήματα, τα οποία έχουν άπειρες λύσεις. Όπως υπάρχουν και συστήματα, τα οποία δεν έχουν λύση.

Επομένως, εγείρονται τα εξής ερωτήματα:

Πώς μπορούμε να αποφανθούμε ότι ένα σύστημα έχει, ή δεν έχει λύση;

Στην περίπτωση που έχει λύση, πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις του;

Στα προηγούμενα παραδείγματα "απαντήσαμε" στα ερωτήματα αυτά "παρατηρώντας" τα συστήματα, δεδομένου ότι ο αριθμός των αγνώστων και των εξισώσεων ήταν μικρός. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.1.4. *Δίνεται το σύστημα*

$$\begin{aligned} 3x - 3y + z &= 3 \\ 2x + 2y - z &= -4 \\ x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Εδώ βλέπουμε ότι δεν είναι εύκολο με "απλή παρατήρηση" να αποφανθούμε αν το σύστημα έχει λύση(εις) και, στην περίπτωση που έχει, να την προσδιορίσουμε. Επομένως πρέπει να εργαστούμε μεθοδικά.

1. Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση (και τα δύο μέλη της) με το -3 και την προσθέτουμε στην πρώτη εξίσωση, οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -9y + 7z &= -3 \\ 2x + 2y - z &= -4 \\ x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

2. Στο σύστημα που προέκυψε, πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση (και τα δύο μέλη της) με το -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη εξίσωση, οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -9y + 7z &= -3 \\ -2y + 3z &= -8 \\ x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

3. Στο σύστημα που προέκυψε, πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση (και τα δύο μέλη της) με το -9/2 και την προσθέτουμε στην πρώτη εξίσωση, οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} (-13/2)z &= 33 \\ -2y + 3z &= -8 \\ x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

4. Τώρα βλέπουμε ότι από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι (αναγκαστικά) $z = -66/13$. *Οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη το* $z = -66/13$ *έχουμε* $y = \cdots = -47/13$.

Τώρα, αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση τα $z = -66/13, \quad y = -47/13$ *έχουμε* $x = 2 - 2(-47/13) + 2(-66/13) = \cdots = -12/13.$

Τελικά, βλέπουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει μόνο μια λύση την $(x, y, z) = (-12/13, -47/13, -66/13)$. *(Μετά από πολύ κόπο και με την πιθανότητα να έχουν γίνει λάθη, για τον λόγο αυτό να κάνετε την επαλήθευση.)*

1.1.1 Επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Μετά από αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι υπάρχει η (επιτακτική) ανάγκη, ότι για να λύσουμε ένα σύστημα πρέπει να *επινοήσουμε* μια "Γενική μέθοδο επίλυσης συστημάτων".

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα για να επιλύσουμε το αρχικό σύστημα μεταβαίναμε, σταδιακά, σε άλλα "απλούστερα" σύστηματα.

Επομένως εγείρεται το ερώτημα: Την στιγμή που έχουμε δύο "διαφορετικά" συστήματα πως εξασφαλίζουμε η ύπαρξη (ή μη ύπαρξη) λύσεων του ενός συστήματος μας δίνει απάντηση για την ύπαρξη (ή μη ύπαρξη) λύσεων του άλλου συστήματος;

Η βασική μέθοδος για την επίλυση ένος συστήματος είναι να μετασχηματίζουμε ένα σύστημα σε ένα απλούστερο με το ίδιο σύνολο λύσεων. Τρία είδη μετασχηματισμών των γραμμών ενός συστήματος μας εξασφαλίζουν την μετάβαση σε σύστημα με το ίδιο σύνολο λύσεων.

(i) Εναλλάσουμε την θέση δύο εξισώσεων.

(ii) Πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση με έναν **μη** μηδενικό αριθμό.

(iii) Προσθέτουμε το πολλαπλάσιο μιας εξίσωσης σε μια άλλη εξίσωση.

Άσκηση. Δείξτε ότι πράγματι οι παραπάνω μετασχηματισμοί μας εξασφαλίζουν την μετάβαση από ένα σύστημα σε ένα άλλο με το ίδιο σύνολο λύσεων.

Όπως βλέπουμε, η ύπαρξη και το πλήθος λύσεων ενός συστήματος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Όπως είναι το πλήθος των αγνώστων, το πλήθος των εξισώσεων και φυσικά οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι. Επομένως για το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \cdots \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Όλες οι "πληροφορίες" βρίσκονται στον "πίνακα" [3]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός θα ονομάζεται **ο επαυξημένος** πίνακας του συστήματος (Ενώ, αν παραλείψουμε την τελευταία "στήλη" των σταθερών όρων, τότε έχουμε, απλώς, τον πίνακα του συστήματος.)

[3] Η έννοιατου πίνακα είναι θεμελιώδης έννοια στα Μαθηματικά, αργότερα θα μελετήσουμε διεξοδικά τους πίνακες. Εδώ αρκούμαστε στην διαισθητική έννοια για να περιγράψουμε ένα σύστημα.

Πριν προχωρήσουμε, θα επισημάνουμε ότι, όταν μας δοθεί ένας πίνακας, τότε αυτός καθορίζει μοναδικά ένα σύστημα, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ο δοθείς πίνακας.

Παράδειγμα 1.1.5. *Για τον πίνακα* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
το σύστημα, του οποίου επαυξημένος πίνακας είναι ο πίνακας αυτός είναι το εξής :

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -3 \quad . \end{aligned}$$

Επειδή, οι γραμμές του επαυξημένου πίνακα αντιστοιχούν στις εξισώσεις του συστήματος, συνάγεται ότι, για την επίλυση ενός συστήματος, αντί να εφαρμόζουμε μετασχηματισμούς στις γραμμές του συστήματος για να επιτύχουμε ένα απλούστερο σύστημα με το ίδιο σύνολο λύσεων, μπορούμε να εφαρμόζουμε "ανάλογους" μετασχηματισμούς στις αντίστοιχες γραμμές του επαυξημένου πίνακα για να πετύχουμε έναν "απλούστερο πίνακα". Συγκεκριμμένα: Στους μετασχηματισμούς

(i) Εναλλάσουμε την θέση δύο εξισώσεων.

