

Γραμμική Άλγεβρα II

Σημειώσεις βασισμένες στις διαλέξεις του Μ. Μαλιάκα

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

Αθήνα,
20 Ιουλίου 2025

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	7
1 Όμοιοι Πίνακες	9
1.1 Ορισμός και ιδιότητες	9
1.2 Σχέση με γραμμικές απεικονίσεις	11
1.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1.	14
2 Πολυώνυμα	17
2.1 Διαμετότητα	17
2.2 Ανάγωγα Πολυώνυμα	21
2.3 Πολυώνυμα και πίνακες	24
2.4 Πολυώνυμα και γραμμικές απεικονίσεις	24
2.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2.	26
3 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	31
3.1 Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και ιδιόχωροι πίνακα	31

3.1.1	Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα	31
3.1.2	Ιδιόχωροι Πίνακα	35
3.1.3	Ιδιότητες Ιδιόχωρων	35
3.2	Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και γραμμικές απεικονίσεις	39
3.3	Χαρακτηριστικό πολυώνυμο	43
3.4	Ασκήσεις Κεφαλαίου 3.	49
4	Διαγωνισιμότητα	59
4.1	Διαγωνίσιμοι Πίνακες	59
4.2	Το Μεγάλο Κριτήριο Διαγωνιμότητας	64
4.3	Διαγωνίσιμες Γραμμικές Απεικονίσεις	68
4.4	Εφαρμογές Διαγωνοποίησης	69
4.5	Ασκήσεις Κεφαλαίου 4.	73
5	Τριγωνίσιμοι Πίνακες	81
5.1	Τριγωνίσιμοι πίνακες	81
5.2	Τριγωνίσιμες γραμμικές απεικονίσεις	87
5.3	Θεώρημα Cayley-Hamilton	89
5.4	Ασκήσεις Κεφαλαίου 5.	92
6	Ελάχιστο Πολυώνυμο	99
6.1	Ελάχιστο Πολυώνυμο	99
6.2	Κριτήριο Διαγωνιζιμότητας	105
6.3	Ελάχιστο πολυώνυμο γραμμικής απεικόνισης	106
6.4	Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση	107
6.4.1	Αναλλοίωτοι Υπόχωροι	107

6.4.2	Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση	109
6.5	Ασκήσεις Κεφαλαίου 6.	111
7	Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$	119
7.1	Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο	119
7.2	Ορθοκανονικές Βάσεις	122
7.2.1	Ορθοκανονικές βάσεις και μέθοδος Gram–Schmidt	122
7.2.2	Ορθογώνιο συμπλήρωμα υπόχωρου του $\mathbb{F}^n$	126
7.3	Ερμιτιανοί και μοναδιαίοι πίνακες	129
7.3.1	Ο πίνακας A^* , σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και γινόμενο πινάκων	129
7.3.2	Ερμιτιανοί Πίνακες	130
7.3.3	Μοναδιαίοι Πίνακες	132
7.4	Ασκήσεις Κεφαλαίου 7.	136
8	Κανονικοί Πίνακες	141
8.1	Λήμμα του Schur	141
8.2	Φασματικό Θεώρημα	142
8.3	Κανονικοί Πίνακες	143
8.4	Ασκήσεις Κεφαλαίου 8.	150

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι συγκεκριμένες σημειώσεις αφορούν το προπτυχιακό μάθημα Γραμμική Άλγεβρα II. Το περιεχόμενο των σημειώσεων έχει βασιστεί στην ύλη που διδάσκεται στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Οι σημειώσεις αποτελούν ένα βοήθημα για τους εξεταζόμενους (και μη) φοιτητές, όμως επιβάλλεται να ειπωθεί πως σε καμία περίπτωση οι σημειώσεις αυτές δεν μπορούν να αντικαταστήσουν οποιοδήποτε αντίστοιχο σύγγραμμα της θεματολογίας του. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου βρίσκονται και ασκήσεις εξάσκησης για του φοιτητές, που ενδείκνυται η ενασχόληση μαζί τους για τη βέλτιστη κατανόηση τους μαθήματος.

Τέλος είναι σαφές ότι οι σημειώσεις θα περιέχουν τυπογραφικά (και όχι μόνο) σφάλματα, οπότε αν παρατηρήσετε λάθη ή γενικότερα για προτάσεις βελτίωσης των σημειώσεων μπορείτε να τα επισημάνετε στο e-mail :

- i. kostasbizanos@gmail.com
- ii. bizanosk@math.uoa.gr

Κωνσταντίνος Μπιζάνος,
Αθήνα,
20 Ιουλίου 2025

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 1.1.1. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Θα λέμε ότι A και B είναι **όμοιοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

Παρατήρηση 1.1.1. Η ομοιότητα πινάκων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Έστω $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

- i. Ο A είναι όμοιος με τον εαυτό του, αφού ισχύει: $A = \mathbb{I}_n^{-1}A\mathbb{I}_n$.
- ii. Αν A και B είναι όμοιοι, τότε και B και A είναι όμοιοι. Πράγματι, υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος ώστε

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PB = P(P^{-1}AP) \Leftrightarrow A = PBP^{-1}.$$

- iii. Αν A και B είναι όμοιοι, και επίσης B και C είναι όμοιοι, τότε A και C είναι όμοιοι. Πράγματι, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q τέτοιοι ώστε

$$B = P^{-1}AP$$

και

$$C = Q^{-1}BQ.$$

Τότε:

$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ),$$

οπότε A και C είναι όμοιοι.

□

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $B = P^{-1}AP$, όπου

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

άρα οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες A και B δεν είναι όμοιοι. Πράγματι, αν υπήρχε αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε:

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}\mathbb{I}_2P = P^{-1}P = \mathbb{I}_2,$$

οδηγούμαστε σε άτοπο.

Παρατήρηση 1.1.2. Αν ένας πίνακας B είναι όμοιος με τον $\mathbb{I}_n$, τότε $B = \mathbb{I}_n$.

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Παράδειγμα 1.1.2. □

Υπενθύμιση 1.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Οι ακόλουθοι τρεις ακέραιοι ταυτίζονται (δηλαδή ορίζουν την τάξη ή βαθμίδα του πίνακα A , δηλαδή $\text{rank}(A)$):

- (i) Ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών.
- (ii) Ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών.
- (iii) Το $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_A))$, όπου $\mathcal{L}_A : \mathbb{F}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times 1}$, $X \mapsto AX$.

Πρόταση 1.1.1. Έστω A και B όμοιοι. Τότε ισχύουν τα εξής:

- i. $\det(A) = \det(B)$,
- ii. $\text{tr } A = \text{tr } B$
- iii. $\text{rank } A = \text{rank } B$.

Απόδειξη. i. Αφού οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε:

$$\begin{aligned}\det B &= \det(P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \det A\end{aligned}$$

ii. Αφού A είναι όμοιος με τον B , τότε υπάρχει αντιστρέψιμος P τέτοιος ώστε

$$B = P^{-1}AP$$

Τότε, από την ιδιότητα

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

έχουμε ότι

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr} A.$$

iii. Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, άρα και ισοδύναμοι, οπότε $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

□

Προσοχή! Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα 1.1.3. Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν είναι όμοιοι, αν και έχουν ίση ορίζουσα και ίση τάξη: $\det(A) = \det(B)$ και $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

1.2 Σχέση με γραμμικές απεικονίσεις

Ερώτημα. Πώς εμφανίζονται όμοιοι πίνακες στη φύση;

Μια ανεπίσημη απάντηση είναι ότι όμοιοι πίνακες προκύπτουν από αλλαγές βάσεων γραμμικών απεικονίσεων. Η αυστηρή απάντηση δίνεται μέσω του παρακάτω θεωρήματος. Όμως πρώτα ας υπενθυμίσουμε κάποια χρήσιμα εργαλεία.

Υπενθύμιση 1.2.1. i. Έστω $\hat{a}$ βάση του V , και $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει βάση $\hat{b}$ του V με

$$P = (1_V : \hat{b}, \hat{a}).$$

ii. Έστω $\hat{a}, \hat{b}$ βάσεις του V . Τότε ισχύει ότι

$$(1_V : \hat{b}, \hat{a})^{-1} = (1_V : \hat{a}, \hat{b}).$$

iii. Έστω $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$ γραμμικές απεικονίσεις και $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ διατεταγμένες βάσεις των U, V, W αντίστοιχα. Τότε ισχύει:

$$(g \circ f : \hat{a}, \hat{c}) = (g : \hat{b}, \hat{c}) \cdot (f : \hat{a}, \hat{b}).$$

Απόδειξη. Ενδεικτικά θα αποδείξουμε το (i). Επειδή

$$\hat{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

είναι βάση του V , υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$ με

$$P = (f : \hat{a}, \hat{a}).$$

Εφόσον P είναι αντιστρέψιμος, τότε η f είναι ισομορφισμός, άρα τα

$$f(a_1), \dots, f(a_n)$$

αποτελούν βάση του V . Θέτουμε

$$\hat{b} = (f(a_1), \dots, f(a_n))$$

και από τον ορισμό του πίνακα γραμμικής απεικόνισης έχουμε

$$P = (1_V : \hat{b}, \hat{a}).$$

□

Θεώρημα 1.2.1. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση, $\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V και $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με

$$A = (f : \hat{v}, \hat{v}).$$

Έστω $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

ii. Υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{w}$ του V τέτοια ώστε $B = (f : \hat{w}, \hat{w})$.

Απόδειξη. • i. $\Rightarrow$ ii.: Έστω P αντιστρέψιμος με

$$B = P^{-1}AP.$$

Τότε, από την Υπενθύμιση 1.2, υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{w}$ ώστε

$$P = (1_V : \hat{w}, \hat{v}).$$

Τότε:

$$B = (1_V : \hat{v}, \hat{w}) \cdot (f : \hat{v}, \hat{v}) \cdot (1_V : \hat{w}, \hat{v}) = (1_V \circ f \circ 1_V : \hat{w}, \hat{w}) = (f : \hat{w}, \hat{w}).$$

• ii. $\Rightarrow$ i.: Έστω

$$B = (f : \hat{w}, \hat{w})$$

για κάποια διατεταγμένη βάση $\hat{w}$ του V . Θα δείξουμε ότι A και B είναι όμοιοι. Θέτουμε $P = (1_V : \hat{w}, \hat{v})$. Τότε:

$$B = (f : \hat{w}, \hat{w}) = (1_V : \hat{v}, \hat{w}) \cdot (f : \hat{v}, \hat{v}) \cdot (1_V : \hat{w}, \hat{v}) = P^{-1}AP,$$

άρα οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

□

1.3 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1.

Ομάδα Α : 1,2,4,5,6,7 **Ομάδα Β :** 3

Άσκηση 1.1. Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ και $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Δείξτε ότι αν ο A είναι όμοιος με τον $\lambda \mathbb{I}_n$, τότε $A = \lambda \mathbb{I}_n$.

Άσκηση 1.2. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

- Αν οι πίνακες $A + \lambda \mathbb{I}_n, B + \lambda \mathbb{I}_n$ είναι όμοιοι για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$, δείξτε ότι οι A, B είναι όμοιοι.
- Αληθεύει ότι αν οι A^2, B^2 είναι όμοιοι, τότε οι A, B είναι όμοιοι;

Άσκηση 1.3. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ όμοιοι πίνακες. Δείξτε τις εξής ισότητες.

- $\det A = \det B$.
- $\text{rank } A = \text{rank } B$.
- $\text{Tr } A = \text{Tr } B$.

Άσκηση 1.4. Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

- οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ δεν είναι όμοιοι.
- οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι.

Άσκηση 1.5. Δίνεται γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$.

- Υπολογίστε του πίνακες $(f : \hat{e}, \hat{e})$ και $(f : \hat{a}, \hat{a})$, όπου $\hat{a}$ είναι η διατεταγμένη βάση (a_1, a_2) , όπου $a_1 = (1, -1), a_2 = (1, 1)$.
- Βρείτε αντιστρέψιμο P με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = P^{-1}(f : \hat{e}, \hat{e})P$ και αντιστρέψιμο Q με

$$(f : \hat{e}, \hat{e}) = Q^{-1}(f : \hat{a}, \hat{a})Q.$$

Άσκηση 1.6. Δίνεται γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, 3x + 3y + 6z).$$

- Δείξτε ότι το σύνολο $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Υπολογίστε τον πίνακα $(f : \hat{a}, \hat{a})$, όπου $a = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ και P αντιστρέψιμο με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = P^{-1}(f : \hat{e}, \hat{e})P$.
- Αληθεύει ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{b}$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(f : \hat{b}, \hat{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

Άσκηση 1.7. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, f(X) = AX - XA$.

- Δείξτε ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική.
- Αφού υπολογίστε τον πίνακα $B = (f : \hat{E}, \hat{E})$, όπου $\hat{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ η συνήθης διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, δείξτε ότι $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = 2$ και $B^3 = 0$.
- Αληθεύει ότι υπάρχει βάση διατεταγμένη βάση $\hat{b}$ του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε να ισχύει ότι $(f : \hat{b}, \hat{b}) = \operatorname{diag}(1, -1, 0, 0)$?

Άσκηση 1.8. Εξετάστε ποιες από τις επόμενες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ όμοιοι πίνακες.

- Αν $A = \mathbb{I}_n$, τότε $B = \mathbb{I}_n$.
- Αν $B = -A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$, τότε οι A και B δεν είναι αντιστρέψιμοι.
- Οι πίνακες $\begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & \\ & B \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n \times 2n}$ είναι όμοιοι.
- Οι πίνακες $\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & \\ & C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(n+m) \times (n+m)}$ είναι όμοιοι, για κάθε $C \in \mathbb{F}^{m \times m}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

2.1 Διαιρετότητα

Αρχικά, με $\mathbb{F}[x]$ συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{F}$.

Κάθε $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $a(x) \neq 0$ γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$a(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Με τον προηγούμενο συμβολισμό, $n = \deg a(x)$ λέγεται **βαθμός** του $a(x)$, ενώ ο a_n ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος συντελεστής** του $a(x)$.

Παρατήρηση 2.1.1. i. $\deg(a(x) + b(x)) \leq \max\{\deg a(x), \deg b(x)\}$,

ii. $\deg(a^m(x)) = m \cdot \deg a(x)$.

Θεωρούμε τις εξής πράξεις στο $\mathbb{F}[x]$:

$$a(x) + b(x), \quad a(x) \cdot b(x), \quad \lambda \cdot a(x)$$

με $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $\lambda \in \mathbb{F}$.

Έτσι, το $\mathbb{F}[x]$ γίνεται $\mathbb{F}$ -διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις πρόσθεσης και αριθμητικού πολλαπλασιασμού.

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω τα πολυώνυμα

$$a(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

και

$$b(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

στο $\mathbb{F}[x]$. Τότε, για το πολυώνυμο $c(x) = a(x) \cdot b(x)$ ισχύει:

$$c_j = \sum_{0 \leq t} a_{j-t} \cdot b_t.$$

Ορισμός 2.1.1. Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$. Θα λέμε ότι το $a(x)$ **διαίρει** το $b(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$ αν υπάρχει $c(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε

$$b(x) = a(x) \cdot c(x)$$

και το συμβολίζουμε

$$a(x) \mid b(x).$$

Παράδειγμα 2.1.2. i. Έχουμε ότι $x^2 + x + 1 \mid x^3 - 1$, αφού

$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1).$$

ii. Για κάθε πολυώνυμο $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει ότι $a(x) \mid 0$.

iii. Γενικά, $0 \mid a(x)$ αν και μόνο αν $a(x) = 0$.

Παρατήρηση 2.1.2. Αν $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ διαιρεί δύο πολυώνυμα $b(x), c(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε διαιρεί και κάθε πολυώνυμο της μορφής

$$f(x)b(x) + g(x)c(x)$$

για κάθε $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $a(x) \mid b(x)$, δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $q_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε:

$$b(x) = a(x)q_1(x).$$

Ομοίως, υπάρχει πολυώνυμο $q_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε:

$$c(x) = a(x)q_2(x).$$

Τότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} f(x)b(x) + g(x)c(x) &= f(x)a(x)q_1(x) + g(x)a(x)q_2(x) \\ &= a(x)[f(x)q_1(x) + g(x)q_2(x)]. \end{aligned}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$a(x) \mid f(x)b(x) + g(x)c(x),$$

για κάθε $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. □

Θεώρημα 2.1.1 (Ευκλείδεια Διαίρεση). Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $a(x) \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοια ώστε

$$b(x) = a(x)q(x) + r(x)$$

με $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) < \deg a(x)$.

Παράδειγμα 2.1.3. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $a(x) = x^2 + 1$ και $b(x) = x^3 - 2x + 1$. Τότε έχουμε ότι ισχύει το εξής :

$$b(x) = x \cdot a(x) + (-3x + 1).$$

Εφαρμογή 2.1.1. Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $c \in \mathbb{F}$. Τότε

$$c \in \mathbb{F} \text{ ρίζα του } f(x) \iff x - c \mid f(x).$$

Απόδειξη. Έστω ότι $x - c \mid f(x)$, τότε υπάρχει $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x) = (x - c) \cdot g(x) \Rightarrow f(c) = (c - c)g(c) = 0.$$

Αντίστροφα, από το Θεώρημα 2.1.1 υπάρχουν $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, ώστε :

$$f(x) = (x - c)q(x) + r(x), \quad r(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \deg r(x) < \deg (x - c).$$

Άρα $\deg r(x) = 0$ με

$$f(c) = (c - c)q(c) + r(c) = 0 \Leftrightarrow r(c) = 0.$$

Δηλαδή $r(x) = 0$ με

$$f(x) = (x - c)q(x).$$

□

Ορισμός 2.1.2. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, όχι και τα δύο μηδέν. Ένα $d(x) \in \mathbb{F}[x]$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των $f(x), g(x)$ αν ισχύουν τα εξής:

- i. Ο $d(x)$ είναι μονικός (ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $d(x)$ είναι ίσος με 1).
- ii. Ο $d(x)$ διαιρεί τόσο το $f(x)$ όσο και το $g(x)$.
- iii. Αν υπάρχει άλλος κοινός διαιρέτης $d'(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $d'(x) \mid f(x)$ και $d'(x) \mid g(x)$, τότε $d'(x) \mid d(x)$.

Θεώρημα 2.1.2. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, όχι και τα δύο μηδέν.

- i. Υπάρχει μοναδικός μέγιστος κοινός διαιρέτης των $f(x), g(x)$.
- ii. Έστω $d(x) = \mu.κ.δ.(f(x), g(x))$.

Τότε υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε:

$$d(x) = f(x) \cdot a(x) + g(x) \cdot b(x).$$

Ορισμός 2.1.3. Τα $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ λέγονται **σχετικά πρώτα** αν ισχύει:

$$\mu.κ.δ.(f(x), g(x)) = 1.$$

Παράδειγμα 2.1.4. Για τον $\mu.κ.δ.(x - a, x - b)$ ισχύει:

$$\mu.κ.δ.(x - a, x - b) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a \neq b \\ x - a, & \text{αν } a = b \end{cases}$$

Γενικότερα, αν $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο και $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε

$$\mu.κ.δ.(f(x), p(x)) = \begin{cases} p(x), & p(x) | f(x) \\ 1, & p(x) \nmid f(x) \end{cases}.$$

Εφαρμογή 2.1.2. Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ σχετικά πρώτα. Τότε ισχύουν:

- i. Αν $a(x) | b(x) \cdot c(x)$ με $c(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $a(x) | c(x)$.
- ii. Αν $a(x) | c(x)$ και $b(x) | c(x)$, τότε $a(x) \cdot b(x) | c(x)$.

Απόδειξη. i. Υποθέτουμε ότι $\mu.κ.δ.(a(x), b(x)) = 1$. Από το Θεώρημα 2.1.2, υπάρχουν $a'(x), b'(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε:

$$1 = a'(x)a(x) + b'(x)b(x) \tag{2.1}$$

$$\Rightarrow c(x) = c(x)a'(x)a(x) + c(x)b'(x)b(x).$$

Από υπόθεση, $a(x) \mid b(x)c(x)$, δηλαδή υπάρχει $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε

$$b(x)c(x) = q(x)a(x).$$

Άρα:

$$c(x) = c(x)a'(x)a(x) + q(x)a(x)b'(x) = a(x)[a'(x)c(x) + q(x)b'(x)]$$

άρα $a(x) \mid c(x)$.

ii. Από τη σχέση (2.1) και αφού $a(x) \mid c(x)$ και $b(x) \mid c(x)$, έπεται ότι $a(x)b(x) \mid c(x)$.

□

2.2 Ανάγωγα Πολυώνυμα

Ορισμός 2.2.1. Ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού λέγεται **ανάγωγο** στο $\mathbb{F}[x]$ αν δεν υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε:

$$a(x)b(x) = p(x) \quad \text{και} \quad \deg a(x) < \deg p(x), \quad \deg b(x) < \deg p(x).$$

Παράδειγμα 2.2.1. 1. Κάθε $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\deg p(x) = 1$ είναι ανάγωγο.

2. Το πολυώνυμο $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο, ενώ $x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$ δεν είναι, αφού

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Παρατήρηση 2.2.1. Έστω $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ανάγωγο και μονικό. Τότε:

$$\mu.κ.δ.(p(x), q(x)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } p(x) \nmid q(x), \\ p(x), & \text{αν } p(x) \mid q(x). \end{cases}$$

Πρόταση 2.2.1. Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Αν το $z \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του $f(x)$, τότε και το συζυγές $\bar{z}$ είναι ρίζα του $f(x)$.¹

Ερώτημα 2.2.1. Ποια είναι τα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$ και στο $\mathbb{C}[x]$;

¹Στο $\mathbb{C}$: Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχουν μοναδικά $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $z = a + bi$. Δηλαδή, $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από $\mathbb{R}$ με βάση $\{1, i\}$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

- i. Τα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{C}[x]$ είναι τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα.²
- ii. Τα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$ είναι τα πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια με $\Delta < 0$.

Θεώρημα 2.2.1. Κάθε πολυώνυμο $f(x)$ θετικού βαθμού γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$f(x) = c \cdot p_1^{n_1}(x) \cdots p_s^{n_s}(x),$$

όπου $c \in \mathbb{C}$ και τα $p_i(x)$ είναι μονικά, ανά δύο διαφορετικά, ανάγωγα πολυώνυμα.

Παράδειγμα 2.2.2. 1. Έστω $f(x) = x^3 - 1 \in \mathbb{F}[x]$. Ανάλογα με το σώμα $\mathbb{F}$:

- Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, τότε $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
- Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, τότε:

$$x^3 - 1 = (x - 1) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right).$$

2. Για $g(x) = x^4 + 1$, παρατηρούμε ότι:

$$g(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) (x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Πρόταση 2.2.2. Έστω

$$f(x) = c_1 p_1(x)^{m_1} \cdots p_s(x)^{m_s}, \quad g(x) = c_2 p_1(x)^{n_1} \cdots p_s(x)^{n_s},$$

όπου τα $p_i(x)$ είναι μονικά, ανάγωγα, ανά δύο διαφορετικά, και $0 \leq m_i, n_i$. Ορίζουμε:

$$d_i = \min\{m_i, n_i\}, \quad d(x) = p_1(x)^{d_1} \cdots p_s(x)^{d_s}.$$

Τότε:

$$d(x) = \mu.κ.δ.\{f(x), g(x)\}.$$

Παράδειγμα 2.2.3. Στο $\mathbb{R}[x]$, θεωρούμε:

$$f(x) = 3(x - 5)^{10}(x^2 + x + 1)^6, \quad g(x) = -(x - 5)^4(x - 7)^4(x^2 + x + 1)^{10}.$$

Τότε:

$$\mu.κ.δ.(f(x), g(x)) = (x - 5)^4(x^2 + x + 1)^6.$$

²Αυτό είναι ισοδύναμο με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας: Κάθε πολυώνυμο θετικού βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $a \in \mathbb{F}$ ρίζα του $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Ο μέγιστος ακέραιος m τέτοιος ώστε $(x - a)^m \mid f(x)$ λέγεται **πολλαπλότητα** της ρίζας a στο $f(x)$. Συμβολίζεται με $m = \tau(a)$.

Παράδειγμα 2.2.4. Για $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ και

$$f(x) = (x - 2)^5(x - 3)(x^2 + x + 1),$$

έχουμε:

$$\tau(2) = 5, \quad \tau(3) = 1.$$

Ορισμός 2.2.3. Μια ρίζα a του $f(x)$ λέγεται **απλή** αν η πολλαπλότητά της είναι ίση με 1. Διαφορετικά, η ρίζα λέγεται **πολλαπλή**.

Πρόταση 2.2.3. Έστω $a \in \mathbb{F}$ ρίζα του $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Τότε, a είναι πολλαπλή ρίζα του $f(x)$ αν και μόνο αν είναι και ρίζα της παραγώγου $f'(x)$.

Απόδειξη. Αν a είναι πολλαπλή ρίζα, τότε $(x - a)^2 \mid f(x)$, δηλαδή υπάρχει $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε:

$$f(x) = (x - a)^2 g(x) \Rightarrow f'(x) = 2(x - a)g(x) + (x - a)^2 g'(x),$$

οπότε $f'(a) = 0$.

Αντίστροφα, έστω $f(a) = f'(a) = 0$. Επειδή $f(a) = 0$, υπάρχει $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $f(x) = (x - a)g(x)$. Τότε:

$$f'(x) = (x - a)g'(x) + g(x) \Rightarrow f'(a) = g(a) = 0 \Rightarrow (x - a) \mid g(x),$$

οπότε $f(x) = (x - a)^2 h(x)$ για κάποιο $h(x)$, δηλαδή a είναι πολλαπλή ρίζα. □

Πόρισμα 2.2.1. Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν $\mu.κ.δ.(f(x), f'(x)) = 1$, τότε κάθε ρίζα του $f(x)$ είναι απλή.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση μέσω της Πρότασης 2.2.3. □

2.3 Πολυώνυμα και πίνακες

Ορισμός 2.3.1. Έστω $f(x) = f_m x^m + \cdots + f_1 x + f_0 \in \mathbb{F}[x]$ και $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Με $f(A)$ συμβολίζουμε τον πίνακα:

$$f(A) = f_m A^m + \cdots + f_1 A + f_0 I_n.$$

Παράδειγμα 2.3.1. Αν $f(x) = -3x + 5 \in \mathbb{R}[x]$, τότε:

$$f(A) = -3A + 5I_n, \quad \text{για κάθε } A \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Παρατήρηση 2.3.1. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, και $h(x) = f(x) + g(x)$, $\kappa(x) = f(x)g(x)$. Τότε, για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ισχύει:

$$h(A) = f(A) + g(A), \quad \kappa(A) = f(A)g(A).$$

Παράδειγμα 2.3.2. 1. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = x + 1$ στο $\mathbb{R}[x]$. Τότε $k(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 - x$, άρα:

$$k(A) = f(A) \cdot g(A) = A^3 - A = A(A - I_n)(A + I_n).$$

2. Αν $b(x) = q(x) \cdot a(x) + r(x)$, τότε $b(A) = q(A) \cdot a(A) + r(A)$.

