

Γεωμετρία Ι Τυπολόγιο

Εύρεση κανονικής εξίσωσης και είδους καμπύλης με εξίσωση $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$:

1. Περιστροφή κατά γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, με $\cot(2\theta) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$
2. Εύρεση σχέσης νέων συντεταγμένων με τις παλιές και αντικατάσταση
3. Μεταφορά κατά τυχόν διάνυσμα και αντικατάσταση
4. Επιλογή διανύσματος έτσι ώστε να μηδενίζονται οι πρωτοβάθμιοι όροι και αντικατάσταση
5. Εύρεση κανονικής εξίσωσης και είδους καμπύλης

Περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων Oxy κατά γωνία θ , στο $Ox'y'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Αναλλοιώτες της καμπύλης με εξίσωση $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & \delta \\ \beta & 2\gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & 2\zeta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} A & & \delta \\ \delta & \varepsilon & 2\zeta \end{array} \right)$$

$$J_1 = \frac{\text{tr}(A)}{2} = \alpha + \gamma$$

$$J_2 = |A| = 4\alpha\gamma - \beta^2$$

$$J_3 = \frac{|B|}{8} = \frac{4\alpha\gamma\zeta + \beta\delta\varepsilon - \alpha\delta^2 - \alpha\varepsilon^2 - \zeta\beta^2}{4}$$

Εξίσωση ευθείας στον χώρο που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}(\kappa, \lambda, \mu)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\kappa \\ y = y_0 + t\lambda, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + t\mu \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - x_0 = t\kappa \\ y - y_0 = t\lambda, t \in \mathbb{R} \\ z - z_0 = t\mu \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{\kappa} = \frac{y - y_0}{\lambda} = \frac{z - z_0}{\mu} \quad (\text{αν } \kappa, \lambda, \mu \neq 0)$$