(ii) Πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση με έναν **μη** μηδενικό αριθμό.

(iii) Προσθέτουμε το πολλαπλάσιο μιας εξίσωσης σε μια άλλη εξίσωση.

αντικαθιστούμε την λέξη *εξίσωση* συστήματος με την λέξη *γραμμή* πίνακα και έχουμε τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς

$\alpha)$ Εναλλάσουμε την θέση δύο γραμμών.

$\beta)$ Πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή με έναν **μη** μηδενικό αριθμό.

$\gamma)$ Προσθέτουμε το πολλαπλάσιο μιας γραμμής σε μια άλλη γραμμή.

Παρατήρηση 1.1.6. *Οι τρεις αυτές "επεμβάσεις" στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα ενός συστήματος ονομάζονται* **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί** *γραμμών ενός πίνακα.*

Όπως θα δούμε αργότερα, αυτοί οι μετασχηματισμοί γραμμών ενός πίνακα [4] *είναι πολύ σημαντικοί στην μελέτη των ιδιοτήτων ενός πίνακα και η σημασία τους "ξεπερνά" τα όρια της μελέτης και της επίλυσης ενός συστήματος.*

Στο επόμενο παράδειγμα παρουσίαζεται πως οι δύο διαδικασίες βαίνουν παράλληλα.

Παράδειγμα 1.1.7. *Θα λύσουμε ένα σύστημα εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς, κατά βήματα, στις εξισώσεις του συστήματος και παράλληλα, στα αντίστοιχα βήματα, θα λύσουμε το ίδιο σύστημα εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα.*

Δίνεται το σύστημα
$x + y + 2z = 9$
$2x + 4y - 3z = 1$
$3x + 6y - 5z = 0.$
Ο αντίστοιχος επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος, οπότε προκύπτει το σύστημα

[4]Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών ενός πίνακα αναφέρονται και ως γραμμοπράξεις.

$x + y + 2z = 9$
$2y - 7z = -17$
$3x + 6y - 5z = 0.$

Παράλληλη επέμβαση στον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα:

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη γραμμή του πίνακα, οπότε προκύπτει ο επαυξημένος πίνακας του "νέου" συστήματος.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη εξίσωση του συστήματος, οπότε προκύπτει το σύστημα

$x + y + 2z = 9$
$2y - 7z = -17$
$3y - 11z = -27.$

Παράλληλη επέμβαση στον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα:

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή του πίνακα, οπότε προκύπτει ο επαυξημένος πίνακας του "νέου" συστήματος.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 1/2 και προκύπτει το σύστημα

$x + y + 2z = 9$
$y - 7/2z = -17/2$
$3y - 11z = -27.$

Παράλληλη επέμβαση στον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα:

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί 1/2 και προκύπτει ο επαυξημένος πίνακας του "νέου" συστήματος.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη εξίσωση του συστήματος, οπότε προκύπτει το σύστημα

$x + y + 2z = 9$
$y - 7/2z = -17/2$
$-1/2z = -3/2.$

Παράλληλη επέμβαση στον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα:

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή του πίνακα, οπότε προκύπτει ο επαυξημένος πίνακας του "νέου" συστήματος.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 5

Συνεχίζουμε αναλόγως και μετά .....από αρκετά βήματα καταλήγουμε στο σύστημα

...**Βήμα n**

$x = 1$

$y = 2$
$z = 3$
με αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Η λύση του τελευταίου συστήματος είναι προφανής Άρα ευρέθη η λύση και του αρχικού συστήματος.

Όπως βλέπουμε από το προηγούμενο παράδειγμα, μετά από ορισμένους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς των γραμμών του επαυξημένου πίνακα του συστήματος καταλήξαμε στον πίνακα
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Από τον οποίο καταλήξαμε στην λύση του αρχικού συστήματος.

Όπως παρατηρούμε ο πίνακας αυτός έχει μια χαρακτηριστική ιδιότητα: Οι τρείς πρώτες στήλες (οι οποίες αντιστοιχουν στους αγνώστους του συστήματος) έχουν ένα στοιχείο ίσον με 1 και τα υπόλοιπα ίσον με μηδέν, μάλιστα δε το 1 εμφανίζεται σε διαφορετικές γραμμές του πίνακα. Τώρα δικαιολογείται το ασαφές μέχρι τώρα ''απλούστερη μορφή'' πίνακα.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση μιας γενικής μεθόδου της επίλυσης ενός συστήματος, θα αναφέρουμε ορισμένους ορισμούς και τη σχετική ορολογία.

Ορισμός 1.1.8. *Ένας πίνακας θα ονομάζεται* **ανηγμένος κλιμακωτός** *αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

1. *Αν μια γραμμή δεν αποτελείται μόνο από μηδενικά, τότε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο στην γραμμή αυτή είναι το 1. Το στοιχείο αυτό θα ονομάζεται* **ηγετικό** *στοιχείο της γραμμής αυτής.*

2. *Αν υπάρχουν γραμμές, όπου όλα τα στοιχεία τους είναι ίσον με μηδέν, τότε όλες αυτές οι γραμμές βρίσκονται στο ''κάτω μέρος'' του πίνακα.*

   (Εναλλακτικά: Αν υπάρχει μια γραμμή του πίνακα, η οποία είναι μη μηδενική, τότε ''άνωθεν'' αυτής δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές.)

3. *Σε δύο διαδοχικές, μη μηδενικές, γραμμές το ηγετικό στοιχείο της γραμμής, η οποία βρίσκεται σε ''χαμηλότερο επίπεδο'', βρίσκεται ''δεξιότερα'' από το ηγετικό στοιχείο της γραμμής, η οποία βρίσκεται σε ''ανώτερο επίπεδο''* [5].