2.4 Πολυώνυμα και γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 2.4.1. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $a(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$. Ορίζουμε:

$$a(f) : V \rightarrow V, \quad a(f) = a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0 1_V.$$

Παρατήρηση 2.4.1. Έστω $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$, με $c(x) = a(x) + b(x)$, $d(x) = a(x) \cdot b(x)$ και $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Τότε:

$$c(f) = a(f) + b(f), \quad d(f) = a(f) \circ b(f).$$

Παράδειγμα 2.4.1. Αν $P(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{F}[x]$, τότε:

$$P(f) = f^2 - 1_V = (f - 1_V) \circ (f + 1_V).$$

Πρόταση 2.4.1. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση, $\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{v}, \hat{v})$. Τότε, για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, ισχύει:

$$(\varphi(f) : \hat{v}, \hat{v}) = \varphi(A).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} (\varphi(f) : \hat{v}, \hat{v}) &= (\varphi_m f^m + \cdots + \varphi_1 f + \varphi_0 1_V : \hat{v}, \hat{v}) \\ &= \varphi_m (f^m : \hat{v}, \hat{v}) + \cdots + \varphi_1 (f : \hat{v}, \hat{v}) + \varphi_0 (1_V : \hat{v}, \hat{v}) \\ &= \varphi_m A^m + \cdots + \varphi_1 A + \varphi_0 I_n = \varphi(A). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.4.2. i. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ με πίνακα:

$$A = (f : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Τότε αν $g = f^2 + 3f + 1_{\mathbb{F}^3}$, έχουμε:

$$(g : \hat{v}, \hat{v}) = A^2 + 3A + I_n = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 4 \\ -6 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii. Έστω $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοιο ώστε $\varphi(f) = 0$. Αν ο σταθερός όρος $\varphi_0 \neq 0$, τότε f είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $\varphi(x) = \varphi_m x^m + \cdots + \varphi_1 x + \varphi_0$. Τότε:

$$\varphi(f) = \varphi_m f^m + \cdots + \varphi_1 f + \varphi_0 1_V = 0.$$

Μεταφέρουμε τον σταθερό όρο:

$$1_V = -\frac{1}{\varphi_0} \cdot (\varphi_m f^m + \cdots + \varphi_1 f) = \left[-\frac{1}{\varphi_0} \cdot (\varphi_m f^{m-1} + \cdots + \varphi_1) \right] \circ f.$$

Άρα f είναι αριστερά και δεξιά αντιστρέψιμη, δηλαδή ισομορφισμός.

□

2.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2.

Ομάδα Α : 1,2,3,5,6,7,8,9,11,15 **Ομάδα Β :** 4,10,12,13,14,16

Άσκηση 2.1. Έστω $f(x), p(x) \in \mathbb{F}[x]$ όπου $p(x)$ μονικό και ανάγωγο. Δείξτε ότι

$$\mu.κ.δ.(f(x), p(x)) = 1 \quad \text{ή} \quad \mu.κ.δ.(f(x), p(x)) = p(x).$$

Άσκηση 2.2. Βρείτε το $\mu.κ.δ. (x^2 + 1, x^{2018} + 1)$ και το $\mu.κ.δ. (x^2 + 1, x^{2018} - 1)$.

Άσκηση 2.3. α. Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $a, b \in \mathbb{F}$ με $a \neq b$. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $(x - a)(x - b)$.

β. Βρείτε όλες τις τιμές των $c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $(x - 1)(x - 2) \mid x^{100} + cx^5 + dx + 1$.

γ. Βρείτε όλες τις τιμές των $c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $(x - 1)^2 \mid x^{100} + cx^5 + dx + 1$.

Άσκηση 2.4. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ και $g(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

α. Βρείτε τις ρίζες στο $\mathbb{C}$ του $f(x)$.

β. Για ποιές τιμές του a τα $f(x), g(x)$ έχουν κοινή πραγματική ρίζα?

γ. Βρείτε την ανάλυση του $g(x)$ σε γινόμενο μονικών αναγώγων στο $\mathbb{R}[x]$ αν μια ρίζα του στο $\mathbb{C}$ είναι το i .

Άσκηση 2.5. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, όπου $f(x) = x^5 - x^4 - x^2 + x$, $g(x) = x^2 + x - 6$. Να βρέθει ο $\mu.κ.δ.$ και το $\epsilon.κ.π.$ τους.

Άσκηση 2.6. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, όπου $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 + x - 2$. Να βρεθούν οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $f(A) = g(A) = 0$.

Άσκηση 2.7. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\mu.κ.δ.(f(x), g(x)) = 1$.

α. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $f(A) = g(A) = 0$.

β. Αληθεύει ότι για κάθε $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε $h(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$?

Άσκηση 2.8. Δείξτε ότι κάθε ρίζα στο $\mathbb{C}$ του $f(x)$ είναι απλή στις περιπτώσεις

- a. $f(x) = x^n - 1$,
- b. $f(x) = x^n + x + 1$.

Άσκηση 2.9. Έστω $f: \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ η γραμμική απεικόνιση με $(f: \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, όπου $\hat{a}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$ και $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{F}[x]$. Να βρεθεί ο πίνακας $(\varphi(f): \hat{a}, \hat{a})$.

Άσκηση 2.10. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Δείξτε τα εξής.

- a. Αν ο A είναι διαγώνιος, $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, τότε $\varphi(A) = \text{diag}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$.
- b. Αν ο A είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$, όπου $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ και $n_1 + \dots + n_k = n$ ('μπλόκ διαγώνιος'), τότε $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi(A_k) \end{pmatrix}$. (Σημείωση. Εννοούμε ότι τα αόρατα στοιχεία είναι 0.)
- c. Αν ο A είναι άνω τριγωνικός, $A = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, τότε $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(a_1) & & * \\ & \ddots & \\ & & \varphi(a_n) \end{pmatrix}$.
- d. Αν ο A είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$, όπου $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ και $n_1 + \dots + n_k = n$ ('μπλόκ άνω τριγωνικός'), τότε $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(A_1) & & * \\ & \ddots & \\ & & \varphi(A_k) \end{pmatrix}$.

Άσκηση 2.11. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

- a. Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με μη μηδενικό σταθερό όρο και $\varphi(A) = 0$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

- b. Έστω $A^5 = 0$. Δείξτε ότι ο πίνακας $\varphi(A)$ είναι αντιστρέψιμος, όπου $\varphi(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

Άσκηση 2.12. Το συμπέρασμα στο ερώτημα b. ονομάζεται το **Θεώρημα του Lagrange**. Για $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, λέει ότι από n διαφορετικά σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδική πολυωνμική καμπύλη βαθμού το πολύ $n - 1$, κατ'αναλογία με το γεγονός ότι από δύο διακεκριμένα σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδική ευθεία. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ διακεκριμένα. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}_{n-1}[x]$ όλων των πολυωνύμων βαθμού το πολύ $n - 1$ και την απεικόνιση

$$f: \mathbb{F}_{n-1}[x] \rightarrow \mathbb{F}^n, f(\varphi(x)) = (\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n)).$$

- a. Δείξτε ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική, 1-1 και επί.
- b. Δείξτε ότι για κάθε $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ υπάρχει μοναδικό $\varphi(x) \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ τέτοιο ώστε $\varphi(\lambda_1) = a_1, \dots, \varphi(\lambda_n) = a_n$.
- c. Βρείτε πολυώνυμο $\varphi(x)$ τέτοιο ώστε $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 1, \varphi(-1) = 1$.
- d. Δείξτε ότι το $\varphi(x)$ του υποερωτήματος b. δίνεται από τη σχέση $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x)$, όπου

$$\varphi_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}.$$

Άσκηση 2.13. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

- a. Δείξτε ότι $f(B) = \begin{pmatrix} f(A) & f'(A) \\ 0 & f(A) \end{pmatrix}$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, όπου $f'(x)$ είναι η παράγωγος του $f(x)$.
- b. Δείξτε ότι αν $(A - I_n)^{2013}(A - 2I_n)^{2014} = 0$, τότε $(B - I_{2n})^{2014}(B - 2I_{2n})^{2015} = 0$.

Άσκηση 2.14. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ υπάρχει μη μηδενικό $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού το πολύ n^2 τέτοιο ώστε $\varphi(A) = 0$.

Άσκηση 2.15. Έστω $A, B, P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $B = P^{-1}AP$. Δείξτε ότι $\varphi(B) = P^{-1}\varphi(A)P$ για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Άσκηση 2.16. Έστω $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$e_i = \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_i \leq n} a_{t_1} a_{t_2} \dots a_{t_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 3$, τότε

$$e_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad e_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3, \quad e_3 = a_1 a_2 a_3.$$

Δείξτε ότι αν $e_i > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, τότε $a_i > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Άσκηση 2.17. Εξετάστε ποιές από τις επόμενες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα. Έστω $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$.

- a. Αν $f(x) \mid g(x)h(x)$, τότε $f(x) \mid g(x)$ ή $f(x) \mid h(x)$.
- b. Έστω $f(x)$ ανάγωγο. Αν $f(x) \mid g(x)h(x)$, τότε $f(x) \mid g(x)$ ή $f(x) \mid h(x)$.
- c. Αν $f(x) \mid h(x)$ και $g(x) \mid h(x)$, τότε $f(x)g(x) \mid h(x)$.
- d. Αν $f(x) \mid h(x)$, $g(x) \mid h(x)$ και $\mu.κ.δ.(f(x), g(x)) = 1$, τότε $f(x)g(x) \mid h(x)$.
- e. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Αν $f(A) = g(A) = 0$, τότε τα $f(x), g(x)$ δεν είναι σχετικά πρώτα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

3.1 Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και ιδιόχωροι πίνακα

3.1.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα

Ορισμός 3.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ και $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$, $X \neq 0$. Αν ισχύει η σχέση

$$AX = \lambda X, \quad (3.1)$$

θα λέμε ότι λ είναι **ιδιοτιμή** του A και το X είναι αντίστοιχο **ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- i. Έχουμε $AX = X$, άρα 1 είναι ιδιοτιμή του A και X αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.
- ii. Έχουμε $AY = -Y$, άρα -1 είναι ιδιοτιμή του A και Y ιδιοδιάνυσμα.
- iii. Έχουμε $AZ = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda Z = AZ$, άρα Z δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A .

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A .

Απόδειξη. Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση (3.1) έχουμε:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 3y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = \lambda x \\ 4x + 2y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 3y = 0 \\ 4x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0.$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$\lambda = 5 \quad \text{και} \quad \lambda = -2.$$

Τώρα βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

i. Για $\lambda = -2$: Από το σύστημα προκύπτει $3x + 3y = 0 \Rightarrow y = -x$, οπότε:

$$V(-2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ii. Για $\lambda = 5$: Από $-4x + 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$, οπότε:

$$V(5) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{4}{3}x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

□

Παράδειγμα 3.1.3. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

a. Υποθέτουμε ότι $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Τότε:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα δεν υπάρχουν ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A στο $\mathbb{R}$.

b. Αν $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, τότε για $\lambda \in \mathbb{C}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$, ισχύει:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = i \text{ ή } \lambda = -i.$$

i. Για την ιδιοτιμή $\lambda = i$, από $ix - y = 0 \Rightarrow y = ix$. Άρα:

$$V(i) = \left\{ X \in \mathbb{C}^{2 \times 1} \mid y = ix \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = i$.

ii. Για την ιδιοτιμή $\lambda = -i$, από $-ix - y = 0 \Rightarrow y = -ix$. Άρα:

$$V(-i) = \left\{ X \in \mathbb{C}^{2 \times 1} \mid y = -ix \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$.

Ιδιότητες 3.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i. Το λ είναι ιδιοτιμή του A .
- ii. Υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda \mathbb{I}_n)X = 0$.
- iii. $\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0$.

Απόδειξη.

- i. $\Rightarrow$ ii.: Από τον ορισμό, υπάρχει $X \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$AX = \lambda X \iff (A - \lambda \mathbb{I}_n)X = 0.$$

- ii. $\Rightarrow$ iii.: Η συνεπαγωγή έπεται από τη γνωστή πρόταση:

$$\text{Αν } B \in \mathbb{F}^{n \times n} \text{ και } BX = 0 \text{ έχει μη μηδενική λύση, τότε } \det B = 0.$$

- iii. $\Rightarrow$ i.: Αν $\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0$, τότε υπάρχει $X \neq 0$ με

$$(A - \lambda \mathbb{I}_n)X = 0 \Rightarrow AX = \lambda X,$$

άρα λ είναι ιδιοτιμή.

□

Πόρισμα 3.1.1. i. Ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A .

- ii. Αν ο πίνακας A είναι άνω ή κάτω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία $a_1, \dots, a_n$, τότε:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0 \iff \prod_{i=1}^n (a_i - \lambda) = 0.$$

Δηλαδή, το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\lambda = a_i$ για κάποιο i .

- iii. Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν είναι ιδιοτιμή του A^t .

Απόδειξη.

- i. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

- ii. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

- iii. Από:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = \det((A - \lambda \mathbb{I}_n)^t) = \det(A^t - \lambda \mathbb{I}_n),$$

συμπεραίνουμε ότι λ είναι ιδιοτιμή του A^t .

□

Παράδειγμα 3.1.4. Παρατηρούμε ότι 2 είναι ιδιοτιμή του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

αφού:

$$\det(A - 2I_3) = \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Επίσης, το 0 **δεν** είναι ιδιοτιμή του A γιατί:

$$\det A = 6 \neq 0.$$

3.1.2 Ιδιόχωροι Πίνακα

Ορισμός 3.1.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και λ ιδιοτιμή του A . Ο **ιδιόχωρος** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι το σύνολο:

$$V_A(\lambda) = \{X \in \mathbb{F}^{n \times 1} \mid AX = \lambda X\}.$$

Παρατήρηση 3.1.1. i. Το $V_A(\lambda)$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στο λ , μαζί με το μηδενικό διάνυσμα.

ii. Το $V_A(\lambda)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n \times 1}$, αφού είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$(A - \lambda \mathbb{I}_n)X = 0.$$

Θεώρημα 3.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή του A . Τότε:

$$\dim V_A(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda \mathbb{I}_n).$$

Απόδειξη. Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$\mathcal{L}_B : \mathbb{F}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times 1}, \quad \mathcal{L}_B(X) = BX,$$

όπου

$$B = A - \lambda \mathbb{I}_n.$$

Τότε ισχύουν:

- i. $\dim \ker \mathcal{L}_B + \dim \text{Im} \mathcal{L}_B = n$ (Θεώρημα διάστασης),
- ii. $\dim \text{Im} \mathcal{L}_B = \text{rank} B$.

Επειδή $\ker \mathcal{L}_B = V_A(\lambda)$, προκύπτει:

$$\dim V_A(\lambda) = \dim \ker \mathcal{L}_B = n - \text{rank}(A - \lambda \mathbb{I}_n).$$

□

3.1.3 Ιδιότητες Ιδιόχωρων

Πρόταση 3.1.1. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A και $X_1, \dots, X_s \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $X_i \in V_A(\lambda_i)$ για κάθε $i \in \{1, \dots, s\}$. Αν

$$X_1 + \dots + X_s = 0,$$

τότε

$$X_1 = X_2 = \dots = X_s = 0.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο s .

- **Βάση:** Για $s = 1$, προφανώς $X_1 = 0$.

- **Επαγωγικό βήμα:** Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $s-1$. Υποθέτουμε ότι $X_1 + \dots + X_s = 0$ με κάθε $X_i \in V_A(\lambda_i)$. Τότε:

$$AX_1 + \dots + AX_s = A(X_1 + \dots + X_s) = A(0) = 0,$$

άρα:

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s = 0.$$

Αφαιρούμε τη σχέση $\lambda_1(X_1 + \dots + X_s) = 0$:

$$(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s) - \lambda_1(X_1 + \dots + X_s) = 0$$

$$\iff (\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \dots + (\lambda_s - \lambda_1)X_s = 0.$$

Για $i \geq 2$, έχουμε ότι

$$(\lambda_i - \lambda_1)X_i \in V_A(\lambda_i)$$

και αφού οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, τότε

$$\lambda_i \neq \lambda_1 \Rightarrow \lambda_i - \lambda_1 \neq 0.$$

Άρα, με την επαγωγική υπόθεση προκύπτει

$$X_2 = \dots = X_s = 0$$

και από την αρχική υπόθεση έπεται $X_1 = 0$. □

Πόρισμα 3.1.2. Ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Έστω $X_1, \dots, X_s$ ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ αντίστοιχα. Αν

$$m_1 X_1 + \dots + m_s X_s = 0$$

για κάποιους $m_i \in \mathbb{F}$, τότε από την Πρόταση 3.1.1 έχουμε

$$m_i X_i = 0$$

δηλαδή $m_i = 0$, επειδή $X_i \neq 0$. Άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. □

Εφαρμογή 3.1.1. Έστω X, Y ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Δείξτε ότι το $aX + bY$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A , αν $ab \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι $AX = rX$ και $AY = mY$ με $r \neq m$, και ότι $aX + bY$ είναι ιδιοδιάνυσμα για κάποια ιδιοτιμή λ . Τότε:

$$\begin{aligned} A(aX + bY) &= \lambda(aX + bY) \\ \Rightarrow arX + bmY &= a\lambda X + b\lambda Y \\ \Rightarrow (ar - a\lambda)X + (bm - b\lambda)Y &= 0. \end{aligned}$$

Επειδή X, Y είναι ιδιοδιανύσματα με διακεκριμένες ιδιοτιμές, είναι γραμμικά ανεξάρτητα (από Πρόταση 3.1.2), άρα τα αντίστοιχα συντελεστές πρέπει να είναι μηδέν:

$$\begin{cases} ar - a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = r \\ bm - b\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = m \Rightarrow r = m \end{cases}$$

άτοπο. Άρα το $aX + bY$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα αν $ab \neq 0$. □

Πρόταση 3.1.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, λ ιδιοτιμή του A και X αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε, η τιμή $\varphi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\varphi(A)$ και το X είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Δηλαδή:

$$V_A(\lambda) \subseteq V_{\varphi(A)}(\varphi(\lambda)).$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε $AX = \lambda X$. Παρατηρούμε:

$$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2X.$$

Γενικεύουμε με επαγωγή στον εκθέτη.

Ισχυρισμός: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει: $A^m X = \lambda^m X$.

Απόδειξη Ισχυρισμού:

- **Βάση:** Για $m = 1$, ισχύει άμεσα: $AX = \lambda X$.
- **Βήμα:** Έστω $A^m X = \lambda^m X$. Τότε:

$$A^{m+1}X = A(A^m X) = A(\lambda^m X) = \lambda^m(AX) = \lambda^m \cdot \lambda X = \lambda^{m+1}X.$$

Άρα, ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα $\varphi(x) = \varphi_m x^m + \dots + \varphi_0$. Τότε:

$$\varphi(A)X = (\varphi_m A^m + \dots + \varphi_0 \mathbb{I}_n) X = (\varphi_m \lambda^m + \dots + \varphi_0) X = \varphi(\lambda)X.$$

Εφόσον $X \neq 0$, είναι ιδιοδιάνυσμα του $\varphi(A)$ για την ιδιοτιμή $\varphi(\lambda)$. □

Παράδειγμα 3.1.5. Προσοχή! Η συμπερίληψη δεν είναι ισότητα γενικά. Αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

τότε:

$$V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Αν όμως $\varphi(x) = x^2$, τότε

$$\varphi(A) = A^2 = I_2,$$

και:

$$V_{\varphi(A)}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

Άρα

$$V_A(1) \subsetneq V_{\varphi(A)}(1).$$

Παράδειγμα 3.1.6. a. Αν $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα πίνακα A για ιδιοτιμή -1 , τότε είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A^{1821} + 10A$, με ιδιοτιμή:

$$(-1)^{1821} + 10(-1) = -1 + (-10) = -11.$$

b. Αν $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$ με ιδιοτιμές 2 και -3 , τότε για $\varphi(x) = x^2 + 5$, οι ιδιοτιμές του $\varphi(A)$ είναι:

$$\varphi(2) = 2^2 + 5 = 9, \quad \varphi(-3) = 9 + 5 = 14.$$

c. Αν B είναι πίνακας με ιδιοτιμές -1 και 1 , τότε ο πίνακας B^2 έχει μοναδική ιδιοτιμή το 1 , αφού:

$$(-1)^2 = 1, \quad 1^2 = 1.$$

3.2 Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 3.2.1. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση, $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in V$ με $v \neq 0$. Αν ισχύει

$$f(v) = \lambda v,$$

τότε το λ λέγεται **ιδιοτιμή** της f και το v είναι **ιδιοδιάνυσμα** της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Αν λ είναι ιδιοτιμή της f , τότε ο αντίστοιχος **ιδιόχωρος** της f είναι το σύνολο:

$$V_f(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Παρατήρηση 3.2.1. Αν $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και λ ιδιοτιμή της, τότε ισχύει:

$$V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda \cdot 1_V) \leq V.$$

Πρόταση 3.2.1. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Αν $\hat{v}$ είναι οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του V και $A = (f: \hat{v}, \hat{v})$, τότε ισχύει:

$$\dim V_f(\lambda) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(f - \lambda 1_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda \mathbb{I}_n).$$

Παράδειγμα 3.2.1. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (0, 0, x + y)$. Να βρεθεί μια βάση κάθε ιδιόχωρου.

Απόδειξη. Αναζητούμε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ώστε:

$$f(x, y, z) = \lambda(x, y, z), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Από τη σχέση:

$$(0, 0, x + y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x = 0 \\ \lambda y = 0 \\ \lambda z = x + y \end{cases}.$$

Το σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Άρα, από τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε $x = -y$. Επομένως:

$$V_f(0) = \{(x, -x, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Το σύνολο $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα είναι βάση του ιδιόχωρου $V_f(0)$. $\square$

Προσοχή στο συγκεκριμένο παράδειγμα!

Παράδειγμα 3.2.2. Έστω $V = \mathbb{R}_2[x]$ και $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], f(\varphi(x)) = \varphi(x) + \varphi'(x)$ γραμμική απεικόνιση. Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f .

Απόδειξη. Έστω $\varphi(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Τότε:

$$f(\varphi(x)) = \varphi(x) + \varphi'(x) = ax^2 + bx + c + 2ax + b = ax^2 + (2a + b)x + (b + c).$$

Αν $f(\varphi(x)) = \lambda \cdot \varphi(x)$, τότε:

$$ax^2 + (2a + b)x + (b + c) = a\lambda x^2 + b\lambda x + c\lambda.$$

Άρα προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} a(1 - \lambda) = 0 \\ 2a - b(1 - \lambda) = 0 \\ b + c(1 - \lambda) = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$ έχουμε $a = b = 0$, άρα $V_f(1) = \langle 1 \rangle$ και η βάση του ιδιόχωρου είναι $\{1\}$. $\square$

Πρόταση 3.2.2. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $A = (f: \hat{a}, \hat{a})$ ως προς κάποια βάση $\hat{a}$ του V , και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε ισχύουν:

1. i. Η λ είναι ιδιοτιμή της f αν και μόνο αν είναι ιδιοτιμή του A .
2. ii. Αν $v \in V$, τότε $v \in V_f(\lambda)$ αν και μόνο αν $[v]_{\hat{a}} \in V_A(\lambda)$.
3. iii. Το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι βάση του $V_f(\lambda)$ αν και μόνο αν το

$$\{[v_1]_{\hat{a}}, \dots, [v_m]_{\hat{a}}\}$$

¹ είναι βάση του $V_A(\lambda)$.

Απόδειξη. i. Έστω λ ιδιοτιμή της f . Τότε υπάρχει $v \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$f(v) = \lambda v \iff (f - \lambda 1_V)(v) = 0$$

δηλαδή η $f - \lambda 1_V$ δεν είναι αντιστρέψιμη, άρα $A - \lambda \mathbb{I}_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0,$$

δηλαδή η λ είναι ιδιοτιμή του A .

ii. Έστω

$$v \in V_f(\lambda) \iff f(v) = \lambda v \iff A[v]_{\hat{a}} = \lambda[v]_{\hat{a}} \iff [v]_{\hat{a}} \in V_A(\lambda).$$

iii. Ο μετασχηματισμός $v \mapsto [v]_{\hat{a}}$ είναι ισομορφισμός $g: V \rightarrow \mathbb{F}^n$, και περιορίζεται σε ισομορφισμό $V_f(\lambda) \rightarrow V_A(\lambda)$ από το (ii).

□

Παράδειγμα 3.2.3. Έστω $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3)$ με

$$a_1 = 1, \quad a_2 = x + 1, \quad a_3 = x^2 + 1$$

και έστω $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ τέτοια ώστε:

$$A = (f: \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i. Να δείξετε ότι το $\hat{a}$ είναι βάση του V .

ii. Αληθεύει ότι το $a_1 - a_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα;

¹ Για παράδειγμα, αν $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $v = a_1 + 2a_2 + 5a_3$, τότε

$$[v]_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- iii. Να βρείτε βάση για κάθε ιδιόχωρο της f .
- iv. Να βρείτε βάση για κάθε ιδιόχωρο του A .

Απόδειξη. i. Τα a_1, a_2, a_3 παράγουν (δείξτε γιατί) το V και το πλήθος τους είναι ίσο με $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα και βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

- ii. Παρατηρήστε πως ισχύει ότι $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = a_2$. Θεωρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το εξής :

$$f(a_1 - a_3) = \lambda(a_1 - a_3) \Leftrightarrow f(a_1) - f(a_3) = \lambda(a_1 - a_3) \Leftrightarrow \lambda(a_1 - a_3) = 0 \Leftrightarrow a_1 - a_3 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

Άρα το $a_1 - a_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f με αντίστοιχη ιδιοτιμή το 0.

- iii. Έστω $v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\iff f(r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3) = \lambda(r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3) \\ &\iff r_1 f(a_1) + r_2 f(a_2) + r_3 f(a_3) = \lambda r_1 a_1 + \lambda r_2 a_2 + \lambda r_3 a_3 \\ &\iff \lambda r_1 a_1 + a_2(\lambda r_2 - r_1 - r_2 - r_3) + \lambda r_3 a_3 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda r_1 = 0 \\ r_1 + r_2(1 - \lambda) + r_3 = 0 \\ \lambda r_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν ισχύει

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1.$$

Άρα, έχουμε ότι

- 1. $V_f(0) = \{r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3 \mid r_1 + r_2 + r_3 = 0\} = \langle a_2 - a_1, a_3 - a_1 \rangle$
 γραμμικά ανεξάρτητα (δείξτε γιατί), άρα $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1\}$ είναι βάση του $V_f(0)$.

- 2. $V_f(1) = \{r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3 \mid r_1 = r_3 = 0\} = \{r_2 a_2\} = \langle a_2 \rangle$.

Άρα ισχύει ότι $\{a_2\}$ βάση του $V_f(1)$.

iv. Από την Πρόταση 3.2.2 έχουμε ότι

$$\{[a_3 - a_1]_{\hat{a}}, [a_2 - a_1]_{\hat{a}}\}$$

είναι βάση του $V_A(0)$ και

$$\{[a_2]_{\hat{a}}\}$$

βάση του $V_A(1)$.

□

3.3 Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Ορισμός 3.3.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $A = (a_{ij})$. Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A είναι:

$$\chi_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.3.1. 1. Αν $A = (a)$, τότε $\chi_A(x) = \det(a - x) = a - x$.

2. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, τότε:

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det \begin{pmatrix} 1 - x & 3 \\ 4 & 2 - x \end{pmatrix} \\ &= (1 - x)(2 - x) - 12 \\ &= x^2 - 3x - 10 \\ &= (x + 2)(x - 5). \end{aligned}$$

3. Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, τότε:

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 4 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)[(1-x)(2-x) - 12] \\ &= (2-x)(x+2)(x-5).\end{aligned}$$

Ιδιότητες 3.3.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν:

- i. $\chi_A(x) = \chi_{A^t}(x)$
- ii. Αν A είναι άνω ή κάτω τριγωνικός με a_{ii} τα διαγώνια στοιχεία του, τότε:

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x - a_{11}) \cdots (x - a_{nn}).$$

- iii. Αν $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ για $i = 1, \dots, s$ και $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με

$$n = n_1 + \cdots + n_s$$

της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

τότε:

$$\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) \cdots \chi_{A_s}(x)$$

Απόδειξη. i. Έχουμε:

$$\chi_{A^t}(x) = \det(A^t - x\mathbb{I}_n) = \det((A - x\mathbb{I}_n)^t) = \det(A - x\mathbb{I}_n) = \chi_A(x).$$

- ii. Έστω A άνω τριγωνικός, δηλαδή:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Τότε:

$$\chi_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} - x & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x).$$

iii. Χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.3.1. (α□) Αν $B_1 \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}$, $B_2 \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2}$ και $B = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, τότε:

$$\det B = \det B_1 \cdot \det B_2.$$

$$(\beta \square) \text{ Αν } B = \begin{pmatrix} B_1 & * & \cdots & * \\ 0 & B_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix} \text{ με } B_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i} \text{ και } n = n_1 + \cdots + n_s, \text{ τότε:}$$

$$\det B = \prod_{i=1}^s \det B_i.$$

Απόδειξη λήμματος.

(α□) Αν $B_1 = \mathbb{I}_{n_1}$, τότε η ιδιότητα ισχύει άμεσα με ανάπτυγμα κατά την πρώτη στήλη του B . Ομοίως για $B_2 = \mathbb{I}_{n_2}$ με ανάπτυγμα κατά την τελευταία γραμμή. Στη γενική περίπτωση:

$$\begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & \mathbb{I}_{n_2} \end{pmatrix},$$

οπότε:

$$\det B = \det B_1 \cdot \det B_2.$$

(β□) Το γενικό αποτέλεσμα έπεται με επαγωγή, εφαρμόζοντας διαδοχικά το (1).

Επιστροφή στην απόδειξη.

Εφόσον A είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

έχουμε:

$$\chi_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n) = \det \begin{pmatrix} A_1 - xI_{n_1} & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 - xI_{n_2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s - xI_{n_s} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^s \chi_{A_i}(x).$$

□

Πρόταση 3.3.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

- Ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ είναι $(-1)^n$.
- Αν $A = (a_{ij})$, τότε:

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) + \psi(x),$$

όπου $\deg \psi(x) \leq n - 2$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχουμε:

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.1, γνωρίζουμε ότι η επέκταση του προσδιοριστή περιλαμβάνει όλους τους όρους της μορφής:

$$(-1)^{\kappa} \cdot (a_{1j_1} - x\delta_{1j_1}) \cdots (a_{nj_n} - x\delta_{nj_n}),$$

όπου $(j_1, \dots, j_n)$ είναι μια αναδιάταξη του $\{1, \dots, n\}$.

Ο μόνος όρος που θα περιέχει x^n είναι όταν $(j_1, \dots, j_n) = (1, \dots, n)$, δηλαδή από το γινόμενο:

$$(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x).$$

Αυτός δίνει πολώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο $(-x)^n = (-1)^n x^n$.

Όλοι οι υπόλοιποι όροι περιλαμβάνουν το πολύ $n - 1$ εμφανίσεις του x , και άρα συνεισφέρουν σε πολώνυμο βαθμού το πολύ $n - 1$.

Επιπλέον, από απλή παρατήρηση του γινομένου:

$$\prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) = (-1)^n x^n + \cdots + (-1)^1 \operatorname{tr} Ax + \det A,$$

οπότε η διαφορά:

$$\chi_A(x) - \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

είναι πολυώνυμο με βαθμό το πολύ $n - 2$, δηλαδή:

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) + \psi(x), \quad \deg \psi(x) \leq n - 2.$$

□

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = A - x\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τον όρο

$$(-1)^{\kappa} b_{1j_1} \cdots b_{nj_n}$$

με

$$(j_1, \dots, j_n) \neq (1, \dots, n).$$

Άρα υπάρχει t με $j_t \neq t$, οπότε

$$b_{tj_t} \neq a_{tt} - x.$$

Τότε $b_{tj_t} = a_{ts}$ για κάποιο $t \neq s$. Επειδή το a_{ts} ανήκει στη στήλη s , τότε στο αρχικό γινόμενο δεν υπάρχει άλλο στοιχείο από τη στήλη s . Άρα το στοιχείο $a_{ss} - x$ δεν εμφανίζεται και συνεπώς $\deg \psi(x) \leq n - 2$.

Μένει να δείξουμε ότι στο άθροισμα του Λήμματος 3.3.1 ο όρος $(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ εμφανίζεται με συντελεστή $+1$. Πράγματι: (i) Ο όρος αυτός εμφανίζεται στο άθροισμα (με επαγωγή στο n και ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή), και (ii) δεν απλοποιείται με άλλον, λόγω της μοναδικότητάς του. □

Παράδειγμα 3.3.2. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$ ισχύει:

$$\chi_A(x) = (a - x)(d - x) - bc.$$

Πόρισμα 3.3.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Τότε:

1. $\det A = a_0$ και $\text{Tr}(A) = (-1)^{n-1} a_{n-1}$,
2. αν $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$, τότε $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ και $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Απόδειξη. 1. Είναι σαφές ότι $\det A = \chi_A(0) = a_0$. Από την Πρόταση 3.3.1 έχουμε:

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) + \psi(x), \quad \deg \psi(x) \leq n-2, \quad A = (a_{ij}).$$

Συνεπώς, εξισώνοντας τους συντελεστές του x^{n-1} , προκύπτει:

$$a_{n-1} = (-1)^n \operatorname{Tr}(A) \Rightarrow \operatorname{Tr}(A) = (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

2. Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε $\chi_A(0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$. Επίσης, από το προηγούμενο, ισχύει:

$$\operatorname{Tr}(A) = (-1)^n a_{n-1} = (-1)^n (-1)^n (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

□

Παράδειγμα 3.3.3. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Από το Πόρισμα 3.3.1 (i) έχουμε:

$$\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det A = x^2 - 3x - 10.$$

Επιπλέον:

$$\chi_A(x) = (5-x)(-2-x), \text{ δηλαδή οι ιδιοτιμές είναι } \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2.$$

Συνεπώς, από το (ii) του πορίσματος:

$$\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -10.$$

Πρόταση 3.3.2. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι όμοιοι, τότε ισχύει $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

Απόδειξη. Αφού A είναι όμοιος με τον B , υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ώστε $B = P^{-1}AP$. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει:

$$\varphi(B) = P^{-1}\varphi(A)P.$$

Άρα:

$$\chi_B(x) = \det(B - x\mathbb{I}_n) = \det(P^{-1}AP - x\mathbb{I}_n) = \det(P^{-1}(A - x\mathbb{I}_n)P) = \chi_A(x).$$

□

Ορισμός 3.3.2. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $A = (f: \hat{a}, \hat{a})$ για κάποια διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f ορίζεται ως:

$$\chi_f(x) = \chi_A(x).$$

3.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 3.

Ομάδα Α : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 32, 34, 35 ,

Ομάδα Β: 7, 8, 12, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 32, 36 ,

Ομάδα Γ : 27, 28

Άσκηση 3.1. α. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4} \quad \text{και} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 1}.$$

Είναι το X ιδιοδιάνυσμα του A ; Είναι το 6 ιδιοτιμή του A ;

b. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$

Άσκηση 3.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

- a. Δείξτε ότι αν $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X , τότε το $\varphi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\varphi(A)$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X .
- b. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Βρείτε (χωρίς να γίνουν πράξεις) μια ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του $B = A^{1821} + I_3$.
- c. * Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Δείξτε ότι για κάθε ιδιοτιμή λ του $\varphi(A)$ υπάρχει ιδιοτιμή λ_i του A τέτοια ώστε $\lambda = \varphi(\lambda_i)$.

Άσκηση 3.3. Έστω $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ και $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$

- a. Αληθεύει ότι το X είναι ιδιοδιάνυσμα του A ; Αν ναι, να βρεθούν δύο διαφορετικές βάσεις του ιδιόχωρου $V_A(\lambda)$, όπου λ η ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχεί το παραπάνω ιδιοδιάνυσμα.
- b. Αληθεύει ότι το X είναι ιδιοδιάνυσμα του $A^{1821} + I_3$;
- c. Βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $X \in V_B(3)$.

Άσκηση 3.4. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$ στις περιπτώσεις

a. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

b. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Άσκηση 3.5. Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο των πινάκων

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Άσκηση 3.6. Υπολογίστε για τις διάφορες τιμές του a τις διαστάσεις των ιδιόχωρων του $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Άσκηση 3.7. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε για κάθε $j = 1, \dots, n$, ισχύει $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$. Δείξτε τα εξής.

a. Υπάρχει μη μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ τέτοιο ώστε $AX = X$.

b. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = (b_{ij})$, τότε για κάθε $j = 1, \dots, n$, ισχύει $\sum_{i=1}^n b_{ij} = 1$.

Άσκηση 3.8. Έστω $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v . Τότε

a. τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

b. για κάθε $a, b \in \mathbb{F} - \{0\}$, το $au + bv$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A .

Άσκηση 3.9. a. Αληθεύει ότι το 2 είναι ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x, y, z, w) = (x + w, 2y + z, 3z + w, x + w) ;$$

Αληθεύει ότι το $(1, 0, -1, 2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f ;

b. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z).$$

c. Έστω $f : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από $f(e_1) = -e_2$ και $f(e_2) = e_1$, όπου $\hat{e} = \{e_1, e_2\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{F}^2$. Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f όταν i. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ και ii. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος i. .

Άσκηση 3.10. a. Να βρεθούν οι πιθανές ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης $f : V \rightarrow V$ σε κάθεμια από τις περιπτώσεις

i. $f^2 = 1_V$,

ii. $f^2 = f$.

b. Στη συνέχεια δείξτε την εξής πρόταση. Αν $\varphi(f) = 0$ για κάποιο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε κάθε ιδιοτιμή της $\mathbb{F}$ - γραμμικής απεικόνισης $f : V \rightarrow V$ είναι ρίζα του $\varphi(x)$.

c. Δείξτε την εξής πρόταση. Αν $\varphi(A) = 0$ για κάποιο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ και $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τότε κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $\varphi(x)$.

Άσκηση 3.11. a. Για ποια $a \in \mathbb{R}$ το $(1, 1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + ay, 2x + y) ;$$

b. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των γραμμικών απεικονίσεων

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (4x, 2y - 5z, y - 2z)$,

2. $g : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, f(x, y, z) = (4x, 2y - 5z, y - 2z)$.

Άσκηση 3.12. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, με $f(x^2 + x) = 2x^2 + 2x$, $f(x + 1) = 2x + 3$ και $f(1) = x + 3$.

a. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα της f και μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f .

b. Αληθεύει ότι η f είναι ισομορφισμός ;

c. Αληθεύει ότι η $f^4 - 6f - 4 \cdot 1_{\mathbb{R}_2[x]}$ είναι ισομορφισμός ;

d. Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της $f^4 - 6f - 4 \cdot 1_{\mathbb{R}_2[x]}$.

Άσκηση 3.13. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των γραμμικών απεικονίσεων

a. $g : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $g(\phi(x)) = \phi(1)x$

b. $h : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $h(\phi(x)) = \phi'(x)$, όπου $\phi'(x)$ είναι η παράγωγος του $\phi(x)$.

Άσκηση 3.14. Έστω $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ με $\chi_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$.

a. Είναι ο A αντιστρέψιμος ;

b. Είναι ο $(A - 3I_3)(A - 4I_3)$ αντιστρέψιμος ;

c. Υπολογίστε την ορίζουσα του $A^2 - 2A - 15I_3$.

d. Αληθεύει ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ ώστε για τη γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2y + 3z, 3z),$$

να ισχύει $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$;

e. Να βρεθεί το $\chi_{A^2}(x)$.

f. Αληθεύει ότι υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $AB - BA = A^k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k ;

g. Αληθεύει ότι υπάρχει ακέραιος $k > 1$ με $A^k = A^t$, όπου A^t είναι ο ανάστροφος του A ;

Άσκηση 3.15. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, όπου ο A είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$. (Σημείωση. Ισχύει το συμπέρασμα και χωρίς την υπόθεση ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, βλ. άσκηση 27.)

Άσκηση 3.16. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος και $x_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, όπου $a_0 \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\chi_{A^{-1}}(x) = (-1)^n \left[x^n + \frac{a_{n-1}}{a_0} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_0} + \frac{(-1)^n}{a_0} \right].$$

Άσκηση 3.17. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

a. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $(-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$.

b. Δείξτε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A , τότε το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A^t .

Άσκηση 3.18. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Άσκηση 3.19. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 5}.$$

Άσκηση 3.20. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος.

a. Δείξτε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1} .

b. Έστω ότι ο A είναι όμοιος με τον A^{-1} και n περιττός. Δείξτε ότι το 1 ή το -1 είναι ιδιοτιμή του A .

Άσκηση 3.21. Έστω $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ τέτοιος ώστε $\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\det A = -13$, $\text{Tr}(A) = 4$ και μια ιδιοτιμή του A είναι το $2 - 3i$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A .

Άσκηση 3.22. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι αν ο A είναι όμοιος με τον $-A$, τότε το n είναι άρτιος, $n = 2m$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι της μορφής $(x^2 - \rho_1) \cdots (x^2 - \rho_m)$, όπου $n \geq 2$.

Άσκηση 3.23. Βρείτε τους ιδιόχωρους της γραμμικής απεικόνισης $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \mapsto A^t$, όπου $n \geq 2$.

Άσκηση 3.24. Θεωρούμε τους διαγώνιους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- a. Οι A, B είναι όμοιοι.
- b. Υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_n$ τέτοια ώστε $b_i = a_{\sigma(i)}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.
- c. $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

Άσκηση 3.25. Έστω $a, b \in \mathbb{F}$. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Άσκηση 3.26. Έστω $a, b \in \mathbb{F}$ με $a \neq b$. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & a & \cdots & a \\ b & b & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

είναι το $\frac{(-1)^n}{a-b} [a(x+b)^n - b(x+a)^n]$.

Άσκηση 3.27. Έστω $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$. Δείξτε ότι $(-1)^n x^n \chi_{AB}(x) = (-1)^m x^m \chi_{BA}(x)$. (Συνεπώς αν $m = n$, τότε $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.)

Άσκηση 3.28. Έστω $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ και $C = (a_i b_j) \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση (ή αλλιώς) βρείτε το $\chi_C(x)$ και τις ιδιοτιμές του C .

Άσκηση 3.29. Έστω $n \geq 1$ και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n \times 2n}.$$

Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A . Βρείτε τη διάσταση κάθε ιδιόχωρου του A .

Άσκηση 3.30. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ και $D = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$. Τότε

a. $\chi_C(x) = \chi_{A+B}(x) \cdot \chi_{A-B}(x)$.

b. $\chi_D(x) = \chi_{A+iB}(x) \cdot \chi_{A-iB}(x)$.

c. Αν οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ είναι οι εξής

$$2\lambda_1, \dots, 2\lambda_n, \underbrace{0, \dots, 0}_n.$$

Άσκηση 3.31. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ είναι όμοιοι, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν οι a, b .

Άσκηση 3.32. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης $f^2 = f \circ f$, όπου

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (0, x, y).$$

Άσκηση 3.33. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης $f^2 = f \circ f$, όπου

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (0, x, y).$$

Άσκηση 3.34. Δίνεται διατεταγμένη βάση $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3)$ του $\mathbb{R}^3$ και η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με αντίστοιχο πίνακα $A = (f : \hat{u}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Βρείτε το $\chi_f(x)$ και το $\chi_{f^2}(x)$.
- Αληθεύει ότι $u_1 + u_2 + 2u_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f ; Ίδιο ερώτημα για το u_1 .
- Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A .
- Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f .
- Ξέρουμε ότι ισχύει $V_f(0) \subseteq V_{f^2}(0)$. Αληθεύει ότι έχουμε ισότητα;
- Αληθεύει ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $f(g(v)) = v$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^3$;

Άσκηση 3.35. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(X) = AX - XA$. Αφού δείξετε ότι η f είναι γραμμική, βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f .

Άσκηση 3.36. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και τον υπόχωρο V που παράγεται από τις συναρτήσεις $\sin x, \cos x$. Βρείτε μια βάση κάθε ιδιόχωρου των γραμμικών απεικονίσεων

- $f : V \rightarrow V$, $f(\phi(x)) = \phi'(x)$ (παράγωγος),
- $g : V \rightarrow V$, $g(\phi(x)) = \phi''(x)$ (δεύτερη παράγωγος).

Άσκηση 3.37. Δείξτε ότι για κάθε

- $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $\chi_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det A$,
- $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $\chi_A(x) = -x^3 + \text{Tr}(A)x^2 - \text{Tr}(\text{adj}(A))x + \det A$.

Άσκηση 3.38. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

- a. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και το μ ιδιοτιμή του $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τότε το $\lambda + \mu$ είναι ιδιοτιμή του $A + B$.
- b. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και το μ ιδιοτιμή του $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τότε το $\lambda\mu$ είναι ιδιοτιμή του AB .
- c. Κάθε $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή.
- d. Κάθε $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή.
- e. Αν το 2 είναι ιδιοτιμή του A^2 , όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε το $\sqrt{2}$ είναι ιδιοτιμή του A .
- f. Αν $\chi_A(x) = \chi_B$, όπου $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τότε οι A, B είναι όμοιοι.
- g. Έστω ότι οι $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τότε οι $\phi(A), \phi(B)$ είναι όμοιοι για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$.
- h. Υπάρχει $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ με ιδιοτιμές τις 0, 1, 2, 3.
- i. Αν v είναι ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης $f : V \rightarrow V$ και $v \in \ker f$, τότε το 0 είναι ιδιοτιμή της f .
- j. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $\chi_A(x) = -(x^2 - 1)(x - 5)$. Τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του $\mathbb{R}^3$ με $f(1, 0, 0) = 3 \cdot (1, 0, 0)$ και $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$.
- k. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Αν το -1 είναι ιδιοτιμή του A , τότε υπάρχει μη μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $A^2 X = X$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΓΩΝΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

4.1 Διαγωνίσιμοι Πίνακες

Ορισμός 4.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Θα λέμε ότι ο A είναι **διαγωνίσιμος** αν υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος, τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = \Delta$, όπου Δ είναι διαγώνιος πίνακας.

Παρατήρηση 4.1.1. Έστω $\Delta = P^{-1}AP$ με $\Delta = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έχουμε:

$$\chi_A(x) = \chi_\Delta(x) = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x).$$

Εδώ οι $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A .

Παράδειγμα 4.1.1. 1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε παρατηρούμε ότι:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(-2, 5).$$

Άρα ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Θα δείξουμε ότι ο A δεν είναι διαγωνίσιμος. Πράγματι, αν υπήρχε αντιστρέψιμος πίνακας P με:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(a_1, a_2),$$

τότε, από την Παρατήρηση 4.1.1 και επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι $a_1 = a_2 = 1$, θα έπρεπε να ισχύει:

$$P^{-1}AP = \mathbb{I}_2 \Leftrightarrow A = \mathbb{I}_2,$$

το οποίο είναι άτοπο.

3. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ο πίνακας A δεν είναι διαγωνίσιμος, διότι:

$$\chi_A(x) = x^2 + 1$$

δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Άρα ο A δεν έχει ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ και, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.1.1, δεν είναι διαγωνίσιμος.

4. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος, αφού για τον αντιστρέψιμο πίνακα:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$$

ισχύει:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(i, -i).$$

Ερώτημα 4.1.1. Μέσω των παραδειγμάτων τίθενται βασικά ερωτήματα. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$

1. Πότε ο A είναι διαγωνίσιμος ?
2. Αν ο A είναι διαγωνίσιμος, πως βρίσκουμε πίνακες P και Δ ώστε $P^{-1}AP = \Delta$?

Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, με $A^{(i)}$ συμβολίζουμε την i -στήλη του A . Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

τότε ισχύει:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Με αυτόν τον συμβολισμό έχουμε:

$$A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}).$$

- i. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τότε ισχύει $(AB)^{(i)} = AB^{(i)}$.
- ii. Έστω $\hat{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ η συνήθης διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$. Τότε $I_n^{(i)} = E_i$ και μάλιστα $A^{(i)} = AE_i$.

Απόδειξη. i. Αν $B = (B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)})$, τότε:

$$AB = (AB^{(1)}, AB^{(2)}, \dots, AB^{(n)}),$$

και από τον ορισμό του γινομένου πινάκων έχουμε:

$$(AB)^{(i)} = AB^{(i)}.$$

ii. Παρατηρούμε ότι:

$$AE_i = A\mathbb{I}_n^{(i)} = (A\mathbb{I}_n)^{(i)} = A^{(i)}.$$

□

Παρατήρηση 4.1.2. Έστω $A, P, \Delta \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με P αντιστρέψιμο, ώστε $P^{-1}AP = \Delta$, με Δ όχι απαραίτητα διαγώνιος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i. Η i -στήλη του P είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ .
- ii. Η i -στήλη του Δ είναι ίση με λE_i .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $P^{-1}AP = \Delta$. Τότε έχουμε ότι:

$$AP = P\Delta.$$

- i. Αν $AP^{(i)} = \lambda P^{(i)}$, τότε:

$$\Delta^{(i)} = (P^{-1}AP)^{(i)} = P^{-1}AP^{(i)} = \lambda P^{-1}P^{(i)} = \lambda \mathbb{I}_n^{(i)} = \lambda E_i.$$

- ii. Αν $\Delta^{(i)} = \lambda E_i$, τότε:

$$P\Delta^{(i)} = \lambda PE_i = \lambda P^{(i)},$$

οπότε:

$$AP^{(i)} = \lambda P^{(i)}.$$

Επειδή ο P είναι αντιστρέψιμος, $P^{(i)} \neq 0$. □

Θεώρημα 4.1.1. 1ο Κριτήριο Διαγωνισιμότητας Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i. Ο A είναι διαγωνίσιμος.
- ii. Υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A .

Επιπλέον, αν $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, τότε θέτοντας

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Απόδειξη. i. $\rightarrow$ ii. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}AP = \Delta$, όπου Δ είναι διαγώνιος πίνακας.

Εφόσον η i -στήλη της Δ είναι της μορφής $\lambda_i E_i$, από την Παρατήρηση 4.1.2 προκύπτει ότι η i -στήλη του P , δηλαδή το $P^{(i)}$, είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i .

Επειδή οι στήλες του P αποτελούν βάση (λόγω αντιστρεψιμότητας), έχουμε βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A .

ii. $\rightarrow$ i. Έστω τώρα ότι $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A . Άρα:

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, n.$$

Θέτουμε $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ώστε $P^{(i)} = x_i$. Εφόσον οι x_i αποτελούν βάση, ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος. Από την Παρατήρηση 4.1.2, ακολουθεί ότι:

$$(P^{-1}AP)^{(i)} = \lambda_i E_i,$$

δηλαδή $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος. □

Παράδειγμα 4.1.2. a. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τότε:

$$\chi_A(x) = (x+2)(x-5), \quad V_A(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_A(5) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα, καθώς

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq 0,$$

άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ και ο A είναι διαγωνίσιμος. Θέτοντας:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

προκύπτει ότι P είναι αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP = \text{diag}(-2, 5)$.

b. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Έχουμε:

$$\chi_A(x) = (2-x)^2(3-x), \quad V_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Διαθέτουμε μόνο δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ενώ απαιτούνται **τρία** για διαγωνιοποίηση, διότι δεν μπορούμε να παράξουμε βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A . Επομένως, ο A **δεν** είναι διαγωνίσιμος.

c. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Υπολογίζουμε:

$$\chi_A(x) = (2+x)^2(4-x), \quad V_A(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ και ο A είναι διαγωνίσιμος. Θέτοντας:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

έχουμε ότι P είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(-2, -2, 4).$$

Πρόταση 4.1.1. i. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ διαγωνίσιμος και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ πολυώνυμο. Τότε ο πίνακας $\varphi(A)$ είναι επίσης διαγωνίσιμος.

ii. Αν ο A είναι διαγωνίσιμος και αντιστρέψιμος, τότε και ο πίνακας $\varphi(A^{-1})$ είναι διαγωνίσιμος.

Απόδειξη. i. Εφόσον ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = \Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Εφόσον η φ είναι πολυώνυμο, έχουμε:

$$\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(\Delta), \quad \text{και} \quad \varphi(P^{-1}AP) = P^{-1}\varphi(A)P.$$

Άρα:

$$P^{-1}\varphi(A)P = \varphi(\Delta).$$

Το $\varphi(\Delta)$ είναι επίσης διαγώνιος πίνακας, αφού:

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Άρα προκύπτει ότι $\varphi(A)$ είναι διαγωνίσιμος.

ii. Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος και διαγωνίσιμος, υπάρχει P αντιστρέψιμος ώστε:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{με } \lambda_i \neq 0 \text{ για κάθε } i.$$

Τότε:

$$P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right).$$

Άρα ο A^{-1} είναι επίσης διαγωνίσιμος. Εφόσον η φ είναι πολυώνυμο, από το πρώτο μέρος έπεται ότι και η $\varphi(A^{-1})$ είναι διαγωνίσιμη.

□

4.2 Το Μεγάλο Κριτήριο Διαγωνιμότητας

Λήμμα 4.2.1. Αν $X_i \in V(\lambda_i)$ για $i = 1, \dots, t$ και

$$X_1 + \dots + X_t = 0,$$

τότε

$$X_1 = X_2 = \dots = x_t = 0.$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 3.1.1.

□

Πόρισμα 4.2.1. 4.2.2 Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στο Πόρισμα 3.1.2.

□

Πόρισμα 4.2.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του με $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε ισχύει:

$$V_A(\lambda_1) \cap V_A(\lambda_2) = \{0\}.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Λήμμα 4.2.1.