4. *Αν μια στήλη περιέχει το ηγετικό στοιχείο κάποιας γραμμής, τότε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης αυτής είναι μηδενικά.*

   Αν ένας πίνακας πληροί τις τρείς πρώτες από τις ανωτέρω ιδιότητες (όχι κατ' ανάγκη την τέταρτη), θα ονομάζεται απλώς **κλιμακωτός** *πίνακας.*

   Δηλαδή ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι, προφανώς, κλιμακωτός. Ένας κλιμακωτός πίνακας **δεν** *ειναι κατ' ανάγκη ανηγμένος κλιμακωτός.*

Παραδείγματα 1.1.9. *Οι πίνακες*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[5] Αν θέλουμε να είματε ''φορμαλιστές'', θα μπορούσαμε να πούμε ότι: Αν ένα ηγετικό στοιχείο βρίσκεται στην $(i,\, j)$ θέση, τότε πάντα $i \leq j$

Είναι όλοι ανηγμένοι κλιμακωτοί.
Ενώ οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι κλιμακωτοί, αλλά όχι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

Όπως βλέπουμε σε έναν κλιμακωτό πίνακα στην στήλη όπου βρίσκεται ένα ηγετικό στοιχείο κάτω από το στοιχείο αυτό όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, ενώ σε ένα ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα στην στήλη όπου βρίσκεται ένα ηγετικό στοιχείο **όλα** *τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά.*

Δηλαδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *είναι κλιμακωτός, για οποιουσδήποτε αριθμούς θέσουμε στη θέση του* $*$, *ενώ ο πίνακας* $\begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *είναι ανηγμένος κλιμακωτός, για οποιουσδήποτε αριθμούς θέσουμε στη θέση του* $*$.

Παρατήρηση 1.1.10. *Όπως βλέπουμε, από τον τρόπο μετασχηματισμού ενός πίνακα στον αντίστοιχο ανηγμένο κλιμακωτό, αν ο αρχικός πίνακας έχει μια μηδενική στήλη, τότε αυτή η στήλη παραμένει μηδενική οποιονδήποτε στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών και αν εφαρμόσουμε.*

Επίσης, από τις ιδιότητες ενός ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα (ιδιότητα 3), έπεται ότι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του είναι μικρότερο, ή ίσον από το πλήθος των μη μηδενικών στηλών του (γιατί;).

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την γενική μέθοδο επίλυσης ενός συστήματος. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως **Μέθοδος απαλοιφής του Gauss**[6]

Τα κύρια βήματα που την διέπουν (και έχουμε; ήδη διακρίνει είναι τα εξής:

(1) σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.

(2) Μετασχηματίζουμε, με στοιχειώδεις μετασηματισμούς γραμμών, τον πίνακα αυτόν σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

(3) Θεωρώντας τον πίνακα που προκύπτει ως επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος σχηματίζουμε το αντίστοιχο σύστημα, το οποίο, όπως έχουμε επισημάνει, έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό.

(4) Λύνουμε το προκύπτον σύστημα, το οποίο, λόγω της μορφής του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα, λύνεται εύκολα.

Όπως βλέπουμε, από την περιγραφή της μεθόδου το κυριώτερο βήμα είναι το δεύτερο βήμα.

Μια τακτική στο βήμα αυτό, η οποία διευκολύνει την όλη διαδικασία είναι η εξής:

(i) Μετασχηματίζουμε τις στήλες του πίνακα ξεκινώντας από την πρώτη αριστερά στήλη και προχωώντας προς τα δεξιά.

(ii) Μετασχηματίζουμε πλήρως μια στήλη στην μορφή που απαιτείται και μετά ασχολούμαστε με μια άλλη στήλη.

[6]Μια παραλλαγή αυτής της μεθόδου είναι γνωστή ως μέθοδος απαλοιφής των Gauss-Jordan. Η ιδέα που τις διέπει είναι η ίδια.

(iii) Αν με κάποιον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών ένα στοιχείο έχει μετασχηματιστεί σε μηδέν δεν εφαρμόζουμε μετασχηματισμό, ο οποίος το μετασχηματίζει σε μη μηδενικό στοιχείο. [7]

Τα ακόλουθα παραδείγματα είναι κατατοπιστικά ως προς την εφαρμογή (και την εξοικείωσή μας) με τα προηγουμένως αναφερθέντα.

Παραδείγματα 1.1.11. *1. Να επιλυθεί το σύστημα*

$$x + 2y + z = 3$$

$$2x + 3y - z = -6$$

$$3x - 2y - 4z = -2$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε στην δεύτερη γραμμή την πρώτη γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -2 ο πίνακας μετασχηματίζεται στον

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Στον πίνακα που προέκυψε, προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή την πρώτη γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -3 και ο πίνακας μετασχηματίζεται στον

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 0 & -8 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί -1 και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -8 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

Στο επόμενο (διπλό βήμα) προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή την δεύτερη γραμμή πολλαπλασιασμένη επί 8 και στην πρώτη γραμμή προσθέτουμε την δεύτερη γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -2 και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \end{pmatrix}$$

Στο επόμενο βήμα πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με το 1/17 και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Τώρα δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε στην δεύτερη γραμμή την τρίτη γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -3 και στην πρώτη γραμμή πάλι την τρίτη γραμμή αλλά τώρα πολλαπλασιασμένη επί 5, *οπότε τελικά έχουμε*

[7] Προσοχή! Η προτεινόμενη τακτική δεν είναι "πανάκεια" και δεν είναι δεσμευτική ως προς την εφαρμογή της.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$x + 0y + 0z = 4$

$0x + y + 0x = -3$

$0x + 0y + z = 5,$

του οποίου η λύση είναι προφανής και συνεπώς έχουμε λύσει και το αρχικό σύστημα.