□

Λήμμα 4.2.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ διακεκριμένες ιδιοτιμές του. Τότε:

- i. Αν B_i είναι βάση του $V_A(\lambda_i)$ για κάθε $i = 1, \dots, t$, τότε το σύνολο $B_1 \cup \dots \cup B_t$ είναι βάση του

$$V_A(\lambda_1) + \dots + V_A(\lambda_t).$$

- ii. Ισχύει:

$$\dim \left(\sum_{i=1}^t V_A(\lambda_i) \right) = \sum_{i=1}^t \dim V_A(\lambda_i).$$

Απόδειξη. i. Έστω B_i βάση του $V_A(\lambda_i)$ με

$$B_i = \{b_{i_1}, \dots, b_{i_{m_i}}\}.$$

Από τον ορισμό του αθροίσματος υπόχωρων έχουμε:

$$\sum_{i=1}^t V_A(\lambda_i) = \left\langle \bigcup_{i=1}^t B_i \right\rangle.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\bigcup_{i=1}^t B_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω:

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} b_{ij} = 0$$

με $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Από το Πόρισμα 4.2.2 και το γεγονός ότι τα ιδιοδιανύσματα ανήκουν σε ιδιοχώρους με διαφορετικές ιδιοτιμές, έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} b_{ij} = 0, \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, t.$$

Αφού

$$B_i = \{b_{i_1}, \dots, b_{i_{m_i}}\}$$

είναι βάση, τότε όλοι οι συντελεστές a_{ij} είναι μηδέν, δηλαδή το σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

- ii. Από το i. έχουμε ότι η ένωση των βάσεων των ιδιοχώρων είναι βάση του αθροίσματος των ιδιοχώρων. Άρα:

$$\dim \left(\sum_{i=1}^t V_A(\lambda_i) \right) = \left| \bigcup_{i=1}^t B_i \right| = \sum_{i=1}^t \dim V_A(\lambda_i).$$

□

Θεώρημα 4.2.1 (Μεγάλο Κριτήριο Διαγωνιμότητας). Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i. Ο A είναι διαγωνίσιμος.
- ii. Υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A .
- iii. Ισχύει: $V_A(\lambda_1) + \dots + V_A(\lambda_k) = \mathbb{F}^{n \times 1}$.
- iv. Ισχύει: $\dim V_A(\lambda_1) + \dots + \dim V_A(\lambda_k) = n$.
- v. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται ως:

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}, \quad \text{με } \dim V_A(\lambda_i) = n_i.$$

Απόδειξη. • Οι προτάσεις i. και ii. είναι ισοδύναμες από το Θεώρημα 4.1.1.

- iii. $\iff$ iv. Από το Λήμμα 4.2.2, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^k V_A(\lambda_i) = \mathbb{F}^{n \times 1} \iff \dim \left(\sum_{i=1}^k V_A(\lambda_i) \right) = n.$$

- ii $\Rightarrow$ iii. Αν υπάρχει βάση από ιδιοδιανύσματα, τότε οι ιδιοχώροι καλύπτουν όλο τον χώρο.
- iii. $\Rightarrow$ ii. Από το Λήμμα 4.2.2, η ένωση των βάσεων των ιδιοχώρων είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, και επειδή καλύπτει όλο τον χώρο, είναι βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$.
- i. $\Rightarrow$ v. Αφού ο A είναι διαγωνίσιμος, είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, οπότε:

$$\chi_A(x) = (a_1 - x) \dots (a_n - x) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n_i}.$$

Και για κάθε i , ισχύει:

$$\dim V_A(\lambda_i) = n - \text{rank}(A - \lambda_i I_n) = n - \text{rank}(\Delta - \lambda_i I_n) = n_i.$$

- v. $\Rightarrow$ iv. Από την υπόθεση $\dim V_A(\lambda_i) = n_i$ για κάθε i , ακολουθεί:

$$\sum_{i=1}^k \dim V_A(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

□

Πόρισμα 4.2.3. Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ έχει n διακεκριμένες τιμές, τότε είναι διαγωνίσιμος.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από το iv. του Θεωρήματος 4.2.1

□

Παράδειγμα 4.2.1. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Τότε, από το Πόρισμα 4.2.3, ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος, αφού οι ιδιοτιμές του είναι οι 1, 4, 6, οι οποίες είναι διακεκριμένες.

Ορισμός 4.2.1. Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα A . Αν $(x - \lambda)^{m(\lambda)}$ είναι η μέγιστη δύναμη του $x - \lambda$ που διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$, τότε:

- ο αριθμός $\tau(\lambda)$ λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ ,
- ενώ η $\mathbf{d}(\lambda) := \dim V_A(\lambda)$ λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της λ .

Θεώρημα 4.2.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και λ ιδιοτιμή του. Τότε:

$$\mathbf{d}(\lambda) \leq \tau(\lambda),$$

δηλαδή η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ είναι μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική της πολλαπλότητα.

Απόδειξη. Έστω $\tau(\lambda)$ η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ , και έστω $\{v_1, \dots, v_t\}$ μία βάση του ιδιοχώρου $V_A(\lambda)$. Από το Θεώρημα Επέκτασης Βάσης, υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ της μορφής:

$$\hat{v} = (v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n).$$

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση:

$$\mathcal{L}_A: \mathbb{F}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times 1}, \quad X \mapsto AX.$$

Τότε, ο πίνακας του $\mathcal{L}_A$ ως προς τη βάση $\hat{v}$ είναι:

$$B = (L_A: \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{I}_t & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Αυτός είναι σε block-άνω τριγωνική μορφή. Από τις ιδιότητες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (π.χ. Πρόταση 3.3.1), έχουμε:

$$\chi_B(x) = \chi_{\lambda \mathbb{I}_t}(x) \cdot \chi_*(x).$$

Άρα,

$$(x - \lambda)^t \mid \chi_B(x) = \chi_A(x)$$

αφού A και B είναι όμοιοι.¹ Επομένως,

$$t \leq \tau(\lambda).$$

□

¹Αυτό ισχύει, διότι ο πίνακας της $\mathcal{L}_A$ ως προς την συνήθη βάση είναι ο A .

4.3 Διαγωνίσιμες Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός 4.3.1. Μια γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow V$ λέγεται **διαγωνίσιμη** αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a}$ του V τέτοια ώστε ο πίνακας $(f: \hat{a}, \hat{a})$ να είναι διαγώνιος.

Παρατήρηση 4.3.1. i. Η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει βάση του V από ιδιοδιανύσματα της f .

ii. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $\hat{b}$ διατεταγμένη βάση του V . Τότε η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν ο πίνακας $(f: \hat{b}, \hat{b})$ είναι διαγωνίσιμος.

Απόδειξη. i. Αν f είναι διαγωνίσιμη, τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a} = (a_1, \dots, a_n)$ του V με $(f: \hat{a}, \hat{a}) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, δηλαδή $f(a_i) = \lambda_i a_i$. Άρα υπάρχει βάση από ιδιοδιανύσματα.

Αντίστροφα, αν η $\hat{a}$ είναι βάση από ιδιοδιανύσματα, τότε ο πίνακας $A = (f: \hat{a}, \hat{a})$ έχει βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα και είναι διαγωνίσιμος (Θεώρημα 4.1.1). Άρα και η f είναι διαγωνίσιμη.

ii. Αν f είναι διαγωνίσιμη, τότε υπάρχει βάση $\hat{a}$ με διαγώνιο $A = (f: \hat{a}, \hat{a})$. Όμως οι πίνακες $(f: \hat{a}, \hat{a})$ και $(f: \hat{b}, \hat{b})$ είναι όμοιοι, άρα και ο δεύτερος είναι διαγωνίσιμος.

Αντίστροφα, αν $(f: \hat{b}, \hat{b})$ είναι διαγωνίσιμος, τότε είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα, δηλαδή υπάρχει βάση $\hat{a}$ του V με $(f: \hat{a}, \hat{a})$ διαγώνιο. $\square$

Παράδειγμα 4.3.1. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο:

$$f(x, y) = (x + 3y, 4x + 2y).$$

Έστω η βάση $\hat{a} = (a_1, a_2)$, με $a_1 = (1, -1)$ και $a_2 = (3, 4)$. Τότε:

$$f(a_1) = -2a_1, \quad f(a_2) = 5a_2.$$

Δηλαδή, και τα δύο είναι ιδιοδιανύσματα. Άρα ο πίνακας $(f: \hat{a}, \hat{a})$ είναι:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

που είναι διαγώνιος. Επομένως, η f είναι διαγωνίσιμη.

Υπενθύμιση 4.3.1. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση, $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f: \hat{a}, \hat{a})$. Αν λ είναι ιδιοτιμή της f , τότε η απεικόνιση:

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}^{n \times 1}, \quad v \mapsto [v]_{\hat{a}}$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων και επιπλέον:

$$\varphi(V_f(\lambda)) = V_A(\lambda).$$

Θεώρημα 4.3.1 (Μεγάλο Κριτήριο Διαγωνισιμότητας για γραμμικές απεικονίσεις). Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- i. Η f είναι διαγωνίσιμη.
- ii. Υπάρχει βάση του V από ιδιοδιανύσματα της f .
- iii. $V_f(\lambda_1) + V_f(\lambda_2) + \dots + V_f(\lambda_k) = V$.
- iv. $\dim V_f(\lambda_1) + \dots + \dim V_f(\lambda_k) = \dim V$.
- v. $\chi_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ με $\dim V_f(\lambda_i) = n_i$ για κάθε $i = 1, \dots, k$.

Απόδειξη. • i. $\Leftrightarrow$ ii. Από Παρατήρηση 4.3.1.

- i. $\Rightarrow$ iii. Αν f είναι διαγωνίσιμη, τότε για κατάλληλη βάση $\hat{a}$ ο πίνακας $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$ είναι διαγωνίσιμος, άρα από Θεώρημα 4.2.1 έχουμε $\sum V_A(\lambda_i) = \mathbb{F}^{n \times 1}$. Από Υπενθύμιση 4.3.1, προκύπτει ότι $V = \sum V_f(\lambda_i)$.
- iii. $\Rightarrow$ i. (Άσκηση)
- iii. $\Rightarrow$ iv. Από τα παραπάνω, με χρήση της Υπενθύμισης 4.3.1 και Θεωρήματος 4.2.1, έχουμε ισότητα των διαστάσεων.
- iv. $\Rightarrow$ iii. (Άσκηση)
- iv. $\Rightarrow$ v. (Άσκηση)

□

4.4 Εφαρμογές Διαγωνοποίησης

Η διαγωνοποίηση έχει ευρείες εφαρμογές: στους υπολογισμούς δυνάμεων πινάκων, στις αναδρομικές σχέσεις ακολουθιών, στις ρίζες πινάκων, σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων και σε πολλά άλλα προβλήματα.

Παρατήρηση 4.4.1. Αν $P^{-1}AP = \Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, τότε για κάθε $m \geq 1$ ισχύει:

$$(P^{-1}AP)^m = \Delta^m \Leftrightarrow P^{-1}A^mP = \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m).$$

Εφαρμογή 4.4.1 (Δυνάμεις Πινάκων). Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας A^m για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Με απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε:

$$V_A(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, άρα είναι διαγωνίσιμος.

Θέτουμε:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{με } P^{-1}AP = \text{diag}(-1, 1, 2).$$

Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$A^m = P \cdot \text{diag}((-1)^m, 1, 2^m) \cdot P^{-1}.$$

Τελικά, προκύπτει:

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 1 - 2^m & 1 - 2^m \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 1 - (-1)^m & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ας εξετάσουμε τώρα την αναδρομική ακολουθία Fibonacci:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα απαρίθμησης. Ένα παράδειγμα:

Πόσες είναι οι δυαδικές ακολουθίες μήκους n που δεν περιέχουν δύο διαδοχικά 1;

Αυτό το πρόβλημα μεταφράζεται σε αναδρομή, που μπορεί να αναλυθεί με χρήση διαγωνοποίησης κατάλληλου πίνακα.

Εφαρμογή 4.4.2 (Αναδρομικές Ακολουθίες – Ακολουθία Fibonacci). Έχουμε $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_A(x) = x^2 - x - 1,$$

με ρίζες (ιδιοτιμές):

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Οι ιδιόχωροι του A είναι:

$$V_A(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_A(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Θέτουμε:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Τότε ισχύει:

$$A = P\Delta P^{-1} \Rightarrow A^m = P\Delta^m P^{-1}, \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, για κάθε $n \geq 3$, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Άρα τελικά:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Εφαρμογή 4.4.3 (Ρίζες Πινάκων). Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί πίνακας $B \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $B^3 = A$.

Απόδειξη. Από την Εφαρμογή 4.4.1 έχουμε πως

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

όπου

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε, θέτοντας

$$B = P \operatorname{diag} \left(-1, 1, \sqrt[3]{2} \right) P^{-1}$$

προκύπτει ότι $B^3 = A$, δηλαδή το ζητούμενο. □

4.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4.

Ομάδα Α' : 1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 25, 32, 36

Ομάδα Β' : 2, 6, 7, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35

Άσκηση 4.1. Εξετάστε ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι διαγωνίσιμοι. Αν κάποιος $A_i \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι διαγωνίσιμος, να βρεθεί μια βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ που αποτελείτε από ιδιοδιανύσματα του A_i , ένας αντιστρέψιμος $P_i \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $P_i^{-1} A_i P_i$ διαγώνιο και ο πίνακας $P_i^{-1} A_i P_i$.

a. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$

b. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2},$

c. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$

d. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$

Άσκηση 4.2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ διαγωνίσιμος πίνακας.

- Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k ο A^k είναι διαγωνίσιμος και γενικά για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ο $\phi(A)$ είναι διαγωνίσιμος.
- Δείξτε ότι αν $A^k = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο k , τότε $A = 0$.
- Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $\phi(A^{-1})$ είναι διαγωνίσιμος για κάθε $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$.
- Αν $\chi_A(x) = (x - 3)^{10}$ να βρεθεί ο A .
- Έστω $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $A^k X = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο k . Δείξτε ότι $AX = 0$.
- Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Είναι δυνατό ο $A + A^{-1}$ να είναι όμοιος με τον $\text{diag}(1, 3, 3, \dots, 3)$?

Άσκηση 4.3. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3}.$$

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A , μια βάση για κάθε ιδιόχωρου του A και η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του A .
- Να εξετασθεί αν ο A είναι διαγωνίσιμος και στην περίπτωση που είναι διαγωνίσιμος, να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Άσκηση 4.4. Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- Αποδείξτε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $a > -1/12$.
- Έστω $a = 2$. Βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ώστε $P^{-1}AP$ και $Q^{-1}AQ$ να είναι διακεκριμένοι διαγώνιοι πίνακες.

Άσκηση 4.5. α. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας διαγωνίσιμος πίνακας, του οποίου οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές. Δείξτε ότι υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $B^2 = A$.

- Δείξτε ότι ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ δεν είναι διαγωνίσιμος και ότι δεν υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ τέτοιος ώστε $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 4.6. Έστω $A, P, \Delta \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιο ώστε $AP = P\Delta$ και Δ είναι διαγώνιος, $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Δείξτε ότι για κάθε $k = 1, \dots, n$ έχουμε $AP^{(k)} = \lambda_k P^{(k)}$, όπου $P^{(k)}$ είναι η k -στήλη του P .
- Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}$. Βρείτε έναν $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ με ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι ο A μοναδικός?

Άσκηση 4.7. Έστω $A = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & 3 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ με $\det A = \text{Tr} A = 0$. Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.8. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο A είναι άνω τριγωνικός και κάθε στοιχείο της διαγωνίου είναι ίσο με λ . Δείτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν είναι διαγώνιος.

Άσκηση 4.9. Εξετάστε αν ο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.10. Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε ο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & c & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

να είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.11. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

να είναι ίση με 3.

Άσκηση 4.12. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = BA$. Αποδείξτε ότι αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο B είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.13. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ δύο διαγωνίσιμοι πίνακες. Δείξτε ότι οι A, B είναι όμοιοι αν και μόνο αν $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

Άσκηση 4.14. Να βρεθούν όλα τα $a \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ να είναι διαγωνίσιμη στις ακόλουθες περιπτώσεις :

- a. $f(x, y, z) = (x + az, 2y, ay + 2z),$
- b. $f(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az) .$

Άσκηση 4.15. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω γραμμικές απεικονίσεις είναι διαγωνίσιμες

- a. $f : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3, f(x, y, z) = (x + y, y - z, 2y + 4z) ,$
- b. $g : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3, g(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z) ,$
- c. $h : \mathbb{F}_2[x] \rightarrow \mathbb{F}_2[x], h(\phi(x)) = \phi(1)x.$

Άσκηση 4.16. Έστω $f : V \rightarrow V$ μια διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $\lambda \in \{-1, 1\}$ για κάθε ιδιοτιμή λ της f . Δείξτε ότι $f^2 = 1_V$.

Άσκηση 4.17. Έστω $f : V \rightarrow V$ ένας ισομορφισμός. Δείξτε τα εξής.

- a. Αν το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι μια ιδιοτιμή της f , τότε $\lambda \neq 0$.
- b. Το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι μια ιδιοτιμή της $f \Leftrightarrow$ το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1} .
- c. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{F} - \{0\}, V_f(\lambda) = V_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$.
- d. f διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow f^{-1}$ διαγωνίσιμη.

Άσκηση 4.18. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a} = (v_1, v_2, v_3)$ του $\mathbb{R}^3$ με

$$(f : \hat{a}, \hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- a. Δείξτε ότι η f^2 είναι διαγωνίσιμη.
- b. Αληθεύει ότι η f είναι διαγωνίσιμη ?
- c. Έστω ότι $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. Δείξτε ότι το $\sqrt{\lambda_1}v_1 + \sqrt{\lambda_3}v_3$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f .

Άσκηση 4.19. Έστω $f : V \rightarrow V$ μια διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι $\ker f = \ker f^m$ και $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^m$ για κάποιο θετικό ακέραιο m .

Άσκηση 4.20. Για κάθε θετικό ακέραιο k υπολογίστε τον A^k , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.21. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Υπολογίστε τη δύναμη A^k , $k \geq 1$.
- Να βρεθεί ένας πίνακας $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $B^3 = A$.
- Πόσους πίνακες $B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ μπορείτε να βρείτε τέτοιους ώστε $B^3 = A$?

Άσκηση 4.22. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) , $n = 1, 2, \dots$, η οποία ορίζεται από του όρους $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ και τον αναδρομικό τύπο $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n = 3, 4, \dots$. Να βρεθεί ο γενικός όρος a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n .

Άσκηση 4.23. α. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ διαγωνίσιμος τέτοιος ώστε $|\lambda| \geq 2$ για κάθε ιδιοτιμή του A . Δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $B + B^{-1} = A$.

- Δείξτε ότι δεν υπάρχει αντιστρέψιμος $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $B + B^{-1} = I_3$.

Άσκηση 4.24. Έστω ότι $n \geq 2$.

- Δείξτε ότι $\mathbb{R}^{n \times n} = U \oplus V$, όπου $U = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = A^t\}$, $V = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = -A^t\}$. Επίσης δείξτε ότι $\dim U = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim V = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, αποδείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, A \mapsto A^t,$$

είναι διαγωνίσιμη και βρείτε το χαρακτηριστικό πολυωνυμό της.

Άσκηση 4.25. Έστω $f, g : V \rightarrow V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε η f είναι διαγωνίσιμη και κάθε ιδιοδιάνυσμα της f είναι ιδιοδιάνυσμα της g . Δείξτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

Άσκηση 4.26. Έστω $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

είναι μη μηδενικός.

- Δείξτε ότι $\text{rank } A = 1$.
- Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\text{Tr } A \neq 0$.

Άσκηση 4.27. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.28. Έστω $a \in \mathbb{F}$ και $\hat{\beta} = (v_1, v_2, v_3)$ μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ που ορίζεται από

$$f(v_1) = v_1, f(v_2) = 2v_1 - av_2 - v_3, f(v_3) = a^2v_2 + av_3.$$

- Δείξτε ότι η f δεν είναι διαγωνίσιμη.
- Δείξτε ότι η f^n είναι διαγωνίσιμη για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 4.29. Έστω $n \geq 2$. Έστω $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε όχι όλα είναι ίσα με το 0 και $\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i = 0$. Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

και δείξτε ότι αυτός δεν είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.30. Εξετάστε ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- Υπάρχει διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^4 \rightarrow \mathbb{F}^4$ τέτοια ώστε $\chi_f(x) = x^2(x-3)^2$ και $\dim \operatorname{Im} f = 3$.
- Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ b & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι όμοιοι.
- Έστω $f : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $\lambda \neq \mu$ είναι δύο ιδιοτιμές της f , τότε η γραμμική απεικόνιση

$$g : V(\lambda) \oplus V(\mu) \rightarrow V(\lambda) \oplus V(\mu), g(u+v) = f(u+v),$$

είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 4.31. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $\operatorname{rank} A = r$. Αποδείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι της μορφής

$$(-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-r} x^{n-r}.$$

Άσκηση 4.32. Έστω $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ και λ, μ οι ιδιοτιμές του A . Δείξτε ότι αν $\lambda \neq \mu$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο k ,

$$A^k = \frac{\lambda^k}{\lambda - \mu} (A - \mu \mathbb{I}_2) + \frac{\mu^k}{\mu - \lambda} (A - \lambda \mathbb{I}_2).$$

Άσκηση 4.33. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $\operatorname{rank} A = 1$ και $n \geq 2$. Αποδείξτε τις εξής προτάσεις.

- Ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

- $\operatorname{Tr} A \neq 0 \Leftrightarrow$ ο A είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 4.34. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ που ορίζεται από $f(x^2 + 1) = x + 1$, $f(x + 1) = x + 1$, $f(1) = x + 1$. Θέτουμε $g = f^{1821} + 2 \cdot 1_V$, $V = \mathbb{R}_2[x]$.

- Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της f και κάθε ιδιόχωρο της g .

- b. Να εξεταστεί αν οι f, g είναι διαγωνίσιμες.
- c. Να εξεταστεί αν οι f, g είναι ισομορφισμοί.

Άσκηση 4.35. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(X) = AX - XA$. Εξετάστε αν η f είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 4.36. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ είναι οι ιδιοτιμές αντιστρέψιμου $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$, τότε οι ιδιοτιμές του $\text{adj} A$ είναι οι $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4, \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$.

Άσκηση 4.37. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

- a. Κάθε πίνακας που είναι όμοιος με διαγωνίσιμο πίνακα είναι διαγωνίσιμος.
- b. Αν $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = x(x+1)(x^2+1)$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.
- c. Αν $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = x(x+1)(x^2+1)$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.
- d. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = x^2(x-1)(x-2)$. Τότε ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\dim V_A(0) > 1$.
- e. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι διαγωνίσιμοι, τότε $A + B$ είναι διαγωνίσιμος.
- f. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι διαγωνίσιμοι, τότε AB είναι διαγωνίσιμος.
- g. Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας είναι διαγωνίσιμος.

- h. Η διάσταση του υπόχωρου που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα του $A = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & 3 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 4 \end{pmatrix}$ είναι τουλάχιστον 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΡΙΓΩΝΙΣΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

5.1 Τριγωνίσιμοι πίνακες

Ορισμός 5.1.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ λέγεται **τριγωνίσιμος** αν υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}AP = T$ άνω τριγωνικός.

Παράδειγμα 5.1.1. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ο οποίος δεν είναι διαγωνίσιμος (δείξτε γιατί), είναι σαφές ότι είναι τριγωνίσιμος, αφού είναι άνω τριγωνικός.

Παρατήρηση 5.1.1. i. Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι τριγωνίσιμος, τότε το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.

ii. Αν A είναι διαγωνίσιμος, τότε είναι και τριγωνίσιμος.

Απόδειξη. i. Ο A είναι τριγωνίσιμος, δηλαδή υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος που ικανοποιεί τη σχέση

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

άρα συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\chi_A(x) = \chi_{P^{-1}AP}(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

ii. Το ζητούμενο είναι άμεσο από τον ορισμό. **Προσοχή!** Το αντίστροφο δεν ισχύει.

□

Υπενθύμιση 5.1.1. Έστω πίνακες $A, B, P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $P^{-1}AP = B$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i. Το $P^{(i)}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ .
- ii. $B^{(i)} = \lambda E_i$, όπου $\{E_1, \dots, E_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$.

Θεώρημα 5.1.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι τριγωνίσιμος αν και μόνο αν το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Απόδειξη. Αν ο A είναι τριγωνίσιμος, τότε το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων από την Παρατήρηση 5.1.1.

Αντίστροφα, έστω ότι

$$\chi_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

Θα κάνουμε χρήση επαγωγής ως προς το n .

- **Βάση επαγωγής.** Για $n = 1$, το ζητούμενο ισχύει άμεσα.
- **Επαγωγικό βήμα.** Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για πίνακες $B \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)}$ των οποίων το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Έστω $u_1 \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 . Τότε υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ της μορφής

$$u = \{u_1, \dots, u_n\}.$$

Ορίζουμε τον πίνακα P_1 με στήλες τα u_i , δηλαδή

$$P_1^{(i)} = u_i$$

Ο πίνακας P_1 είναι αντιστρέψιμος.

Από την Υπενθύμιση 5.1.1, προκύπτει ότι:

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)}.$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\chi_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdot \chi_{B_1}(x),$$

άρα το $\chi_{B_1}(x)$ είναι επίσης γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P_2 τέτοιος ώστε:

$$P_2^{-1}B_1P_2 = T,$$

με T άνω τριγωνικός.

Θέτουμε:

$$P = P_1 \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right),$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right)^{-1} \cdot P_1^{-1}AP_1 \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ο οποίος είναι άνω τριγωνικός.

□

Παράδειγμα 5.1.2. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τότε έχουμε ότι $\chi_A(x) = x^2$, δηλαδή ο A είναι τριγωνίσιμος. Με συνήθεις πράξεις υπολογίζουμε ότι

$$V_A(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε αντιστρέψιμο P με

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_A(0)$$

για παράδειγμα τον πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε προκύπτει πως

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 5.1.3. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα, όπου

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

και την ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1, θέτουμε

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο Q είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα γνωρίζουμε ότι

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 5.1.4. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Με συνήθειες πράξεις υπολογίζουμε :

$$\chi_A(x) = -(x-4)^3$$

και

$$V_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Θεωρούμε βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ που περιέχει το

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

για παράδειγμα

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Θέτουμε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος με

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

όπου

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Συνεχίζουμε όμοια με τον B_1 , όπου $\chi_{B_1}(x) = (x - 4)^2$ και

$$V_{B_1}(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

θέτοντας

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε P_2 είναι αντιστρέψιμος και

$$P_2^{-1}B_1P_2 = \begin{pmatrix} 4 & * \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Τελικά, αν

$$P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

τότε P αντιστρέψιμος και μάλιστα

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & * & * \\ 0 & 4 & * \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 5.1.5. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

με $\chi_A(x) = (1 - x)(3 - x)^2$.

Α' τρόπος

Υπολογίζουμε ότι

$$V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_A(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Έτσι θεωρούμε τον πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

που προκύπτει επεκτείνοντας το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ σε βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$. Τότε γνωρίζουμε ότι

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Β' τρόπος

Παρατηρούμε ότι $A^{(2)} = 3E_2$. Άρα ο E_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή 3. Έπειτα ακολουθούμε την ιδέα της απόδειξης όπως πριν. Συνοπτικά θέτουμε

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε έχουμε ότι

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

ισχύει ότι $\chi_{B_1}(x) = (x-1)(x-3)$, οπότε B_1 είναι διαγωνίσιμος. Έχουμε πως

$$V_{B_1}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{B_1}(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Για

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι

$$P_2^{-1}B_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Τελικά, θέτοντας

$$P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

προκύπτει ότι

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2 Τριγωνίσιμες γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 5.2.1. Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$ λέγεται **τριγωνίσιμη** αν υπάρχει $\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V , ώστε ο πίνακας $(f : \hat{v}, \hat{v})$ να είναι άνω τριγωνικός.

Παρατήρηση 5.2.1. Έστω $f : V \rightarrow V$, $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i. Η f είναι τριγωνίσιμη.
- ii. Ο A είναι τριγωνίσιμος.
- iii. Το $\chi_f(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Απόδειξη. • i. $\leftrightarrow$ ii. Το ζητούμενο είναι άμεσο από το Θεώρημα 1.2

- ii. $\leftrightarrow$ iii. Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 5.1.1 και επειδή $\chi_f(x) = \chi_A(x)$.

□

Παράδειγμα 5.2.1. Έστω

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x, x + y + 2z, ay + z).$$

Να δείξετε ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν $a \geq 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$A = (f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix},$$

επομένως έχουμε:

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 2 \\ 0 & a & 1-x \end{pmatrix}.$$

Άρα:

$$\chi_f(x) = (2-x) \cdot [(1-x)^2 - 2a] = (2-x)(x^2 - 2x + 1 - 2a).$$

Η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν το $\chi_f(x)$ αναλύεται σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αν η διακρίνουσα του δευτεροβάθμιου παράγοντα είναι μη αρνητική:

$$\Delta = 4 - 4(1 - 2a) = 8a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0.$$

□

Υπενθύμιση 5.2.1. Έστω T άνω τριγωνικός, δηλαδή της μορφής

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}.$$

Με χρήση επαγωγής ισχύει πως

$$T^k = \begin{pmatrix} t_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n^k \end{pmatrix}, \quad \text{για κάθε } k \geq 1.$$

Πιο γενικά, για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, ισχύει:

$$\varphi(T) = \begin{pmatrix} \varphi(t_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(t_n) \end{pmatrix},$$

δηλαδή είναι επίσης άνω τριγωνικός.

Θεώρημα 5.2.1 (Φασματικής Απεικόνισης). Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με

$$\chi_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

Τότε για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει ότι:

$$\chi_{\varphi(A)}(x) = (\varphi(\lambda_1) - x) \cdots (\varphi(\lambda_n) - x).$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αφού $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$, τότε ο A είναι τριγωνίσιμος, δηλαδή υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}.$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\varphi(T) = P^{-1}\varphi(A)P$. Από αυτή τη σχέση και την Υπενθύμιση 5.2.1 έχουμε ότι:

$$\chi_{\varphi(T)}(x) = \chi_{\varphi(A)}(x) = (\varphi(t_1) - x) \cdots (\varphi(t_n) - x),$$

όπου t_i είναι ιδιοτιμή του A , για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. □

5.3 Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κίνητρο. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Γνωρίζουμε ότι $\dim \mathbb{F}^{n \times n} = n^2$ και το πλήθος των στοιχείων $I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ είναι $n^2 + 1$. Άρα είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή υπάρχουν $a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδενικά, ώστε

$$a_{n^2}A^{n^2} + \cdots + a_0I_n = 0.$$

Θέτοντας $\varphi(x) = a_{n^2}x^{n^2} + \cdots + a_0$, παίρνουμε μη μηδενικό πολυώνυμο με $\varphi(A) = 0$.

Παρατήρηση 5.3.1. Έστω $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}$ και $n_1 + n_2 = n$. Τότε με επαγωγή:

$$A^m = \begin{pmatrix} A_1^m & * \\ 0 & A_2^m \end{pmatrix}, \quad \text{για κάθε } m \geq 1.$$

Επομένως, για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, έχουμε:

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(A_1) & * \\ 0 & \varphi(A_2) \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 5.3.1 (Cayley-Hamilton για πίνακες). Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Τότε ισχύει:

$$\chi_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0I_n = 0.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο βήματα:

Βήμα Α'. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, τότε είναι όμοιος με άνω τριγωνικό πίνακα T . Δηλαδή, υπάρχει P αντιστρέψιμος ώστε:

$$A = P^{-1}TP.$$

Άρα:

$$\chi_A(A) = \chi_T(A) = \chi_T(P^{-1}TP) = P^{-1}\chi_T(T)P.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\chi_T(T) = 0$$

δηλαδή να δείξουμε το ζητούμενο στην ειδική περίπτωση που ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός.
Βήμα Β'. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n .

• **Βάση.** Για $n = 1$ το θεώρημα ισχύει προφανώς.

• **Επαγωγικό βήμα.** Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε άνω τριγωνικό πίνακα διάστασης $(n - 1) \times (n - 1)$.

Έστω

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$$

όπου T_1 είναι άνω τριγωνικός $(n - 1) \times (n - 1)$ και

$$\chi_T(x) = (\lambda_1 - x) \cdot \chi_{T_1}(x).$$

Άρα:

$$\chi_T(T) = (\lambda_1 \mathbb{I}_n - T) \cdot \chi_{T_1}(T).$$

Ισχύει:

$$\chi_T(T) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \lambda_1 \mathbb{I}_{n-1} - T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{T_1}(\lambda_1) & * \\ 0 & \chi_{T_1}(T_1) \end{pmatrix}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, $\chi_{T_1}(T_1) = 0$, άρα:

$$\chi_T(T) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \lambda_1 \mathbb{I}_{n-1} - T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

□

Παρατήρηση 5.3.2. Αν $\varphi \in \mathbb{F}[x]$, $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $\varphi(A) = 0$ και λ ιδιοτιμή του A , τότε η $\varphi(\lambda)$ είναι ρίζα του πολυνύμου $\varphi(x)$. Επομένως, αν $A^k = 0$, τότε κάθε ιδιοτιμή λ του A (στο $\mathbb{C}$) είναι 0.

Πρόταση 5.3.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- i. $A^n = 0$,
- ii. $A^k = 0$, για κάποιο $k \geq 1$,

iii. Κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$ είναι 0.

Απόδειξη. • i. $\Rightarrow$ ii. Προφανές, αφού $A^n = 0$.

- ii. $\Rightarrow$ iii. Από την Παρατήρηση 5.3.2, κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του μηδενικού πολυωνύμου, άρα 0.
- iii. $\Rightarrow$ i. Αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι 0, τότε $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$. Από το Θεώρημα 5.3.1 έχουμε

$$\chi_A(A) = (-1)^n A^n = 0,$$

άρα $A^n = 0$.

□

Θεώρημα 5.3.2 (Cayley-Hamilton για γραμμικές απεικονίσεις). Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $\chi_f(x) = (-1)^n x^n + \dots + a_0$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της. Τότε ισχύει:

$$\chi_f(f) = (-1)^n f^n + \dots + a_0 \cdot 1_V = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \hat{v}, \hat{v})$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει:

$$(\varphi(f) : \hat{v}, \hat{v}) = \varphi(A).$$

Για $\varphi(x) = \chi_f(x) = \chi_A(x)$, από το Θεώρημα 5.3.1 έχουμε $\chi_A(A) = 0$, άρα:

$$(\chi_f(f) : \hat{v}, \hat{v}) = 0 \Rightarrow \chi_f(f) = 0.$$

□

5.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5.

Ομάδα Α' : 1,2,3,4,5,6,7,11,14,23,28,34

Ομάδα Β' : 8,9,12,13,15,16,17,18,19,20,21,22,24,25,31,33,35

Ομάδα Γ' : 10,26,27,29,30

Άσκηση 5.1. Αποδείξτε ότι αν ο $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή, τότε ο A είναι τριγωνίσιμος.

Άσκηση 5.2. a. Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Αφού δείξετε ότι ο A είναι τριγωνίσιμος, βρείτε αντιστρέψιμο $U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

b. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Αφού δείξετε ότι ο A είναι τριγωνίσιμος, βρείτε αντιστρέψιμο $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

c. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Αφού δείξετε ότι ο A είναι τριγωνίσιμος, βρείτε αντιστρέψιμο $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

Άσκηση 5.3. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

είναι τριγωνικός αλλά όχι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 5.4. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις διαστάσεις των ιδιόχωρων του A .
- Αληθεύει ότι ο A είναι διαγωνίσιμος?
- Αληθεύει ότι ο A είναι τριγωνίσιμος? Αν ναι, να βρεθεί αντιστρέψιμος U με $U^{-1}AU$ τριγωνικό.

Άσκηση 5.5. Έστω $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = v_1 + v_2 + 2v_3$, $f(v_3) = av_2 + v_3$. Δείξτε ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν $a \geq 0$.

Άσκηση 5.6. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ τέτοιοι ώστε $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

Άσκηση 5.7. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $\chi_A(x) = -x^3 + x$. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k

- ο A^k είναι διαγωνίσιμος, και
- $A^{2k} = A^2$ και $A^{2k+1} = A$.

Άσκηση 5.8. α. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Τότε για κάθε $k \geq 1$, ισχύει $\text{Tr}(A^k) = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k$.

β. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας τριγωνίσιμος πίνακας τέτοιος ώστε $\text{Tr}(A^2) = 0$. Δείξτε ότι $A^n = 0$.

γ. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^{n-1}) = 0$. Δείξτε ότι αν $\text{Tr}(A^n) \neq 0$, τότε ο A είναι

- διαγωνίσιμος και
- αντιστρέψιμος.

Άσκηση 5.9. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

- Κάθε ιδιοτιμή του A στο $\mathbb{C}$ ισούται με το 0.
- $A^k = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο k .
- $A^n = 0$.
- $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = 0$.

Άσκηση 5.10. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιο ώστε $AB - BA = A$. Αποδείξτε ότι $A^n = 0$.

Άσκηση 5.11. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι αν $\chi_A = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, τότε

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \left(\frac{1}{\lambda_1} - x\right) \cdots \left(\frac{1}{\lambda_n} - x\right).$$

Άσκηση 5.12. Έστω $\dim V = n$ και $f : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση.

- Δείξτε ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν και μόνο αν για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχει υπόχωρος $W_i \leq V$ με $\dim W_i = i$, $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots \subseteq W_n$ και $f(W_i) \subseteq W_i$.
- Αληθεύει ότι η f είναι τριγωνίσιμη αν για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχει υπόχωρος $W_i \leq V$ με $\dim W_i = i$ και $f(W_i) \subseteq W_i$?

Άσκηση 5.13. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

- Δείξτε ότι αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού $n - 1$ τέτοιο ώστε $Af(A) = 0$.
- Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού $n - 1$ τέτοιο ώστε $A^{-1} = f(A)$.

Άσκηση 5.14. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Να παρασταθεί ο A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των I_3, A, A^2 .
- Αποδείξτε ότι $A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A$ για κάθε θετικό ακέραιο n .
- Να βρεθεί πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ 2 τέτοιο ώστε $A^5 - 2A^4 + 2A + 3I_3 = \varphi(A)$.

Άσκηση 5.15. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $\chi_A(x) = (-1)^n(x^n - x^m - x^{n-m} + 1)$, όπου $0 < m < n$. Δείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε A^ν να είναι τριγωνίσιμος.

Άσκηση 5.16. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μη διαγωνίσιμος πίνακας. Τότε ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Άσκηση 5.17. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = BA = 0$. Δείξτε ότι $\chi_A(A + B) = \chi_A(B) - \det(A) \cdot I_n$.

Άσκηση 5.18. Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$, θέτουμε $h(A) = \sum_{i,j} a_{ij}a_{ji}$.

- a. Δείξτε ότι αν οι A, B είναι όμοιοι, τότε $h(A) = h(B)$.
- b. Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Δείξτε ότι $h(A) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ είναι οι ιδιοτιμές του A .

Άσκηση 5.19. Δείξτε ότι κάθε άνω τριγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι όμοιος με κάτω τριγωνικό πίνακα. Στη συνέχεια δείξτε ότι κάθε πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι όμοιος με κάτω τριγωνικό πίνακα.

Άσκηση 5.20. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A^n = I_n$. Δείξτε ότι $-n \leq \text{Tr} A \leq n$.

Άσκηση 5.21. Έστω V ένας $\mathbb{C}$ -διανυσματικός χώρος και $f, g : V \rightarrow V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$. Δείξτε τα εξής.

- a. Αν λ είναι ιδιοτιμή της f , τότε $g(V_f(\lambda)) \subseteq V_f(\lambda)$.
- b. Οι f, g έχουν κοινό ιδιοδιάνυσμα.
- c. Υπάρχει διατεταγμένη βάση του V τέτοια ώστε οι αντίστοιχοι πίνακες των f, g είναι άνω τριγωνικοί.
- d. Για κάθε ιδιοτιμή λ της $f - g$ υπάρχει ιδιοτιμή λ_f της f και ιδιοτιμή λ_g της g τέτοιες ώστε $\lambda = \lambda_f - \lambda_g$.

Άσκηση 5.22. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$L_A : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, L_A(X) = AX$$

$$R_B : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, R_B(X) = XB$$

- a. Δείξτε ότι $L_A \circ R_B = R_B \circ L_A$.
- b. Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση L_A έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα A και ότι η γραμμική απεικόνιση R_B έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα B .
- c. Έστω ότι οι A, B δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή. Δείξτε ότι για κάθε $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ υπάρχει μοναδικός $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $AD - DB = C$.

Άσκηση 5.23. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και W_A ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n \times n}$ που παράγεται από τα $I_n, A, A^2, \dots$. Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 0$, $A^{n+k} \in \langle I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1} \rangle$ και άρα $\dim W_A \leq n$.

Άσκηση 5.24. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- Έστω $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$. Τότε ο πίνακας A^n είναι τριγωνίσιμος αν και μόνο αν ο n είναι άρτιος.
- Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ υπάρχει πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ θετικού βαθμού τέτοιο ώστε $\varphi(A) = I_n$.

Άσκηση 5.25. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $\text{rank } A = 1$. Αποδείξτε τις εξής προτάσεις.

- $A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A$.
- $A^n = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}(A) = 0$.
- Ο A είναι τριγωνίσιμος.
- $\text{Tr}(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ ο A είναι διαγωνίσιμος. (βλ. άσκηση 3.26).

Άσκηση 5.26. Έστω $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιο ώστε $A^i C = B^i D$ για κάθε $i \geq 1$. Αποδείξτε ότι αν οι A, B είναι αντιστρέψιμοι, τότε $C = D$.

Άσκηση 5.27. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $f_A : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από $f_A(B) = AB - BA$. Δείξτε ότι αν κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με το 0, τότε κάθε ιδιοτιμή της f_A είναι ίση με το 0.

Άσκηση 5.28. Έστω V ένας $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος διάστασης 3, $\hat{a} = \{v_1, v_2, v_3\}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $c \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow V$ που ορίζεται από τις σχέσεις $f(v_1) = 2v_2$, $f(v_2) = -v_1 + 3v_2$, $f(v_3) = cv_1 + v_2 + v_3$.

- Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές του c για τις οποίες η f είναι τριγωνίσιμη.
- Βρείτε όλες τις τιμές του c για τις οποίες η f είναι διαγωνίσιμη.
- Για $c = 0$ βρείτε μια βάση κάθε ιδιόχωρου της f και μια βάση του V που παράγεται από ιδιοδιανύσματα της f .

Άσκηση 5.29. Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι τριγωνίσιμος και $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(A^3) = \text{Tr}(A^4) = c$, τότε $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $\text{Tr}(A^k) = c$ για κάθε θετικό ακέραιο k .

Άσκηση 5.30. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ που δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n \times m}$ με $AX = XB$.

Άσκηση 5.31. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Δείξτε ότι για κάθε $m \geq 3$ δεν υπάρχει $B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ με $B^m = A$.

Άσκηση 5.32. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $(AB)^n = 0$, $n \geq 1$. Τότε $(BA)^n = 0$.

Άσκηση 5.33. Αν ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έχει το πολύ μια μη μηδενική ιδιοτιμή, τότε $\det(I_n + A) = 1 + \text{Tr}(A)$.

Άσκηση 5.34. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Δείξτε ότι ο πίνακας $\chi_B(A)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι A, B δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή.

Άσκηση 5.35. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

- Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ο A είναι τριγωνίσιμος αν και μόνο αν A^{-1} είναι τριγωνίσιμος.
- Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι τριγωνίσιμος, τότε ο $\varphi(A)$ είναι τριγωνίσιμος για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.
- Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Αν ο A^2 είναι τριγωνίσιμος, τότε ο A είναι τριγωνίσιμος.
- Αν $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $U^{-1}AU$ άνω τριγωνικός.
- Αν $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

- Αν $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & -5 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -5 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

- g. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$. Τότε ο A είναι τριγωνίσιμος και όχι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\dim V(1) = 1$.
- h. Έστω $f : V \rightarrow V$ μια τριγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση και $U \leq V$ ένα υπόχωρος τέτοιος ώστε $f(U) \subseteq U$. Τότε ο περιορισμός της f στο U είναι τριγωνίσιμη απεικόνιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

6.1 Ελάχιστο Πολυώνυμο

Κίνητρο. Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τότε υπάρχει πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, με $\varphi(x) \neq 0$ τέτοιο ώστε $\varphi(A) = 0$. Για παράδειγμα, από το Θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε $\chi_A(A) = 0$. Σκοπός είναι να βρούμε το **μονικό** πολυώνυμο **ελάχιστου βαθμού** που μηδενίζει τον A .

Ορισμός 6.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Το **ελάχιστο πολυώνυμο** του A , συμβολίζεται με $m_A(x)$ και ικανοποιεί:

- i. $m_A(x)$ είναι μονικό,
- ii. $m_A(A) = 0$,
- iii. $m_A(x)$ είναι πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού με τις ιδιότητες i και ii.

Παρατήρηση 6.1.1. Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ υπάρχει πολυώνυμο που ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 6.1.1 και μάλιστα είναι **μοναδικό**.

Απόδειξη. • **Υπαρξη.** Θεωρούμε το σύνολο:

$$S = \{\varphi(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \varphi(x) \neq 0 \text{ και } \varphi(A) = 0\}.$$

Το σύνολο S είναι μη κενό, αφού από το Θεώρημα 5.3.1 έχουμε ότι $\chi_A(A) = 0$. Επιλέγουμε πολυώνυμο $\varphi(x) \in S$ ελαχίστου βαθμού. Αν r είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, τότε το $r^{-1}\varphi(x)$ είναι επίσης στο S , μονικό και ελαχίστου βαθμού.

- **Μοναδικότητα.** Έστω $m_A(x)$ και $m'_A(x)$ δύο μονικά πολυώνυμα που μηδενίζουν τον A και έχουν ελάχιστο βαθμό. Αν $m_A(x) \neq m'_A(x)$, τότε η διαφορά

$$m_A(x) - m'_A(x)$$

είναι μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του $\deg(m_A)$ και μηδενίζει τον A . Τότε, το

$$r^{-1}(m_A - m'_A)$$

(όπου r ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου) είναι μονικό, μηδενίζει τον A και έχει μικρότερο βαθμό — άτοπο. Άρα

$$m_A(x) = m'_A(x).$$

□

Ιδιότητες 6.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

- Αν $\varphi(A) = 0$ για κάποιο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $m_A(x) \mid \varphi(x)$. Ειδικότερα, ισχύει $m_A(x) \mid \chi_A(x)$.
- Κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $m_A(x)$. Κάθε ρίζα του $m_A(x)$ είναι ιδιοτιμή του A . Δηλαδή, $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες (χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η πολλαπλότητα).¹

Απόδειξη. i. Από την Ευκλείδεια διαίρεση, υπάρχουν πολυώνυμα $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε:

$$\varphi(x) = q(x) m_A(x) + r(x), \quad \text{όπου είτε } \deg r(x) < \deg m_A(x) \text{ είτε } r(x) = 0.$$

Τότε:

$$\varphi(A) = q(A) m_A(A) + r(A) = r(A).$$

Αφού $\varphi(A) = 0$, προκύπτει $r(A) = 0$. Αν $r(x) \neq 0$, τότε το πολυώνυμο $c^{-1}r(x)$, όπου c ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, είναι μονικό, μη μηδενικό και ικανοποιεί $r(A) = 0$ με μικρότερο βαθμό από $m_A(x)$ — άτοπο λόγω του ορισμού του $m_A(x)$. Άρα $r(x) = 0$, δηλαδή $m_A(x) \mid \varphi(x)$.

Ειδικά για $\varphi(x) = \chi_A(x)$, από το Θεώρημα 5.3.1 έχουμε $\chi_A(A) = 0$, οπότε $m_A(x) \mid \chi_A(x)$.

¹Για παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$ και $m_A(x) = (x-1)(x-2)$. Δεν θα μπορούσε να είναι $m_A(x) = (x-1)^2$ ή $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$.

ii. Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ και $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $AX = \lambda X$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει:

$$\varphi(A)X = \varphi(\lambda)X.$$

Ειδικότερα, για $\varphi(x) = m_A(x)$ προκύπτει:

$$m_A(A)X = m_A(\lambda)X = 0.$$

Επειδή $X \neq 0$, έχουμε $m_A(\lambda) = 0$. Δηλαδή, κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $m_A(x)$. Ο αντίστροφος ισχυρισμός έπεται άμεσα από το (i), αφού $m_A(x) \mid \chi_A(x)$.

□

Παράδειγμα 6.1.1. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\chi_A(x) = (x-1)(x-2) = \chi_B(x).$$

Τότε

$$m_A(x) = (x-1)(x-2)$$

διότι

$$m_A(x) \mid \chi_A(x) = (x-1)(x-2)$$

και έχει ίδιες ρίζες. Όμοια, έχουμε ότι

$$m_B(x) = (x-1)(x-2).$$

Παράδειγμα 6.1.2. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $\chi_A(x) = -(x-2)^3$, άρα

$$m_A(x) \in \{x-2, (x-2)^2, (x-2)^3\}.$$

Έχουμε:

$$A - 2\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (A - 2\mathbb{I}_3)^2 = 0 \Rightarrow m_A(x) = (x-2)^2.$$

Για τον πίνακα B :

$$B - 2\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (B - 2\mathbb{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Άρα

$$m_B(x) = (x - 2)^3.$$

Ιδιαίτερη προσοχή στο συγκεκριμένο παράδειγμα!

Παράδειγμα 6.1.3. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- a. Βρείτε $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\deg \varphi(x) \leq 1$, ώστε $A^{-1} = \varphi(A)$.
- b. Βρείτε $\psi(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\deg \psi(x) \leq 1$, ώστε $A^4 + A - 2\mathbb{I}_3 = \psi(A)$.

Απόδειξη. Αρχικά βρίσκουμε το $m_A(x)$. Έχουμε ότι $\chi_A(x) = -(x - 2)^2(x - 3)$, άρα:

$$m_A(x) = (x - 2)^2(x - 3) \quad \text{ή} \quad m_A(x) = (x - 2)(x - 3).$$

Υπολογίζουμε:

$$(A - 2\mathbb{I}_3)(A - 3\mathbb{I}_3) = 0 \Rightarrow m_A(x) = (x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6.$$

a. Εφόσον το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A , προκύπτει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Από $m_A(A) = 0$, δηλαδή $A^2 - 5A + 6\mathbb{I}_3 = 0$, λύνοντας παίρνουμε:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A - 5\mathbb{I}_3) \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{1}{6}(x - 5).$$

b. Από την Ευκλείδεια διαίρεση $x^4 + x - 2$ με $m_A(x) = x^2 - 5x + 6$, έχουμε:

$$x^4 + x - 2 = (x^2 + 5x + 19)(x^2 - 5x + 6) + 66x - 166.$$

Άρα:

$$A^4 + A - 2\mathbb{I}_3 = 66A - 166\mathbb{I}_3 \Rightarrow \psi(x) = 66x - 166.$$

εφόσον $m_A(A) = 0$. □

Πρόταση 6.1.1. Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Απόδειξη. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $B = P^{-1}AP$, όπου $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος. Για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει:

$$\varphi(B) = P^{-1}\varphi(A)P.$$

Άρα $\varphi(A) = 0$ αν και μόνο αν $\varphi(B) = 0$. Συνεπώς, $m_A(x) = m_B(x)$. □

Πρόταση 6.1.2. Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } B \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}, C \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2}, n = n_1 + n_2,$$

τότε

$$m_A(x) = \varepsilon.\kappa.\pi.(m_B(x), m_C(x)).$$

Απόδειξη. Αφού

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

γνωρίζουμε ότι, για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, ισχύει:

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(B) & 0 \\ 0 & \varphi(C) \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $\varphi(x) = m_A(x)$, έχουμε:

$$m_A(A) = \begin{pmatrix} m_A(B) & 0 \\ 0 & m_A(C) \end{pmatrix} = 0,$$

άρα $m_A(B) = 0$ και $m_A(C) = 0$. Συνεπώς:

$$m_B(x) \mid m_A(x) \quad \text{και} \quad m_C(x) \mid m_A(x) \Rightarrow \varepsilon.\kappa.\pi.(m_B(x), m_C(x)) \mid m_A(x).$$

Ορίζουμε $\psi(x) = \varepsilon.\kappa.\pi.(m_B(x), m_C(x))$. Τότε:

$$\psi(A) = \begin{pmatrix} \psi(B) & 0 \\ 0 & \psi(C) \end{pmatrix} = 0,$$

άρα $m_A(x) \mid \psi(x)$. Επειδή και τα δύο είναι μονικά, καταλήγουμε:

$$m_A(x) = \psi(x).$$

□

Παρατήρηση 6.1.2. Αν

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad \text{όπου } A_i \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i}, \quad n_1 + \cdots + n_k = n,$$

τότε:

$$m_A(x) = \varepsilon.\kappa.\pi.(m_{A_1}(x), \dots, m_{A_k}(x)).$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο με χρήση της Πρότασης 6.1.2 και επαγωγής στο k . $\square$

Πόρισμα 6.1.1. Έστω $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$, για κάθε $i, j \in \{1, \dots, k\}$ και $i \neq j$. Τότε ισχύει:

$$m_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k).$$

Απόδειξη. Το πόρισμα είναι άμεσο εφαρμόζοντας την Παρατήρηση 6.1.2 για $A_i = \lambda_i I_{n_i}$. $\square$

Παρατήρηση 6.1.3. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ διαγωνίσιμος, δηλαδή όμοιος με διαγώνιο πίνακα. Από την Πρόταση 6.1.1 και το Πόρισμα 6.1.1, το $m_A(x)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Παράδειγμα 6.1.4. Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & & \\ 2 & 3 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 3 & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Ισοδύναμα, γράφουμε $A = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & C \end{array} \right)$ με:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Με υπολογισμούς βρίσκουμε:

$$m_B(x) = (x - 2)(x - 5), \quad m_C(x) = x(x - 2).$$

Από την Πρόταση 6.1.2, έχουμε:

$$m_A(x) = \varepsilon.\kappa.\pi.(m_B(x), m_C(x)) = x(x - 2)(x - 5).$$

Παράδειγμα 6.1.5. Έστω πίνακας $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & C \end{array} \right)$. Τότε γενικά δεν αληθεύει (γιατί;) ότι $m_A(x) = \varepsilon.κ.π.(m_B(x), m_C(x))$. Αυτό που ισχύει γενικά είναι ότι $\varepsilon.κ.π.(m_B(x), m_C(x)) | m_A(x)$.