2. *Να επιλυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 7x_5 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Εναλλάσουμε την πρώτη με την δεύτερη γραμμή και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Αυτό το κάνουμε για να επιτύχουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στην ''κορυφή'' της πρώτης στήλης. Τώρα, επειδή θέλουμε αυτό το (ηγετικό) στοιχείο να είναιίσον με ένα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με το 1/2 και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Στην τρίτη γραμμή προσθέτουμε την πρώτη γραμμή πολλαπλασιασμένη επί -2 και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

Συνεχίζουμε τον μετασχηματισμό του πίνακα πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή με -1/2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

Στην τρίτη γραμμή προσθέτουμε την δεύτερη πολλαπλασιασμένη με το -5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Το επόμενο βήμα είναι να πολλαπλασιάσουμε την τελευταία γραμμή με το 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Όπως παρατηρούμε τελικά ο αρχικός επαυξημένος πίνακας έχει μετασχηματιστεί (με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών) σε έναν κλιμακωτό πίνακα.

Μπορούμε να προχωρήσουμε για να μετασχηματίσουμε τον πίνακα σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό. Προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή την δεύτερη πολλαπλασιασμένη με το 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -23/2 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Στο τελευταίο (διπλό) βήμα προσθέτουμε την τρίτη γραμμή στην πρώτη γραμμή πολλαπλασιασμένη με 23/2 και τρίτη γραμμή στην δεύτερη πολλαπλασιασμένη με 7/2 και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Καταλήξαμε σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα, ο οποίος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 0x_5 = 7$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 2$$

Οι λύσεις αυτού του συστήματος (άρα και του αρχικού) είναι $x_5 = 2,\ x_3 = 1$ *και*

$x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4$, *Εδώ βλέπουμε ότι θέτοντας αυθαίρετες τιμές για τις μεταβλητές* $x_2 = s$ *και* $x_4 = t$ *έχουμε άπειρο το πλήθος λύσεις του συστήματος. Το δε σύνολο των λύσεων είναι το σύνολο* $\{(7-2s-3t,\ s,\ 1,\ t,\ 2) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Τα s *και* t *ονομάζονται παράμετροι του συστήματος ή ελεύθερες μεταβλητές.*

3. *Να επιλυθεί το σύστημα*

$x + 2y = 2$

$3x + 6y = 7$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Στην δεύτερη γραμμή προσθέτουμε την πρώτη πολλαπλασιασμένη επί -3, οπότε ο πίνακας μετασχηματίζεται στον ανηγμένο κλιμακωτό

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός είναι ο επαυξημένος κλιμακωτός πίνακας του συστήματος

$x + 2y = 2$

$0x + 0y = 1$

Όπως παρατηρούμε δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι να ικανοποιούν την δεύτερη εξίσωση του τελευταίου συστήματος, άρα δεν έχει λύση. Συνεπώς και το αρχικό μας σύστημα δεν έχει λύση.

Γενικά το κρίσιμο σημείο που αποφαινόμαστε ότι ένα σύστημα δεν έχει λύση είναι ότι εμφανίζονται εξισώσεις της μορφής $0x + 1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0$

Παρατηρήσεις 1.1.12. *1. Όπως έχουμε παρατηρήσει σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα η διαδικασία για τον μετασχηματισμό ενός πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό δεν "επιβάλει" έναν συγκεκριμένο τρόπο εφαρμογής των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών του πίνακα, ούτε ως προς το είδος, ούτε ως προς την σειρά.*

Επομένως προκύπτει ένα γενικό ερώτημα: Σε έναν πίνακα, όταν εφαρμόσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (πιθανόν με διαφορετικούς τρόπους) φθάνουμε πάντα σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα; Αν ναί, είναι πάντα ό ίδιος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας;

Η απάντηση είναι θετική και στα δύο σκέλη του ερωτήματος. Αργότερα θα δοθεί μια απόδειξη.

2. Προσοχή! Στην περίπτωση, όπου με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ενός πίνακα φθάνουμε σε έναν κλιμακωτό πίνακα (όχι ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα), τότε η μορφή του κλιμακωτού πίνακα δεν είναι μοναδική. Αλλά σε όλες τις κλιμακωτές μορφές που προκύπτουν υπάρχει το εξής κοινό χαρακτηριστικό: Το πλήθος των μηδενικών γραμμών που εμφανίζονται είναι πάντα το ίδιο.

Η απόδειξη, και γι' αυτό, θα δοθεί αργότερα.

3. Όπως είδαμε, και από τα τρία τελευταία παραδείγματα, υπάρχουν συστήματα με μοναδική λύση, ή με άπειρες λύσεις, ή με καμία λύση. Την απάντηση όμως για την ύπαρξη, ή μη ύπαρξη λύσεων ενός συστήματος την είχαμε εφ' όσον έχουμε λύσει το σύστημα.

Έχουμε ήδη επισημάνει ότι οι "πληροφορίες" για την ύπαρξη, ή μη ύπαρξη λύσεων σε ένα σύστημα περιέχονται στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Οπότε, θα δούμε (δεν είναι επί του παρόντος) πώς, πριν επιχειρήσουμε να λύσουμε ένα σύστημα, μπορούμε να αποφανθούμε για την ύπαρξη, ή μη ύπαρξη λύσεων.

4. Μια τελευταία (πρακτική) παρατήρηση. Όταν προσπαθούμε να λύσουμε ένα σύστημα μετασχηματίζοντας τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό, αν σε κάποια φάση φθάσουμε σε κλιμακωτό πίνακα, τότε δεν είναι αναγκαίο να προχωρήσουμε. Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση στην οποία εμφανίζεται μόνο ένας αγνωστός και αναδρομικά, αντικαθιστώντας τον άγνωστο που προσδιορίσαμε, σε προηγούμενη εξίσωση, όπου εμφανίζεται αυτός ο άγνωστος και ένας ακόμη, να προσδιορίσουμε τον άλλο άγνωστο....ας το δούμε στα προηγούμενα παραδείγματα.

Ομογενή συστήματα.

Μια ειδική, αλλά πολύ σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα συστήματα της μορφής:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Δηλαδή συστήματα, όπου ο σταθερός όρος κάθε εξίσωσης ισούται με μηδέν.

Ένα τέτοιο σύστημα θα ονομάζεται **ομογενές**.

Όπως παρατηρούμε ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα τουλάχιστον μια λύση την: $x_1\, x_2, = \cdots = x_n = 0$.

Η λύση αυτή θα ονομάζεται η **τετριμμένη**, ή η **μηδενική** λύση του ομογενούς συστήματος.

Επομένως γεννάται το ερώτημα πότε ένα ομογενές σύστημα έχει και άλλες πέραν της τετριμμένης λύσης.

Παραδείγματα 1.1.13. *1. Να επιλυθεί το ομογενές σύστημα*

$$x + 2y + z = 0$$
$$2x + 3y - z = 0$$
$$3x - 2y - 4z = 0$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε, κάνοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών καταλήγουμε στον εξής ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Απ' όπου συνάγεται ότι ο σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση.

2. Να επιλυθεί το σύστημα

$$0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 7x_5 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28$$
$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Καταλήξαμε σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα, ο οποίος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 0x_5 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 0$$

Οι λύσεις αυτού του συστήματος (άρα και του αρχικού) είναι $x_5 = 0$, $x_3 = 0$ και $x_1 = -2x_2 - 3x_4$, Εδώ βλέπουμε ότι έχουμε δύο παραμέτρους για τις μεταβλητές $x_2 = s$ και $x_4 = t$, άρα έχουμε άπειρο το πλήθος λύσεις του συστήματος. Το δε σύνολο των λύσεων είναι το σύνολο $\{(-2s-3t, s, 0, t, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, όπου για $s = t = 0$ λαμβάνουμε την τετριμμένη λύση του συστήματος.

♠ Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα να κάνετε τους αναγκαίους μετασχηματισμούς γραμμών για να επιβεβαιώσετε ότι πράγματι καταλήγουμε σ' αυτούς τους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες. ♠

Όπως βλέπουμε και στην περίπτωση των ομογενών συστημάτων υπάρχουν περιπτώσεις, όπου έχουμε μόνο μια λύση και περιπτώσεις, όπου έχουμε άπειρες λύσεις.

Πριν προχωρήσουμε πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η τελευταία στήλη στον επαυξημένο πίνακα ενός ομογενούς συστήματος είναι μηδενική **και** παραμένει μηδενική κατά τον μετασχηματισμό του σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Όπως έχουμε παρατηρήσει στο τρίτο από τα Παραδείγματα 1.1.11, όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής $0x + 1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0$, τότε το αντίστοιχο σύστημα δεν έχει λύση.

Στην περίπτωση ενός ομογενούς συστήματος **δεν** έχουμε την εμφάνιση τέτοιων εξισώσεων, αλλά ενδέχεται να εμφανιστούν εξισώσεις της μορφής $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$. Μια τέτοια εξίσωση, επειδή επαληθεύεται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς, δεν επιρρεάζει την ύπαρξη λύσεων του συστήματος και θα μπορούσε να παραληφθεί, οπότε θα προκύψει ένα σύστημα με λιγότερες εξισώσεις από το αρχικό, **αλλά** με το ίδιο σύνολο λύσεων.

Επομένως, αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας, ο προερχόμενος από τον επαυξημένο πίνακα ενός ομογενούς συστήματος, έχει μηδενικές γραμμές, το σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτόν παραλείποντας τις μηδενικές γραμμές, έχει μεν λιγότερες εξισώσεις, αλλά το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό.

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα:

Αν γενικά έχουμε ένα ομογενές σύστημα με n το πλήθος αγνώστους και υποθέσουμε ότι ο ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας, που προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, έχει r το πλήθος μη μηδενικές γραμμές, τότε το ομογενές σύστημα, που αντιστοιχεί στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα έχει $n-r$ το πλήθος ελεύθερες μεταβλητές (παραμέτρους). Ενα τέτοιο ομογενές σύστημα θα είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} x_{k_1} & & & + & \sum() & = & 0 \\ & x_{k_2} & & + & \sum() & = & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & x_{k_r} & + & \sum() & = & 0 \end{pmatrix},$$

όπου, σε κάθε εξίσωση, η έκφραση $\sum()$ σημαίνει ένα άθροισμα όπου "εμπλέκονται" οι ελεύθερες μεταβλητές (αν υπάρχουν).

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι βάσει της παρατήρησης 1.1.10 η ποσότητα $n-r$ είναι πάντα μη αρνητική.

Από τα προηγούμενα έχουμε την εξής σημαντική πρόταση.

Πρόταση 1.1.14. *Σε ένα ομογενές σύστημα, όπου το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, έχουμε ελεύθερες μεταβλητές. Άρα έχουμε άπειρο το πλήθος λύσεις.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Παρατήρηση 1.1.15. *Προσοχή! Δεν ισχύει κάτι ανάλογο σε μη ομογενή συστήματα. Δηλαδή υπάρχουν (μη ομογενή) συστήματα, όπου το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, τα οποία δεν έχουν λύση.*

Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;

Παρ' όλα ταύτα, όπως θα δούμε σε λίγο, αν σε ένα μη ομογενές σύστημα, όπου πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη μιας λύσης, τότε το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις.

Το σύνολο ριζών ενός ομογενούς συστήματος.

Έστω το ομογενές σύστημα

$$(\Sigma_0) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύστημα (Σ_0) έχει μόνο μια λύση (την μηδενική) αν και μόνο αν δεν έχουμε ελεύθερες μεταβλητές. Αν και μόνο αν $n - r = 0$. Αν και μόνο αν το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στον αντίστοιχο ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα είναι ίσον με το πλήθος των αγνώστων του συστήματος.

Στην περίπτωση αυτή ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας, ο οποίος προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$ όπου έχουμε παραλείψει (αν υπήρχαν) τις μηδενικές γραμμές.

Μάλιστα δε το πλήθος των γραμμών στον τελευταίο πίνακα είναι ίσον με το n (το πλήθος των αγνώστων του συστήματος).