6.2 Κριτήριο Διαγωνιζιμότητας

Κίνητρο. Έστω A διαγωνίσιμος πίνακας. Τότε γνωρίζουμε ότι ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$$

με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για κάθε $i \neq j$. Από την Πρόταση 6.1.1 και το Πόρισμα 6.1.1 έχουμε:

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k),$$

δηλαδή γινόμενο μονικών διακεκριμένων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 6.2.1 (Κριτήριο διαγωνιζιμότητας με $m_A(x)$). Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τότε ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν το $m_A(x)$ είναι γινόμενο μονικών διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{F}[x]$.

Απόδειξη. Αν ο A είναι διαγωνίσιμος, το ζητούμενο έπεται άμεσα από το Πόρισμα 6.1.1.

Αντιστρόφως, έστω $m_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για κάθε $i \neq j$. Γνωρίζουμε ότι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι οι λ_i , για $i = 1, \dots, k$. Θα δείξουμε ότι:

$$\mathbb{F}^{n \times 1} = V_A(\lambda_1) + V_A(\lambda_2) + \cdots + V_A(\lambda_k).$$

Ορίζουμε τα εξής πολυώνυμα:²

$$a_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j).$$

Τότε:

$$\mu.κ.δ.(a_1(x), \dots, a_k(x)) = 1.$$

Άρα, υπάρχουν $b_i(x) \in \mathbb{F}[x]$ τέτοια ώστε:

$$1 = \sum_{i=1}^k a_i(x) b_i(x).$$

²Για παράδειγμα, για $k = 3$ έχουμε: $a_1(x) = (x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$, $a_2(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_3)$, $a_3(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$.

Συνεπώς:

$$\mathbb{I}_n = \sum_{i=1}^k a_i(A)b_i(A),$$

δηλαδή για κάθε $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ ισχύει:

$$X = \sum_{i=1}^k a_i(A)b_i(A)X.$$

Ισχυρισμός: Για κάθε $i = 1, \dots, k$, το $a_i(A)b_i(A)X \in V_A(\lambda_i)$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$(A - \lambda_i \mathbb{I}_n)a_i(A)b_i(A)X = m_A(A)b_i(A)X = 0,$$

αφού $(x - \lambda_i)a_i(x) = m_A(x)$. Άρα κάθε όρος $a_i(A)b_i(A)X$ ανήκει στο αντίστοιχο ιδιοχώρο $V_A(\lambda_i)$.

Άρα:

$$\mathbb{F}^{n \times 1} \subseteq \sum_{i=1}^k V_A(\lambda_i) \Rightarrow \mathbb{F}^{n \times 1} = \sum_{i=1}^k V_A(\lambda_i),$$

και από το Θεώρημα 4.2.1, ο A είναι διαγωνίσιμος. □

6.3 Ελάχιστο πολυώνυμο γραμμικής απεικόνισης

Ορισμός 6.3.1. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $\hat{a}$ διατεταγμένη βάση του V . Θέτουμε $m_f(x) = m_A(x)$, όπου $A = (f: \hat{a}, \hat{a})$. Το $m_f(x)$ λέγεται το **ελάχιστο πολυώνυμο** της f .

Παρατήρηση 6.3.1. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο, ο ορισμός του $m_f(x)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της $\hat{a}$.

Ιδιότητες 6.3.1 (Ελάχιστου πολυωνύμου γραμμικής απεικόνισης). Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- i. Το $m_f(x)$ είναι μονικό, ισχύει ότι $m_f(f) = 0$, και ως προς τις ιδιότητες αυτές είναι ελάχιστου βαθμού.
- ii. Αν $\varphi(f) = 0$ με $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $m_f(x) \mid \varphi(x)$. Ειδικότερα, $m_f(x) \mid \chi_f(x)$.

- iii. Κάθε ιδιοτιμή της f είναι ρίζα του $m_f(x)$. Τα $m_f(x)$ και $\chi_f(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.
- iv. Η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν $m_f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για κάθε $i \neq j$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες είναι άμεσες από τα αντίστοιχα αποτελέσματα για πίνακες. Ενδεικτικά θα αποδείξουμε την ιδιότητα i.

Έστω $A = (f : \hat{a}, \hat{a})$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ισχύει:

$$\varphi(A) = (\varphi(f) : \hat{a}, \hat{a})$$

από την Πρόταση 2.4.1. Άρα:

$$(m_f(f) : \hat{a}, \hat{a}) = m_f(A) = m_A(A) = 0,$$

δηλαδή $m_f(f) = 0$. Εφόσον $m_A(x)$ είναι μονικό και ελαχίστου βαθμού, τότε και το $m_f(x)$ είναι μονικό και ελαχίστου βαθμού εξ ορισμού. $\square$

6.4 Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση

Ερώτημα 6.4.1. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ διαγωνίσιμοι. Τότε υπάρχουν $P_A, P_B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμοι με $P_A^{-1}AP_A$ και $P_B^{-1}BP_B$ διαγώνιοι πίνακες. Πότε υπάρχει κοινός P αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}AP$ και $P^{-1}BP$ διαγώνιοι πίνακες ;

Παρατήρηση 6.4.1. Έστω ότι υπάρχει τέτοιος P , δηλαδή P αντιστρέψιμος με $P^{-1}AP = \Delta_A$ διαγώνιος και $P^{-1}BP = \Delta_B$ διαγώνιος. Τότε $A = P\Delta_AP^{-1}$ και $B = P\Delta_BP^{-1}$ και παρατηρούμε ότι

$$AB = P\Delta_A\Delta_BP^{-1} \quad \text{και} \quad BA = P\Delta_B\Delta_AP^{-1}.$$

Επειδή Δ_A, Δ_B είναι διαγώνιοι, τότε $\Delta_A\Delta_B = \Delta_B\Delta_A$, δηλαδή $AB = BA$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Θα μελετήσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα στις γραμμικές απεικονίσεις.

6.4.1 Αναλλοίωτοι Υπόχωροι

Ορισμός 6.4.1. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Ένας υπόχωρος $U \leq V$ λέγεται f -**αναλλοίωτος** αν $f(U) \subseteq U$, δηλαδή για κάθε $u \in U$ ισχύει ότι $f(u) \in U$.

Παράδειγμα 6.4.1. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση.

- i. Τα $\{0\}$ και V είναι f -αναλλοίωτοι υπόχωροι.
- ii. Το $\ker f$ και το $\operatorname{Im} f$ είναι f -αναλλοίωτοι υπόχωροι. Πράγματι:
 - Αν $u \in \ker f$, τότε $f(u) = 0 \in \ker f$.
 - Αν $v \in \operatorname{Im} f$, τότε υπάρχει $u \in V$ ώστε $f(u) = v \Rightarrow f(v) = f(f(u)) \in \operatorname{Im} f$.
- iii. Κάθε ιδιόχωρος $V_f(\lambda)$ είναι f -αναλλοίωτος. Πράγματι, αν $u \in V_f(\lambda)$, τότε $f(u) = \lambda u \in V_f(\lambda)$.
- iv. Αν $U_1, U_2 \leq V$ με U_1, U_2 f -αναλλοίωτοι, τότε και το $U_1 + U_2$ είναι f -αναλλοίωτος.
- v. Το άθροισμα f -αναλλοίωτων ιδιόχωρων είναι f -αναλλοίωτος.
- vi. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (x, x + y)$.
 - $f(e_2) = e_2$ και $f(e_1) = e_1 + e_2$, όπου e_1, e_2 η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$.
 - Άρα: $\langle e_2 \rangle$ είναι f -αναλλοίωτος, ενώ $\langle e_1 \rangle$ δεν είναι (δείξτε γιατί).
- vii. Αν $U \leq V$ με $\dim U = 1$, τότε ο U είναι f -αναλλοίωτος αν και μόνο αν $U = \langle u \rangle$, όπου u κάποιο ιδιοδιάνυσμα της f (δείξτε γιατί).

Παρατήρηση 6.4.2. Έστω U f -αναλλοίωτος. Τότε $f(U) \subseteq U$, δηλαδή ο περιορισμός της f στο U , συμβολίζεται με f_U , και είναι η γραμμική απεικόνιση:

$$f_U: U \rightarrow U, \quad f_U(u) = f(u), \quad \text{για κάθε } u \in U.$$

Πρόταση 6.4.1. Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και U f -αναλλοίωτος υπόχωρος του V . Αν f είναι διαγωνίσιμη, τότε και ο περιορισμός $f_U: U \rightarrow U$ είναι διαγωνίσιμος.

Απόδειξη. Από την Ιδιότητα 6.3.1 (iv) ισχύει ότι:

$$m_f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k), \quad \text{με } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ για } i \neq j.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $m_{f_U}(x) \mid m_f(x)$. Αν αυτό ισχύει, τότε το $m_{f_U}(x)$ είναι επίσης γινόμενο διακεκριμένων παραγόντων και συνεπώς f_U διαγωνίσιμη από την ίδια ιδιότητα.

Πράγματι, για κάθε $u \in U$ ισχύει:

$$m_f(f_U)(u) = m_f(f)(u) = 0.$$

Άρα $m_{f_U}(x) \mid m_f(x)$. □

6.4.2 Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση

Θεώρημα 6.4.1. Έστω $f, g: V \rightarrow V$ γραμμικές απεικονίσεις. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i. Υπάρχει βάση του V κάθε στοιχείο της οποίας είναι ιδιοδιάνυσμα και της f και της g .
- ii. Οι f, g είναι διαγωνίσιμες και επιπλέον $f \circ g = g \circ f$.

Απόδειξη. • i. $\Rightarrow$ ii. Έστω ότι υπάρχει βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ του V με $f(v_i) = \lambda_i v_i$ και $g(v_i) = \mu_i v_i$, για κάθε $i = 1, \dots, n$, και $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $f \circ g = g \circ f$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} (f \circ g - g \circ f)(v_i) &= f(g(v_i)) - g(f(v_i)) = f(\mu_i v_i) - g(\lambda_i v_i) \\ &= \mu_i f(v_i) - \lambda_i g(v_i) \\ &= \mu_i \lambda_i v_i - \lambda_i \mu_i v_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα $f \circ g = g \circ f$. Τέλος, από το Θεώρημα 4.3.1 ii., προκύπτει ότι f, g είναι διαγωνίσιμες.

- ii. $\Rightarrow$ i. Η f είναι διαγωνίσιμη, άρα ισχύει:

$$V = V_f(\lambda_1) + \dots + V_f(\lambda_k),$$

όπου λ_j είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f .

Ισχυριζόμαστε ότι αν $f \circ g = g \circ f$, τότε κάθε $V_f(\lambda_i)$ είναι g -αναλλοίωτος υπόχωρος. Πράγματι, έστω $v \in V_f(\lambda_i)$, δηλαδή $f(v) = \lambda_i v$. Τότε:

$$g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v) \Rightarrow f(g(v)) = \lambda_i g(v) \Rightarrow g(v) \in V_f(\lambda_i).$$

Άρα $V_f(\lambda_i)$ είναι g -αναλλοίωτος.

Έστω g_i ο περιορισμός της g στο $V_f(\lambda_i)$. Επειδή g είναι διαγωνίσιμη και $V_f(\lambda_i)$ είναι g -αναλλοίωτος, από την Πρόταση 6.4.1 προκύπτει ότι g_i είναι διαγωνίσιμη. Άρα υπάρχει βάση B_i του $V_f(\lambda_i)$ από ιδιοδιανύσματα της g . Επειδή $B_i \subseteq V_f(\lambda_i)$, κάθε στοιχείο του είναι ιδιοδιάνυσμα και της f .

Θέτοντας $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$, παίρνουμε τη ζητούμενη βάση του V , κάθε στοιχείο της οποίας είναι ιδιοδιάνυσμα της f και της g .³

□

³ Η εξήγηση είναι ότι $\dim \sum_{i=1}^k V_f(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \dim V_f(\lambda_i)$, άρα $\dim V = \sum_i |B_i|$.

Ας δούμε γιατί ισχύει το αντίστοιχο στους πίνακες. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις:

$$L_A, L_B: \mathbb{F}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times 1}, \quad L_A(X) = AX, \quad L_B(X) = BX.$$

Αν ισχύει το Θεώρημα 6.4.1.i, τότε υπάρχει βάση B του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ κάθε στοιχείο της οποίας είναι ιδιοδιάνυσμα των L_A και L_B .

Άρα L_A, L_B είναι διαγωνίσιμες και $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A$. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι οι πίνακες A, B είναι διαγωνίσιμοι και $AB = BA$, διότι:

$$\begin{aligned} BA &= (L_B : \hat{E}, \hat{E}) \cdot (L_A : \hat{E}, \hat{E}) \\ &= (L_B \circ L_A : \hat{E}, \hat{E}) \\ &= (L_A \circ L_B : \hat{E}, \hat{E}) \\ &= (L_A : \hat{E}, \hat{E}) \cdot (L_B : \hat{E}, \hat{E}) = AB. \end{aligned}$$

6.5 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6.

Ομάδα Α' : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 30, 32, 36

Ομάδα Β' : 6, 8, 9, 11, 13, 14, 20, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 37

Ομάδα Γ' : 25, 27, 38, 39, 40

Άσκηση 6.1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A .
- Εξετάστε αν ο A είναι διαγωνίσιμος.
- Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και βρείτε $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ 1 με $A^{-1} = \varphi(A)$.
- Βρείτε $\psi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού το πολύ 1 με $A^4 = \psi(A)$.

Άσκηση 6.2. Υπολογίστε τα χαρακτηριστικά και τα ελάχιστα πολυώνυμα των

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$$

και εξετάστε αν οι A, B είναι όμοιοι.

Άσκηση 6.3. Έστω $\hat{v} = (v_1, v_2, v_3)$ μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$ και

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(xv_1 + yv_2 + zv_3) = (3x + y)v_1 + (2y + z)v_2 + (-x - y + z)v_3.$$

Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της f και εξετάστε αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{u}$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(f : \hat{u}, \hat{u}) = A$, όπου A είναι ο πίνακας της προηγούμενης άσκησης.

Άσκηση 6.4. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $f(\varphi(x)) = \varphi'(x) - 2\varphi(x)$.

- Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της f και εξετάστε αν η f είναι διαγωνίσιμη.
- Βρείτε τη διάσταση κάθε ιδιόχωρου της f .

Άσκηση 6.5. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $(A + 3\mathbb{I}_n)(A - 4\mathbb{I}_n)(A + 7\mathbb{I}_n) = 0$. Εξετάστε αν ο A είναι

- a. διαγωνίσιμος ,
- b. αντιστρέψιμος .

Άσκηση 6.6. Να καθοριστούν όλοι οι $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιο ώστε $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ και $\text{Tr}(A) = 6$.

Άσκηση 6.7. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο του

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

Εξετάστε αν ο A είναι διαγωνίσιμος.

Άσκηση 6.8. Έστω $n > 1$. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times n}, f(A) = A^t$$

και εξετάστε αν είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 6.9. Αν $f : V \rightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f^3 = f$, τότε κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $v = v_{-1} + v_0 + v_1$, όπου $v_\lambda \in \ker(f - \lambda \mathbb{I}_n)$, $\lambda = -1, 0, 1$.

Άσκηση 6.10. Δείξτε ότι $m_A(x) = m_{A^t}(x)$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Άσκηση 6.11. Έστω $\mathbb{F}^{n \times n}$ και W_A ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n \times n}$ που παράγεται από τα στοιχεία A^n με $n \geq 0$. Δείξτε ότι $\dim W_A = \deg m_A(x)$.

Άσκηση 6.12. Έστω $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n \times 2n}$.

- a. Δείξτε ότι αν ο D είναι διαγωνίσιμος, τότε οι A και C είναι διαγωνίσιμοι.
- b. Ισχύει το αντίστροφο του a.;

Άσκηση 6.13. Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Άσκηση 6.14. Δείξτε τα εξής.

- Αν $\deg m_A(x) = \deg \chi_A(x)$, τότε $m_A(x) = (-1)^n \chi_A(x)$.
- Έχουμε ότι $m_A(x) = x^n - 1$ και $m_B(x) = (x - 1)^n$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Άσκηση 6.15. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Αποδείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $a = f = 0$.

Άσκηση 6.16. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

- Βρείτε τις τιμές του k ώστε $\deg m_A(x) \leq 2$.
- Για την τιμή του k που βρήκατε πριν, υπολογίστε τον A^{-1} με χρήση του $m_A(x)$.
- Δείξτε ότι ο A^m δεν είναι διαγωνίσιμος για κάθε θετικό ακέραιο m .

Άσκηση 6.17. Να βρεθούν οι τιμές του $c \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε το πολυώνυμο $(x-3)^{1821}(x^{1821} - 5x + c)$ να μηδενίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 6.18. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση με $m_f(x) = x(x-1)^2$. Βρείτε όλα τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $f^{1821} + af^2 + bf + c \cdot 1_{\mathbb{R}^n} = 0$.

Άσκηση 6.19. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Για καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις βρείτε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχουν) τέτοιες ώστε να αληθεύει η αναγραφόμενη ιδιότητα.

- Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $P^{-1}AP$ άνω τριγωνικό.
- Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $P^{-1}AP$ διαγώνιο.
- Ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο $(x-1)(x-2) \cdots (x-2010)$.

Άσκηση 6.20. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A^m = \mathbb{I}_n$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και $\text{Tr}(A) = n$. Αποδείξτε ότι $A = \mathbb{I}_n$.

Άσκηση 6.21. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με $A \neq \mathbb{I}_2, B \neq -\mathbb{I}_2, A^3 - A^2 + A - \mathbb{I}_2, B^3 + B^2 + B + \mathbb{I}_2 = 0$.

- Να δειχθεί ότι οι A, B έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.
- Αληθεύει ότι έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο ;
- Εξετάστε αν οι A, B είναι τριγωνίσιμοι.

Άσκηση 6.22. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $A^2 - 9A + 20\mathbb{I}_3 = 0$. Δείξτε ότι ισχύει ακριβώς μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις

$$A = 4\mathbb{I}_3 \text{ ή } A = 5\mathbb{I}_3 \text{ ή } A \text{ όμοιος με τον } \text{diag}(4, 4, 5) \text{ ή } A \text{ όμοιος με τον } \text{diag}(4, 5, 5).$$

Άσκηση 6.23. Έστω $A_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, i = 1, \dots, 5$, με $A_i^2 - 9A_i + 20\mathbb{I}_3 = 0$. Δείξτε ότι δύο από τους A_i είναι όμοιοι.

Άσκηση 6.24. Έστω $f, g : V \rightarrow V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε

$$\mu.κ.δ.(m_f(x), m_g(x)) = 1.$$

- Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση $m_g(f) : V \rightarrow V$ είναι ισομορφισμός.
- Δείξτε ότι αν $\ker f \neq \{0_V\}$, τότε $\ker g = \{0_V\}$.

Άσκηση 6.25. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Στην άσκηση 3.17, είδαμε ότι $\chi_A(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$. Δείξτε ότι $m_A(x) = (-1)^n \chi_A(x)$.

Άσκηση 6.26. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Δείξτε ότι

$$\text{ο } \varphi(A) \text{ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν } \mu.κ.δ.(\varphi(x), m_A(x)) = 1.$$

Άσκηση 6.27. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος, τριγωνίσιμος πίνακας τέτοιος ώστε $m_A(x) = m_{A^2}(x)$. Δείξτε ότι $(A - \mathbb{I}_n)^n = 0$.

Άσκηση 6.28. a. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ τέτοιοι ώστε $m_A(x) = m_B(x)$. Δείξτε ότι οι A, B είναι όμοιοι.

b. Έστω

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}.$$

Δείξτε ότι $\chi_C(x) = \chi_D(x)$ και $m_C(x) = m_D(x)$, αλλά οι πίνακες C, D δεν είναι όμοιοι.

Άσκηση 6.29. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $R_A : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times n}, R_A(B) = BA$. Δείξτε τα εξής.

- a. Αν $\sigma(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $\sigma(R_A)(B) = B\sigma(A)$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, και
b. Αληθεύει ότι $\chi_{R_A}(x) = \chi_A(x)$;

Άσκηση 6.30. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Ξέρουμε ότι $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ (βλ. άσκηση 3.27). Αληθεύει ότι $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$;

Άσκηση 6.31. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

- a. Υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = (x-1)(x+1)^3$ και $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)$.
b. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A^5 + 5A + \mathbb{I}_n = 0$. Τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.
c. Υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $m_A(x) = (x-1)(x-3)$ και A όμοιο με πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & 2 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix};$$

Άσκηση 6.32. Αν $f: V \rightarrow V$ είναι διαγωνίσιμη γραμμική απεικόνιση και U είναι f -αναλλοίωτος υπόχωρος του V , τότε ο περιορισμός της f στο U είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση 6.33. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $\det A = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $AB = BA = 0$.

Άσκηση 6.34. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $A^3 = A$ και $B^3 = B$. Δείξτε τα εξής.

- a. Ο A είναι διαγωνίσιμος και $\text{rank}(A) = \text{Tr}(A^2)$.
b. Οι $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι όμοιοι αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ και $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

Άσκηση 6.35. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $A^2 - 3A = B^2 - 3B = 0$. Δείξτε τα εξής:

- a. Αν $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$, τότε οι A, B είναι όμοιοι.
b. Αν $AB = BA$, τότε ο $\varphi(A+B)$ είναι διαγωνίσιμος για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Άσκηση 6.36. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = x^2(x-1)(x-2)$. Δείξτε ότι αν $AX = AY = 0$, όπου $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, τότε $A^3 = 3A^2 - 2A$.

Άσκηση 6.37. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ με $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ και $\chi_B(x) = (x-3)^4(x-4)^2$. Δείξτε ότι αν $V_A(1) \subseteq V_B(3)$ και $V_A(2) \subseteq V_B(4)$, τότε $AB = BA$.

Άσκηση 6.38. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = BA$, $A^{1821} = B^{1821} = \mathbb{I}_n$. Τότε $A + B + \mathbb{I}_n$ είναι διαγωνίσιμος και αντιστρέψιμος.

Άσκηση 6.39. Δείξτε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν υπάρχουν $a_i \in \mathbb{F}$ και $P_i \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $A = a_1 P_1 + \dots + a_k P_k$, $P_i^2 = P_i$, $P_i P_j = P_j P_i$ για κάθε i, j .

Άσκηση 6.40. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Δείξτε ότι $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$ ή $m_{AB}(x) = x m_{BA}(x)$ ή $m_{BA}(x) = x m_{AB}(x)$.

Άσκηση 6.41 (Επαναληπτική άσκηση κατανόησης). Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

- $A^m = 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο $m \Leftrightarrow A^n = 0$.
- A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow m_A(0) \neq 0$.
- Αν $A^2 = 4A$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.
- Αν $B \in \mathbb{F}^{2n \times 2n}$, $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Τότε $m_B(x) = m_A(x)$.
- Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΤΟ ΣΥΝΗΘΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΟ $\mathbb{R}^n$ ΚΑΙ $\mathbb{C}^n$

7.1 Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 7.1.1. Η απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

όπου $u = (u_1, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, \dots, v_n)$, λέγεται το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** του $\mathbb{R}^n$.

- Αν $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, το **μήκος** του u είναι:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

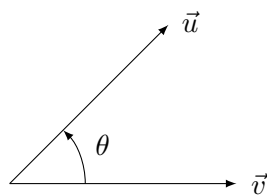
- Τα u, v λέγονται **κάθετα** (ορθογώνια) αν $\langle u, v \rangle = 0$.

Παρατήρηση 7.1.1. Για $n = 2$, αποδεικνύεται ότι:

$$\cos \vartheta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|},$$

όπου ϑ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων u και v . Επομένως, $\cos \vartheta = 0$ αν και μόνο αν

$$\langle u, v \rangle = 0.$$



Παράδειγμα 7.1.1. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^3$ με $u = (1, 1, 2)$ και $v = (-1, -1, 1)$. Τότε:

$$\langle u, v \rangle = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0,$$

δηλαδή τα u, v είναι κάθετα.

Ιδιότητες 7.1.1. Για οποιαδήποτε διανύσματα $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

- i. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
- ii. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$,
- iii. $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$,
- iv. $\langle u, av \rangle = a\langle u, v \rangle$,
- v. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
- vi. $\langle u, u \rangle \geq 0$ και $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων είναι απλή άσκηση και αφήνεται στον αναγνώστη (ναι, σε σένα). □

Παράδειγμα 7.1.2. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$ δύο κάθετα διανύσματα. Να αποδειχθούν τα εξής:

- i. $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$,
- ii. Αν $|u| = |v|$, τότε τα διανύσματα $u + v$ και $u - v$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη. i. Υπολογίζουμε:

$$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Εφόσον $u \perp v \Rightarrow \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = 0$, επομένως:

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

ii. Υπολογίζουμε:

$$\langle u + v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle.$$

Αφού $u \perp v$ και $|u| = |v|$, προκύπτει:

$$\langle u + v, u - v \rangle = |u|^2 - |v|^2 = 0.$$

Άρα $u + v$ και $u - v$ είναι κάθετα.

□

Υπενθύμιση 7.1.1. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

- Κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά ως $z = a + bi$, με $a, b \in \mathbb{R}$.
- Ο συζυγής του $z = a + bi$ είναι $\bar{z} = a - bi$.
- Το μέτρο του z είναι $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Επιπλέον ιδιότητες:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Ορισμός 7.1.2. Το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$ είναι η απεικόνιση:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle u, v \rangle = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \cdots + u_n \bar{v}_n,$$

όπου $u = (u_1, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, \dots, v_n)$.

- Το μήκος του u είναι $|u| = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
- Τα u, v λέγονται **κάθετα** αν $\langle u, v \rangle = 0$.

Παράδειγμα 7.1.3. Αν $u = (1, i)$ και $v = (-1, i)$, τότε:

$$\langle u, u \rangle = 1 \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{i} = 1 + 1 = 2, \quad \langle u, v \rangle = 1 \cdot (-1) + i \cdot \bar{i} = -1 + 1 = 0.$$

Άρα τα διανύσματα u, v είναι κάθετα.

Ιδιότητες 7.1.2. Για οποιαδήποτε διανύσματα $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ και $a \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα παρακάτω:

- i. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- ii. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
- iii. $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$
- iv. $\langle u, av \rangle = \bar{a}\langle u, v \rangle$
- v. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- vi. $\langle u, u \rangle \geq 0$ και $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Απόδειξη. Ενδεικτικά θα αποδείξουμε την ιδιότητα iv.