Θεώρημα 1.1.16. *Έστω $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ δύο λύσεις του συστήματος (Σ_0). Τότε για κάθε δύο αριθμούς λ και μ το $(\lambda\xi_1 + \mu\zeta_1, \lambda\xi_2 + \mu\zeta_2, \dots, \lambda\xi_n + \mu\zeta_n)$ αποτελεί λύση του συστήματος (Σ_0).*

Απόδειξη. Αφού τα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ αποτελούν λύσεις του συστήματος, αν στην τυχαία εξίσωση, έστω

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές x_j με τα ξ_j και ζ_j έχουμε

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = 0$$

και

$$a_{i1}\zeta_1 + a_{i2}\zeta_2 + \cdots + a_{in}\zeta_n = 0$$

Τις δύο τελευταίες σχέσεις τις πολλαπλασιάζουμε, την μεν πρώτη με το λ την δε δεύτερη με το μ και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε κάνοντας τις πράξεις έπεται το αποτέλεσμα. □

Πόρισμα 1.1.17. *Ένα ομογενές σύστημα έχει είτε μοναδική λύση (την μηδενική), είτε άπειρο το πλήθος λύσεις.*

Η "συμβολή" των ομογενών συστημάτων στη λύση μη ομογενών συστημάτων.

Έστω το σύστημα

$$(\Sigma)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad & \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

και

$$(\Sigma_0)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad & \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

το "αντίστοιχο" ομογενές.

Το φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής:

Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των λύσεων των δύο συστημάτων;;

Έστω $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ μια λύση του συστήματος (Σ) και $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ μια λύση του συστήματος (Σ_0). Τότε παρατηρούμε ότι το $(\xi_1 + \zeta_1, \xi_2 + \zeta_2, \dots, \xi_n + \zeta_n)$ αποτελεί λύση του συστήματος (Σ) (γιατί;).

Θεώρημα 1.1.18. *Έστω $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ μια λύση του συστήματος (Σ), τότε κάθε άλλη λύση του είναι της μορφής $(\xi_1+\zeta_1, \xi_2+\zeta_2, \dots, \xi_n+\zeta_n)$, όπου $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ είναι μια λύση του ομογενούς συστήματος (Σ_0).*

Απόδειξη. Έχουμε δει (το προηγούμενο γιατί;) ότι πράγματι $(\xi_1 + \zeta_1, \xi_2 + \zeta_2, \dots, \xi_n + \zeta_n)$ αποτελεί λύση του συστήματος (Σ). 1345

Έστω τώρα $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ μια άλλη λυση του συστήματος (Σ).

Αφού τα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ αποτελούν λύσεις του συστήματος, αν στην τυχαία εξίσωση, έστω

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές x_j με τα ξ_j και ρ_j έχουμε

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = b_i$$

και

$$a_{i1}\rho_1 + a_{i2}\rho_2 + \cdots + a_{in}\rho_n = b_i$$

Τις δύο τελευταίες σχέσεις τις αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε

$$a_{i1}(\rho_1 - \xi_1) + a_{i2}(\rho_2 - \xi_2) + \cdots + a_{in}(\rho_n - \xi_n) = 0 \quad .$$

Αυτό σημαίνει ότι το $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, όπου $\zeta_j = \rho_j - \xi_j$ είναι μια λύση του ομογενούς συστήματος (Σ_0). Όποτε έπεται το αποτέλεσμα.

□

Το θεώρημα αυτό είναι σημαντικό, καθότι για τον προσδιορισμό των λύσεων ενός συστήματος είναι αρκετό να γνωρίζουμε **μόνο** μια λύση του και τις λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς, του οποίου ο προσδιορισμός του συνόλου των λύσεών του (προσδοκούμε να) είναι πιό εύκολος.

Πόρισμα 1.1.19. *Ένα σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση.*

Πόρισμα 1.1.20. *Ένα τετραγωνικό $n \times n$ σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που αντιστοιχεί στον πίνακα του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι της μορφής* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Πόρισμα 1.1.21. *Ένα μη ομογενές σύστημα, είτε δεν έχει λύση, είτε έχει μοναδική λύση, είτε έχει άπειρες λύσεις.*

Απόδειξη. Αμέση απόρροια των Θεωρημάτων 1.1.16 και 1.1.18 . □

1.1.2 Ασκήσεις.

1. Προσδιορίστε αν οι "προτεινόμενες" τιμές των x, y, z είναι λύσεις του συστήματος

   $x + y + 2z = 2$
   $x - y - 2z = 0$
   $x + 2y + 2z = 1$

   $(a)\quad x = 1, y = -3, z = 2,\ (b)\quad x = 1, y = -1, z = 1.$

2. Προσδιορίστε αν οι "προτεινόμενες" τιμές των x, y, z είναι λύσεις του συστήματος

   $X_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$
   $3x_1 - x_2 + x_3 = 1$
   $- x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5$

   $(a)\quad (5/7, 8/7, 1), (b)\quad (5, 8, 1), (c)\quad (5/7, 8/7, 0), (d)\quad (5/7, 10/7, 2/7)\, (e)\quad (5/7, 22/7, 2).$

3. Προσδιορίστε την τιμή του k ώστε $x = 2k$, $y = k$, $z = 0$ να είναι λύση του συστήματος

   $x + 2y + z = 0$
   $- 2x - 4y + 2z\ 0$
   $3z - 6y - 4z = 1.$

4. Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   είναι οι επαυξημένοι πίνακες συστημάτων, να γράψετε τα αντίστοιχα συστήματα και να τα λύσετε.

5. Με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss, να λύσετε τα συστήματα:

$$-3x + 3y - 3z = 0$$
$$x - y + 2z = 0$$

$$2x - 2y - z = 0$$
$$x + y + z = 0$$

και

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$$
$$3x_1 - 2x_2 = -1$$
$$8x_1 - x_2 - 4x_3 = 10$$

6. Δείξτε γραφικά ότι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους, είτε δεν έχει λύση, είτε έχει άπειρες λύσεις.

7. Δίνεται ένα $m \times n$ σύστημα και

   $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ δύο λύσεις του. Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a + b = 1$ Το $(a\xi_1 + b\zeta_1, a\xi_2 + b\zeta_2, \dots, a\xi_n + b\zeta_n)$ αποτελεί λύση του σύστηματος.