Έστω $u = (u_1, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, \dots, v_n)$ διανύσματα στο $\mathbb{C}^n$. Τότε:

$$av = (av_1, \dots, av_n),$$

και:

$$\langle u, av \rangle = u_1 \overline{av_1} + \dots + u_n \overline{av_n} = \bar{a}(u_1 \overline{v_1} + \dots + u_n \overline{v_n}) = \bar{a}\langle u, v \rangle.$$

□

7.2 Ορθοκανονικές Βάσεις

7.2.1 Ορθοκανονικές βάσεις και μέθοδος Gram–Schmidt

Ορισμός 7.2.1. Έστω $V \subseteq \mathbb{F}^n$. Μια βάση $\{v_1, \dots, v_m\}$ του V λέγεται **ορθοκανονική** αν ισχύουν:

- i. $|v_i| = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, m$
- ii. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ για κάθε $i \neq j$

Παράδειγμα 7.2.1. Για $V = \mathbb{R}^2$, η συνήθης βάση $\hat{e} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ είναι ορθοκανονική. Ομοίως η βάση

$$\left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ (δείξτε γιατί).

Τα παραδείγματα αυτά μπορούν να γενικευτούν ως εξής:

Για κάθε γωνία φ , τα διανύσματα $u = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ και $v = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

Πράγματι:

$$|u| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \quad |v| = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = 1,$$

και:

$$\langle u, v \rangle = \cos \varphi \cdot (-\sin \varphi) + \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0.$$

Παρατήρηση 7.2.1. Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ορθοκανονική βάση του V και $v \in V$. Τότε υπάρχουν μοναδικά $a_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, \dots, m$ με

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

Ισχύει ότι

$$a_i = \langle v, v_i \rangle.$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\langle v, v_i \rangle = \sum_{j=1}^m a_j \langle v_j, v_i \rangle = a_i.$$

Πρόταση 7.2.1. Κάθε μη μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη. Έστω $V \leq \mathbb{R}^2$. Από θεώρημα ύπαρξης βάσης γνωρίζουμε ότι υπάρχει βάση $\{u_1, u_2\}$ του V . Ορίζοντας

$$v_1 = u_1$$

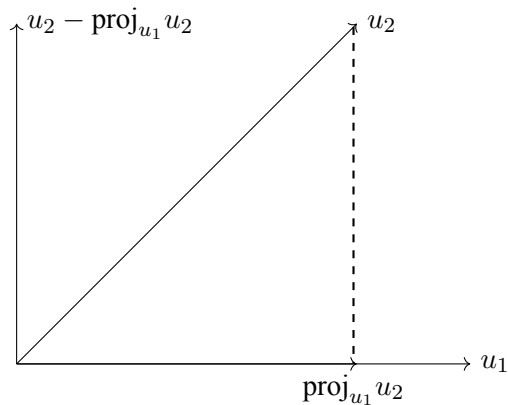
και

$$v_2 = u_2 - \text{proj}_{u_1} u_2$$

όπου $\text{proj}_{u_1} u_2$ η προβολή του u_2 στο u_1 , προκύπτει ότι v_1, v_2 είναι κάθετα και μάλιστα

$$\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|} \right\}$$

είναι ορθοκανονική βάση του V . □



Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt και θα δούμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται σε κάθε υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$.

Μέθοδος Ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt

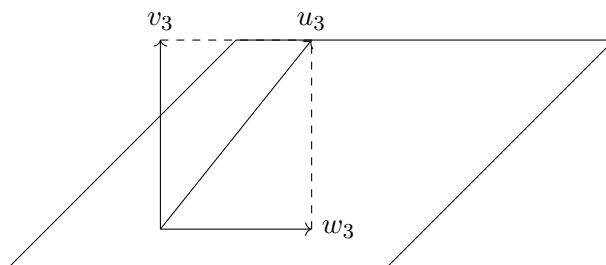
Θα περιγράψουμε αρχικά τη μέθοδο για $n = 3$. Έστω $V \leq \mathbb{F}^3$ και $\{u_1, u_2, u_3\}$ βάση του V . Ορίζουμε τα εξής στοιχεία στο V :

- i. $v_1 = u_1$
- ii. $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} \cdot v_1$, όπου $\text{proj}_{v_1} u_2 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} \cdot v_1$
- iii. $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{|v_2|^2} \cdot v_2 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{|v_1|^2} \cdot v_1$, όπου οι όροι είναι οι αντίστοιχες προβολές

Τότε έχουμε ότι

$$\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|}, \frac{v_3}{|v_3|} \right\}$$

είναι **ορθοκανονική** βάση του V (δείξτε γιατί).



Εικόνα για $n = 3$.

Γενική Περίπτωση. Έστω $\{u_1, \dots, u_m\}$ βάση του V και ορίζουμε αναδρομικά $v_1, \dots, v_m$ ως εξής:

$$v_1 = u_1 \quad \text{και} \quad v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_j \rangle}{|v_j|^2} \cdot v_j, \quad \text{για κάθε } i \geq 2.$$

Τότε:

$$\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \dots, \frac{v_m}{|v_m|} \right\}$$

είναι **ορθοκανονική** βάση του V .

Θεώρημα 7.2.1. Κάθε μη μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$ έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη. Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Από το θεώρημα ύπαρξης βάσης υπάρχει βάση $\{u_1, \dots, u_m\}$ του V . Τώρα εφαρμόζουμε σε αυτή τη μέθοδο Gram-Schmidt και προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

Παράδειγμα 7.2.2. Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Απόδειξη. Πρώτα βρίσκουμε μια βάση του V :

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle. \end{aligned}$$

Άρα $\{u_1, u_2\}$ είναι βάση του V , με $u_1 = (1, 0, -1)$ και $u_2 = (0, 1, -1)$. Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt:

$$v_1 = u_1 = (1, 0, -1), \quad \text{και} \quad v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{|v_1|^2} \cdot v_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

Τελικά, η ορθοκανονική βάση είναι:

$$\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|} \right\}, \quad \text{όπου} \quad \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \quad \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1).$$

$\square$

Παράδειγμα 7.2.3. Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του $V = \langle a, b, c \rangle$, όπου

$$a = (1, 1, 1, 1), \quad b = (1, 1, 1, -1) \quad \text{και} \quad c = (3, 3, 3, -1).$$

Απόδειξη. Για την εύρεση βάσης του V θα εφαρμόσουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα των a, b, c :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε πως $\{u_1, u_2\}$ είναι βάση του V , όπου $u_1 = (1, 1, 1, 0)$ και $u_2 = (0, 0, 0, 1)$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ήδη ότι $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, άρα δεν χρειάζεται εφαρμογή της Gram-Schmidt. Τότε $v_1 = u_1$ και $v_2 = u_2$, και έχουμε πως:

$$\frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0), \quad \frac{v_2}{|v_2|} = (0, 0, 0, 1)$$

είναι ορθοκανονική βάση του V . □

7.2.2 Ορθογώνιο συμπλήρωμα υπόχωρου του $\mathbb{F}^n$

Ορισμός 7.2.2. Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V είναι το σύνολο

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{F}^n \mid \langle u, v \rangle = 0, \quad \text{για κάθε } v \in V\}.$$

Πρόταση 7.2.2. Το $V^\perp$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$.

Απόδειξη. Αρχικά, $V^\perp \neq \emptyset$, αφού $O_{\mathbb{F}^n} \in V^\perp$. Έστω $u_1, u_2 \in V^\perp$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle = 0$$

για κάθε $v \in V$. Τότε:

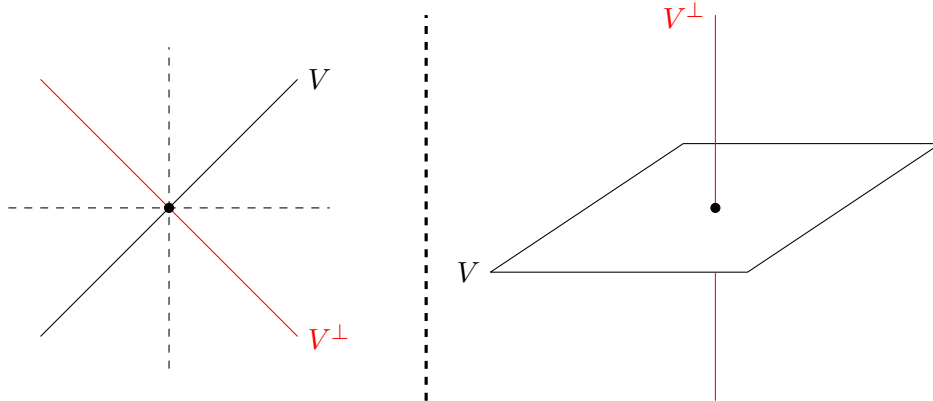
$$\langle u_1 - u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle - \langle u_2, v \rangle = 0,$$

άρα $u_1 - u_2 \in V^\perp$. Επίσης, αν $u \in V^\perp$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε:

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = 0,$$

άρα $\lambda u \in V^\perp$. □

Παράδειγμα 7.2.4.



Πρόταση 7.2.3. Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i. $\mathbb{F}^n = V \oplus V^\perp$,
- ii. $\dim V^\perp = n - \dim V$,
- iii. Αν $V \leq U$, τότε $U^\perp \leq V^\perp$,
- iv. $(V^\perp)^\perp = V$.

Απόδειξη. i. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{F}^n = V + V^\perp$ και ότι $V \cap V^\perp = \{0\}$. Από το Θεώρημα 7.2.1, υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{v_1, \dots, v_m\}$ του V (αν $V = \{0\}$, το ζητούμενο είναι άμεσο).

Έστω $w \in \mathbb{F}^n$. Θεωρούμε $w = v + (w - v)$, όπου $v = \sum_{i=1}^m \langle w, v_i \rangle \cdot v_i \in V$. Τότε $w - v \in V^\perp$, αφού:

$$\langle w - v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \langle v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \sum_{t=1}^m \langle w, v_t \rangle \langle v_t, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle - \langle w, v_i \rangle = 0.$$

Άρα $w - v \in V^\perp$. Τέλος, αν $v \in V \cap V^\perp$, τότε $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$, επομένως $V \cap V^\perp = \{0\}$.

- ii. Έπεται άμεσα από το (i), αφού $n = \dim(V \oplus V^\perp) = \dim V + \dim V^\perp$.
- iii. Έπεται άμεσα από τον ορισμό. Αν $w \in \mathbb{F}^n$ με $\langle w, u \rangle = 0$ για κάθε $u \in U$, τότε $\langle w, v \rangle = 0$ για κάθε $v \in V$, άρα $w \in V^\perp$.

- iv. Αφού για κάθε $v \in V$ έχουμε $\langle v, u \rangle = 0$ για κάθε $u \in V^\perp$, έχουμε ότι $V \subseteq (V^\perp)^\perp$.
Επίσης:

$$\dim(V^\perp)^\perp = n - \dim V^\perp = n - (n - \dim V) = \dim V,$$

άρα προκύπτει ότι $(V^\perp)^\perp = V$.

□

Τρόπος εύρεσης του $V^\perp$

Πρόταση 7.2.4 (Επέκταση ορθοκανονικής βάσης). Έστω $V \leq \mathbb{F}^n$. Από το Θεώρημα 7.2.1 υπάρχει ορθοκανονική βάση του V , $\{v_1, \dots, v_m\}$. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^n$ της μορφής $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$.

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \dots, v_m\}$ ορθοκανονική βάση του V . Από το θεώρημα επέκτασης βάσης προκύπτει ότι

$$\{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k\}$$

είναι μία βάση του $\mathbb{F}^n$. Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη βάση αυτή, και προκύπτει η ορθοκανονική βάση

$$\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

του $\mathbb{F}^n$.

□

Με τους παραπάνω συμβολισμούς παρατηρούμε ότι $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του V και $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $V^\perp$, από την Πρόταση 7.2.4.

Συνοπτικά, ένας τρόπος εύρεσης μίας ορθοκανονικής βάσης του $V^\perp$ είναι ο εξής:

- i. Θεωρούμε $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ μία βάση του V .
- ii. Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη βάση B , και προκύπτει η

$$B' = \{v_1, \dots, v_m\}$$

μία ορθοκανονική βάση του V .

- iii. Επεκτείνουμε την B' στη

$$B'' = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_k\},$$

μία βάση του $\mathbb{F}^n$.

- iv. Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη βάση B'' , και προκύπτει $\{v_1, \dots, v_n\}$, μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^n$. Τότε το σύνολο

$$W = \{v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

είναι ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

7.3 Ερμιτιανοί και μοναδιαίοι πίνακες

7.3.1 Ο πίνακας A^* , σύννηθες εσωτερικό γινόμενο και γινόμενο πινάκων

Ορισμός 7.3.1. Έστω πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ο πίνακας

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

ονομάζεται **συζυγής** πίνακας του A και ο

$$A^* = (\overline{A})^t$$

ο **αναστροφοσυζυγής** πίνακας του A .

Παράδειγμα 7.3.1. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 4 \\ 5+2i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Τότε:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2+i & 4 \\ 5-2i & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2+i & 5-2i \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θα θεωρούμε συχνά το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται σε στήλες, δηλαδή $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{n \times 1} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{C}$. Αν

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times 1},$$

τότε:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

Παρατηρούμε ότι $\langle X, Y \rangle = X^t \cdot \overline{Y}$.

Λήμμα 7.3.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν:

- i. Για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, ισχύει $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^*Y \rangle$.
- ii. Αν $\langle AX, Y \rangle = 0$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, τότε $A = 0$.

Απόδειξη. i. Έχουμε:

$$\langle AX, Y \rangle = (AX)^t \cdot \bar{Y}.$$

Επίσης:

$$\langle X, A^*Y \rangle = X^t \cdot \overline{A^*Y} = X^t \cdot A^t \cdot \bar{Y} = (AX)^t \cdot \bar{Y}.$$

Άρα τα δύο είναι ίσα.

ii. Έστω $X = E_i$ και $Y = E_j$, όπου E_k είναι η k -οστή μοναδιαία στήλη. Τότε:

$$\langle AX, Y \rangle = \langle AE_i, E_j \rangle = a_{ji}.$$

Αφού αυτό είναι μηδέν για κάθε i, j , συμπεραίνουμε ότι όλα τα στοιχεία του A είναι μηδενικά, άρα $A = 0$.

□

7.3.2 Ερμιτιανοί Πίνακες

Ορισμός 7.3.2. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λέγεται **Ερμιτιανός** αν $A^* = A$.

Παρατήρηση 7.3.1. i. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν είναι συμμετρικός.

ii. Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$ και $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ για κάθε $i \neq j$.

Παράδειγμα 7.3.2. i. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 - 5i \\ 4 + 5i & 6 \end{pmatrix}$$

είναι Ερμιτιανός, αφού

$$A^* = (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 - 5i \\ 4 + 5i & 6 \end{pmatrix} = A.$$

ii. Ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 - 3i \\ 4 + 5i & 6 \end{pmatrix}$$

δεν είναι Ερμιτιανός, αφού

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 - 5i \\ 4 + 3i & 6 \end{pmatrix} \neq B.$$

Ιδιότητες 7.3.1. Έστω Ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ισχύουν τα εξής:

- i. Κάθε ιδιοτιμή του A είναι πραγματικός αριθμός.
- ii. Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη. i. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A και X αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $AX = \lambda X$ με $X \neq 0$. Τότε:

$$\langle AX, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle = \lambda \langle X, X \rangle.$$

Από το Λήμμα 7.3.1, έχουμε:

$$\langle AX, X \rangle = \langle X, A^* X \rangle = \langle X, AX \rangle = \langle X, \lambda X \rangle = \bar{\lambda} \langle X, X \rangle.$$

Άρα:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle X, X \rangle = 0.$$

Εφόσον $X \neq 0$, τότε $\langle X, X \rangle \neq 0$, και επομένως $\lambda = \bar{\lambda}$, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ii. Έστω λ, μ ιδιοτιμές του A με $\lambda \neq \mu$ και X, Y αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή:

$$AX = \lambda X, \quad AY = \mu Y.$$

Τότε:

$$\langle AX, Y \rangle = \langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle,$$

και επίσης:

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^* Y \rangle = \langle X, AY \rangle = \langle X, \mu Y \rangle = \bar{\mu} \langle X, Y \rangle.$$

Από το (i), ξέρουμε ότι $\mu \in \mathbb{R}$, άρα $\bar{\mu} = \mu$. Τότε:

$$(\lambda - \mu) \langle X, Y \rangle = 0.$$

Αφού $\lambda \neq \mu$, έπεται $\langle X, Y \rangle = 0$, δηλαδή τα X, Y είναι κάθετα.

□

Αφήνεται στον αναγνώστη να συγκρίνει την Ιδιότητα 7.3.1 (ii) με τη γνωστή ιδιότητα ενός αυθαίρετου πίνακα, σύμφωνα με την οποία σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

7.3.3 Μοναδιαίοι Πίνακες

Ορισμός 7.3.3. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λέγεται **μοναδιαίος** αν $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$.

Παρατήρηση 7.3.2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- i. Ο A είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^*$.
- ii. Ο A είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν $A \cdot A^* = I_n \Leftrightarrow A^* \cdot A = I_n$.
- iii. Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^t$.

Παράδειγμα 7.3.3. i. Ο ταυτοτικός πίνακας I_n είναι μοναδιαίος πίνακας.

ii. Ο πίνακας $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος, αφού $A_\varphi A_\varphi^t = I_2$. Επίσης παρατηρήστε ότι γεωμετρικά ο πίνακας A_φ παριστάνει τη στροφή του επιπέδου κατά γωνία φ μοιρών.

iii. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος, αφού ισχύει ότι $A = A^t$ και $A \cdot A^t = I_3$.

iv. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι μοναδιαίος, αφού $A \cdot A^t = 5I_2$. Παρατηρήστε όμως ότι ο πίνακας $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot A$ είναι μοναδιαίος.

Πρόταση 7.3.1. Έστω μοναδιαίοι πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.

- i. $|\det A| = 1$,
- ii. οι πίνακες AB και AB^{-1} είναι μοναδιαίοι.
- iii. Ο πίνακας $\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & A \end{array} \right) \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$ είναι μοναδιαίος.

Απόδειξη. i. Αφού ο A είναι μοναδιαίος έχουμε την εξής σχέση $A \cdot A^* = I_n$, επομένως ισχύει ότι

$$\det A \cdot \det A^* = \det A \cdot \det \overline{A} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2 = 1 \Leftrightarrow |\det A| = 1.$$

ii. Αφού οι πίνακες A, B είναι μοναδιαίοι, έχουμε ότι

$$(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AA^* = I_n.$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι

$$(AB)^*(AB) = I_n.$$

Συνεπώς ο πίνακας AB είναι μοναδιαίος. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει

$$B^*B = I_n \Leftrightarrow B^{-1}(B^{-1})^* = I_n,$$

άρα ο πίνακας B^{-1} είναι μοναδιαίος και εφαρμόζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα έχουμε ότι AB^{-1} είναι μοναδιαίος.

iii. Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα παρατηρώντας ότι

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & A \end{array} \right)^* = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & A^* \end{array} \right).$$

□

Θεώρημα 7.3.1 (Χαρακτηρισμός μοναδιαίων πινάκων). Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- i. Ο A είναι μοναδιαίος.
- ii. $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$, για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$.
- iii. Οι στήλες του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n \times 1}$.
- iv. Οι γραμμές του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n \times 1}$.
- v. $|AX| = |X|$, για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$.

Απόδειξη. • i. $\Rightarrow$ ii. Ο A είναι μοναδιαίος, άρα ισχύει ότι $A^* \cdot A = I_n$. Έτσι έχουμε ότι

$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, A^* \cdot AY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

- ii. $\Rightarrow$ iii. Για $X = E_i$ και $Y = E_j$ έχουμε ότι $\langle AE_i, AE_j \rangle = \langle E_i, E_j \rangle$. Άρα προκύπτει ότι

$$\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

δηλαδή οι στήλες του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n \times 1}$.

- iii. $\Rightarrow$ iv. Ισχύει ότι $\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$, όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Άρα από τον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε ότι $A^t \cdot \bar{A} = I_n$, δηλαδή $A^* \cdot A = I_n$, άρα $\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$, όπου A_i είναι η i -γραμμή του A .

- iv. $\Rightarrow$ i. Είναι άμεσο ότι αν $\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$, τότε ισχύει ότι $A \cdot A^* = I_n$.
- ii. $\Rightarrow$ v. Το ζητούμενο είναι άμεσο εφαρμόζοντας τη σχέση για $X = Y$.
- v. $\Rightarrow$ ii. Έχουμε ότι $|AX| = |X|$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Αν $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ τυχαία, τότε ισχύει ότι

$$|A(X + Y)| = |X + Y|$$

Έχουμε λοιπόν διαδοχικά:

$$|A(X + Y)|^2 = |X + Y|^2$$

$$\iff \langle A(X + Y), A(X + Y) \rangle = \langle X + Y, X + Y \rangle$$

$$\iff |AX|^2 + 2\langle AX, AY \rangle + |AY|^2 = |X|^2 + 2\langle X, Y \rangle + |Y|^2$$

$$\iff \langle AX, AY \rangle + \langle AY, AX \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle \quad (\alpha)$$

Αντικαθιστούμε Y με iY , τότε:

$$\langle AX, iAY \rangle + \langle iAY, AX \rangle = \langle X, iY \rangle + \langle iY, X \rangle$$

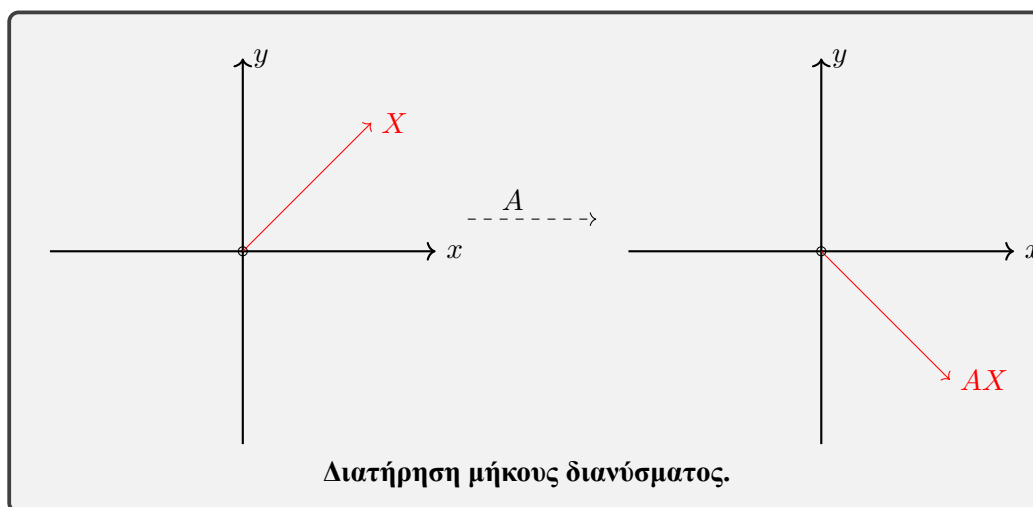
$$\iff -i\langle AX, AY \rangle + i\langle AY, AX \rangle = -i\langle X, Y \rangle + i\langle Y, X \rangle \quad (\beta)$$

Προσθέτοντας τις (α) και $i \cdot (\beta)$, έπεται το ζητούμενο.

□

Αφού αποδείξαμε το θεώρημα, ας κάνουμε κάποια σχόλια σχετικά με αυτό.

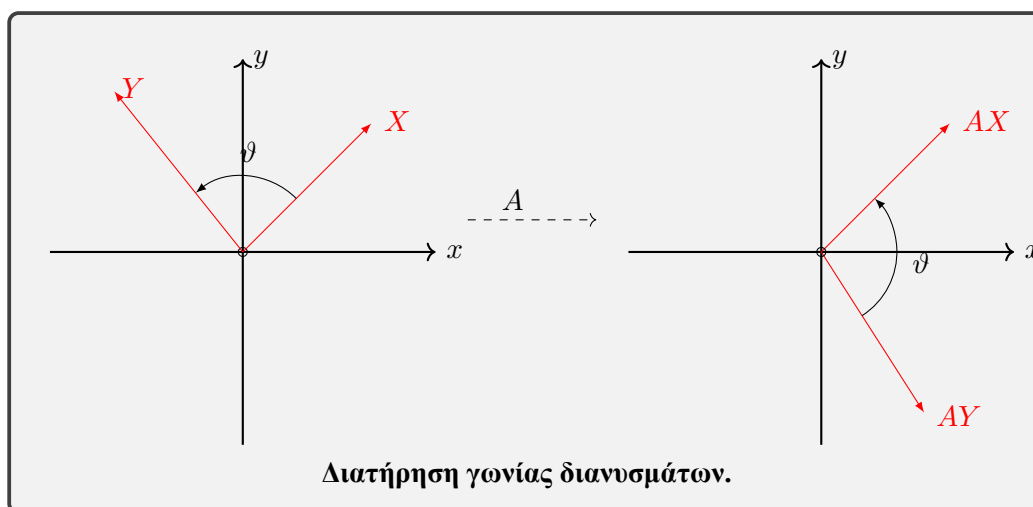
- Η ιδιότητα v. του θεωρήματος εκφράζει ότι ένας μοναδιαίος πίνακας διατηρεί το μήκος κάθε διανύσματος.



- ii. Η ιδιότητα ii. του θεωρήματος δείχνει ότι διατηρείται και η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων: αν ορίζεται

$$\cos \vartheta = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X| \cdot |Y|}$$

τότε ισχύει ότι $\cos \vartheta$ δεν αλλάζει με εφαρμογή μοναδιαίου πίνακα.



Πόρισμα 7.3.1. Κάθε ιδιοτιμή μοναδιαίου πίνακα έχει μέτρο 1.

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος πίνακας. Το ζητούμενο είναι άμεσο κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 7.3.1 ν. για ένα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ του πίνακα A . $\square$

7.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 7.

Ομάδα Α' : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13

Ομάδα Β' : 6, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 19

Ομάδα Γ' : 15

Άσκηση 7.1. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$.

- Αν $\langle u, v \rangle = 0$, τότε $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$. Όταν $n = 2$, η ισότητα εκφράζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Αν $|u| = |v|$, τότε τα $u+v, u-v$ είναι κάθετα. Όταν $n = 2$, η ισότητα αυτή λέει ότι οι διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής όταν $n = 2$.

Άσκηση 7.2. a. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το διάνυσμα $u = 1/\sqrt{2}(1, 0, 1)$.

- Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα διανύσματα $u_1 = 1/\sqrt{5}(1, 0, 2)$ και $u_2 = (0, 1, 0)$.

Άσκηση 7.3. Έστω $\{u_1, \dots, u_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$ και V ο υπόχωρος που παράγεται από τα $u_1, \dots, u_k$, όπου $1 \leq k < n$. Δείξτε ότι μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp$ είναι το σύνολο $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$.