   Προσοχή! Να λύσετε την άσκηση αυτή ανεξάρτητα, χωρίς την χρήση των Θεωρημάτων 1.1.16 και 1.1.18.

8. (i) Η γραφική παράσταση της καμπύλης με 'εξίσωση' $y = ax^2 + by + c$ διέρχεται από τα σημεία του επιπέδου (x_1, y_1), (x_2, y_2), (z_1, z_2). Δείξτε ότι οι συντελεστές a, b, c αποτελούν την λύση του συστήματος, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right)$$

   (ii) Να προσδιορίσετε όλες τις καμπύλες της μορφής $y = ax^2 + by + c$, οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $(1, 2)$, $(-1, 3)$ του επιπέδου.

   (iii) Η καμπύλη με εξίσωση $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ διέρχεται από τα σημεία του επιπέδου $(0, 10)$, $(1, 7)$, $(2, -11)$, $(3, -14)$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τους συντελεστές a, b, c, d;

   (iv) Γενικά, δίνεται η καμπύλη $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} = \cdots + a_1 x + a_0$. Πόσα τουλάχιστον σημεία του επιπέδου, από τα οποία διέρχεται η γραφική της παράσταση, πρέπει να γνωρίζουμε για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_i;

9. Να βρείτε δύο διαφορετικά 3×3 συστήματα, για τα οποία ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας των επαυξημένων πινάκων να είναι ο ίδιος

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

10. Να αποφανθείτε διαισθητικά (χωρίς ''"μολύβι και χαρτί"), αν τα επόμενα ομογενή συστήματα έχουν μοναδική ή άπειρες το πλήθος λύσεις.

    $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$

    $7x_1 + x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 0$

    $-x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 0,$

    $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

    $3x_2 - 6x_3 = 0$

$-2x_3 = 0,$

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ -x+y+z &= 0. \end{aligned}$$

11. Στα επόμενα συστήματα να προσδιορίσετε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε να έχουν μοναδική λύση, καμία λύση, άπειρες λύσεις.

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= 4 \\ 3x-y+5z &=, 2 \\ 4x+y+(a^2-14)z &= a+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 2\ 2x-2y+3z = 1 \\ x+2y-(a^2-3)z &= 4. \end{aligned}$$

12. Να λύσετε επόμενα συστήματα για τις διάφορες τιμές των a, b, $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x+y &= a \\ 3x+6y &= b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ 2x+2z &= b \\ 3y+3z &= c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ 2x+2z &= b \\ 3x+3z &= c. \end{aligned}$$

13. Να μετασχηματίσετε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ σε ανηγμένο κλιμακωτό με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, **αλλά** όταν χειάζεται πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό, ο αριθμός αυτός να είναι ακέραιος.

14. Να περιγράψετε όλες τις δυνατές ανηγμένες κλιμακωτές μορφές για τον τυχαίο πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

15. Αν A είναι ένας 3×5 πίνακας, ποίος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός των ηγετικών στοιχείων, όταν μετασχηματιστεί σε ανηγμένο κλιμακωτό;

Έστω B 3×6 πίνακας με μηδενική την τελευταία του στήλη. Ποίος είναι ο μέγιστος αριθμός των ελευθέρων παραμέτρων στην λύση του συστήματοςμε επαυξημένο πίνακα τον B;

Έστω C ένας 5×3 πίνακας, Ποίος είναι ο ελάχιστος αριθμός των μηδενικών γραμμών σε έναν μετασχηματισμό του σε κλιμακωτό πίνακα;

16. Να επιλύσετε το **μη** γραμμικό σύστημα.

$$sin\,\alpha\, +\, 2cos\,\beta\, +\, 3tan\,\gamma\, =\, 0$$

$$3sin\,\alpha\, +\, 5cos\,\beta\, +\, 3tan\,\gamma\, =\, 0$$

$$-sin\,\alpha\, -\, 5cos\,\beta\, +\, 5tan\,\gamma\, =\, 0$$

όπου $0 \leq\, \alpha,\, \beta,\, \gamma\, \leq\, 2\pi$.

17. Δίνονται οι επόμενοι ισχυρισμοί. Απαντήστε, δικαιολογώντας την απαντησή σας, αν είναι σωστοί, ή λανθασμένοι.

   (α΄) Το σύστημα $x - y\, =\, 2$
   $2x - 2y\, =\, k$ δεν έχει μοναδική λύση, ανεξάρτητα από την επιλογή του k.

   (β΄) Σε ένα σύστημα το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των αγνώστων.
   Το σύστημα είναι αδύνατον.

   (γ΄) Σε ένα σύστημα το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των αγνώστων.
   Το σύστημα έχει άπειρο το πλήθος λύσεις.

   (δ΄) Σε ενα σύστημα το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων.
   Το σύστημα έχει άπειρο τοπλήθος λύσεις.

   (ε΄) Αν κάθε εξίσωση σε ένα συμβατό σύστημα πολλαπλασιαστεί με μία σταθερά c, τότε οι λύσεις στο νέο σύστημα που προκύπτει, είναι οι λύσεις του αρχικού συστήματος πολλαπλασιασμένες με το c.

   (στ΄) Αν εφαρμόσουμε έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών σε ένα κλιμακωτό πίνακα, ο πίνακας, που προκύπτει, εξακολουθεί να είναι κλιμακωτός.

   (ζ΄) Κάθε πίνακας έχει μοναδική κλιμακωτή μορφή.
   Κάθε πίνακας δεν έχει μοναδκή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

   (η΄) Όλα τα ηγετικά στοιχεία σε έναν κλιμακωτό πίνακα εμφανίζονται σε διαφορετικές στήλες.

   (θ΄) Σε ένα ομογενές σύστημα με n αγνώστους ο αντίστοιχος (του επαυξημένου πίνακα) ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας έχει n μη μηδενικές γραμμές. Το σύστημα έχει μοναδική λύση.