Άσκηση 7.4. Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$v_1 = (1, 1, -1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 3, -1), \quad \text{και} \quad v_3 = (4, 7, 8, -4).$$

Αφού βρείτε μια βάση του V , βρείτε μια ορθοκανονική βάση του V και μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

Άσκηση 7.5. Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\} \quad \text{και} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Βρείτε μια ορθοκανονική βάση για καθένα από τους υπόχωρους $V, V^\perp, V \cap W, (V \cap W)^\perp$.

Άσκηση 7.6. Έστω $W_1, W_2 \leq \mathbb{F}^n$. Δείξτε ότι $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ και $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Άσκηση 7.7. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Δείξτε τις ακόλουθες σχέσεις.

- $(\bar{A})^t = \overline{A^t}$.
- $\det A^* = \det \bar{A} = \overline{\det A}$.
- $(A^*)^* = A$.
- $(\lambda A^*) = \bar{\lambda} A^*$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- $(AB)^* = B^* A^*$.
- Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Άσκηση 7.8. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Αν $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\phi(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, με $\bar{\phi}(x)$ συμβολίζουμε το πολυώνυμο $\bar{\phi}(x) = \overline{a_n} x^n + \cdots + \overline{a_1} x + \overline{a_0}$. Δείξτε τις ακόλουθες προτάσεις.

- $\chi_{A^*}(x) = \overline{\chi_A}(x)$.
- $m_{A^*}(x) = \overline{m_A}(x)$.
- Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^* .

Άσκηση 7.9. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $A^* A = -A$. Δείξτε ότι ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα της μορφής $\text{diag}(0, \dots, 0, -1, \dots, -1)$ και ότι $\text{rank} A + \text{rank}(A + I_n) = n$.

Άσκηση 7.10. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίοι πίνακες. Δείξτε τις ακόλουθες προτάσεις.

- Οι $\bar{A}, A^t, A^{-1}$ είναι μοναδιαίοι.
- Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A , τότε $|\lambda| = 1$ και το $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ είναι ιδιοτιμή του A^* .
- $|\det A| = 1$
- Οι AB και AB^{-1} είναι μοναδιαίοι.

Άσκηση 7.11. Να βρεθεί μοναδιαίος πίνακας με πρώτη γραμμή τη $(1/\sqrt{10} \quad 0 \quad 3/\sqrt{10})$.

Άσκηση 7.12. Έστω $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος πίνακας τέτοιος ώστε $\det(U - I_n) \neq 0$. Τότε ο $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ που από $iH = (U + I_n)(U - I_n)^{-1}$ είναι Ερμιτιανός.

Άσκηση 7.13. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Δείξτε ότι αν ισχύουν οποιεσδήποτε από τις επόμενες προτάσεις, τότε ισχύει και η τρίτη.

- a. Ο A είναι Ερμιτιανός.
- b. Ο A είναι μοναδιαίος.
- c. $A^2 = I_n$.

Άσκηση 7.14. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας μοναδιαίος πίνακας. Δείξτε τα εξής.

- a. Αν $\det A = 1$ και n περιττός, τότε το 1 είναι ιδιοτιμή του A .
- b. Αν $\det A = -1$ και n άρτιος, τότε το 1 είναι ιδιοτιμή του A .
- c. Αν $\det A = -1$, τότε το -1 είναι ιδιοτιμή του A .

Άσκηση 7.15. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μοναδιαίοι πίνακες τέτοιο ώστε $\det A = -\det B$. Τότε

$$\det(A + B) = 0.$$

Άσκηση 7.16. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A^* = -A$. Δείξτε τα εξής.

- a. Κάθε ιδιοτιμή του A είναι της μορφής $i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- b. Ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος και $\det(A + I_n) > 1$.
- c. Ο πίνακας $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ είναι μοναδιαίος.

Άσκηση 7.17. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Δείξτε ότι αν $|AX| = |X|$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, τότε ο A είναι μοναδιαίος.

Άσκηση 7.18. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $\langle AX, X \rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Δείξτε ότι $A = 0$. Αληθεύει το προηγούμενο συμπέρασμα αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\langle AX, X \rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$?

Άσκηση 7.19. Αποδείξτε την άσκηση 7.17 χρησιμοποιώντας την άσκηση 7.18.

Άσκηση 7.20 (Επαναληπτική άσκηση κατανόησης). Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

- a. Αν οι $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι Ερμιτιανοί, τότε ο $A + B$ είναι Ερμιτιανός.
- b. Αν οι $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι Ερμιτιανοί, τότε ο AB είναι Ερμιτιανός.
- c. Αν οι $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι Ερμιτιανοί και $AB = BA$, τότε ο AB είναι Ερμιτιανός.
- d. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος.
- e. Αν $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι μοναδιαίοι, τότε κάθε ιδιοτιμή του AB έχει μέτρο 1.
- f. Δεν υπάρχει μοναδιαίος $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $(A - 2I_n)(A - 3I_n)(A - 4I_n) = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

8.1 Λήμμα του Schur

- Λήμμα 8.1.1 (Schur).** i. (Μιγαδική Εκδοχή) Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ υπάρχει $U_A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος με $U_A^{-1}AU_A$ να είναι άνω τριγωνικός.
- ii. (Πραγματική Εκδοχή) Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τριγωνίσιμο υπάρχει $U_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μοναδιαίος με $U_A^{-1}AU_A$ να είναι άνω τριγωνικός.

Απόδειξη. i. Η απόδειξη που ακολουθεί είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 με τη διαφοροποίηση ότι αναζητούμε μοναδιαίο πίνακα U_A .

Θα κάνουμε χρήση επαγωγής στη διάσταση του πίνακα A .

- **Βάση.** Για $n = 1$ είναι σαφές ότι το ζητούμενο ισχύει.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Υποθέτουμε τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε πίνακα διάστασης $(n - 1) \times (n - 1)$.

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, όπου γνωρίζουμε ότι είναι τριγωνίσιμος, δηλαδή το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ . Για

$$v_1 = \frac{u}{|u|}$$

γνωρίζουμε ότι υπάρχει

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n \times 1}$. Τότε υπάρχει $U_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με

$$U_1^{(i)} = v_i$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$ και μάλιστα από το Θεώρημα 7.3.1 ο U_1 είναι μοναδιαίος, ώστε

$$U_1^{-1}AU_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & O \\ \hline O & B \end{array} \right) \quad \text{με } B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $U_2 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ μοναδιαίος ώστε ο $U_2^{-1}BU_2$ να είναι άνω τριγωνικός. Θεωρούμε τον πίνακα

$$U_A = U_1 \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & U_2 \end{array} \right)$$

ο οποίος από Πρόταση 7.3.1 είναι μοναδιαίος και μάλιστα $U_A^{-1}AU_A$ είναι άνω τριγωνικός.

ii. Η απόδειξη είναι ακριβώς όμοια με την i.

□

8.2 Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα 8.2.1 (Φασματικό). i. (Μιγαδική Εκδοχή) Για κάθε Ερμιτιανό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU$ διαγώνιο.

ii. (Πραγματική Εκδοχή) Για κάθε συμμετρικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ υπάρχει $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU$ διαγώνιο.

Απόδειξη. i. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Ερμιτιανός πίνακας. Από το Λήμμα του Schur υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU = T$, όπου T είναι άνω τριγωνικός. Επειδή $A = A^*$, έχουμε:

$$UTU^{-1} = (UTU^{-1})^* = (U^{-1})^*T^*U^* = UT^*U^{-1} \Rightarrow T = T^*.$$

Αφού ο T είναι άνω τριγωνικός και ταυτόχρονα ίσος με τον συζυγομεταθετό του, είναι διαγώνιος. Επίσης, επειδή $T = \bar{T}$, είναι και πραγματικός.

ii. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την i., παρατηρώντας ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι τριγωνίσιμος στο $\mathbb{R}$, αφού είναι τριγωνίσιμος στο $\mathbb{C}$ και από τις Ιδιότητες 7.3.1 όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές.

□

Παράδειγμα 8.2.1. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Να βρεθεί μοναδιαίος πίνακας P ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ είναι βάση του } V_A(4), \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ είναι βάση του } V_A(1).$$

Από τις Ιδιότητες 7.3.1, κάθε διάνυσμα του $V_A(4)$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του $V_A(1)$, αφού ο A είναι πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Εφαρμόζοντας ξεχωριστά την διαδικασία Gram–Schmidt σε κάθε ιδιόχωρο, προκύπτουν οι εξής ορθοκανονικές βάσεις:

- Για $V_A(4)$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Για $V_A(1)$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Άρα θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

ο P είναι μοναδιαίος και ισχύει:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(4, 1, 1).$$

□

8.3 Κανονικοί Πίνακες

Ερώτημα 8.3.1. Για ποίους πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ώστε ο $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος? Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα ότι οι Ερμιτιανοί έχουν αυτή την ιδιότητα. Υπάρχουν όμως άλλοι?

Παρατήρηση 8.3.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με την παραπάνω ιδιότητα, δηλαδή υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ώστε $U^{-1}AU = \Delta$ διαγώνιος. Τότε έχουμε ότι $A = U\Delta U^{-1}$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$AA^* = U\Delta U^{-1} \cdot (U\Delta U^{-1})^* = U\Delta U^{-1}(U^{-1})^* \Delta^* U^* = U\Delta U^{-1}U\Delta^* U^{-1} = U\Delta\Delta^* U^{-1}.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $A^*A = U\Delta^*\Delta U^{-1}$. Όμως ο Δ είναι διαγώνιος, άρα έχουμε ότι $\Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta$. Έτσι συμπεραίνουμε πως $AA^* = A^*A$. Στη συνέχεια θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Λήμμα 8.3.1. Αν $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ άνω τριγωνικός και $TT^* = T^*T$, τότε ο T είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. Το ζητούμενο θα αποδειχθεί με χρήση επαγωγής στη διάσταση του πίνακα T .

- **Βάση.** Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

με $T_1 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ άνω τριγωνικός. Έχουμε ότι

$$TT^* = T^*T,$$

ισοδύναμα :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} \overline{t_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \overline{t_{12}} & & & \\ \vdots & & T_1^* & \\ \overline{t_{1n}} & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \overline{t_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \overline{t_{12}} & & & \\ \vdots & & T_1^* & \\ \overline{t_{1n}} & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Άρα :

$$|t_{11}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2 = |t_{11}|^2,$$

δηλαδή

$$t_{12} = \cdots = t_{1n} = 0.$$

Έτσι προκύπτει ότι $T_1T_1^* = T_1^*T_1$, δηλαδή από επαγωγική υπόθεση ο T_1 είναι διαγώνιος. Αφού ο T_1 είναι διαγώνιος, τότε είναι σαφές ότι ο πίνακας T είναι διαγώνιος.

□

Θεώρημα 8.3.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- i. Υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος πίνακας ώστε ο $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος.
- ii. Ισχύει $AA^* = A^*A$.

Απόδειξη. • i. $\Rightarrow$ ii. Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στην Παρατήρηση 8.3.1.

- ii. $\Rightarrow$ i. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $AA^* = A^*A$. Από το Λήμμα του Schur υπάρχει μοναδιαίος U , ώστε $A = UTU^{-1}$ με T άνω τριγωνικός. Από τη σχέση $AA^* = A^*A$ προκύπτει ότι $TT^* = T^*T$, και επειδή ο T είναι άνω τριγωνικός, από το Λήμμα 8.3.1 συμπεραίνουμε ότι T είναι διαγώνιος.

□

Ορισμός 8.3.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λέγεται **κανονικός** αν $AA^* = A^*A$.

Παράδειγμα 8.3.1. i. Κάθε διαγώνιος πίνακας είναι κανονικός.

ii. Κάθε Ερμιτιανός πίνακας είναι κανονικός.

iii. Κάθε μοναδιαίος πίνακας είναι κανονικός.

iv. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι κανονικός, αφού

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A^*A.$$

Θεώρημα 8.3.2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- i. Ο A είναι κανονικός.
- ii. Υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος με $U^{-1}AU = \Delta$ να είναι διαγώνιος.
- iii. Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A .

Απόδειξη. • i. $\leftrightarrow$ ii. Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 8.3.1.

- ii. $\Rightarrow$ iii. Γνωρίζουμε ότι κάθε στήλη του U είναι ιδιοδιάνυσμα του A . Αυτές αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n \times 1}$, αφού ο πίνακας U είναι μοναδιαίος.

- iii. $\Rightarrow$ ii. Η απόδειξη του ζητούμενου αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

□

Λήμμα 8.3.2. Έστω πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $\langle BX, X \rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Τότε $B = 0$.

Απόδειξη. Αν $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, τότε υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής:

$$\langle B(X + Y), X + Y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle BX, X \rangle + \langle BX, Y \rangle + \langle BY, X \rangle + \langle BY, Y \rangle = 0$$

Άρα:

$$\langle BX, Y \rangle + \langle BY, X \rangle = 0 \quad (8.1)$$

Βάζοντας το iY στη θέση του Y προκύπτει η σχέση:

$$i\langle BX, Y \rangle + i\langle BY, X \rangle = 0 \quad (8.2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.1) και (8.2), καταλήγουμε ότι $\langle BX, Y \rangle = 0$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Από το Λήμμα 8.3.1 έπεται ότι $B = 0$. □

Προσοχή! Το Λήμμα 8.3.2 δεν αληθεύει γενικά αν $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\langle BX, X \rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Για παράδειγμα, ο πίνακας στροφής κατά 90° ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, αλλά $B \neq 0$.

Λήμμα 8.3.3. Έστω $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ άνω τριγωνικός τέτοιος ώστε κάθε ιδιοδιάνυσμα του T να είναι και ιδιοδιάνυσμα του T^* . Τότε ο T είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. Το ζητούμενο θα αποδειχθεί με επαγωγή ως προς τη διάσταση n του πίνακα T .

- Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω T άνω τριγωνικός, όπου κάθε ιδιοδιάνυσμά του είναι και ιδιοδιάνυσμα του T^* . Ο πίνακας T έχει την εξής μορφή

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

όπου $T_1 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ άνω τριγωνικός και

$$T^* = \left(\begin{array}{c|ccc} \overline{t_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{t_{12}} & & & \\ \vdots & & T_1^* & \\ \overline{t_{1n}} & & & \end{array} \right).$$

Αφού το E_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του T , από υπόθεση το E_1 είναι και ιδιοδιάνυσμα του T^* . Άρα,

$$(T^*)^{(1)} = \lambda E_1$$

συνεπώς :

$$\overline{t_{12}} = \cdots = \overline{t_{1n}} = 0.$$

Τέλος, αν $X' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του T_1 , τότε

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του T , άρα και ιδιοδιάνυσμα του T^* . Έτσι συμπεραίνουμε ότι X' είναι ιδιοδιάνυσμα του $(T_1)^*$ και από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι ο T_1 είναι διαγώνιος.

□

Θεώρημα 8.3.3. Έστω πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- i. Ο πίνακας A είναι κανονικός.
- ii. Υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μοναδιαίος, ώστε ο πίνακας $U^{-1}AU$ να είναι διαγώνιος.
- iii. Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A .
- iv. $|AX| = |A^*X|$, για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$.
- v. $V_A(\lambda) = V_{A^*}(\overline{\lambda})$, για κάθε λ ιδιοτιμή του A .
- vi. Κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του A^* .
- vii. $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$

Απόδειξη. • Οι ισοδυναμίες i., ii., iii. έχουν αποδειχθεί στο Θεώρημα 8.3.2.

- i. $\rightarrow$ iv. Από την υπόθεση ο A είναι κανονικός, άρα $AA^* = A^*A$. Για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$:

$$\langle (A^*A - AA^*)X, X \rangle = 0$$

$$\iff \langle AX, AX \rangle = \langle A^*X, A^*X \rangle$$

$$\iff |AX| = |A^*X|$$

- iv. $\rightarrow$ i. Αν $|AX| = |A^*X|$ για κάθε X , τότε:

$$\langle (A^*A - AA^*)X, X \rangle = 0$$

Για κάθε X , από Λήμμα 8.3.2 έχουμε $A^*A = AA^*$, άρα A κανονικός.

- i. $\rightarrow$ v. Αν A είναι κανονικός, τότε και $B = A - \lambda I$ είναι κανονικός. Από την ιδιότητα iv., έχουμε:

$$|BX| = 0 \iff |B^*X| = 0 \Rightarrow V_A(\lambda) = V_{A^*}(\bar{\lambda})$$

- v. $\rightarrow$ i. Από το Λήμμα του Schur, υπάρχει U μοναδιαίος ώστε $T = U^{-1}AU$ άνω τριγωνικός. Αν UX είναι ιδιοδιάνυσμα του A , τότε X ιδιοδιάνυσμα του T , και από την υπόθεση, και του T^* . Από Λήμμα 8.3.3, ο T διαγώνιος, άρα A κανονικός.
- i. $\rightarrow$ vi. Από i. $\rightarrow$ v. και v. $\rightarrow$ vi. τετριμμένα.
- vi. $\rightarrow$ i. Από vi. $\rightarrow$ v. και v. $\rightarrow$ i. τετριμμένα.
- i. $\rightarrow$ vii. Εφόσον A κανονικός, τότε:

$$\text{Tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$$

και εφόσον διαγωνιοποιείται με μοναδιαίο μετασχηματισμό σε $U^{-1}AU = \Delta$, προκύπτει:

$$\text{Tr}(AA^*) = \text{Tr}(\Delta\Delta^*) = \sum_i |\lambda_i|^2$$

- vii. $\rightarrow$ i. Αν $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$ και $U^{-1}AU = T$ άνω τριγωνικός, τότε:

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j} |t_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 + \sum_{i \neq j} |t_{ij}|^2 \Rightarrow \sum_{i \neq j} |t_{ij}|^2 = 0 \Rightarrow T \text{ διαγώνιος}$$

Άρα A κανονικός.

□

Μετά την ολοκλήρωση της απόδειξης ας κάνουμε μερικά σχόλια σε σχέση με το Θεώρημα 8.3.3

- i. Η ιδιότητα iv. μας λέει ότι αν A είναι κανονικός, τότε ισχύει ότι $|AX| = |A^*X|$. Για $X = E_i$ έχουμε ότι $|A^{(i)}| = |A_i|$, δηλαδή η i -στήλη του A έχει το ίδιο μήκος με την i -γραμμή του A για κάθε $i = 1, \dots, n$.
- ii. Γενικά για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει ότι αν $\chi_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$, τότε $\chi_{A^*}(x) = (x - \overline{\lambda_1}) \cdots (x - \overline{\lambda_n})$. Στην περίπτωση όμως που ο A είναι κανονικός, ισχύει και ότι $V_A(\lambda) = V_{A^*}(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A .

8.4 Ασκήσεις Κεφαλαίου 8.

Ομάδα Α' : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 17, 19, 20, 21, 21, 23, 26

Ομάδα Β' : 8, 9, 10, 13, 14, 16, 18, 24, 25, 27

Ομάδα Γ' : 11, 12

Άσκηση 8.1. Εξετάστε αν υπάρχει πραγματικός μοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός, όπου $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Αν υπάρχει να βρεθεί ένας τέτοιος P .

Άσκηση 8.2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Να βρεθεί μοναδιαίος $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $P^{-1}AP$ διαγώνιο.

Άσκηση 8.3. Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με ιδιοτιμές 1, 3, 13.

a. Να βρεθεί μοναδιαίος $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $U^{-1}AU$ διαγώνιο.

b. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση με $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$, όπου $\hat{a}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι $f^{40} - 5f^9 + 3f^6 + 1_{\mathbb{R}^3} \neq 0$.

Άσκηση 8.4. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ και $S = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

a. Δείξτε ότι ο πίνακας H είναι Ερμιτιανός και $S^* = -S$.

b. Δείξτε ότι αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του H είναι ιδιοδιάνυσμα του S , τότε ο πίνακας A είναι κανονικός.

Άσκηση 8.5. Δείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2 \times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του $\begin{pmatrix} 1 & i \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ αν και μόνο αν $|a| = 1$.

Άσκηση 8.6. Δείξτε ότι αν ο A είναι κανονικός, τότε η i γραμμή του A έχει το ίδιο μήκος με την i στήλη του A για κάθε i .

Άσκηση 8.7. Να βρεθούν όλοι οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $A^m = 0$ για κάποιο m .

Άσκηση 8.8. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κανονικός πίνακας. Δείξτε τα εξής.

- a. A Ερμιτιανός $\Leftrightarrow$ κάθε ιδιοτιμή του A είναι πραγματικός αριθμός.
- b. A μοναδιαίος $\Leftrightarrow$ κάθε ιδιοτιμή του A έχει μέτρο 1.

Άσκηση 8.9. a. Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικός τέτοιος ώστε $A^k = I_n$, τότε $A^2 = I_n$.

b. Να βρεθούν όλοι οι συμμετρικοί $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A^{1821} = I_n$.

c. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι Ερμιτιανός και μοναδιαίος τέτοιος ώστε $\text{Tr}(A) = 0$, τότε ο n είναι άρτιος.

d. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι Ερμιτιανός και μοναδιαίος και έχει τουλάχιστον δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

Άσκηση 8.10. a. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ο $A + A^* - iI_n$ είναι αντιστρέψιμος.

b. Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικοί και ισχύει $AB = BA$, τότε ο $AB + iI_n$ είναι αντιστρέψιμος.

c. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- i. Κάθε ιδιοτιμή του AA^* είναι πραγματικός αριθμός και μη αρνητικός.
- ii. $\det(AA^* + I_n)$ είναι πραγματικός αριθμός και θετικός.

Άσκηση 8.11. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός, τότε $A^* = f(A)$ για κάποιο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Άσκηση 8.12. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B = AA^* - A^*A$. Δείξτε ότι αν $AB = BA$, τότε ο A είναι κανονικός.

Άσκηση 8.13. Να βρεθεί συμμετρικός $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με ιδιοτιμές $1, 1, -1$ τέτοιος ώστε ο ιδιόχωρος $V_A(1)$ να παράγεται από τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Είναι ο A μοναδικός?

Άσκηση 8.14. a. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ τέτοιος ώστε $\dim V_A(2) = \dim V_A(3) = 2$ και $\langle u, v \rangle = 0$ για κάθε $u \in V_A(2), v \in V_A(3)$. Δείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός.

b. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $AA^t = A^tA$ και $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων στο $\mathbb{R}[x]$. Δείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός.

Άσκηση 8.15. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας που δεν είναι της μορφής cI_n , $c \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $m_A(x)$ αν $(A - 2I_n)^3(A - 3I_n)^4 = 0$.

Άσκηση 8.16. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κανονικός λ_1, λ_2 οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A , τότε $V_A(\lambda_1) = V_A(\lambda_2)^\perp$.

Άσκηση 8.17. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ κανονικοί πίνακες με $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ και $\chi_B(x) = (x-3)^2(x-4)^2$. Αν $V_A(1) = V_B(3)$, δείξτε ότι $AB = BA$.

Άσκηση 8.18. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Δείξτε ότι ο A είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν $\langle AX, X \rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$.

Άσκηση 8.19. Δώστε παράδειγμα $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ έτσι ώστε υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^{3 \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A αλλά δεν υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{3 \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A .

Άσκηση 8.20. Έστω $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $(B - 1/2I_n)^3(B - iI_n)^4 = 0$.

- Δείξτε ότι αν ο B είναι Ερμιτιανός, τότε $B = 1/2I_n$.
- Δείξτε ότι αν ο B είναι μοναδιαίος, τότε $B = iI_n$.

Άσκηση 8.21. Έστω $u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ με $|u| = 1$. Θέτουμε $S = I_n - uu^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Δείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n \times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του S .
- Δείξτε ότι $Su = 0$ και $Sv = v$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ τέτοιο ώστε $\langle v, u \rangle = 0$. Στη συνέχεια βρείτε τη διάσταση κάθε ιδιόχωρου του S .
- Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία του S όταν $n = 2, 3$.

Άσκηση 8.22. Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$.

- Αληθεύει ότι για κάθε a υπάρχει μοναδιαίος $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ με $U^{-1}AU$ άνω τριγωνικό ?
- Αληθεύει ότι για $a = 1$ υπάρχει μοναδιαίος $Q \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ με $Q^{-1}AQ$ άνω τριγωνικό ?
- Να βρεθούν όλες οι τιμές του a τέτοιες ώστε υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{3 \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του A .
- Έστω $a = 0$. Να βρεθεί μοναδιαίος $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ με $U^{-1}AU = \text{diag}(1, -1, 1)$.

Άσκηση 8.23. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A και εξετάστε αν ο A είναι διαγώνιος.
- Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $B = A^{12} - 8A^7 + 5A^5 + 4I_3$.
- Να εξεταστεί αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3)$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(f : \hat{a}, \hat{a}) = A$ όπου $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τις σχέσεις $f(a_1) = 3a_1 - 6a_2$, $f(a_2) = 3a_1 - 8a_2 + 6a_3$, $f(a_3) = 5a_3$.
- Να βρεθεί (εφόσον υπάρχει) αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $P^{-1}AP$ άνω τριγωνικό.
- Να βρεθεί (εφόσον υπάρχει) μοναδιαίος $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $U^{-1}AU$ άνω τριγωνικό.

Άσκηση 8.24. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- Να βρεθεί αν υπάρχει, μοναδιαίος $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $P^{-1}AP$ άνω τριγωνικό.
- Έστω $B = A^{1821} - A^3 + I_3$. Να βρεθεί αντιστρέψιμος $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $Q^{-1}AQ$ άνω τριγωνικό.
- Αν $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με $(f : \hat{a}, \hat{a})$, να εξεταστεί αν η $f^3 - 3f - 18 \cdot 1_{\mathbb{R}_3}$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 8.25. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$L_A : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}, L_A(X) = AX.$$

Δείξτε ότι $\ker L_A = (\text{Im}(L_A))^\perp$.

Άσκηση 8.26. Έστω $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $A^*A = 4A$.

- Δείξτε ότι ο A είναι Ερμιτιανός.
- Εξετάστε αν υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{3 \times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A .
- Δείξτε ότι $\text{rank}(A) = 1$, τότε υπάρχει μοναδιαίος $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ώστε $U^{-1}AU = \text{diag}(4, 0, 0)$.
- Εξετάστε αν ισχύει $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{3 \times 1}$.

Άσκηση 8.27. Αν $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι άνω τριγωνικός τέτοιος ώστε κάθε ιδιοδιάνυσμα του είναι ιδιοδιάνυσμα του T^t , τότε ο T είναι διαγώνιος.

Άσκηση 8.28 (Επαναληπτική άσκηση κατανόησης). Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν. Σε κάθε περίπτωση δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Ερμιτιανός.

- Αν ο A είναι μοναδιαίος και κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική, τότε $A = I_n$.
- Ο $\varphi(A)$ είναι διαγωνίσιμος για κάθε $\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$.
- Αν $A^m = 0$ για κάποιο m , τότε $A = 0$.
- Αν κάθε ιδιοτιμή του A είναι μη αρνητική, τότε υπάρχει Ερμιτιανός $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $B^2 = A$.