1.2 Πίνακες

Το εβδομαδιαίο πρόγραμμα μελέτης ενός φοιτητή στα μαθήματα Άλγεβρα, Γεωμετρία, Ανάλυση, Στατιστική έχει ως εξής:

Για Στατιστική κάθε μέρα αφιερώνει μια ώρα, εκτός της Πέμπτης, όπου αφιερώνει δύο ώρες.

Την Κυριακή αφιερώνει μόνο δύο ώρες εκ τών οποίων η μία ώρα είναι για μελέτη Άγεβρας.

Η Παρασκευή είναι η ”βαρύτερη” μέρα με συνολικά οκτώ ώρες μελέτης, εκ των οποίων οι τρεις είναι για Γεωμετρία, ενώ για Άλγεβρα και Ανάλυση αφιερώνει τον ίδιο χρόνο μελέτης.

Το Σάββατο αφιερώνει μια ώρα περισσότερο χρόνο απ' ότι την Κυριακή, χωρίς να μελετά Άλγεβρα.

Για Γεωμετρία αφιερώνει συνολικά εννέα ώρες, χωρίς να μελετά την Πέμπτη, ένω αφιερώνει μόνο μια ώρα την Τρίτη και οι υπόλοιπες ώρες είναι εξ ίσου κατανεμημένες την Δευτέρα και την Τετάρτη.

Την Τρίτη μελετά συνολικά επτά ώρες αφιερώνοντας μια ώρα περισσότερο στην Άλγεβρα απ' ότι στην Ανάλυση.

Για Ανάλυση αφιερώνει συνολικά εννέα ώρες εκ των οποίων από μία ώρα την Δευτέρα και την Πέμπτη.

Για την Άλγεβρα αφιερώνεται ίσος χρόνος την Τετάρτη και την Κυριακή και κατά μια ώρα περισσότερος την Δευτέρα και την Πέμπτη.

Μπορούμε να έχουμε μια συνολική "εικόνα" για το εβδομαδιαίο πρόγραμμα μελέτης του φοιτητή;

Αν θελήσουμε να συστηματοποιήσουμε τις ανωτέρω πληροφορίες, μπορούμε να το κάνουμε χρησιμοποιώντας έναν (ορθογώνιο) πίνακα, όπου στις *γραμμές* κατανέμονται οι ώρες που αφιερώνονται σε κάθε μάθημα, ενώ στις *στήλες* κατανέμονται οι ώρες ανά ημέρα της εβδομάδος.

Οπότε έχουμε "πανοραμικά" το εβδομαδιαίο πρόγραμμα μελέτης του φοιτητή.

	Δ	$\mathrm{T}\rho$	$\mathrm{T}\epsilon$	$\Pi\epsilon$	$\Pi\alpha$	Σ	K
Alge	2	3	1	2	2	0	1
Geom	2	1	2	0	3	1	0
Anal	1	2	2	1	2	1	0
Stat	1	1	1	2	1	1	1

.

Όπως βλέπουμε η έννοια του πίνακα **δεν** εμφανίζεται μόνο στην μελέτη των γραμμικών συστημάτων.

Εδώ θα μελετήσουμε, σε πρώτη φάση, τους πίνακες θεωρώντας τους ως μια Μαθηματική έννοια ορίζοντας μεταξύ τους "πράξεις" και μελετώντας ιδιότητές τους.

1.2.1 Ορισμοί-ιδιότητες πινάκων.

Δεν θα δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό ενός πίνακα. Θα αρκεστούμε στον διαισθητικό ορισμό.

Ένας (πραγματικός) πίνακας είναι μια *ορθογώνια* διάταξη πραγματικών αριθμών "τοποθετιμένων" κατά γραμμές και στήλες.

Παραδείγματα 1.2.1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Το πρώτο παράδειγμα είναι ένα αριθμητικό παράδειγμα, ενω το δεύτερο παριστά έναν πίνακα στην γενική του μορφή.

Τα "χαρακτηριστικά" ενός πίνακα είναι το πλήθος των γραμμών του, το πλήθος των στηλών του, καθώςκαι το είδος των στοιχείων του, τα οποία εδώ θα είναι πάντα πραγματικοί αριθμοί.

Στο πρώτο παράδειγμα το πλήθος των γραμμών είναι ίσον με τρία, ενώ το πλήθος των στηλών του είναι ίσον με πέντε. Στο δεύτερο παράδειγμα το πλήθος των γραμμών είναι ίσον με m, ενώ το πλήθος των στηλών του είναι ίσον με n.

Το πλήθος των γραμμών και το πλήθος των στηλών του ονομάζονται διαστάσεις του πίνακα και συμβολίζονται ως $m \times n$.

Επομένως υπάρχουν και πίνακες $1 \times n$ και $m \times 1$. Ο πρώτος πίνακας αποτελείται από μια γραμμή και n το πλήθος στήλες και θα ονομάζεται **πίνακας γραμμή**, πολλές δε φορές θα αναφέρεται και ως bf διάνυσμα γραμμή. Ο δεύτερος πίνακας αποτελείται από μια στήλη και m το πλήθος γραμμές και θα ονομάζεται **πίνακας στήλη**, πολλές δε φορές θα αναφέρεται και ως bf διάνυσμα στήλη.

Μέχρι τώρα, κάθε φορά που ”συναντούσαμε” έναν πίνακα, ο πίνακας παριστάνονταν σε ”πλήρη ανάπτυξη”. Ορισμένες φορές, όπου δεν είναι απαραίτητο (και δεν δημιουργείται συγχυση), θα πριστάνουμε έναν πίνακα σε ”συνεπτυγμένη μορφή” π.χ. ως $A = (a_{ij})_{m\times n}$, ή ως $(a_{ij})_{m\times n}$, ή ως $A_{m\times n}$.

Ειδικές μορφές πινάκων.

Ένας $m \times n$ πίνακας, όπου όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με το μηδέν, θα ονομάζεται ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας και θα συμβολίζεται $\mathbf{O}_{m\times n}$, ή απλά $\mathbf{O}$, ή ακόμα και ως 0, όταν δεν υπάρχει πρόβλημα ως προς τις διαστάσεις του.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$